

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI STUDI IN FISICA

DISPENSE DEL CORSO DI
FISICA TEORICA

Carlo Maria BECCHI

Dipartimento di Fisica, Università di Genova,
via Dodecaneso 33, 16146 Genova

Indice

1	INTRODUZIONE	4
1.1	Nota bibliografica	5
2	Le rappresentazioni di Schrödinger e Dirac	6
3	Seconda quantizzazione - sistemi bosonici	16
3.1	Particelle quantistiche identiche	16
3.2	La rappresentazione in termini dei numeri d'occupazione in sistemi di bosoni	20
3.3	Spazio di Fock ed operatori di creazione e distruzione	25
3.3.1	Teorema di Wick	36
3.4	Esercizi	42
3.5	Quantizzazione di un campo elastico, del campo elettroma- gnetico e di un campo scalare relativistico	52
3.5.1	Quantizzazione di un campo elastico in tre dimensioni .	62
3.5.2	Quantizzazione del campo elettromagnetico	67
3.5.3	Quantizzazione di un campo scalare relativistico	68
3.6	I campi elastici nel limite a volume infinito	73
3.6.1	L'effetto Casimir	75
3.7	Esercizi	78
3.8	Le trasformazioni canoniche lineari.	86
3.8.1	Stati coerenti	87
3.8.2	Trasformazioni di Bogoliubov	89
3.8.3	L'oscillatore squeezed	91
3.8.4	Teoria della superfluidità	93
3.9	Esercizi	96

4	La statistica di Fermi-Dirac	102
4.1	Lo spazio di Fock e l'algebra CAR.	104
4.2	Le trasformazioni canoniche nel caso fermionico.	111
4.2.1	Particelle e buche.	113
4.2.2	Applicazione della trasformazioni canoniche alla BCS: il modello di Richardson	116
4.3	Esercizi	122
4.4	I campi spinoriali	130
4.4.1	La quantizzazione dei campi spinoriali	136
4.4.2	La teoria spinoriale di Dirac	142
4.4.3	Quantizzazione della teoria di Dirac nel caso libero	145
4.5	Esercizi	149
5	La teoria delle perturbazioni e le interazioni indotte, appli- cazioni.	159
5.0.1	Interazioni delle particelle con i campi	159
5.0.2	Interazione di particelle cariche col campo elettroma- gnetico	160
5.0.3	L'equazione di Dirac in un campo elettromagnetico classico	162
5.1	La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo	164
5.1.1	Interazioni indotte	169
5.1.2	Interazioni indotte in teorie relativistiche, il propaga- tore di Feynman	172
5.2	L'interazione elettrone-fonone	174
5.3	Esercizi	182
A	Probabilità di transizione per unità di tempo in un sistema soggetto ad una perturbazione	195
B	Lo spettro del modello di Richardson	200
C	Lo schermaggio elettrostatico in un conduttore ideale.	203
D	L'azione delle trasformazioni di Lorentz sullo spazio di Fock relativistico.	205

Capitolo 1

INTRODUZIONE

Lo scopo di questo corso è fornire un'introduzione, il più possibile esauriente alle basi del metodo della seconda quantizzazione nei suoi aspetti principali. Il limite fondamentale è la durata prevista per il corso che deve corrispondere a 80 ore fra lezioni e esercitazioni.

Per quel che riguarda la seconda quantizzazione, come è ben noto il metodo si basa sull'impiego sistematico dell'algebra CCR a CAR, dette comunemente degli operatori di creazione e distruzione, per la costruzione della meccanica quantistica di insiemi di un numero indefinito di particelle identiche. Peraltro si mostra come il metodo assume il ruolo di strumento di formulazione di nuove regole di quantizzazione in base alla stretta analogia tra la descrizione di un sistema di bosoni identici e un sistema di oscillatori armonici. Questa analogia permette di affrontare e risolvere il problema della quantizzazione di un campo elastico continuo che, nel caso di infiniti gradi di libertà, non trova una soluzione ben definita nell'ambito del principio di corrispondenza formulato da Dirac, per l'ovvia ragione che il principio di corrispondenza fra le parentesi di Poisson relative alle singole coordinate canoniche e i commutatori dei corrispondenti operatori naufraga contro la difficoltà di costruire lo spazio degli stati come prodotto tensoriale infinito di spazi di Hilbert. In questo senso la costruzione del campo in termini degli operatori di creazione e distruzione di un sistema di particelle identiche si presenta come una nuova e indipendente formulazione del principio di corrispondenza. Questa formulazione ha il chiaro vantaggio di inglobare in partenza il concetto di fotone come quanto di luce formulato da Einstein nel 1905.

Costruito l'apparato formale il corso si dedica ad analizzare i più sem-

plici metodi di calcolo, deducibili dalla teoria quantistica delle perturbazioni e mostrarne un numero sufficiente di applicazioni. I limiti temporali non permettono di passare sistematicamente allo studio delle funzioni di correlazione e quindi di sviluppare in modo organico i metodi della cosiddetta fisica dei molti corpi. Tuttavia si è fatto uno sforzo per mostrare un dominio applicativo sufficientemente convincente.

Peraltro non si è trascurata la necessità di introdurre un passo qualificante oltre l'ambito perturbativo scegliendo un certo numero di casi un cui risulta applicabile il metodo delle trasformazioni canoniche lineari, o di Bogoliubov. Sono sviluppati alcuni concetti fondamentali per l'ottica quantistica come gli stati coerenti e gli stati squeezed e sono poi tracciate le applicazioni delle trasformazioni di Bogoliubov a un gas bosonico condensato nel caso di interazioni repulsive a due corpi, e al sistema unidimensionale di fermioni con interazione attrattive a coppie descritto dal modello di Richardson. Si è così indicata l'interpretazione quantistica della superfluidità e della superconduttività. L'introduzione delle trasformazioni canoniche lineari e in particolare degli stati coerenti permette anche di dare sostanza al concetto di stati non di Fock e quindi alle difficoltà connesse con la quantizzazione di sistemi con infiniti gradi di libertà.

1.1 Nota bibliografica

Il carattere molto particolare di questi appunti, che trattano di un metodo illustrandone le principali applicazioni senza peraltro approfondirne nessuna, data la verità delle medesime e dei contesti fisici, rende arduo fornire una bibliografia sufficientemente esauriente. Si è pertanto ritenuto di fornire alla fine degli appunti una lista di testi o lavori utili per gli approfondimenti, eventualmente indicando, nel corso degli appunti e in nota all'inizio di ciascun paragrafo, i capitoli da consultare. Fra questi testi alcuni ([1], [2], [3], [4]) vanno considerati introduttivi nel senso che forniscono le basi, di meccanica quantistica, su cui gli appunti si fondano, altri invece sviluppano e approfondiscono le principali applicazioni, alla fisica delle interazioni fondamentali ([9], [7], [12]), a quella dei solidi ([13], [14]) e all'ottica quantistica [15].

Capitolo 2

Le rappresentazioni di Schrödinger e Dirac

¹ Prima di affrontare il problema della costruzione della meccanica quantistica di sistemi di molte particelle identiche ricordiamo alcuni aspetti fondamentali del formalismo della meccanica quantistica in particolare la relazione fra il formalismo di Dirac e quello di Schrödinger. Da quanto trattato nei corsi precedenti dovrebbe risultare chiaramente la contrapposizione dei due diversi formalismi. La meccanica di Schrödinger è formulata descrivendo gli *stati* di un sistema (di particelle) tramite funzioni (d'onda) a quadrato integrabile delle coordinate delle particelle e di eventuali indici associati agli stati di spin; per n particelle si hanno dunque $3n$ variabili continue e altrettanti indici di spin.

$$\psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, ; i_1, \dots, i_n) \equiv \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, ; i_1, \dots, i_n) .$$

Invece il formalismo di Dirac associa agli stati di un sistema vettori appartenenti a uno spazio astratto (di Hilbert). I vettori sono distinti tramite mezze parentesi e chiamati bra $\langle s|$ o ket $|s' \rangle$ (bra-c-ket=parentesi) a seconda della convenienza.

Ricordiamo che uno stato di un qualunque sistema, classico o quantistico, è il risultato di una procedura di preparazione univoca corrispondente a precisi *apparecchi di preparazione*.

¹Un buon testo generale di riferimento può essere considerato [1] oppure [2] o [3], peraltro gran parte dei libri inclusi in bibliografia contengono consistenti parti introduttive alla Meccanica Quantistica.

Si introduce così il prodotto scalare (una parentesi completa formata da un bra e un ket) $\langle s|s' \rangle$ per rappresentare l'ampiezza di probabilità di transizione in seguito a misura. Questa è ottenuta, nel formalismo di Schrödinger, integrando sulle variabili di posizione e sommando su quelle di spin il prodotto della funzione d'onda associata al ket per il complesso coniugato di quella associata al bra:

$$\langle s|s' \rangle \equiv \int \prod_{j=1}^n d\vec{r}_j \sum_{i_1, \dots, i_n} \psi_s^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, ; i_1, \dots, i_n) \psi_{s'}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, ; i_1, \dots, i_n)$$

Per collegare le due rappresentazioni Dirac introdusse *stati impropri* corrispondenti, nel formalismo di Schrödinger, a funzioni d'onda generalizzate. Queste funzioni sono, per esempio, i prodotti di funzioni $\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \equiv \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ nelle variabili posizione, oppure onde piane $h^{-3/2}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$. Si tratta di funzioni d'onda improprie perché il loro quadrato non è integrabile. I prodotti di funzioni delta nelle n variabili \vec{r}_i , $i = 1, \dots, n$ sono rappresentati da Dirac tramite i ket $|\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n \rangle$ e in questo modo il valore della funzione d'onda dello stato corrispondente al ket $|s \rangle$ nella rappresentazione di Schrödinger è:

$$\psi_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \langle \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n | s \rangle$$

dove, per semplicità abbiamo ommesso gli indici di spin. Questa equazione è perfettamente consistente con la definizione del prodotto scalare nella rappresentazione di Schrödinger, infatti:

$$\langle \vec{r} | s \rangle = \int d\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \psi(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) .$$

Le onde piane

$$h^{-3n/2} e^{i \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i}$$

sono rappresentate dai vettori impropri $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle$.

Evidentemente quanto sopra sommariamente esposto altro non è che uno sterile gioco formale di cui non appare per nulla chiara la motivazione. Vedremo nel seguito che la scelta della rappresentazione di Dirac appare chiaramente motivata quando si trattino sistemi formati da un gran numero di particelle identiche per cui la rappresentazione di Schrödinger in termini di funzioni d'onda risulta impraticabile.

Naturalmente una descrizione completa della fisica dei sistemi quantistici impone, oltre alla definizione degli stati, quella delle osservabili, cioè le

grandezze soggette a misura. Queste si presentano in modo assai semplice nella rappresentazione di Schrödinger. Infatti le grandezze osservabili sono in generale funzioni delle coordinate delle particelle, cioè delle componenti dei vettori \vec{r} , che appaiono in modo esplicito nella rappresentazione di Schrödinger, delle componenti degli impulsi, che corrispondono alle derivate parziali rispetto alle coordinate moltiplicate per $-i\hbar$ (alle componenti di $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$), e di quelle degli spin cui corrispondono semplici matrici. Nel costruire tali funzioni si potrà incontrare un problema di ordinamento di variabili e derivate parziali, che non commutano, superato il quale, peraltro, l'osservabile è assegnata e se ne possono calcolare gli elementi di matrice:

$$\langle s|F|s' \rangle$$

$$\equiv \int \prod_{i=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_n} \psi_s^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, ; i_1, \dots, i_n) F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{\nabla}_1, \dots, \vec{\nabla}_n) \psi_{s'}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, ; i_1, \dots, i_n) ,$$

e quindi trovare autovalori e autovettori in vista della loro interpretazione fisica. La costruzione degli operatori nel formalismo di Dirac è più complessa e si basa sul fatto che un operatore è completamente individuato dai suoi elementi di matrice.

Ricordiamo in particolare che gli elementi di matrice diagonali, $\langle s|F|s \rangle$, si dicono valori medi perché rappresentano appunto le media dei valori che la grandezza fisica F assume nello stato s . La condizione fisicamente necessaria che tali valori medi siano reali restringe la classe degli operatori corrispondenti a osservabili a quelli autoaggiunti o Hermitiani. Questi sono definiti introducendo per ogni operatore F , l'aggiunto F^\dagger , che è definito da:

$$\langle s|F^\dagger|s' \rangle = \langle s'|F|s \rangle^* ,$$

e chiamando Hermitiani, gli operatori che coincidono con l'aggiunto, cioè $F = F^\dagger$.

In realtà le cose sono un po' più complicate perché gli elementi di matrice non sempre sono definiti, in alcuni casi corrispondono a integrali divergenti, ma non è il caso di scendere nei particolari a questo punto del corso. Peraltro la condizione fisica che gli operatori corrispondano ad apparati di misura i cui risultati sono sempre limitati a un intervallo preciso e dipendente dall'apparecchi dei possibili valori, implica che i valori medi siano pure limitati. In questo caso l'estremo superiore del modulo dei valori medi può essere visto come una norma di Banach nello spazio delle osservabili e le sottili differenze fra i concetti di aggiunto e Hermitiano scompaiono.

È evidente che se F è Hermitiano i suoi valori medi sono reali. Facendo riferimento alla rappresentazione di Schrödinger e alla definizione degli operatori data sopra, va osservato che le coordinate sono evidentemente Hermitiane, le componenti degli impulsi, cioè di $-i\hbar\vec{\nabla}$ risultano pure Hermitiane se si tiene conto della definizione del prodotto scalare data sopra, delle regole dell'integrazione per parti e del fatto che l'aggiunto di αF è $\alpha^* F^\dagger$. Considerando operatori corrispondenti a funzioni generiche, o semplicemente polinomi, delle coordinate e degli impulsi, per cui si pone la questione dell'ordinamento dei prodotti delle variabili citata prima, va ricordato, in vista di una selezione degli operatori Hermitiani, che dalla definizione di aggiunto segue:

$$(FG)^\dagger = G^\dagger F^\dagger .$$

Dunque $xp_x + p_x x$, $i(xp_x - p_x x)$ e $xp_y - yp_x$ sono Hermitiani, mentre xp_x non lo è.

Fra gli operatori di interesse vanno ricordati gli operatori di proiezione sugli stati, che sono evidentemente Hermitiani e vengono rappresentati nella forma $P_s \equiv |s\rangle\langle s|$. P_s soddisfa $P_s^2 = P_s$ e per qualunque stato $|v\rangle$, $P_s|v\rangle = \alpha_s|s\rangle$. In rappresentazione di Schrödinger e in assenza di spin P_s è rappresentato dalla funzione di $6n$ variabili:

$$P_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n) \equiv \psi_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)\psi_s^*(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n)$$

assumendo la corrispondenza

$$\begin{aligned} P_s|v\rangle &\leftrightarrow \int d\vec{r}'_1 \cdots d\vec{r}'_n P_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n)\psi_v(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n) \\ &= |s\rangle\langle s|v\rangle = \alpha_s|s\rangle . \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

Un altro concetto fondamentale nella costruzione del formalismo quantistico è quello di una base ortonormale completa di stati. In uno spazio di Hilbert, che di regola deve essere separabile, esistono per definizione basi ortonormali complete numerabili. Queste sono formate da successioni di vettori, nel formalismo di Dirac, $\{|s_n\rangle\}$, con $n = 1, 2, \dots, \infty$, tali che $\langle s_n|s_m\rangle = \delta_{n,m}$, e per cui l'unico vettore $|s\rangle$ dello spazio soddisfacente $\langle s_n|s\rangle = 0$ è l'elemento nullo dello spazio stesso. Ricordiamo che l'elemento nullo di uno spazio vettoriale è quello che si ottiene sottraendo da ogni vettore il vettore stesso o moltiplicando qualunque vettore per il numero zero. Avendo a disposizione una base (ortonormale e completa, come verrà d'ora

in poi sottinteso) è possibile costruire l'operatore identità:

$$I \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |s_n\rangle\langle s_n| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_{s_n}$$

che, per qualunque operatore F , soddisfa la proprietà

$$IF = FI = F .$$

Dalla decomposizione dell'operatore identità data prima si ha subito :

$$F = \sum_{m,n=1}^{\infty} |s_n\rangle\langle s_n|F|s_m\rangle\langle s_m| ,$$

relazione che dimostra quanto sopra affermato, cioè che un operatore è completamente caratterizzato dai suoi elementi di matrice.

È utile osservare che per una base ortonormale vale la relazione

$$P_{s_n}P_{s_m} = \delta_{n,m}P_{s_n} .$$

Le formule appena espote possono essere generalizzate includendo vettori generalizzati del tipo di quelli trattati sopra. In particolare l'operatore identità può essere rappresentato, nel caso di una particella senza spin nella forma:

$$I = \int d\vec{p}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = \int d\vec{R}|\vec{R}\rangle\langle\vec{R}|$$

infatti si può scrivere passando dalla rappresentazione di Dirac a quella di Schrödinger:

$$|s\rangle = \int d\vec{p}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|s\rangle \rightarrow \psi_s(\vec{r}) = \int d\vec{p} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{h^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{r}' \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}'}}{h^{\frac{3}{2}}} \psi_s(\vec{r}') .$$

Si noti che l'equazione in rappresentazione di Schrödinger riproduce una proprietà fondamentale della trasformata di Fourier. Analogamente si ha usando la definizione stessa della funzione δ :

$$|s\rangle = \int d\vec{R}|\vec{R}\rangle\langle\vec{R}|s\rangle \rightarrow \psi_s(\vec{r}) = \int d\vec{R} \delta(\vec{r} - \vec{R}) \int d\vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{R}) \psi_s(\vec{r}') .$$

Va peraltro chiarito che se $|l\rangle$ è un vettore generalizzato $|l\rangle\langle l|$ non è un operatore di proiezione.

Gli operatori Hermitiani e altri operatori particolari possono essere rappresentati con espressioni analoghe a quelle fornite per I , in particolare può darsi che l'operatore Hermitiano F sia scrivibile nella forma:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n |f_n\rangle\langle f_n| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_{f_n} ,$$

dove $|f_n\rangle$ sono vettori propri elementi di una base ortonormale. In questa situazione si dice che gli f_n sono autovalori di F e i vettori $|f_n\rangle$ sono autovettori sempre di F . Si ha infatti $F|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle$.

In alternativa si può avere un'espressione analoga in cui compaiono vettori generalizzati e la somma è sostituita, eventualmente in parte, da un integrale come nel caso di I .

Dato uno stato $|s\rangle$ e un operatore F si definisce l'operazione di **Traccia** dell'operatore prodotto $Tr(P_s F) \equiv Tr(F P_s)$ identificandola col valor medio $\langle s|F|s\rangle$. La definizione dell'operazione di traccia è estesa a prodotti di operatori più generali assumendo che essa sia funzione lineare degli operatori fattori del prodotto. Quindi, per esempio, se si ha un operatore G della forma $G = \sum_n g_n |s_n\rangle\langle s_n|$ e un generico operatore F , si definisce la traccia $Tr(GF) = Tr(FG) = \sum_n g_n \langle s_n|F|s_n\rangle$. Inoltre si ha evidentemente $Tr(P_s) = 1$.

Le proprietà dell'operatore P_s sopra illustrate e in particolare la (2.0.1) mostrano che un vettore di stato $|s\rangle$ identifica competamente il corrispondente operatore di proiezione P_s . Sorge naturale la domanda sulla reciprocità della corrispondenza, cioè precisamente: dato un operatore di proiezione, quindi Hermitiano, $P_x = P_x^2$ con traccia unitaria $Tr(P_x) = 1$, viene identificato un unico vettore di stato?

Per rispondere va innanzi tutto osservato che un operatore di proiezione $P = P^2$ ha autovalori eguali o a 0 o a 1. Questo implica che

$$P_x = \sum_{\alpha=1}^N |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

dove i vettori $|\alpha\rangle$ appartengono a un sottoinsieme di una base ortormale completa. Ora la condizione $Tr(P_x) = 1$, si traduce in $N = 1$ e quindi implica $P_x = |x\rangle\langle x|$ dove peraltro il vettore $|x\rangle$ è normalizzato e definito a meno di una fase.

Dunque abbiamo mostrato che un operatore di proiezione a traccia unitaria identifica un vettore a meno di una costante di proporzionalità (α_s), anzi di una fase.

Ma è ben noto che la corrispondenza stato fisico-vettore di stato lascia indeterminata proprio una fase. Quindi è del tutto naturale sostituire nella costruzione della meccanica quantistica in vettori di stato con i corrispondenti operatori di proiezione. La ragione per cui questa sostituzione non è pratica comune sta nel fatto che è più facile descrivere un vettore tramite una funzione di un certo numero di variabili piuttosto che un proiettore che corrisponde, come abbiamo visto, a una funzione con numero di variabili doppio.

Vi sono peraltro situazioni in cui questo svantaggio si riduce fino a scomparire del tutto. Questo accade quando si considerano stati *non puri*, cioè di cui non si ha conoscenza completa nel senso che non sono individuati dalla misura di un'osservabile massima. Il caso classico è quello in cui si considerano le particelle in un fascio che possono essere descritte tramite pacchetti d'onda distribuiti a caso lungo il fascio, cioè da un prodotto di $\psi(\vec{r}, t, \vec{R})$ dove \vec{R} è la posizione iniziale della particella distribuita a caso lungo il fascio. Ricorrendo per semplicità al formalismo astratto avremo un sistema di vettori di stato effettivamente dipendenti da parametri, per semplicità uno solo, $|s(\tau)\rangle$ distribuito con la densità di probabilità $\pi(\tau)$. In questo caso il valor medio della generica osservabile F è dato da;

$$\bar{F} = \int d\tau \pi(\tau) \langle s(\tau) | F | s(\tau) \rangle \equiv Tr(F \int d\tau \pi(\tau) |s(\tau)\rangle \langle s(\tau)|) \equiv Tr(F\rho) .$$

dove evidentemente abbiamo introdotto l'operatore (**matrice**) **densità** definita da

$$\rho \equiv \int d\tau \pi(\tau) |s(\tau)\rangle \langle s(\tau)| , \quad (2.0.2)$$

Si tratta di un operatore Hermitiano, non-negativo, nel senso che i suoi valori medi sono non negativi

$$\langle S | \rho | S \rangle = \int d\tau \pi(\tau) |\langle S | s(\tau) \rangle|^2 \geq 0$$

e per cui

$$Tr(\rho) = \int d\tau \pi(\tau) = 1 . \quad (2.0.3)$$

I matematici chiamano un operatore del genere *operatore di classe traccia* unitario.

Non si tratta peraltro in generale di un operatore di proiezione, infatti

$$\rho^2 = \int d\tau d\tau' \pi(\tau) \pi(\tau') \langle s(\tau) | s(\tau') \rangle |s(\tau)\rangle \langle s(\tau')| \neq \rho ,$$

in particolare

$$\text{Tr}(\rho^2) = \int d\tau d\tau' \pi(\tau) \pi(\tau') | \langle s(\tau) | s(\tau') \rangle |^2 \leq 1 \quad , \quad (2.0.4)$$

dove evidentemente il segno eguale vale solo se $\pi(\tau) = \delta(\tau - T)$ nel qual caso si ha uno stato puro e $\rho = P_{s(T)}$.

L'insieme delle possibili matrici densità di un sistema è convesso, cioè, date due matrici densità ρ_1 e ρ_2 la loro combinazione lineare $\rho(a) \equiv a\rho_1 + (1-a)\rho_2$ è una matrice densità per a reale e $0 \leq a \leq 1$, si lascia allo studente la facile verifica delle proprietà (2.0.3) e (2.0.4). Notiamo che se identifichiamo le matrici con punti in uno spazio lineare la combinazione lineare considerata rappresenta il segmento che unisce ρ_1 e ρ_2 .

In rappresentazione di Schrödinger la matrice densità dipende dal tempo dato che gli stati lo fanno. L'equazione di Schrödinger per ρ è

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho(t)] \quad , \quad (2.0.5)$$

se H è l'Hamiltoniano del sistema.

Tra i numerosi casi di interesse fisico spicca il quello dei sistemi all'equilibrio termico. Data l'Hamiltoniano H la distribuzione canonica di Gibbs a $T = 1/(k_B\beta)$ corrisponde alla matrice densità:

$$\rho = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta H) \equiv \frac{1}{\text{Tr}(\exp(-\beta H))} \exp(-\beta H) \quad . \quad (2.0.6)$$

Per un oscillatore armonico di frequenza angolare ω si ha:

$$\rho = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \exp(-\beta\hbar\omega A^\dagger A) \quad , \quad (2.0.7)$$

dove A è l'operatore di distruzione.

Un altro esempio particolarmente semplice e ben noto è dato dalla matrice densità dei possibili stati polarizzazione di un elettrone. Questa è la matrice due per due

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})$$

dove il vettore $\vec{\sigma}$ ha per componenti le matrici di Pauli e il vettore \vec{P} ha componenti reali e lunghezza non superiore a uno. L'insieme di tali matrici è identificato dall'insieme dei vettori \vec{P} che è evidentemente convesso e il cui bordo è costituito dai vettori di lunghezza unitaria e corrisponde agli stati puri.

In conclusione possiamo affermare che nella formulazione più generale a uno stato quantistico è associata una matrice densità, cioè un operatore Hermitiano non negativo con traccia uno, nel caso di uno stato puro l'operatore è un proiettore.

Un'altro concetto che è importante richiamare in vista degli sviluppi del corso è il ruolo delle *simmetrie* in meccanica quantistica. In astratto una legge di simmetria stabilisce una precisa corrispondenza fra stati, apparecchi di preparazione, o, in alternativa, fra operatori, apparati di misura, che risultano equivalenti per quel che riguarda i risultati fisici. Se la simmetria viene descritta agendo sugli stati si tratta di *forma attiva*, altrimenti di *forma passiva*. Un esempio ben noto è quello dato dall'evoluzione temporale in sistemi con Hamiltoniano indipendente dal tempo in cui si ha evoluzione degli stati in rappresentazione di Schrödinger e degli operatori in quella di Heisenberg. La legge di simmetria, che può essere chiamata un automorfismo della rappresentazione, è realizzata da operatori unitari U , elementi di un gruppo \mathcal{S} , nel senso che, in forma attiva, $|s' \rangle$ è equivalente a $|s \rangle$ se $|s' \rangle = U|s \rangle$. In forma passiva O' è equivalente a O se $O' = U^\dagger O U$. Le due forme sono intercambiabili perché hanno lo stesso effetto sui valori medi. Il tipico esempio, il più elementare, è la simmetria traslazionale in una dimensione. Nella rappresentazione di Schrödinger lo stato preparato da un certo apparecchio nel punto x_0 può essere descritto dalla funzione d'onda $\psi_{x_0}(x)$. Se si ha invarianza traslazionale, si ha la relazione $\psi_{x_0}(x) = \psi(x - x_0)$. Quindi, considerando la traslazione dello stato di un segmento a si trova:

$$\psi_{x_0+a}(x) = \psi_{x_0}(x - a) = e^{-a \frac{d}{dx}} \psi_{x_0}(x) = e^{-iaP/\hbar} \psi_{x_0}(x) = U_a \psi_{x_0}(x) , \quad (2.0.8)$$

dove P è evidentemente l'operatore impulso. La forma passiva equivalente corrisponde alla traslazione degli operatori del segmento $-a$:

$$O_{-a} = e^{iaP/\hbar} O e^{-iaP/\hbar} . \quad (2.0.9)$$

L'operatore P/\hbar è detto *generatore infinitesimo* di una traslazione. Va notato che si ha un generatore infinitesimo solo nel caso di simmetrie continue, come quelle traslazionali sopra citate. Si possono invece avere simmetrie discrete, come la riflessione degli assi, cioè la *parità*, oppure come le traslazioni discrete di un cristallo che sovrappongono una cella elementare a un'altra. In questi casi non si ha un generatore infinitesimo. Nel caso delle traslazioni su un cristallo, che sono ottenute iterando quelle di un solo passo reticolare, si ha un gruppo di simmetria *ciclico*, i cui elementi sono ottenuti tramite prodotti

di elementi semplici che hanno il ruolo di generatori. Questa possibilità verrà discussa in dettaglio in sezione (3.5).

Un altro esempio importante è quello delle rotazioni intorno a un asse orientato corrispondente al versore \vec{n} . Ripetendo pedestremente l'analisi del caso delle traslazioni dopo aver sostituito la coordinata x con l'angolo φ si trova che l'operatore unitario di rotazione di un angolo θ intorno all'asse \vec{n} è:

$$U_\chi = e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar} . \quad (2.0.10)$$

È importante notare l'azione della rotazione in Eq. (2.0.10) su un operatore del tipo densità di particella nel punto \vec{R} , che in rappresentazione di Schödinger corrisponde alla $\rho(\vec{R}) = \delta(\vec{r} - \vec{R})$, o sulla densità di corrente di particella $\vec{J}(\vec{R}) = \frac{1}{2m}\{\vec{p}, \delta(\vec{r} - \vec{R})\}$. Tenendo conto del fatto che dopo una rotazione $\mathcal{R}(\vec{n}, \theta)$ di un angolo θ intorno all'asse \vec{n} dello stato $|s\rangle$ il valor medio della densità di corrente nel punto $\mathcal{R}(\vec{n}, \theta)\vec{R}$ è ottenuto ruotando quello che si aveva inizialmente nel punto \vec{R} , si ha

$$e^{i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar}\vec{J}(\vec{R})e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar} = \mathcal{R}(\vec{n}, \theta)\vec{J}(\mathcal{R}(\vec{n}, -\theta)\vec{R}) . \quad (2.0.11)$$

È facile verificare ciò con un conto esplicito usando $e^{i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar}\vec{r}e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar} = \mathcal{R}(\vec{n}, \theta)\vec{r}$ e $e^{i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar}\vec{\nabla}e^{-i\theta\vec{J}\cdot\vec{n}/\hbar} = \mathcal{R}(\vec{n}, \theta)\vec{\nabla}$. Una relazione analoga alla Eq. (2.0.11) si ha per la densità di particelle che peraltro è una quantità scalare e per qualunque altra funzione dello spazio a valore operatoriale, come i campi di cui tratteremo nel seguito.

Richiamate alcuni basi del formalismo della meccanica quantistica passiamo dunque allo studio dei sistemi di particelle quantistiche identiche.

Capitolo 3

Seconda quantizzazione - sistemi bosonici

3.1 Particelle quantistiche identiche

¹ Chiameremo *Sistema di N Particelle Quantistiche Identiche* un sistema quantistico le cui osservabili siano identificabili con le funzioni simmetriche delle variabili canoniche

$$\vec{r}_i, \vec{p}_i, \vec{s}_i, \quad (3.1.1)$$

ed eventualmente di altre ancora, come nel caso dello spin isotopico, sempre distinte dall'indice di particella $1 \leq i \leq N$. Le variabili (3.1.1) sono caratterizzate da un sistema di regole di commutazione canoniche la cui parte non banale è

$$\begin{aligned} [r_i^a, p_j^b] &= i\hbar\delta_{ij}\delta^{ab} \\ [s_i^a, s_j^b] &= i\hbar\delta_{ij}\epsilon^{abc}s_i^c, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

nell'ultima formula ϵ sta a indicare il tensore antisimmetrico di Ricci. È evidente l'identificazione delle variabili (3.1.1) con le componenti di posizione, quantità di moto, e momento angolare interno (spin) delle particelle; altre

¹Sono testi di utile consultazione [2] (§82), [5], [6] (Cap.2), [4] (§59-60), [10] (Parte II)

variabili possono per esempio corrispondere alla carica elettrica nel caso che questa possa variare da particella a particella (come per i nucleoni).

Fra gli esempi più tipici di osservabili ricordiamo l'hamiltoniana, che nel caso non relativistico di interazione tramite un potenziale sarà

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) , \quad (3.1.3)$$

e la densità di carica

$$\rho(\vec{R}) = q \sum_{i=1}^N \delta(\vec{R} - \vec{r}_i) \quad (3.1.4)$$

dove q è la carica della singola particella.

Questi esempi suggeriscono immediatamente l'opportunità di una classificazione delle osservabili in termini del numero delle particelle coinvolte. In particolare la densità di carica e l'energia cinetica, che corrispondono alla somma di termini coinvolgenti le variabili relative ad una sola particella, saranno chiamate osservabili a particella singola, mentre l'energia potenziale relativa a forze a due corpi corrisponde ad un operatore a due particelle.

È chiaro come questa classificazione possa essere generalizzata. Introdotto, per semplificare la notazione, il simbolo ξ_i per indicare collettivamente le variabili dinamiche relative alla i -esima particella. La generica osservabile può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} O &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N o^{(k)}(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \\ &\equiv \sum_{k=1}^N \sum_{i_1 < \dots < i_k=1}^N o_S^{(k)}(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \\ &\equiv \sum_{k=1}^N O^{(k)} . \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Si noti che nella prima espressione gli operatori $o^{(k)}$ non sono necessariamente simmetrici nelle loro variabili, mentre sono simmetrici gli operatori $o_S^{(k)}$ che appaiono nella seconda espressione. Gli operatori $O^{(k)}$ nella terza espressione saranno chiamati operatori a k particelle.

Passando ora a considerare lo spazio degli stati di N particelle quantistiche identiche introduciamo un nuovo simbolo η_i per indicare collettivamente un

sistema completo di variabili commutanti per l'i-esima particella, cioè, per esempio

$$\eta_i \equiv (\vec{r}_i, s_i^z, \dots) . \quad (3.1.6)$$

Alternativamente potremmo scegliere:

$$\eta_i \equiv \left(\vec{p}_i, \lambda_i \equiv \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{p}_i}{p_i}, \dots \right) , \quad (3.1.7)$$

dove si è introdotto il nuovo numero quantico elicità λ_i .

Osserviamo ora che lo spazio di Hilbert delle funzioni a modulo quadrato sommabile in N variabili η_i si riduce in modo naturale in sottospazi di funzioni appartenenti a diverse rappresentazioni del gruppo delle permutazioni degli indici di particella. Si ha infatti per esempio

$$\begin{aligned} \Psi(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{2} [(\Psi(\eta_1, \eta_2) + \Psi(\eta_2, \eta_1)) + (\Psi(\eta_1, \eta_2) - \Psi(\eta_2, \eta_1))] \\ &\equiv \Psi_S(\eta_1, \eta_2) + \Psi_A(\eta_1, \eta_2) , \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

in cui si distinguono chiaramente la parte simmetrica e quella antisimmetrica della funzione d'onda di due particelle.

Nel caso di più di due particelle appaiono classi di simmetria mista simmetrica-antisimmetrica. Infatti, per esempio, nel caso di tre particelle si ha

$$\begin{aligned} \Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \frac{1}{6} [\Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + \Psi(\eta_2, \eta_3, \eta_1) + \Psi(\eta_3, \eta_1, \eta_2) \\ &\quad + \Psi(\eta_1, \eta_3, \eta_2) + \Psi(\eta_3, \eta_2, \eta_1) + \Psi(\eta_2, \eta_1, \eta_3)] \\ &\quad + \frac{1}{6} [\Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + \Psi(\eta_2, \eta_3, \eta_1) + \Psi(\eta_3, \eta_1, \eta_2) \\ &\quad - \Psi(\eta_1, \eta_3, \eta_2) - \Psi(\eta_3, \eta_2, \eta_1) - \Psi(\eta_2, \eta_1, \eta_3)] \\ &\quad + \frac{1}{3} [2\Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - \Psi(\eta_2, \eta_3, \eta_1) - \Psi(\eta_3, \eta_1, \eta_2)] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Il primo dei tre termini a secondo membro è simmetrico, il secondo antisimmetrico, mentre il terzo appartiene ad una classe di simmetria mista. Per quello che ci interessa è sufficiente definire funzioni d'onda a simmetria mista quelle che si annullano se simmetrizzate o antisimetrizzate.

Dato che, per l'identità delle particelle, tutte le osservabili, ed in particolare l'hamiltoniana, sono simmetriche rispetto allo scambio delle particelle stesse, non è possibile alcuna transizione, sia essa dovuta ad evoluzione libera

del sistema, sia ad un processo di misura, fra stati corrispondenti a funzioni d'onda appartenenti a diverse classi di simmetria. Lo spazio degli stati di N particelle si decompone dunque nella somma diretta di sottospazi i cui elementi appartengono a differenti classi di simmetria ed eventualmente corrispondono a sistemi fisici del tutto distinti. Nei casi come questo, in cui lo spazio degli stati si decompone in modo tale che non abbiano alcun senso fisico sovrapposizioni fra stati appartenenti a sottospazi diversi, si dice che si ha una regola di superselezione.

Resta da vedere quali fra i sottospazi degli stati siano suscettibili di interpretazione fisica. A questo scopo va brevemente ricordato il processo di riduzione degli stati quantistici di sistemi composti. Sia $\Psi(r, R)$ la funzione d'onda di uno stato di un sistema composto, r e R le variabili associate ai componenti, se $\psi(r)$ corrisponde all'autostato di un'osservabile massima del primo sistema componente, la funzione

$$\int dr \psi^*(r) \Psi(r, R) \quad (3.1.10)$$

individua lo stato del secondo componente risultante dalla riduzione dello stato composto in seguito alla misura dell'osservabile massima sul primo componente. Identifichiamo ora il sistema composto con quello di tre particelle identiche e consideriamo la riduzione dello stato in seguito alla rivelazione di una delle tre particelle localizzata a grande distanza dalle altre due (oltre la luna!) dove ogni tipo di mutua interazione risulta impossibile, se lo stato iniziale avesse simmetria mista lo stato di due particelle risultante dalla riduzione sarebbe combinazione lineare di due stati con simmetria diversa, come sopra enunciato, questa conclusione non ha senso fisico. Se le particelle non portano cariche non commutative, un argomento di questo tipo permette di concludere che le sole classi di simmetria per permutazione (statistiche) compatibili con un sistema di particelle identiche sono quella simmetrica (statistica di Bose-Einstein) e quella antisimmetrica (statistica di Fermi-Dirac). Un'analoga linea di ragionamento porta a concludere che la statistica può dipendere solo dalla natura delle particelle; per esempio, la statistica non può dipendere dal numero perchè, riducendo come sopra il numero delle particelle tramite misure successive, non si cambia la simmetria della funzione d'onda. Nell'ambito della teoria dei campi quantistici e relativistici si mostra che la statistica di Bose-Einstein è incompatibile con particelle di spin semintero e quella di Fermi-Dirac non è applicabile al caso di spin intero (teorema Spin-Statistica). Nel prossimo paragrafo elaboreremo

un algoritmo adatto alla trattazione di sistemi di bosoni, cioè soddisfacenti la statistica di Bose-Einstein, successivamente passeremo ad occuparci dei fermioni.

3.2 La rappresentazione in termini dei numeri d'occupazione in sistemi di bosoni

Dalla decomposizione di una funzione generica nelle differenti classi di simmetria illustrata nel paragrafo precedente risulta che la costruzione di funzioni d'onda simmetriche o antisimmetriche comporta automaticamente calcoli molto complessi. La funzione associata ad uno stato generico di N corpi risulta essere la somma di $N!$ termini. È dunque chiaro che il calcolo di un generico elemento di matrice di un operatore comporta la valutazione di un gran numero di integrali distinti.

La seconda quantizzazione è un algoritmo che permette di ridurre la complessità di questi calcoli tenendo automaticamente conto delle relazioni di simmetria fra i differenti integrali che contribuiscono agli elementi di matrice di operatori a pochi corpi. Il punto di partenza consiste nella costruzione di una base ortonormale completa per un sistema di N bosoni utilizzando le funzioni d'onda di una base dello spazio degli stati di singola particella. La scelta della particolare base di singola particella dipende, come risulterà al momento delle applicazioni, dal problema fisico in esame.

Il caso più tipico è quello di particelle libere o in debole interazione per cui è comodo scegliere come base di singola particella quella di onde piane con condizioni di periodicità ai bordi di una scatola cubica di lato L . Se \vec{n} è un vettore a componenti intere, $\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}$ è il generico numero d'onda compatibile con le condizioni di periodicità e

$$\psi_{\vec{k},\sigma}(\vec{r},\lambda) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta_{\sigma,\lambda} \quad (3.2.11)$$

è la funzione d'onda rappresentativa dello stato della base con numero d'onda \vec{k} e terza componente dello spin σ .

In generale indicheremo con ν , (\vec{k},σ) nell'esempio, l'osservabile massima di singola particella i cui valori distinguono gli stati della base, e con $\psi_\nu(\eta)$ il generico elemento della base corrispondente. Gli elementi della base

di N bosoni saranno costruiti scegliendo in tutti i modi possibili N stati, non necessariamente distinti, di singola particella e costruendo il prodotto simmetrizzato delle corrispondenti funzioni d'onda

$$\Psi_{\nu_1, \dots, \nu_N}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) = k \mathcal{S} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) \equiv k \sum_{P(N)} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_{P(i)}) , \quad (3.2.12)$$

dove la somma si riferisce alle permutazioni degli indici di particella e k è il fattore di normalizzazione. È facile convincersi che una base ortonormale e completa per lo spazio degli stati di N bosoni è identificabile con l'insieme delle funzioni d'onda (3.2.12) corrispondenti a tutte le possibili scelte di ennuple ν_1, \dots, ν_N non riducibili l'una all'altra per permutazioni.

Infatti è ovvio che l'insieme di tutti i possibili prodotti di N funzioni della base di singola particella, $\prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i)$, costituisce una base ortonormale e completa per lo spazio di Hilbert degli stati di N particelle senza restrizioni sulla statistica. Quest'insieme è sostituibile con quello delle combinazioni lineari normalizzate di prodotti corrispondenti alle possibili classi di simmetria a N particelle. Tale insieme fornisce una nuova base ortonormale equivalente alla prima e tra i suoi elementi solo quelli simmetrizzati come in (3.2.12) non sono ortogonali alle funzioni di N bosoni.

L'identità delle funzioni d'onda (3.2.12) riducibili l'una all'altra per permutazioni degli indici ν mostra chiaramente che l'elenco ordinato degli indici di stato di singola particella utilizzati nella costruzione di un elemento della base non individua in modo economico l'elemento stesso perché tale elenco non è invariante, come è invece la funzione d'onda in (3.2.12), per permutazione degli indici di stato. In realtà è sufficiente indicare quali, tra gli stati di singola particella appaiano nell'elenco e quante volte ciascuno stato appaia. Questo è equivalente ad assegnare per ogni stato ν di singola particella il numero N_ν delle volte in cui esso appare nell'ennupla ν_1, \dots, ν_N . N_ν è detto numero d'occupazione dello stato ν . La successione dei numeri d'occupazione $\{N_\nu\}$ è ovviamente vincolata dalla condizione

$$\sum_{\nu} N_{\nu} = N . \quad (3.2.13)$$

Possiamo dunque concludere che le funzioni d'onda costruite in (3.2.12) vanno indicate nel modo più economico:

$$\Psi_{\nu_1, \dots, \nu_N}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) \equiv \Psi_{\{N_\nu\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) . \quad (3.2.14)$$

Per completare la nostra costruzione della base per lo spazio a N bosoni dobbiamo calcolare il fattore di normalizzazione k in (3.2.12). Per questo osserviamo che l'operatore di simmetrizzazione \mathcal{S} in (3.2.12) produce $N!$ prodotti di funzioni di singola particella, tante sono infatti le permutazioni di N oggetti. In generale peraltro questi prodotti non sono tutti diversi, anzi possono essere raggruppati in insiemi di prodotti identici generati dalle permutazioni corrispondenti a scambi di particelle che occupano lo stesso stato. Il numero di queste permutazioni è eguale a $\prod_{\nu} N_{\nu}!$ cioè al prodotto su tutti gli stati occupati più di una volta dei numeri $N_{\nu}!$ delle permutazioni delle particelle occupanti lo stato ν (si ricordi che $1! = 0! = 1$). Ora i prodotti di N funzioni d'onda di singola particella sono funzioni d'onda di N particelle normalizzate e sono fra loro ortogonali a meno che tutti i fattori del prodotto coincidano. D'altra parte $\mathcal{S} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i)$ contiene $N! / \prod_{\nu} N_{\nu}!$ prodotti diversi, e quindi fra loro ortogonali, ciascuno moltiplicato per $\prod_{\nu} N_{\nu}!$. Quindi se calcoliamo la sua norma al quadrato troviamo $(\prod_{\nu} N_{\nu}!)^2 N! / \prod_{\nu} N_{\nu}! = N! \prod_{\nu} N_{\nu}!$ da cui si ha:

$$k = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{\nu} N_{\nu}!}} . \quad (3.2.15)$$

A titolo di esempio consideriamo il caso di tre particelle; se esse occupano lo stesso stato il simmetrizzatore \mathcal{S} lo riproduce $3! = 6$ volte, quindi la norma al quadrato del vettore risultante è $k^{-2} = 36$ e $k = 1/6 = 1/3!$. Se le tre particelle occupano due stati diversi \mathcal{S} produce la somma di tre prodotti diversi di stati di singola particella, ciascuno moltiplicato per 2, quindi $k^{-2} = 4 \times 3 = 12$. Se infine le tre particelle occupano tre stati diversi \mathcal{S} produce la somma di sei prodotti diversi di stati di singola particella e quindi $k^{-2} = 6$.

L'elemento generico della base per N bosoni è dunque

$$\begin{aligned} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) &\equiv \Psi_{\nu_1, \dots, \nu_N}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{\nu} N_{\nu}!}} \sum_{P(N)} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_{P(i)}) , \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

in altri termini:

$$\mathcal{S} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) = \sqrt{N! \prod_{\nu} N_{\nu}!} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) . \quad (3.2.17)$$

La complessità della costruzione del generico stato di una base per N bosoni nel formalismo di Schrödinger conferma tutta la macchinosità di questo

formalismo. Ci proponiamo ora di calcolare l'azione di un operatore a singola particella su un generico stato di questa base mostrando che, il risultato si esprime semplicemente in termini dei numeri d'occupazione degli stati e degli elementi di matrice dello stesso operatore fra stati di singola particella. Questo risultato sarà poi facilmente generalizzato al caso di un operatore a n particelle. La semplicità delle relazioni trovate ci permetterà di evitare il ricorso a sviluppi del tipo (3.2.16) ed alla rappresentazione di Schrödinger, effettuando tutti i calcoli nella rappresentazione numero d'occupazione.

Consideriamo dunque un generico operatore a singola particella

$$F^{(1)} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) , \quad (3.2.18)$$

e indichiamo con

$$f_{\mu,\nu} \equiv \langle \psi_\mu | f | \psi_\nu \rangle \quad (3.2.19)$$

l'elemento di matrice dell'operatore f fra gli stati μ e ν delle base di singola particella da cui siamo partiti. Calcoliamo

$$F^{(1)} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \prod_{j=1}^N \psi_{\nu_j}(\eta_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{\mu} f_{\mu,\nu_i} \prod_{j=1, j \neq i}^N \psi_{\nu_j}(\eta_j) \psi_{\mu}(\eta_i) . \quad (3.2.20)$$

Dato che l'operatore $F^{(1)}$ è invariante per permutazioni si ha $\mathcal{S}F^{(1)} = F^{(1)}\mathcal{S}$, da cui troviamo, usando la (3.2.17):

$$\begin{aligned} \sqrt{N! \prod_{\nu} N_{\nu}!} F^{(1)} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) &= \sum_{i=1}^N \sum_{\mu} f_{\mu,\nu_i} \mathcal{S} \prod_{j=1, j \neq i}^N \psi_{\nu_j}(\eta_j) \psi_{\mu}(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\mu} f_{\mu,\nu_i} \sqrt{N! \prod_{\nu} (N_{\nu} - \delta_{\nu,\nu_i} + \delta_{\nu,\mu})!} \Psi_{\{N_{\nu} - \delta_{\nu,\nu_i} + \delta_{\nu,\mu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) . \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Al variare di i fra 1 e N ν_i varia fra tutti gli stati occupati, cioè con $N_{\nu} > 0$, e ogni stato contribuisce alla somma su i in ragione di N_{ν} . Su questa base è possibile sostituire la somma su i con la somma sugli stati di singola particella, cioè su λ , e l'espressione precedente diventa:

$$\sum_{\mu,\lambda} N_{\lambda} f_{\mu,\lambda} \sqrt{N! \prod_{\nu} (N_{\nu} - \delta_{\nu,\lambda} + \delta_{\nu,\mu})!} \Psi_{\{N_{\nu} - \delta_{\nu,\lambda} + \delta_{\nu,\mu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N)$$

$$= \sqrt{N! \prod_{\nu} N_{\nu}!} \sum_{\mu, \lambda} f_{\mu, \lambda} \sqrt{N_{\lambda}(N_{\mu} + 1 - \delta_{\lambda, \mu})} \Psi_{\{N_{\sigma} - \delta_{\sigma, \lambda} + \delta_{\sigma, \mu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) . \quad (3.2.22)$$

Qui abbiamo usato l'identità:

$$N_{\lambda} \prod_{\nu} (N_{\nu} - \delta_{\nu, \lambda} + \delta_{\nu, \mu})! = (N_{\mu} + 1 - \delta_{\mu, \lambda}) \prod_{\nu} N_{\nu}! , \quad (3.2.23)$$

che è ovvia se $\lambda = \mu$, mentre altrimenti segue da: $N_{\lambda}(N_{\mu} + 1)(N_{\lambda} - 1)! = (N_{\mu} + 1)N_{\mu}!N_{\lambda}!$.

In conclusione abbiamo mostrato che:

$$F^{(1)} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) = \sum_{\mu, \lambda} f_{\mu, \lambda} \sqrt{N_{\lambda}(N_{\mu} + 1 - \delta_{\lambda, \mu})} \Psi_{\{N_{\sigma} - \delta_{\sigma, \lambda} + \delta_{\sigma, \mu}\}}^{(S)}(\eta_1, \dots, \eta_N) , \quad (3.2.24)$$

per qualunque stato della nostra base a N bosoni.

Questo risultato può essere formulato facendo riferimento agli elementi di matrice non nulli fra due stati generici della base a N bosoni dell'operatore di singola particella $F^{(1)}$. Gli unici elementi di matrice non nulli sono i valori medi:

$$\langle \Psi_{\{N_{\nu}\}} | F^{(1)} | \Psi_{\{N_{\nu}\}} \rangle = \sum_{\mu} N_{\mu} f_{\mu, \mu} , \quad (3.2.25)$$

e, per $\lambda \neq \mu$, quelli del tipo:

$$\langle \Psi_{\{N_{\nu} + \delta_{\nu, \mu} - \delta_{\nu, \lambda}\}} | F^{(1)} | \Psi_{\{N_{\nu}\}} \rangle = f_{\mu, \lambda} \sqrt{N_{\lambda}(N_{\mu} + 1 - \delta_{\lambda, \mu})} . \quad (3.2.26)$$

Il risultato per i valori medi appare del tutto ovvio dato che esprime il fatto che ciascun stato di singola particella contribuisce al valor medio proporzionalmente al corrispondente numero d'occupazione. Le particelle contribuiscono in modo additivo ai valori medi degli operatori di singola particella.

L'elemento di matrice (3.2.26) è collegato alla probabilità di transizione di una particella dallo stato λ allo stato μ partendo da uno stato con occupazione $\{N_{\nu}\}$ sotto l'azione dell'osservabile $F^{(1)}$. Infatti questa probabilità è proporzionale a:

$$\left| \langle \Psi_{\{N_{\nu} + \delta_{\nu, \mu} - \delta_{\nu, \lambda}\}} | F^{(1)} | \Psi_{\{N_{\nu}\}} \rangle \right|^2 , \quad (3.2.27)$$

e deve essere proporzionale a:

$$N_{\lambda} |f_{\mu, \lambda}|^2 , \quad (3.2.28)$$

per lo stesso principio di additività appena richiamato. Dal confronto delle due formule otteniamo:

$$\langle \Psi_{\{N_\nu + \delta_{\nu,\mu} - \delta_{\nu,\lambda}\}} | F^{(1)} | \Psi_{\{N_\nu\}} \rangle \propto \sqrt{N_\lambda} f_{\mu,\lambda} . \quad (3.2.29)$$

A questo punto, per arrivare alla (3.2.26), basta scrivere la relazione (3.2.29) per l'elemento di matrice trasposto, ciò introduce nella (3.2.29) un ulteriore fattore di proporzionalità $\sqrt{N_\mu + 1}$. Il fattore residuo può essere determinato tramite l'ovvia identità:

$$\langle \Psi_{\{\delta_{\nu,\mu}\}} | F^{(1)} | \Psi_{\{\delta_{\nu,\lambda}\}} \rangle = f_{\mu,\lambda} . \quad (3.2.30)$$

Questa formula mostra l'effetto di stimolazione delle probabilità di transizione dovuto alla statistica di Bose-Einstein. Interpretando l'operatore $F^{(1)}$ come responsabile di una transizione fra ket e bra si vede che la corrispondente ampiezza, che è proporzionale alla radice del numero delle particelle presenti nello stato bra di singola particella verso cui è avvenuta la transizione, viene amplificata appunto dalla presenza di particelle in tale stato prima della transizione. Ricordiamo che su questo effetto è basata l'emissione della radiazione stimolata nei Laser e nei Maser.

La radice del numero delle particelle nello stato iniziale indica che la probabilità della transizione considerata è proporzionale al numero di particelle presenti in tale stato, risultato naturale trattandosi di un processo a particella singola.

3.3 Spazio di Fock ed operatori di creazione e distruzione

La particolare dipendenza dai numeri d'occupazione dell'elemento di matrice calcolato al paragrafo precedente suggerisce in modo naturale la fattorizzazione del processo di transizione a particella singola in due passi; nel primo passo una particella è sottratta (distrutta) dallo stato λ con un'ampiezza proporzionale al numero d'occupazione su tale stato, nel secondo la particella è introdotta (creata) nello stato μ con ampiezza proporzionale alla radice relativo del numero d'occupazione aumentata di un'unità.

Su questa osservazione si basa l'algoritmo della seconda quantizzazione che, prendendo in considerazione variazioni del numero delle particelle, richiede un allargamento dello spazio di Hilbert in modo da poter comprendere stati di un numero qualunque di bosoni. Per far questo si introduce in primo luogo uno stato privo di particelle detto il vuoto. Noi indicheremo questo stato tramite $\Psi_{\{0\}}$ dato che in esso la successione dei numeri d'occupazione è la successione nulla.

Indicando con $\mathcal{H}^{(0)}$ lo spazio di Hilbert generato dallo stato di vuoto, con $\mathcal{H}^{(1)}$ lo spazio di singola particella e con $\mathcal{H}_S^{(N)}$ quello a N bosoni, si chiama spazio di Fock la somma cartesiana infinita

$$\mathcal{H}_S \equiv \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \bigoplus_{N=2}^{\infty} \mathcal{H}_S^{(N)} . \quad (3.3.31)$$

Ricordiamo che per somma cartesiana di spazi di Hilbert si intende lo spazio che ammette come base numerabile la successione di vettori ottenuta riordinando l'unione (in senso insiemistico) delle basi dei due spazi, per esempio alternando un elemento da una base ad uno dell'altra. Per esempio, lo spazio cartesiano a due dimensioni ha una base costituita da due elementi ciascuno dei quali costituisce la base di uno spazio unidimensionale. Per estensione dello stesso concetto si definisce la somma cartesiana infinita di spazi di Hilbert quello spazio di Hilbert la cui base numerabile è ottenuta riordinando gli elementi di una successione di basi (e quindi di successioni). Non è difficile riordinare gli elementi di una successione di successioni in un'unica sequenza numerabile in modo che, considerato un elemento di dato ordine di una qualunque successione, esso appaia ad ordine finito nel riordinamento finale. Se per esempio indichiamo con $e_{n,m}$ l'elemento n -mo della successione m -esima, possiamo definire la successione riordinata come

$$e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{1,3}, e_{2,2}, e_{3,1}, e_{1,4}, \dots . \quad (3.3.32)$$

Nel caso dello spazio di Fock la base numerabile così ottenuta è riducibile all'insieme

$$\{\Psi_{\{N_\nu\}}\} , \text{ con la condizione } \sum_{\nu} N_\nu < \infty . \quad (3.3.33)$$

Si noti che la condizione di finitezza della somma dei numeri d'occupazione è essenziale per la numerabilità della base. Infatti, per esempio, lo stato corrispondente ad una successione di 1 non è mai raggiunto nel riordinamento sopra descritto e quindi non appartiene allo spazio di Fock. Lo spazio lineare

ottenuto sopprimendo la condizione di finitezza del numero totale di particelle è uno spazio di Von Neumann e contiene un'infinità non numerabile di spazi di Hilbert.

Si noti che la precedente discussione sull'identificabilità dello spazio di Fock con uno spazio di Hilbert separabile (cioè con base numerabile) ha lo scopo di chiarire meglio il significato della somma cartesiana di infiniti spazi, ma, almeno in un ambito non relativistico, non è in alcun modo collegata all'interpretabilità dello spazio di Fock come rappresentativo degli stati di un sistema fisico. Infatti, nel caso di particelle massive non relativistiche, ciascuno spazio a N bosoni è associato ad un sistema fisico distinto e non ha senso fisico la sovrapposizione coerente di stati con massa diversa. Questo è dovuto alla regola di superselezione di Bargmann che vieta transizioni tra stati con massa diversa nei sistemi non relativistici isolati.

Siano infatti A e B i due stati tra cui ammettiamo la possibilità di una transizione; essendo il sistema isolato per l'invarianza per traslazioni si deve avere conservazione della quantità di moto $\vec{p}_A = \vec{p}_B$, ma in un sistema di riferimento in moto con velocità \vec{v} rispetto al precedente, la stessa condizione si scrive $\vec{p}_A + m_A \vec{v} = \vec{p}_B + m_B \vec{v}$. Questa seconda condizione è incompatibile con la prima se $m_A \neq m_B$, dunque in questo caso la transizione è impossibile.

L'introduzione dello spazio di Fock in un ambito non relativistico è dunque un puro algoritmo matematico nello stesso modo come lo sono gli operatori di *distruzione* definiti tramite la loro azione sugli elementi della base

$$A_\mu |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = \sqrt{N_\mu} |\Psi_{\{N_\nu - \delta_{\nu,\mu}\}}\rangle, \quad (3.3.34)$$

ed i corrispondenti coniugati hermitiani, detti operatori di *creazione*

$$A_\mu^\dagger |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = \sqrt{N_\mu + 1} |\Psi_{\{N_\nu + \delta_{\nu,\mu}\}}\rangle. \quad (3.3.35)$$

Combinando le equazioni precedenti si ha, per $\lambda \neq \mu$

$$A_\mu^\dagger A_\lambda |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = \sqrt{(N_\mu + 1) N_\lambda} |\Psi_{\{N_\nu + \delta_{\nu,\mu} - \delta_{\nu,\lambda}\}}\rangle = A_\lambda A_\mu^\dagger |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle, \quad (3.3.36)$$

mentre

$$A_\mu^\dagger A_\mu |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = N_\mu |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle \quad (3.3.37)$$

dove N_μ è l'operatore numero di particelle nello stato μ , inoltre si ha:

$$A_\mu A_\mu^\dagger |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = (N_\mu + 1) |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle \quad (3.3.38)$$

Da queste relazioni segue in primo luogo che in qualunque sottospazio a numero di particelle fisso l'operatore a singola particella $F^{(1)}$ agisce sugli stati della base ortonormale completa $\{\Psi_{\{N_\nu\}}\}$ esattamente come l'operatore

$$\sum_{\mu,\lambda} f_{\mu,\lambda} A_\mu^\dagger A_\lambda . \quad (3.3.39)$$

Dato che quest'operatore conserva il numero totale di particelle, possiamo concludere che

$$F^{(1)} = \sum_{\mu,\lambda} f_{\mu,\lambda} A_\mu^\dagger A_\lambda , \quad (3.3.40)$$

in tutto lo spazio di Fock. Questo risultato è particolarmente notevole perchè permette di esprimere direttamente ed indipendentemente dal numero totale di particelle un operatore ad una particella di cui siano noti gli elementi di matrice fra stati di particella singola. Mostriamo tra breve come la (3.3.40) sia generalizzabile al caso di operatori a più di una particella.

Sempre dalle relazioni (3.3.34) e (3.3.35) si deducono direttamente le regole di commutazione

$$[A_\mu, A_\nu^\dagger] = \delta_{\mu,\nu} \quad , \quad [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (3.3.41)$$

e che per qualunque ν :

$$A_\nu \Psi_{\{0\}} = 0 . \quad (3.3.42)$$

Dall'iterazione della (3.3.35) risulta infine che

$$|\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = \prod_{\nu} \frac{(A_\nu^\dagger)^{N_\nu}}{\sqrt{N_\nu!}} |\Psi_{\{0\}}\rangle . \quad (3.3.43)$$

Quindi gli operatori di creazione e distruzione generano un'algebra (3.3.41) che viene chiamata CCR, cioè algebra delle relazioni di commutazione canoniche. Lo stato di vuoto che soddisfa (3.3.42) genera tramite (3.3.43) una *rappresentazione di Fock* dell'algebra CCR. Cioè, gli stati costruiti tramite (3.3.43) costituiscono un sistema ortonormale di autovettori dei numeri d'occupazione identificabile con la base su cui si è costruito lo spazio di Fock. Infatti, discende direttamente dalle (3.3.41) e (3.3.42) che gli operatori di creazione e distruzione agiscono sugli stati (3.3.43) secondo le regole (3.3.34) e (3.3.35)².

²La dimostrazione di questo fatto è una semplice applicazione del teorema di Wick che verrà dimostrato nella prossima sezione (4.3.1)

Un difetto della nostra presentazione dell'algebra CCR è la sua dipendenza dalla scelta di una base per lo spazio degli stati a una particella $\mathcal{H}^{(1)}$. Gli elementi di tale base, che inizialmente abbiamo indicato con $\psi_\nu(\eta)$, vengono ora rappresentati come $A_\nu^\dagger \Psi_{\{0\}}$. La domanda che ci stiamo ponendo è come quanto costruito dipende dalla scelta della base $\{\psi_\nu(\eta)\}$. Per rispondere supponiamo di disporre di un'altra base i cui elementi corrispondano alle funzioni d'onda $\{\varphi_\nu(\eta)\}$, ν essendo nuovamente l'indice degli stati che può sempre essere identificato con un numero naturale. Evidentemente la generica $\varphi_\nu(\eta)$ può essere sviluppata in serie degli elementi della base di partenza, cioè si ha:

$$\varphi_\nu(\eta) = \sum_{\mu} \langle \psi_\mu | \varphi_\nu \rangle \psi_\mu(\eta) . \quad (3.3.44)$$

Dato che lo stato di vuoto è ovviamente indipendente dalla scelta della base di singola particella, se indichiamo con \bar{A}_ν^\dagger e \bar{A}_μ gli operatori di creazione e distruzione associati alla nuova base, φ_ν corrisponde a $\bar{A}_\nu^\dagger \Psi_{\{0\}}$. allora per la (3.3.44) si ha:

$$\bar{A}_\nu^\dagger \Psi_{\{0\}} = \sum_{\mu} \langle \psi_\mu | \varphi_\nu \rangle A_\mu^\dagger \Psi_{\{0\}} , \quad (3.3.45)$$

equazione che è evidentemente risolta da:

$$\bar{A}_\nu^\dagger = \sum_{\mu} \langle \psi_\mu | \varphi_\nu \rangle A_\mu^\dagger , \quad (3.3.46)$$

e quindi anche:

$$\bar{A}_\nu = \sum_{\mu} \langle \varphi_\nu | \psi_\mu \rangle A_\mu . \quad (3.3.47)$$

L'ultima equazione è consistente col fatto che il vuoto non è cambiato, perché esso è annichilato dagli operatori di distruzione di entrambe le basi.

Più in generale data un'algebra CCR generata da A_ν^\dagger e A_μ , gli operatori:

$$\bar{A}_\nu = \sum_{\mu} U_{\nu,\mu} A_\mu , \quad (3.3.48)$$

$$\bar{A}_\nu^\dagger = \sum_{\mu} U_{\nu,\mu}^* A_\mu^\dagger , \quad (3.3.49)$$

dove U è una matrice unitaria ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) generano la stessa algebra e forniscono una rappresentazione di Fock equivalente partendo dallo stesso stato di vuoto.

A questo punto siamo in condizioni di affrancarci completamente dalla scelta della base. Date due qualunque funzioni d'onda (due stati) di singola particella g e f possiamo definire gli operatori:

$$A(f)^\dagger = \sum_{\mu} \langle \psi_{\mu} | f \rangle A_{\mu}^\dagger \quad , \quad A(g) = \sum_{\mu} \langle g | \psi_{\mu} \rangle A_{\mu} \quad , \quad (3.3.50)$$

ottenendo subito:

$$[A(g), A(f)] = 0 \quad , \quad [A(g), A^\dagger(f)] = \langle g | f \rangle \quad , \quad (3.3.51)$$

esprimendo così le regole CCR in modo indipendente dalla scelta di una base. La rappresentazione di Fock è poi specificata dalla scelta di uno stato di vuoto tale che sia $A(f)\Psi_{\{0\}} = 0$ per qualunque f .

Con una leggera forzatura del formalismo possiamo introdurre a questo punto gli operatori di creazione e distruzione di stati localizzati. La forzatura è implicita nel fatto che tali stati non sono normalizzabili.

Riferendoci al caso di particelle quantizzate in una scatola periodica per cui abbiamo introdotto gli operatori di creazione e distruzione su stati di numero d'onda definito, porremo dunque

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{k}} \langle \vec{r} | \psi_{\vec{k}} \rangle A_{\vec{k}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} A_{\vec{k}} \quad . \quad (3.3.52)$$

Va notato che i nuovi operatori di creazione e distruzione soddisfano

$$[\Phi(\vec{r}), \Phi^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad (3.3.53)$$

di natura ben distinta dalla (3.3.41) dato che al secondo membro non appare una funzione degli indici bensì una distribuzione (misura). Questo mostra che nuovi operatori Φ e Φ^\dagger non sono in effetti veri operatori, ma piuttosto delle distribuzioni a valore operatoriale nel senso che, per esempio, per ottenere da essi un operatore di distruzione su uno stato fisico bisogna considerare espressioni del tipo

$$\int d^3r f(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \quad , \quad (3.3.54)$$

dove f è una funzione opportuna. Va anche osservato che la formula (3.3.52), trattando operatori di singola particella vale, con la ovvie varianti anche nella statistica di Fermi-Dirac.

L'esempio di applicazione della seconda quantizzazione cui più frequentemente ci riferiremo è quello ad un sistema di bosoni liberi in una scatola di

lato L per cui la base di singola particella è data da (3.2.11). Nel caso senza spin si introduce dunque il sistema di operatori di distruzione $\{A_{\vec{k}}\}$ con le regole di commutazione

$$[A_{\vec{k}}, A_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} . \quad (3.3.55)$$

D'ora in poi i commutatori non esplicitamente prescritti saranno intesi nulli.

Al limite non relativistico, se le particelle hanno massa m , l'energia cinetica corrisponde all'operatore

$$T = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}} , \quad (3.3.56)$$

mentre la densità di particella al punto \vec{R} corrisponde a

$$\rho(\vec{R}) \equiv \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r}_i - \vec{R}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{R}} A_{\vec{k}'}^\dagger A_{\vec{k}} . \quad (3.3.57)$$

Fin qui abbiamo discusso l'applicazione del formalismo di seconda quantizzazione ai soli operatori di singola particella, vediamo ora come i risultati si generalizzino al caso di operatori a k particelle, con k generico.

Ripetendo pedestremente il calcolo fatto per gli operatori a una particella e tenendo conto della (3.1.5) abbiamo

$$\begin{aligned} O^{(k)} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^N o_S^{(k)} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^N o_{S, \mu_1, \dots, \mu_k}^{(k)} \\ &\prod_{j=1, j \neq i_s, s=1, \dots, k}^N \psi_{\nu_j}(\eta_j) \prod_{l=1}^k \psi_{\mu_l}(\eta_{i_l}) \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

dove si è indicato con:

$$o_{S, \mu_1, \dots, \mu_k}^{(k)} = \int \prod_{s=1}^k d\eta_s \psi_{\mu_1}^*(\eta_1) \dots \psi_{\mu_k}^*(\eta_k) o_S^{(k)} \psi_{\nu_1}(\eta_1) \dots \psi_{\nu_k}(\eta_k) , \quad (3.3.59)$$

l'elemento di matrice dell'operatore simmetrico a k particelle $o_S^{(k)}$ fra due prodotti di k funzioni d'onda di singola particella. Applicando ad ambo i membri della (3.3.58) l'operatore di simmetrizzazione \mathcal{S} definito in (3.2.12) e commutandolo con $O^{(k)}$, che è simmetrico, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\prod_{\nu} N_{\nu}!} O^{(k)} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)} \\ &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^N o_{S, \mu_1, \dots, \mu_k}^{(k)} \sqrt{\prod_{\nu} (N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu))!} \Psi_{\{N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu)\}}^{(S)} , \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

dove si è posto:

$$L(\nu) = \sum_{a=1}^k \delta_{\nu, \nu_{i_a}} \quad , \quad M(\nu) = \sum_{b=1}^k \delta_{\nu, \mu_b} \quad (3.3.61)$$

e si è ommesso un $\sqrt{N!}$ in entrambi i membri.

Come nel caso degli operatori a una particella si tratta ora di scambiare la somma sugli indici di particella $\sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^N$ con la somma sugli indici di stato, diciamo $\sum_{\nu_1, \dots, \nu_k}$. Questi indici di stato sono evidentemente scelti fra quelli presenti nel prodotto di funzioni d'onda di singola particella da cui siamo partiti in (3.3.58). Evidentemente, a causa della simmetrizzazione, dopo la sostituzione va perduta ogni memoria della corrispondenza, presente nel prodotto da cui siamo partiti, tra l'indice di stato e quello di particella. Quindi i singoli addendi dipendono solo da come sono distribuiti gli indici di stato, cioè da $N_\nu, L(\nu)$ e $M(\nu)$. Pertanto nella somma sugli indici i singoli addendi appaiono con una certa molteplicità che è calcolabile considerando in quanti modi diversi si può estrarre un insieme ordinato di k indici di stato, distribuiti secondo la successione $\{L(\nu)\}$, definita in modo analogo a (3.3.61), cioè $L(\nu) = \sum_{j=1}^k \delta_{\nu, \nu_j}$, da un insieme di indici distribuiti secondo la distribuzione $\{N_\nu\}$ con $\sum_\nu N_\nu = N$. Evidentemente si ha $\sum_\nu L(\nu) = k$. Calcolando questa molteplicità va ricordato che in (3.3.61) la somma sugli indici di particella è ordinata crescente, mentre quella sugli indici di stato non lo è. Per questo, in primo luogo, è conveniente abbandonare l'ordine crescente degli indici di particella. Questo va compensato inserendo un fattore $1/k!$. Resta poi da considerare la molteplicità di cui sopra. Ricordando che l'ordine di estrazione dei k indici è rilevante, si trova subito che la molteplicità è eguale al prodotto dei numeri delle *disposizioni* di N_ν elementi a $L(\nu)$ a $L(\nu)$, cioè $\prod_\nu (N_\nu! / (N_\nu - L(\nu))!)$ dove, come sopra detto, N_ν da la distribuzione degli indici nell'insieme da cui si estrae mentre $L(\nu)$ quella nell'insieme estratto.

A questo punto dalla (3.3.61) otteniamo:

$$\begin{aligned} O^{(k)} \Psi_{\{N_\nu\}}^{(S)} &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^N O_{S, \mu_1, \dots, \mu_k; \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_k}}^{(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} O_{S, \mu_1, \dots, \mu_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k}^{(k)} \\ &\quad \sqrt{\frac{\prod_\nu (N_\nu - L(\nu) + M(\nu))!}{\prod_\sigma N_\sigma!}} \Psi_{\{N_\nu - L(\nu) + M(\nu)\}}^{(S)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{\tau} \frac{N_{\tau}!}{(N_{\tau} - L(\tau))!} \sqrt{\frac{\prod_{\nu} (N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu))!}{\prod_{\sigma} N_{\sigma}!}} \Psi_{\{N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu)\}}^{(S)} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k} O_{S, \mu_1, \dots, \mu_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k}^{(k)} \\
& \frac{\sqrt{\prod_{\tau} N_{\tau}! \prod_{\nu} (N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu))!}}{\prod_{\sigma} (N_{\sigma} - L(\sigma))!} \Psi_{\{N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu)\}}^{(S)} \quad (3.3.62)
\end{aligned}$$

L'identità da verificare è:

$$O^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k} o_{S, \mu_1, \dots, \mu_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k}^{(k)} \prod_{i=1}^k A_{\mu_i}^{\dagger} \prod_{j=1}^k A_{\lambda_j} . \quad (3.3.63)$$

Effettivamente dalle (3.3.34) e (3.3.35) si ha:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^k A_{\mu_i}^{\dagger} \prod_{j=1}^k A_{\lambda_j} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)} = \prod_{\mu} (A_{\mu}^{\dagger})^{M(\mu)} \prod_{\sigma} (A_{\sigma})^{L(\sigma)} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(S)} \\
&= \frac{\sqrt{\prod_{\tau} N_{\tau}! \prod_{\nu} (N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu))!}}{\prod_{\sigma} (N_{\sigma} - L(\sigma))!} \Psi_{\{N_{\nu} - L(\nu) + M(\nu)\}}^{(S)} \quad (3.3.64)
\end{aligned}$$

da cui l'identità (3.3.63) risulta dimostrata.

Una verifica del risultato ottenuto può essere fatta utilizzando, per costruire operatori, ad esempio, a due particelle, l'algebra generata da operatori a singola particella. Per semplicità illustriamo il metodo analizzando il prodotto di due operatori di questo tipo, cioè

$$F^{(1)} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \quad (3.3.65)$$

e

$$G^{(1)} = \sum_{i=1}^N g(\xi_i) , \quad (3.3.66)$$

avremo

$$\begin{aligned}
F^{(1)} G^{(1)} &= \sum_{i,j=1}^N f(\xi_i) g(\xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^N f(\xi_i) g(\xi_i) + \sum_{i < j=1}^N (f(\xi_i) g(\xi_j) + g(\xi_i) f(\xi_j)) \quad (3.3.67)
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione abbiamo distinto i termini in cui i due operatori f e g agiscono sulla stessa particella, generando un nuovo operatore a singola particella, da quelli in cui essi, agendo su particelle diverse, contribuiscono ad un operatore a due particelle.

Confrontiamo ora (3.3.67) con la sua traduzione nel formalismo della seconda quantizzazione

$$\begin{aligned}
F^{(1)}G^{(1)} &= \sum_{\mu,\lambda} f_{\mu,\lambda} A_{\mu}^{\dagger} A_{\lambda} \sum_{\nu,\rho} g_{\nu,\rho} A_{\nu}^{\dagger} A_{\rho} \\
&= \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} A_{\mu}^{\dagger} \left([A_{\lambda}, A_{\nu}^{\dagger}] + A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda} \right) A_{\rho} \\
&= \sum_{\mu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\lambda,\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\rho} + \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda} A_{\rho} , \quad (3.3.68)
\end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzata la (3.3.41). Esaminando l'espressione finale in (3.3.68), si riconosce subito nel primo termine l'operatore a singola particella corrispondente al primo termine nell'espressione finale in (3.3.67), infatti $\sum_{\lambda} f_{\mu,\lambda} g_{\lambda,\rho}$ è l'elemento di matrice fra gli stati λ e μ del prodotto fg . Possiamo allora concludere che vale l'identità fra operatori a due particelle

$$\begin{aligned}
&\sum_{i < j=1}^N (f(\xi_i) g(\xi_j) + g(\xi_i) f(\xi_j)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} [f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} + g_{\mu,\lambda} f_{\nu,\rho}] A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda} A_{\rho} . \quad (3.3.69)
\end{aligned}$$

A secondo membro abbiamo tenuto conto della simmetria nello scambio degli indici che discende dalla commutatività degli operatori di creazione o di distruzione.

È ora possibile immaginare di iterare questo confronto passando ad operatori a tre o più particelle o ad operatori a due particelle di tipo più generale di quello che appare nella (3.3.67). In ogni caso alla decomposizione del prodotto di operatori in rappresentazione di Schrödinger corrisponderà un'analoga decomposizione in seconda quantizzazione. Questa considerazione ci autorizza ad evincere dalla (3.3.69) una regola generale per gli operatori a due particelle. Osservando che

$$\begin{aligned}
&\int d\eta_1 d\eta_2 \psi_{\mu}^*(\eta_1) \psi_{\nu}^*(\eta_2) (f(\xi_1) g(\xi_2) + g(\xi_1) f(\xi_2)) \psi_{\lambda}(\eta_1) \psi_{\rho}(\eta_2) \\
&= f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} + g_{\mu,\lambda} f_{\nu,\rho} , \quad (3.3.70)
\end{aligned}$$

scriveremo per il generico operatore a due particelle

$$F^{(2)} = \sum_{i < j=1}^N f(\xi_i, \xi_j) \quad (3.3.71)$$

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu, \lambda, \rho} f_{\mu\nu, \lambda\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda} A_{\rho} , \quad (3.3.72)$$

dove si è posto

$$f_{\mu\nu, \lambda\rho} \equiv \int d\eta_1 d\eta_2 \psi_{\mu}^*(\eta_1) \psi_{\nu}^*(\eta_2) f(\xi_1, \xi_2) \psi_{\lambda}(\eta_1) \psi_{\rho}(\eta_2) . \quad (3.3.73)$$

L'esempio più significativo di operatore a due particelle è l'energia potenziale di interazione a due corpi che, per i bosoni senza spin quantizzati in una scatola a cui sono stati riferiti gli esempi precedenti, corrisponde a

$$V = \sum_{i < j=1}^N v(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} \int d^3r v(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} A_{\vec{k}+\vec{q}}^{\dagger} A_{\vec{k}'-\vec{q}}^{\dagger} A_{\vec{k}'} A_{\vec{k}} . \quad (3.3.74)$$

L'utilità degli operatori funzione d'onda sopra introdotti risulta chiaramente dalle nuove espressioni per l'operatore densità

$$\rho(\vec{R}) = \Phi^{\dagger}(\vec{R}) \Phi(\vec{R}) , \quad (3.3.75)$$

e per l'energia potenziale

$$V = \int d^3r d^3r' v(\vec{r} - \vec{r}') \Phi^{\dagger}(\vec{r}) \Phi^{\dagger}(\vec{r}') \Phi(\vec{r}') \Phi(\vec{r}) . \quad (3.3.76)$$

Inoltre l'energia cinetica si scrive

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r \Phi^{\dagger}(\vec{r}) \nabla^2 \Phi(\vec{r}) . \quad (3.3.77)$$

Insomma, nel formalismo della seconda quantizzazione gli operatori possono essere costruiti sostituendo sistematicamente nei valori medi in rappresentazione di Schrödinger la funzione d'onda di singola particella con l'operatore Φ . È questa sostituzione di una funzione d'onda con un operatore che ha suggerito il nome di seconda quantizzazione.

Un altro operatore di interesse è la matrice densità già trattata nella seconda e nella terza parte. Se consideriamo un gas di bosoni non interagenti

a temperatura $1/(k_B\beta)$ e con potenziale chimico $\mu < 0$ e scegliamo una base di singola particella che diagonalizza l'Hamiltoniano i cui autovalori sono ϵ_ν con $\nu = 1 \cdot \infty$, troviamo:

$$\rho = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left((1 - e^{-\beta(\epsilon_\nu - \mu)}) \exp(-\beta(\epsilon_\nu - \mu) A_\nu^\dagger A_\nu) \right) . \quad (3.3.78)$$

Nel caso che i bosoni siano quantizzati in una scatola con condizioni al bordo periodiche e abbiano massa m si ha

$$\rho = \prod_{\vec{k}} \left((1 - e^{-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)}) \exp(-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu) A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}}) \right) . \quad (3.3.79)$$

A sua volta il potenziale chimico è fissato in termini del numero medio di particelle N dalla condizione:

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\exp(\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)) - 1} = N . \quad (3.3.80)$$

Ad alte temperature la (3.3.80) diventa:

$$\exp(\beta\mu) \sum_{\vec{k}} \exp(-\beta\frac{\hbar^2 k^2}{2m}) = N , \quad (3.3.81)$$

cioè a grande volume Ω

$$\exp(\beta\mu) = \frac{N}{\Omega} \left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{3/2} , \quad (3.3.82)$$

3.3.1 Teorema di Wick

³ Stabilita la struttura dei vettori di stato e degli operatori risulta evidente che il generico calcolo dell'elemento di matrice di un prodotto di operatori si riduce a quello del valor medio nel vuoto di un prodotto di operatori di creazione e distruzione. Se distinguiamo gli operatori di creazione e distruzione

³Si vedano anche [8] (pgg. 163-64), [7] (§4.3), [9] (§4.2.1)

tramite un apice, cioè ponendo $\sigma = \pm$ e $A_\nu^+ = A_\nu^\dagger$ e $A_\nu^- = A_\nu$ e indichiamo semplicemente con Ψ_0 lo stato di vuoto $\Psi_{\{0\}}$, dobbiamo calcolare:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle, \quad (3.3.83)$$

dove il prodotto degli operatori è ordinato da sinistra a destra. È chiaro che l'ordine dei fattori è rilevante perché gli operatori non commutano, è altresì chiaro che questo valor medio si annulla se l'ultimo fattore a destra del prodotto è un operatore di distruzione o il primo a sinistra di creazione, per questo si usa ridurre gli operatori in ordine *normale* in cui tutti gli operatori di distruzione stanno alla destra di tutti quelli di creazione. Per un prodotto in ordine normale si usa il simbolo $:\prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k}:$. Evidentemente l'ordine scelto nell'ambito dei prodotti di operatori solamente di creazione o distruzione è irrilevante. Il teorema di Wick stabilisce la relazione esistente fra un qualunque prodotto e quello in ordine normale, da questa si calcola immediatamente l'espressione (3.3.83) perché ovviamente il solo operatore in ordine normale che ha valor medio nel vuoto non nullo è l'identità. Per semplicità noi qui ci limiteremo ad analizzare direttamente l'espressione Eq.(3.3.83).

È chiaro da Eq.(3.3.42) che (3.3.83) è nulla se $\sigma_1 = +$ o $\sigma_K = -$, supponiamo quindi che $\sigma_1 = -$, usando la regola CCR, Eq.(3.3.41), possiamo spostare $A_{\nu_1}^{\sigma_1}$ commutandolo con gli operatori che si trovano alla sua destra, se questi sono operatori di distruzione lo scambio è banale, altrimenti esso produce un residuo consistente in un prodotto con due operatori in meno. Questo, espresso in una formula, da:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle &= \delta_{\sigma_1, -} \left[\sum_{j=2}^K \delta_{\nu_j, \nu_1} \delta_{\sigma_j, +} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j, =2}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle \right. \\ &\left. + \langle \Psi_0 \left(\prod_{k=1}^{K-1} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) A_{\nu_1}^{\sigma_1} \Psi_0 \rangle \right] = \delta_{\sigma_1, -} \sum_{j=2}^K \delta_{\nu_j, \nu_1} \delta_{\sigma_j, +} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j, =2}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.84)$$

Questa espressione può essere applicata a ciascuno dei valori medi che appaiono nel secondo membro della (3.3.85) ripetendo l'operazione finché non si resta con l'operatore identità, questo peraltro può avvenire solo se $K = 2M$ è pari e il prodotto contiene operatori di creazione e distruzione in egual numero e ordinati in modo tale che ogni operatore di distruzione abbia alla sua destra almeno un operatore di creazione. Per esprimere l'espressione finale

del valor medio si introduce la *contrazione*:

$$C_{1,2} \equiv \delta_{\nu_1, \nu_2} \delta_{\sigma_1, -\delta_{\sigma_2, +}} , \quad (3.3.85)$$

si ottiene così:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle = \sum_{j_1=2}^{2M} C_{1,j_1} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j_1, k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle . \quad (3.3.86)$$

Ora applichiamo la Eq.(3.3.86) al caso $M = 1$, otteniamo:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^2 A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle = C_{1,2} . \quad (3.3.87)$$

Se $M = 2$ troviamo, utilizzando Eq.(3.3.87) :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle &= \sum_{j_1=2}^4 C_{1,j_1} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j_1, k=2}^4 A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle \\ C_{1,2} C_{3,4} + C_{1,3} C_{2,4} + C_{1,4} C_{2,3} . \end{aligned} \quad (3.3.88)$$

Proseguendo ancora sulla stessa linea si ottiene la somma di tutti i prodotti possibili di contrazioni di M coppie di operatori, cioè, se l'insieme dei numeri naturali compresi fra 1 e $2M$ viene ripartito nel prodotto insiemistico di M coppie ordinate (i_l, j_l) , $l = 1 \cdot \cdot M$ con $i_l < j_l$ e la somma su tutte le scelte possibili viene indicata appunto tramite $\sum_{(i_1, j_1) \cdot \cdot (i_M, j_M)}$, si ha infine:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle = \sum_{(i_1, j_1) \cdot \cdot (i_M, j_M)} \prod_{l=1}^M C_{i_l, j_l} . \quad (3.3.89)$$

Per lo studente che, per caso sventurato, trovi ostico il concetto di ripartizione di un insieme di $2M$ elementi in M coppie e la possibilità di eseguire ciò in molti modi diversi presentiamo le seguenti considerazioni.

- Se $M = 1$ l'insieme si identifica con una coppia e quindi la ripartizione è banale e eseguibile in un solo modo $(1, 2)$.
- Ammettiamo che $\mathcal{N}(M)$ sia il numero delle ripartizioni diverse fra loro di $2M$ elementi ($\mathcal{N}(1) = 1$).

- Per M generico, si considerino le possibili coppie formate col primo elemento $(1, j)$, $j = 2, \dots, 2M$, si hanno $2M - 1$ scelte diverse. I restanti $2(M - 1)$ elementi potranno ripartirsi in coppie in $\mathcal{N}(M - 1)$ modi diversi.
- Moltiplicando il numero delle scelte della prima coppia $(1, j)$ per il numero delle ripartizioni degli elementi restanti troviamo $\mathcal{N}(M) = (2M - 1)\mathcal{N}(M - 1)$ e quindi, in base a quanto già detto, si ha: $\mathcal{N}(M) = (2M - 1)!! = (2M)!/2^M M!$.

Si spera che questo chiarisca il significato della ripartizione in coppie.

Dovrebbe essere evidente che il metodo di conteggio delle ripartizioni identifica anche un algoritmo di identificazione delle medesime.

Si lascia allo studente diligente il compito di verificare tramite l'Eq.(3.3.89) che i vettori dati in Eq.(3.3.43) costituiscono un insieme ortonormale.

È opportuno notare a questo punto che la relazione (3.3.89) è conseguenza di una relazione più generale che corrisponde al teorema di Wick e che si esprime come:

$$\prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} = \sum_{m=1}^{int(K/2)} \sum_{(i_1, j_1) \dots (i_m, j_m)} \prod_{l=1}^m C_{i_l, j_l} : \prod_{k \notin \{i_a, j_b\}, k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} : , \quad (3.3.90)$$

dove $int(K/2)$ sta per la parte intera di $K/2$, e il prodotto di operatori è in ordine normale ed esclude gli operatori del prodotto originale corrispondenti agli indici i e j coinvolti nelle contrazioni.

Quindi il teorema di Wick fornisce un algoritmo generale per il calcolo di elementi di matrice e in particolare valori medi su stati puri di un sistema di molti corpi. Nelle applicazioni fisiche capita spesso di dover calcolare valori medi all'equilibrio termico e questo nell'ambito del formalismo di seconda quantizzazione equivale al calcolo di espressioni del tipo:

$$Tr \left(\rho \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) , \quad (3.3.91)$$

dove ρ è la matrice densità.

Mentre, come abbiamo visto, a temperatura nulla il calcolo del valor medio sul vuoto comporta lo spostamento degli operatori di distruzione verso destra e quelli di creazione verso sinistra fino a raggiungere lo stato di vuoto e

il risultato si riduce al prodotto dei commutatori non nulli (Teorema di Wick), ora la situazione è differente perché il vuoto non appare nella formula.

Si può però utilizzare un altro teorema dovuto a Block e De Dominicis. Il teorema è utile nel nostro caso e, a maggior ragione, nel caso in cui le particelle siano interagenti e i valori medi si calcolino tramite sviluppi perturbativi⁴.

Se facciamo riferimento alla seconda quantizzazione nella base degli autovettori del Hamiltoniano e ci riferiamo, eventualmente salvo correzioni perturbative, a un gas di bosoni non interagenti, la matrice densità è data in Eq.(3.3.78) quindi $H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} A_{\nu}^{\dagger} A_{\nu}$ e dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} & \prod_{\tau=1}^{\infty} (1 - e^{-\beta(\epsilon_{\tau} - \mu)}) Tr \left(\prod_{\nu=1}^{\infty} \exp(-\beta(\epsilon_{\nu} - \mu) A_{\nu}^{\dagger} A_{\nu}) \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &= \prod_{\tau=1}^{\infty} (1 - e^{-\beta(\epsilon_{\tau} - \mu)}) Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &\equiv \frac{1}{Z} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) . \end{aligned} \quad (3.3.92)$$

Nuovamente, dato che la matrice densità commuta col numero totale delle particelle il valor medio è nullo a meno che K sia pari, $K = 2M$, e $n_+ = n_- = M$, cioè il numero degli operatori di creazione eguagli quello dei distruttori. Detto ciò iniziamo l'analisi considerando il caso $K = 2$ cioè $Tr(\rho A_{\nu}^{\dagger} A_{\rho})$. Il calcolo si basa sulle regole di commutazione:

$$\begin{aligned} \exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu}^{\sigma} &= e^{-\sigma\beta(\epsilon_{\nu} - \mu)} A_{\nu}^{\sigma} \exp(-\beta(H - \mu N)) , \\ A_{\nu}^{\sigma_1} A_{\rho}^{\sigma_2} &= A_{\rho}^{\sigma_2} A_{\nu}^{\sigma_1} + \sigma_2 \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \delta_{\nu, \rho} , \end{aligned} \quad (3.3.93)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} & Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) = e^{-\sigma_1\beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(A_{\nu_1}^{\sigma_1} \exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) \\ &= e^{-\sigma_1\beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_2}^{\sigma_2} A_{\nu_1}^{\sigma_1} \right) \\ &= \sigma_1 \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \delta_{\nu_1, \nu_2} e^{-\sigma_1\beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \right) \\ &+ e^{-\sigma_1\beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) . \end{aligned} \quad (3.3.94)$$

⁴[10] (Part III, Cap. 1 §4)

Dall'ultima equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right)}{Z} &\equiv Tr \left(\rho A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) \\ &= \sigma_1 \frac{\delta_{\nu_1, \nu_2} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}}{e^{\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} - 1} \equiv C(\beta)_{1,2} . \end{aligned} \quad (3.3.95)$$

Per $C(\beta)_{1,2}$ si ha l'espressione equivalente scritta in termini della distribuzione di Bose ($\bar{N}_\nu = 1/\exp(\beta(\epsilon_\nu - \mu)) - 1$):

$$C(\beta)_{1,2} = \delta_{\nu, \rho} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \frac{(1 - \sigma_1)(1 + \bar{N}_\nu) + (1 + \sigma_1)\bar{N}_\nu}{2} . \quad (3.3.96)$$

Come nel caso del teorema di Wick chiamiamo $C(\beta)_{1,2}$ *contrazione* e osserviamo che la formula precedente fornisce il valore \bar{N}_ν per la contrazione $A_\nu^\dagger A_\nu$ e in $1 + \bar{N}_\nu$ per quella nell'ordine opposto.

Quanto abbiamo trovato nel caso di un prodotto di due operatori è ovvio, ma può essere generalizzato al caso di $2M$ operatori usando in modo ricorsivo la relazione:

$$\begin{aligned} &Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &= e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(A_{\nu_1}^{\sigma_1} \exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &= e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \left(\prod_{k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) A_{\nu_1}^{\sigma_1} \right) = e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} \\ &\sum_{j=2}^{2n} \sigma_1 \delta_{\nu_1, \nu_j} \delta_{\sigma_1, -\sigma_j} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k \neq j, k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &+ e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) , \end{aligned} \quad (3.3.97)$$

che diventa, dividendo per Z :

$$\begin{aligned} Tr \left(\rho \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) &= \frac{\sigma_1}{e^{\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} - 1} \sum_{j=2}^{2n} \delta_{\nu_1, \nu_j} \delta_{\sigma_1, -\sigma_j} Tr \left(\rho \prod_{k \neq j, k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) \\ &= \sum_{j=2}^{2M} C(\beta)_{1,j} Tr \left(\rho \prod_{k \neq j, k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) . \end{aligned} \quad (3.3.98)$$

A questo punto appare evidente la stretta analogia fra la formula in Eq.(3.3.98) e la prima riga della Eq.(3.3.86) da cui è facile concludere che il valor medio che stiamo calcolando soddisfa una elazione identica alla Eq.(3.3.89) modulo la sostituzione delle contrazioni $C_{i,j}$ date in Eq.(3.3.85) con le contrazioni $C(\beta)_{i,j}$ fornite in Eq.(3.3.96), cioè:

$$Tr \left(\rho \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) = \sum_{(i_1, j_1) \dots (i_M, j_M)} \prod_{l=1}^M C(\beta)_{i_l, j_l} . \quad (3.3.99)$$

È evidente quanto questo risultato sia utile per i calcoli sui sistemi all'equilibrio termico.

3.4 Esercizi

1. L'operatore di distruzione di un bosone al punto \vec{r} è dato, in rappresentazione di Schrödinger, da

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} A_{\vec{p}} ,$$

calcolare, per $t > 0$ la funzione di correlazione

$$\left(\Psi_0, \Phi(\vec{r}, t) \Phi^\dagger(\vec{r}', 0) \Psi_0 \right)$$

supponendo i bosoni liberi e di massa m e identificando lo stato Ψ_0 con lo stato di vuoto. Si ponga $\int d\vec{p} e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ e si proceda completando i quadrati.

(Sol: $\left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m\vec{r}^2}{2\hbar t}}$)

2. Dato uno stato rappresentato dal vettore Ψ_s e l'operatore densità di particella $\rho(\vec{R}) = \Phi^\dagger(\vec{R})\Phi(\vec{R})$, si chiama funzione di correlazione della densità relativa allo stato s l'espressione

$$G(\vec{R}) = \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \Psi_s \rangle \langle \Psi_s, \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle .$$

Calcolare il valore della funzione G nel caso in cui lo stato s è quello di N_1 e N_2 bosoni identici con numeri d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 rispettivamente,

quantizzati in una scatola di lato L con condizioni al bordo periodiche e nel limite $L \rightarrow \infty$ con $N_i/L^3 \equiv \rho_i$ costanti.

(Sol: $G(\vec{R}) = \delta(\vec{R})(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1\rho_2 \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{R})$.)

3. Facendo riferimento all'esercizio precedente (2) si calcoli il valore di

$$F(\vec{R}) = \langle \Psi_s, \rho(\vec{R})\Psi_s \rangle - \frac{1}{L^3} \int d\vec{r} \langle \Psi_s, \rho(\vec{r})\Psi_s \rangle$$

nel caso in cui lo stato Ψ_s corrisponda a N bosoni nello stesso stato di singola particella: $1/\sqrt{2}(|\vec{k}_1\rangle + |\vec{k}_2\rangle)$. Si confronti il risultato con quello dell'esercizio precedente nello stesso limite: $L \rightarrow \infty$ con $N/L^3 \equiv \rho$ costante.

(Sol: Lo stato quantistico in questo caso è dato da; $|\Psi\rangle_s = 1/\sqrt{2^N N!} (A_{\vec{k}_1}^\dagger + A_{\vec{k}_2}^\dagger)^N |\Psi_0\rangle = \sqrt{N!/2^N} \sum_{M=0}^N / \sqrt{M!(N-M)!} \{M\delta_{\vec{k},\vec{k}_1} + (N-M)\delta_{\vec{k},\vec{k}_2}\}$. Usando l'espressione (3.3.57) per $\rho(\vec{R})$ e considerando che:

$A_{\vec{q}}|\Psi\rangle_s = \sqrt{N!/2^N} \sum_{M=0}^{N-1} / \sqrt{M!(N-M-1)!} [\delta_{\vec{q},\vec{k}_1} + \delta_{\vec{q},\vec{k}_2}] \{M\delta_{\vec{k},\vec{k}_1} + (N-M-1)\delta_{\vec{k},\vec{k}_2}\}$ si trova $F(\vec{R}) = \rho \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{R})$. Il termine d'interferenza, che nel problema precedente era quadratico nelle densità, è lineare nel nostro caso. Si passa dall'interferenza a due fotoni a quella, ben nota, a fotone singolo)

4. Gli stati di singola particella di un sistema di bosoni identici sono ordinati secondo gli interi positivi, Ψ_0 è lo stato di vuoto. Calcolare l'elemento di matrice fra lo stato

$$(a_3^\dagger)^3 (a_2^\dagger)^2 \Psi_0$$

e lo stato

$$(a_3^\dagger)^2 (a_2^\dagger)^3 \Psi_0$$

dell'operatore

$$g \sum_{n>1} a_{n-1}^\dagger a_n .$$

(Sol: 36g)

5. Per un sistema di bosoni identici in una dimensione i cui stati sono distinti da un unico numero quantico intero ed a_n ($-\infty < n < +\infty$)

sono gli operatori di distruzione, è data una successione di operatori non hermitiani:

$$J_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (n + 2i) a_{n+i}^\dagger a_i$$

con:

$$J_n^\dagger = J_{-n} .$$

Mostrare che gli operatori dati verificano un sistema di relazioni di commutazione del tipo:

$$[J_n, J_m] = C_{n,m} J_{n+m}$$

e calcolare $C_{n,m}$.

(Sol: $C(n, m) = 2(m - n)$)

6. Si valuti il valor medio dell'operatore $N_n = a_n^\dagger a_n$ per un sistema di bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana impertubata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

e all'equilibrio statistico con temperatura $T = 1/(k\beta)$ e potenziale chimico $\mu < 0$.

(Sol: Si tratta di calcolare $Tr(\rho N_n)$ dove la matrice densità ρ si deduce dalla (3.3.79) $\rho = \prod_{n=0}^{\infty} ((1 - \exp(-\beta(\omega n - \mu))) \exp(-\beta N_n(\omega n - \mu)))$. Usando $\sum_{N=0}^{\infty} N \exp(-\alpha N) = \exp(-\alpha)/(1 - \exp(-\alpha))^2$ si trova il risultato ben noto $\bar{N}_n = 1/(\exp(\beta(\omega n - \mu)) - 1)$)

7. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana impertubata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda(a_0^\dagger - a_1^\dagger)^2(a_0 - a_1)^2.$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\Delta E = \lambda N(N - 1) \left[1 - \frac{\lambda(4N-3)}{\omega} \right]$)

8. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda(a_0^\dagger - a_1^\dagger)^2(a_0 - a_1)^2.$$

Se il sistema è all'equilibrio termico a temperatura $1/(\beta k)$ con $\beta\omega \gg 1$ calcolare la correzione termica all'energia del sistema fino al primo ordine perturbativo e in $\exp(-\beta\omega)$.

(Sol: Nell'approssimazione considerata la matrice densità del sistema è $\rho = (|F\rangle\langle F| + \exp(-\beta\omega)|I\rangle\langle I|)/(1 + \exp(-\beta\omega))$ con $|F\rangle = |N\delta_{n,0}\rangle$ e $|I\rangle = |(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,1}\rangle$ il valor medio di H_0 è $\text{Tr}(\rho H_0) = (\omega \exp(-\beta\omega))/(1 + \exp(-\beta\omega)) \simeq \omega \exp(-\beta\omega)$ e quello di V è $(\langle F|V|F\rangle + \exp(-\beta\omega)\langle I|V|I\rangle)/(1 + \exp(-\beta\omega)) = \lambda(N(N-1) + \exp(-\beta\omega)(N-1)(N+2))/(1 + \exp(-\beta\omega)) \simeq \lambda(N-1)(N+2\exp(-\beta\omega))$. Va notato che si è usata la distribuzione di Gibbs canonica e che, considerando ω costante e finito (non infinitesimo), il risultato non è riconducibile a quello che si troverebbe usando la distribuzione di Bose e una distribuzione di livelli continua.)

9. Si consideri un sistema di bosoni in una dimensione di cui all'esercizio precedente (8), si calcoli la correzione all'energia dello stato $|N_0 = N, N_1 = 1\rangle$ fino al secondo ordine perturbativo e la si confronti con quella relativa allo stato fondamentale di N particelle.

(Sol: $\Delta E = \lambda N(N+3) - \frac{\lambda^2(4N^3 - N^2 - 3N)}{\omega}$ quindi lo spostamento dell'energia dello stato di singola particella con $n=1$ è $\Delta E_1 = 2\lambda N + \frac{\lambda^2 N(6N+4)}{\omega}$)

10. Si ha un gas di N Bosoni in un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare ω . Assumendo che i bosoni non interagiscano fra loro scrivere l'Hamiltoniano del gas in funzione degli operatori di distruzione A_n , riferiti alla base degli stati stazionari dell'oscillatore di cui n è il numero quantico principale, e dei corrispondenti coniugati Hermitiani. Descrivere in seconda quantizzazione lo stato fondamentale del gas e calcolarne l'energia. Descrivere inoltre i primi tre stati eccitati calcolandone l'energia.

Assumendo invece che i bosoni interagiscano fra loro tramite l'operatore

$$V = \frac{g}{2}(A_0^\dagger + A_1^\dagger + A_2^\dagger)^2(A_0 + A_1 + A_2)^2$$

calcolare la variazione dell'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in g e al primo ordine in g la variazione dell'energia dei primi tre stati eccitati.

(Sol: Lo stato fondamentale è $(A^\dagger)^N|0\rangle/\sqrt{N!} = |N\delta_{n,0}\rangle \equiv |F\rangle$ e ha energia $E_F = N\hbar\omega/2$, il primo stato eccitato è $|1\rangle \equiv |(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,1}\rangle$ e ha energia $E_1 = E_F + \hbar\omega$ il secondo e il terzo sono $|2\rangle \equiv |(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,2}\rangle$ e $|3\rangle \equiv |(N-2)\delta_{n,0} + 2\delta_{n,1}\rangle$ e sono degeneri $E_2 = E_3 = E_F + 2\hbar\omega$.

Calcolando $V|F\rangle$ si ha $V|F\rangle = \frac{g}{2}(A_0^\dagger + A_1^\dagger + A_2^\dagger)^2 A_0^2|F\rangle = \frac{g\sqrt{N(N-1)}}{2}(A_0^\dagger + A_1^\dagger + A_2^\dagger)^2|(N-2)\delta_{n,0}\rangle = (gN(N-1)/2)|F\rangle + 2\frac{g\sqrt{N(N-1)}}{2}\sqrt{N-1}(|(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,1}\rangle + |(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,2}\rangle) + \sqrt{2}\frac{g\sqrt{N(N-1)}}{2}(|(N-1)\delta_{n,0} + 2\delta_{n,1}\rangle + |(N-1)\delta_{n,0} + 2\delta_{n,2}\rangle) + 2\frac{g\sqrt{N(N-1)}}{2}|(N-1)\delta_{n,0} + \delta_{n,1} + \delta_{n,2}\rangle$ Si hanno quindi le correzioni all'energia dello stato fondamentale al primo ordine $E_F^{(1)} = (gN(N-1)/2)$ e al secondo ordine, tenendo conto dei 5 diversi stati intermedi $E_F^{(2)} = -(g^2N(N-1)/4)[4(N-1)/(\hbar\omega) + 4(N-1)/(2\hbar\omega) + 2/(2\hbar\omega) + 2/(4\hbar\omega) + 4/(3\hbar\omega) = -(g^2N(N-1)/4\hbar\omega)[6N - 19/6]$

Introducendo l'operatore $\mathcal{A} \equiv A_0 + A_1 + A_2$ si osserva che dati due stati $|I\rangle$ e $|J\rangle$ l'elemento di matrice $\langle I|V|J\rangle = (g/2)\langle I|(\mathcal{A}^\dagger)^2\mathcal{A}|J\rangle$. Calcoliamo pertanto $\mathcal{A}|1\rangle = (A_0^2 + 2A_0A_1)|1\rangle = \sqrt{(N-1)(N-2)}|(N-3)\delta_{n,0} + \delta_{n,1}\rangle + 2\sqrt{N-1}|(N-2)\delta_{n,0}\rangle$ quindi la variazione dell'energia E_1 al primo ordine è data da $(g/2)(N-1)(N+2)$

Il secondo e il terzo livello sono degeneri e quindi vanno considerati insieme. $\mathcal{A}|2\rangle = (A_0^2 + 2A_0A_2)|2\rangle = \sqrt{(N-1)(N-2)}|(N-3)\delta_{n,0} + \delta_{n,2}\rangle + 2\sqrt{N-1}|(N-2)\delta_{n,0}\rangle$, $\mathcal{A}|3\rangle = (A_0^2 + 2A_0A_1 + A_1^2)|3\rangle = \sqrt{(N-2)(N-3)}|(N-4)\delta_{n,0} + 2\delta_{n,1}\rangle + 2\sqrt{2(N-2)}|(N-3)\delta_{n,0} + \delta_{n,1}\rangle + \sqrt{2}|(N-2)\delta_{n,0}\rangle$.

Si hanno quindi gli elementi di matrice di V :

$$\begin{aligned}\langle 2|V|2\rangle &= (g/2)(N+2)(N-1) \\ \langle 3|V|3\rangle &= (g/2)[(N-2)(N+5) + 2] \\ \langle 3|V|2\rangle &= (g/2)\sqrt{8(N-1)}.\end{aligned}$$

Quindi le variazioni delle energie dei due livelli sono le radici dell'equazione:

$$x^2 - gx(N^2 + 2N - 5) + (g^2/4)(N-2)(N-1)[N^2 + 7N + 12] = 0$$

11. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega n^2 a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda/2 \sum_{m,n,q=-\infty}^{\infty} |q| e^{-\xi|q|} a_{m+q}^\dagger a_{n-q}^\dagger a_n a_m .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\Delta E = -(\lambda^2 N(N-1)/2\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2\xi n) = -(\lambda^2 N(N-1)/2\omega)(1/(\exp(2\xi)-1))$)

12. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con Hamiltoniano

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

sapendo che il sistema stesso si trova all'equilibrio statistico con temperatura $T = 1/(k\beta)$ con $N\beta\omega \ll 1$ per cui il potenziale chimico è dato da $\mu \simeq kT \log(N\beta\omega) < 0$, e che $\xi \gg \beta\omega$, calcolare il valore medio dell'operatore

$$V = \lambda/2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{q=1-m}^{n-1} |q| e^{-\xi|q|} a_{m+q}^\dagger a_{n-q}^\dagger a_n a_m .$$

(Sol: Si tratta di calcolare $Tr(\rho V)$ dove la matrice densità ρ si deduce dalla (3.3.79). Dato che la matrice densità $\rho = \prod_{n=1}^{\infty} ((1 - \exp(\beta(\mu - n\omega))) \exp(\beta N_n (\mu - n\omega))) \simeq \beta\omega N \exp(-\beta\omega \sum_{n=1}^{\infty} n N_n)$ commuta con $N_n = a_n^\dagger a_n$ il calcolo si riduce alla valutazione di

$$Tr \left(\lambda/2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) e^{-\xi(n-m)} N_n N_m \rho \right)$$

cioè di

$$\begin{aligned} & \lambda/2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m) e^{-\xi(n-m)}}{(\exp(\beta(\omega n - \mu)) - 1)(\exp(\beta(\omega m - \mu)) - 1)} \\ & \simeq \lambda \exp(2\beta\mu)/2 \sum_{m,p=1}^{\infty} p e^{-\xi p} \exp(-\beta\omega(2m+p)) \\ & = \frac{\lambda \exp(\beta(2\mu - \omega) - \xi)}{2(1 - \exp(-(\xi + \beta\omega)^2)(1 - \exp(-2\beta\omega)))} \simeq \lambda N^2 \beta\omega / (2\xi^2) \end{aligned}$$

13. L'hamiltoniana di un sistema di N bosoni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} a_n^\dagger a_n + \frac{\lambda}{2L} \sum_{p,r,q=-\infty}^{\infty} a_{p+q}^\dagger a_{r-q}^\dagger a_r a_p .$$

Calcolare il contributo del secondo ordine in λ all'energia dello stato fondamentale .

(Sol: $E_F = N(N-1) \left(\frac{\lambda}{2L} - \frac{m\lambda^2}{24\hbar^2} \right) + O(\lambda^3)$.)

14. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda (a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0)^2 .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\lambda N \left[1 - \frac{(N-1)\lambda}{\omega} \right]$)

15. Si consideri il sistema descritto nell'esercizio precedente (14) soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda \left[(a_0^\dagger)^2 a_2^2 + (a_2^\dagger)^2 a_0^2 \right] .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $-\frac{\lambda^2 N(N-1)}{2\omega}$)

16. Per un sistema di bosoni identici in una buca unidimensionale a pareti riflettenti si ha l'hamiltoniana:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon(n) a_n^\dagger a_n + \sum_{n,m=0}^{\infty} v(n)v(m) a_n^\dagger a_m^\dagger a_m a_n$$

dove $\epsilon(n)$ e $v(n)$ sono due successioni reali e positive. Calcolare lo spettro di H in funzione di queste due successioni.

(Sol: Le autofunzioni sono caratterizzate dai numeri di occupazione $a_n^\dagger a_n = N(n)$. I corrispondenti autovalori sono:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(n)(\epsilon(n) - v^2(n)) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} N(n)v(n) \right)^2 .)$$

17. Per un sistema di bosoni quantizzati nel volume Ω , di cui $a_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione, scrivere l'operatore d'interazione V corrispondente in seconda quantizzazione al potenziale d'interazione a due corpi:

$$V(r) = vR \delta(r - R)$$

(Sol: $V = \frac{2\pi v R^2}{\Omega} \sum_{\vec{q}, \vec{p}, \vec{k}} \frac{\sin qR}{q} a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{p}}$.)

18. Calcolare fino al secondo ordine perturbativo nell'interazione

$$V = \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} v(|\vec{p} - \vec{k}|) v(|\vec{p} - \vec{k} + 2\vec{q}|) A_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}} A_{\vec{p}}$$

dove \vec{p} , \vec{q} e \vec{k} sono impulsi, l'energia dello stato fondamentale di un sistema di N bosoni di massa M quantizzati in una scatola cubica periodica di spigolo L .

(Sol: $E = v_0^2 N(N-1) \left(1 - \sum_{\vec{q} \neq 0} \frac{2Mv^2(2q)}{q^2} \right)$)

19. Si calcoli la correzione perturbativa al secondo ordine all'energia dello stato fondamentale di N bosoni identici con hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

soggetta alla perturbazione

$$H_I = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{q}} V(q) a_{\vec{p}_1+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_2-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} .$$

Ω è il volume di quantizzazione e $V(0) = 0$.

Si calcoli altresì il valor medio di H_I nello stato di equilibrio a temperatura in condizioni di gas rarefatto.

(Sol: $-\frac{N(N-1)m}{2\Omega^2} \sum_{\vec{k}} \frac{V^2(k)}{k^2}$. Il valor medio di V è dato da $\sum_{\vec{p}, \vec{q}} V(q)/(2\Omega) \exp(\beta(2\mu - (p^2 + (\vec{p} + \vec{q})^2)/(2m)))$, dove $\exp(\beta\mu)$ è dato in (3.3.82))

20. Si calcoli nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ dove Ω è il volume di quantizzazione, la correzione perturbativa fino al secondo ordine alla densità di energia dello stato fondamentale E_F/Ω di $\rho\Omega$ bosoni identici con hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

soggetta alla perturbazione

$$H_I = \frac{g}{2\Omega} \sum_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{q}} \Theta(K - |\vec{q}|) a_{\vec{p}_1 + \vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_2 - \vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} .$$

dove $\Theta(x)$ è la funzione gradino ($\Theta(x) = x/(2|x|) + 1/2$).

(Sol: lo stato fondamentale imperturbato $|F\rangle$ corrisponde ai numeri d'occupazione $N_{\vec{k}} = \rho \Omega \delta_{\vec{k}, \vec{0}}$ e si ha $H_I|F\rangle = \frac{g}{2\Omega} [\rho\Omega(\rho\Omega - 1)]|F\rangle + \sqrt{\rho\Omega(\rho\Omega - 1)} \sum_{\vec{q} \neq \vec{0}} \Theta(K - |\vec{q}|) a_{\vec{q}}^\dagger a_{-\vec{q}}^\dagger |(\rho\Omega - 2)\delta_{\vec{k}, \vec{0}}\rangle$.

Quindi la correzione alla densità di energia al primo ordine in g è data da $E_F^{(1)}/\Omega = \frac{g}{2\Omega^2} \rho\Omega(\rho\Omega - 1) \rightarrow \frac{g\rho^2}{2}$ e quella al secondo ordine: $E_F^{(2)}/\Omega = -2\frac{g^2}{4\Omega^3} [\rho\Omega(\rho\Omega - 1)] \sum_{\vec{q} \neq \vec{0}} \Theta(K - |\vec{q}|) m/q^2 \rightarrow -\frac{g^2 \rho^2 m}{2h^3} 4\pi K$, dove appare un fattore 2 dovuto all'identificazione degli stati $a_{\vec{q}}^\dagger a_{-\vec{q}}^\dagger |(\rho\Omega - 2)\delta_{\vec{k}, \vec{0}}\rangle$ con \vec{q} opposto e dove va notato che i vettori \vec{k} , \vec{q} sono impulsi e non numeri d'onda.)

21. Per un sistema di N bosoni identici di massa m e interagenti tramite l'interazione V di cui all'esercizio (17) calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in v e al limite $\Omega \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ con $\frac{N}{\Omega} = \rho$ costante. Si noti in proposito che l'energia dello stato fondamentale E_F , essendo l'energia di un sistema una grandezza estensiva, risulta proporzionale al volume Ω . Si tratta dunque di calcolare fino al secondo ordine in λ il valore del rapporto $\frac{E_F}{\Omega}$.

(Sol: $\frac{E}{\Omega} = 2\pi v R^3 \rho^2 (1 - \frac{mvR^2}{h^2} + O(v^2))$.)

22. Per un sistema di N bosoni identici di massa m e interagenti tramite l'interazione V corrispondente in seconda quantizzazione al potenziale d'interazione a due corpi:

$$V(r) = \lambda e^{-\frac{r}{R}}$$

calcolare l'interazione V e la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ e al limite $\Omega \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ con $\frac{N}{\Omega} = \rho$ costante. Si noti in proposito che l'energia dello stato fondamentale E_F , essendo l'energia di un sistema una grandezza estensiva, risulta proporzionale al volume Ω . Si tratta dunque di calcolare fino al secondo ordine in λ il valore del rapporto $\frac{E_F}{\Omega}$.

$$\begin{aligned} \text{(Sol: } V &= \frac{4\pi\lambda R^3}{\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} \frac{1}{(1+R^2k^2)^2} a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{p}} \text{)} \\ E_F &= E_1\lambda + E_2\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad E_1 = \frac{4\pi R^3 N(N-1)}{\Omega} \rightarrow 4\pi R^3 \rho^2 \Omega, \\ E_2 &= -2N(N-1)m \left(\frac{4\pi R^3}{\hbar\Omega} \right)^2 \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{1}{k^2(1+R^2k^2)^4} \rightarrow -\frac{5\pi\rho^2\Omega m R^5}{2\hbar^2} \end{aligned}$$

23. Due bosoni di massa m e impulso opposto $\pm\hbar\vec{p}$ nel volume di quantizzazione Ω interagiscono tramite

$$V = \frac{\lambda}{2\Omega} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq 0} A_{\vec{k}_1+\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1},$$

calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ la sezione d'urto integrata sugli angoli di scattering usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol: Si noti che, dato che le particelle sono identiche, l'integrale sull'impulso di ciascuna particella finale ($\hbar\vec{k}_i$, $i = 1, 2$) va limitato a metà dell'angolo solido. L'elemento di matrice di V vale $2\lambda/\Omega \delta_{\vec{k}_1, -\vec{k}_2}$ il cui modulo al quadrato nel limite di grande volume è $4\lambda^2(2\pi)^3/\Omega^3 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ il flusso è $\phi = v_{rel}/\Omega = 2\hbar p/(m\Omega)$, la sezione d'urto è il rapporto fra la probabilità di transizione per tempo unitario e il flusso e vale: $\sigma = m^2\lambda^2/(2\pi\hbar^4)$)

24. Un bosone di massa m e impulso $\hbar\vec{p}$ si trova in presenza di un condensato di N bosoni dello stesso tipo nello stato con impulso nullo nel volume di quantizzazione Ω .

Se i bosoni interagiscono fra loro tramite

$$V = \frac{\lambda}{2\Omega} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq 0} A_{\vec{k}_1+\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1},$$

calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ e in funzione della densità $\rho = N/\Omega$, la probabilità per unità di tempo di un urto il cui stato finale contenga due bosoni fuori dal condensato usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol: Si noti che, dato che le particelle sono identiche, l'integrale sull'impulso di ciascuna particella finale fuori dal condensato ($\hbar\vec{k}_i$, $i = 1, 2$) va limitato a metà dell'angolo solido. L'elemento di matrice di V vale $2\sqrt{N}\lambda/\Omega\delta_{\vec{p}, \vec{k}_1 + \vec{k}_2}$ il cui modulo al quadrato nel limite di grande volume è $4\lambda^2\rho(2\pi)^3/\Omega^2\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{p})$, la probabilità di transizione per unità di tempo vale: $\dot{P} = m\lambda^2\rho\rho/(2\pi\hbar^3)$. Confrontando con l'esercizio precedente si ha: $\dot{P} = \sigma\rho\hbar p/m$)

3.5 Quantizzazione di un campo elastico, del campo elettromagnetico e di un campo scalare relativistico

Abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti il formalismo della seconda quantizzazione per i sistemi di particelle soddisfacenti la statistica di Bose-Einstein. Nel caso di un sistema di bosoni indipendenti, per cui dunque l'hamiltoniano è un operatore ad una particella

$$H = \sum_{i=1}^N h^{(1)}(\xi_i) , \quad (3.5.100)$$

assumendo che $h^{(1)}$ abbia spettro discreto corrispondente agli autovettori $\{\psi_n\}$ ed agli autovalori $\{E_n\}$ e costruendo il formalismo di seconda quantizzazione a partire dalla base che diagonalizza $h^{(1)}$, si ha

$$H = \sum_n E_n A_n^\dagger A_n . \quad (3.5.101)$$

Se ora ricordiamo che gli operatori di creazione e distruzione soddisfano le regole di commutazione (3.3.41), balza agli occhi un'analogia fra il sistema in esame e quello costituito da un insieme di oscillatori armonici indipendenti distinti dall'indice n e quantizzati col metodo algebrico di Dirac il cui Hamiltoniano è:

$$H = \sum_n \hbar\omega_n [A_n^\dagger A_n + \frac{1}{2}] . \quad (3.5.102)$$

In particolare l'analogia si basa sulla corrispondenza fra le regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione dei due sistemi e sull'identificazione di $\frac{E_n}{\hbar}$ con la pulsazione ω_n .

Tuttavia, se si confrontano le due situazioni con maggiore attenzione, appaiono alcune differenze essenziali, in primo luogo il formalismo ordinario si applica a sistemi con un numero finito di gradi di libertà e quindi ad un numero finito di oscillatori, mentre nel caso dei bosoni l'indice n assume infiniti valori. Inoltre nell'espressione (3.5.101) non appare il termine $\sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$ corrispondente all'energia di punto zero degli oscillatori.

⁵ Per studiare più a fondo quest'analogia si può considerare un sistema armonico ideale con infiniti gradi di libertà come, ad esempio, una corda elastica continua. Perché le frequenze proprie del sistema siano discrete bisogna che la corda abbia lunghezze finite. Dato che una corda di lunghezza finita ha un numero finito di gradi di libertà, essa è infatti costituita da un numero, per quanto grande, tuttavia finito di atomi, quello che abbiamo in mente corrisponde ad una idealizzazione della corda fisica.

Per ragioni che appariranno chiare in seguito supponiamo che la corda sia chiusa ad anello o, equivalentemente, che sia vincolata da condizioni di periodicità ai bordi. Per semplificare ulteriormente il problema consideriamo solo la possibilità di spostamenti dei punti della corda in direzione perpendicolare al piano su cui essa giace.

Per meglio evidenziare l'idealizzazione corrispondente alla corda continua possiamo partire da un modello discreto specificandone poi un limite continuo. Il modello discreto è costituito da $2N + 1$ punti materiali di massa m posti ai vertici di un poligono regolare di lato $\frac{L}{2N+1}$ e liberi di oscillare lungo le rette perpendicolari al piano del poligono. Il punto i -esimo è supposto scambiare forze elastiche con l' $i-1$ -esimo e l' $i+1$ -esimo tramite molle con lunghezza di riposo $\frac{L}{2N+1}$ come descritto dall'energia del sistema

$$E = \sum_{l=-N}^N \left[\frac{m\dot{\chi}_l^2}{2} + \frac{k}{2} (\chi_l - \chi_{l+1})^2 \right], \quad (3.5.103)$$

dove χ_l è la coordinata dell' l -mo punto lungo la corrispondente retta perpendicolare al piano della corda, $\dot{\chi}_l$ la sua velocità e si è definito:

$$\chi_{N+1} \equiv \chi_{-N}. \quad (3.5.104)$$

⁵Si veda anche [13] (Cap. V)

L'equazione del moto del sistema è

$$m\ddot{\chi}_l = k(\chi_{l+1} + \chi_{l-1} - 2\chi_l) . \quad (3.5.105)$$

L'energia potenziale del sistema descritto essendo una forma quadratica nelle coordinate può essere scritta come il valor medio $\frac{(\chi, V\chi)}{2}$ di una matrice simmetrica N -dimensionale V su un vettore χ di componenti χ_i . La matrice V appare anche nell'equazione del moto (3.5.105) scritta nella forma vettoriale

$$m\ddot{\chi} = -V\chi . \quad (3.5.106)$$

Il nostro sistema può essere ridotto ai modi normali tramite una trasformazione lineare di coordinate che diagonalizza V . Gli autovalori della matrice V sono presto calcolati osservando che essa commuta con la n -traslazione $\chi_l \rightarrow (T^n\chi)_l = \chi_{l+n}$ per qualunque n intero non necessariamente positivo, essa deve pertanto essere diagonalizzabile simultaneamente con le matrici rappresentative delle n -traslazioni.

Tenendo conto di (3.5.104) si ha:

$$(T^{2N+1}\chi)_l = \chi_l \quad , \quad (T^{2N}\chi)_l = \chi_{l-1} = (T^{-1}\chi)_l \quad (3.5.107)$$

da cui segue che gli autovalori della matrice T e quindi anche di qualunque sua potenza sono le radici $(2N+1)$ -esime dell'unità. Dalla definizione di T si ottiene allora che l'autovettore normalizzato corrispondente all'autovalore $e^{\frac{2\pi iq}{2N+1}}$, dove $-N \leq q \leq N$ è intero, è identificato da:

$$(T\chi^{(q)})_l \equiv \chi_{l+1}^{(q)} = e^{\frac{2\pi iq}{2N+1}} \chi_l^{(q)} , \quad (3.5.108)$$

da cui si ha subito:

$$\chi_l^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} e^{\frac{2\pi iql}{2N+1}} \quad \text{con} \quad |l| \leq N . \quad (3.5.109)$$

Inoltre dalla (3.5.105) si vede che:

$$(V\chi)_l = k(2\chi_l - \chi_{l+1} - \chi_{l-1}) = k(2\chi_l - (T\chi)_l - (T^{-1}\chi)_l) . \quad (3.5.110)$$

Questo significa che gli autovettori di V si identificano con i $\chi^{(q)}$ dati in (3.5.109). I corrispondenti autovalori sono eguali a $4 \sin^2\left(\frac{\pi q}{2N+1}\right)$ e sono pertanto degeneri a coppie per q non nullo. Il nostro sistema si riduce dunque ad un insieme di oscillatori distinti dall'indice q , per $q \neq 0$, con pulsazione

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{k \sin^2\left(\frac{\pi q}{2N+1}\right)}{m}} , \quad (3.5.111)$$

e ad un punto materiale, collegato col moto baricentrale del sistema, libero di muoversi in direzione perpendicolare al piano della corda.

Decomponendo la coordinata j -esima secondo

$$\chi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{l=-N}^N e^{2\pi i \frac{lj}{2N+1}} a_l(t) , \quad (3.5.112)$$

dove i coefficienti complessi a_l soddisfano la condizione

$$a_l^* = a_{-l} , \quad (3.5.113)$$

che esprime la realtà della coordinata i -esima, si ottiene per l'energia l'espressione

$$E = \frac{M}{2} \dot{a}_B^2 + \sum_{l=1}^N \left[m |\dot{a}_l|^2 + 4k \sin^2 \left(\frac{\pi l}{2N+1} \right) |a_l|^2 \right] . \quad (3.5.114)$$

Quest'equazione conferma quanto prima anticipato: $a_B = \frac{a_0}{\sqrt{2N+1}}$ è la coordinata baricentrale del sistema, $M = m(2N+1)$. Inoltre, decomponendo a_l nella sua parte reale ed in quella immaginaria secondo

$$a_l = \frac{\alpha_l + i\beta_l}{\sqrt{2}} , \quad (3.5.115)$$

possiamo identificare α_l e β_l con le coordinate di due oscillatori armonici degeneri con pulsazione (3.5.111):

$$\begin{aligned} E &= \frac{M}{2} \dot{a}_B^2 + \frac{m}{2} \sum_{l=1}^N \left[\dot{\alpha}_l^2 + \dot{\beta}_l^2 + \omega_l^2 (\alpha_l^2 + \beta_l^2) \right] \\ &= \frac{P_B^2}{2M} + \sum_{l=1}^N \left[\frac{P_{\alpha_l}^2 + P_{\beta_l}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_l^2 (\alpha_l^2 + \beta_l^2) \right] . \end{aligned} \quad (3.5.116)$$

A questo punto si può procedere nella quantizzazione del sistema secondo le regole della meccanica quantistica ordinaria, cioè applicando ai singoli oscillatori il metodo di quantizzazione di Dirac che riassumiamo brevemente qui di seguito.

L'hamiltoniano di un oscillatore è scritto

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{kQ^2}{2} . \quad (3.5.117)$$

Si introducono gli operatori di creazione A^\dagger e distruzione A soddisfacenti la regola di commutazione canonica

$$[A, A^\dagger] = 1 . \quad (3.5.118)$$

Posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, si decompongono Q e P secondo

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (A + A^\dagger) \quad e \quad P = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \frac{A - A^\dagger}{i} . \quad (3.5.119)$$

Sostituendo nell'hamiltoniano, si ha infine

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \{A, A^\dagger\} = \hbar\omega \left(A^\dagger A + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.5.120)$$

Gli autovalori di H sono $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ per n intero non negativo, i corrispondenti autovettori sono ottenuti dallo stato fondamentale $|\Psi_0\rangle$ tramite la formula: $|\Psi_n\rangle = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\Psi_0\rangle$.

Nel nostro caso, separata la coordinata baricentrale, otterremo gli autostati dell'Hamiltoniano del sistema operando sullo stato fondamentale tramite gli operatori di creazione associati agli oscillatori sopra individuati. Si pone dunque:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}} (A_{\alpha_l} + A_{\alpha_l}^\dagger) \\ P_{\alpha_l} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_l}{2}} (A_{\alpha_l} - A_{\alpha_l}^\dagger) \end{aligned} \quad (3.5.121)$$

con le regole di commutazione:

$$[A_{\alpha_l}, A_{\alpha_k}^\dagger] = \delta_{l,k} \quad [A_{\beta_l}, A_{\beta_k}^\dagger] = \delta_{l,k} \quad [A_{\alpha_l}, A_{\beta_k}^\dagger] = 0 \quad (3.5.122)$$

e si ottiene l'Hamiltoniano:

$$H = \frac{P_B^2}{2M} + \sum_{l=1}^N \hbar\omega_l \left[A_{\alpha_l}^\dagger A_{\alpha_l} + A_{\beta_l}^\dagger A_{\beta_l} + 1 \right] . \quad (3.5.123)$$

La presenza di un grado di libertà baricentrale libero è una conseguenza dell'invarianza per traslazioni del sistema considerato. Tale grado di libertà,

viene in gergo chiamato modo zero del sistema perchè, appunto perchè libero, ha frequenza nulla. Esso sopravviverà ovviamente al limite alla corda continua, ma verrà considerato solo nel caso della corda. Per mettere in maggiore evidenza la simmetria traslazionale del nostro modello è opportuno ridefinire l'algebra degli operatori di creazione e di distruzione tramite la trasformazione (canonica):

$$A_{\pm n} = \frac{A_{\alpha n} \pm iA_{\beta n}}{\sqrt{2}} . \quad (3.5.124)$$

I nuovi operatori di creazione e distruzione, definiti sugli interi non nulli compresi fra N e $-N$, soddisfano le regole di commutazione canoniche:

$$[A_n, A_m^\dagger] = \delta_{nm} , \quad (3.5.125)$$

e si ha:

$$H = \frac{P_B^2}{2M} + \sum_{l=-N}^N \hbar\omega_l \left[A_l^\dagger A_l + \frac{1}{2} \right] . \quad (3.5.126)$$

Si ha anche, usando (3.5.115):

$$a_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}} [A_l + A_{-l}^\dagger] \quad (3.5.127)$$

da cui è facile costruire l'operatore deformazione elastica, che chiameremo nel seguito *campo elastico*:

$$\chi_j = a_B + \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \sum_{l=-N, l \neq 0}^N \frac{e^{2\pi i \frac{lj}{2N+1}}}{\sqrt{2\omega_l}} [A_l + A_{-l}^\dagger] . \quad (3.5.128)$$

Se si vuole poi rappresentare l'evoluto nel tempo in rappresentazione di Heisenberg del campo elastico bisogna calcolare l'operatore

$$\chi_j(t) \equiv e^{\frac{iHt}{\hbar}} \chi_j e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \chi_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{it}{\hbar}\right)^n}{n!} ([H, \cdot])^n \chi_j \quad (3.5.129)$$

dove l'ennesimo termine contiene n commutatori concatenati, cioè, per esempio: $([H, \cdot])^2 \chi_j \equiv [H, [H, \chi_j]]$. In effetti per ottenere il risultato voluto basta sostituire a χ a_B e A_l usando i commutatori:

$$[H, a_B] = -i\hbar \frac{P_B}{M} , \quad [H, P_B] = 0 , \quad [H, A_l] = -\hbar\omega_l A_l . \quad (3.5.130)$$

Si ottiene così:

$$A_l(t) \equiv e^{\frac{iHt}{\hbar}} A_l e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = A_l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{it}{\hbar}\right)^n}{n!} (-\hbar\omega_l)^n = e^{-i\omega_l t} A_l, \quad (3.5.131)$$

e infine:

$$\chi_j(t) = a_B + \frac{P_B}{M}t + \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \sum_{l=-N, l \neq 0}^N \frac{e^{2\pi i \frac{l j}{2N+1}}}{\sqrt{2\omega_l}} [e^{-i\omega_l t} A_l + e^{i\omega_l t} A_{-l}^\dagger]. \quad (3.5.132)$$

Per completare la descrizione del nostro sistema costruiamo ora l'operatore sullo spazio degli stati corrispondente alla matrice T che genera le traslazioni della nostra catena cioè che trasforma l'operatore χ_j in χ_{j+1} . Questo è un operatore unitario definito dalla relazione ⁶ :

$$(T\chi)_j \equiv \chi_{j+1} = U_T \chi_j U_T^\dagger, \quad (3.5.133)$$

che, tenendo conto della decomposizione (3.5.132) equivale a:

$$U_T a_B U_T^\dagger = a_B, \quad U_T P_B U_T^\dagger = P_B, \quad U_T A_l U_T^\dagger = e^{2\pi i \frac{l}{2N+1}} A_l \quad (3.5.134)$$

Ponendo $U_T = e^{-iX}$ dove X è un operatore Hermitiano e sviluppando $U_T A_l U_T^\dagger$ in serie di potenze di X , si ottiene da (3.5.134):

$$[X, a_B] = [X, P_B] = 0, \quad [X, A_j] = -\frac{2\pi l}{2N+1} A_l \quad (3.5.135)$$

la cui soluzione è

$$X = \sum_{l=-N}^N \frac{2\pi l}{2N+1} A_l^\dagger A_l \longrightarrow U_T = e^{-i \sum_{l=-N}^N \frac{2\pi l}{2N+1} A_l^\dagger A_l} \quad (3.5.136)$$

Si tratta ora di definire la corda continua tramite un passaggio al limite di infiniti gradi di libertà per il sistema ora descritto. Partendo dal modello originale il limite considerato è ottenuto portando N all'infinito, ma mantenendo la massa per unità di lunghezza $\frac{(2N+1)m}{L} \equiv \rho$, la tensione in condizioni di equilibrio $\frac{kL}{2N+1} \equiv \tau$ e la lunghezza L costanti. Se poniamo $\frac{L}{2N+1} \equiv \Delta$, evidentemente la (3.5.103) può essere riscritta

$$E = \sum_{j=-N}^N \Delta \left[\frac{\rho \dot{\chi}_j^2}{2} + \frac{\tau}{2} \frac{(\chi_j - \chi_{j+1})^2}{\Delta^2} \right]. \quad (3.5.137)$$

⁶Assumiamo come anche nel capitolo 2 la scelta attiva delle trasformazioni che per le traslazioni porta a Eq. (2.0.8)

Se consideriamo configurazioni in cui la coordinata $\chi_j(t)$ varia lentamente al crescere dell'indice j e quindi è possibile identificare una funzione più volte derivabile $\chi(x, t)$ tramite la relazione

$$\chi(j\Delta, t) \equiv \chi_j(t) \quad (3.5.138)$$

al limite $N \rightarrow \infty$ abbiamo

$$\frac{\chi_{j+1}(t) - \chi_j(t)}{\Delta} \rightarrow \frac{\partial \chi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=j\Delta} \equiv \chi'(j\Delta, t), \quad (3.5.139)$$

e

$$E \rightarrow \frac{1}{2} \int dx [\rho \dot{\chi}^2 + \tau \chi'^2]. \quad (3.5.140)$$

Nello stesso limite l'equazione del moto diventa

$$\rho \ddot{\chi} = \tau \chi'', \quad (3.5.141)$$

cioè l'equazione delle onde elastiche di D'Alembert che descrive la propagazione, non dispersiva, cioè senza deformazione di segnali con velocità $v_s = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$.

D'altra parte all'operatore campo elastico dato in (3.5.132) corrisponde evidentemente l'operatore

$$\chi(x, t) = a_B + \frac{P_B}{M} t + \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \sum_{l=-N, l \neq 0}^N \frac{e^{2\pi i \frac{lx}{L}}}{\sqrt{2\omega_l}} [e^{-i\omega_l t} A_l + e^{i\omega_l t} A_{-l}^\dagger], \quad (3.5.142)$$

dove ω_l è data dalla (3.5.111) che, nel limite $N \rightarrow \infty$, diventa:

$$\omega_l = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\frac{\pi l}{2N+1}\right) = \frac{2}{\Delta} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \sin\left(\frac{\pi l \Delta}{L}\right) \rightarrow v_s \frac{2\pi |l|}{L}. \quad (3.5.143)$$

Si noti che nel limite $N \rightarrow \infty$ la decomposizione ora descritta si riduce alla trasformata di Fourier del campo elastico:

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n>-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{L}} a_n(t), \quad (3.5.144)$$

con:

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega_n}} [A_n e^{-i\omega_n t} + A_{-n}^\dagger e^{i\omega_n t}] \quad , \quad a_0 = \sqrt{L} \left(a_B + \frac{P_B}{M} t \right) \quad (3.5.145)$$

Passando a considerare l'energia del sistema al limite continuo osserviamo che nel limite continuo l'Hamiltoniano diventa:

$$H \rightarrow \frac{P_B^2}{2M} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hbar v_s \frac{2\pi|n|}{L} [A_n^\dagger A_n + \frac{1}{2}]. \quad (3.5.146)$$

Possiamo ora, confrontando la (3.5.146) con la (3.5.126), chiarire meglio la relazione esistente tra la corda continua ed il modello discreto da cui siamo partiti. È evidente che (3.5.126) appare come un'approssimante di (3.5.146). Tuttavia è pure evidente che (3.5.146) non ha senso, infatti al limite continuo l'energia dello stato fondamentale $E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\hbar v_s \frac{2\pi}{L}$ è divergente. La somma delle energie di punto zero degli oscillatori è infinita. D'altra parte in (3.5.114) il livello di energia zero corrisponde a quella dello stato classico di equilibrio del sistema e non si è tenuto conto dell'energia di legame corrispondente a questo stato. Possiamo quindi concludere che il nostro modello discreto ha un limite continuo solo se, in tale limite, l'energia di legame totale compensa l'energia di punto zero a meno di un contributo finito. Facendo di necessità virtù noi assumiamo quest'ipotesi e rinormalizziamo l'origine della scala delle energie in modo da eliminare il contributo dell'energia di punto zero dalla (3.5.146).

La regola di quantizzazione si estende in modo naturale a un criterio di ordinamento delle osservabili espresse in funzione del campo elastico e delle sue derivate e impone che gli operatori di creazione e distruzione che appaiono nell'espressione di queste grandezze siano *ordinati alla Wick* cioè gli operatori di distruzione siano posti alla destra di quelli di creazione. Ovviamente la meccanica classica non insegna nulla in proposito perché gli operatori di creazione e distruzione classicamente sono legati alle ampiezze dei modi normali che commutano.

Trascurando il grado di libertà baricentrale scriviamo dunque:

$$H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar v_s k A_k^\dagger A_k \quad (3.5.147)$$

dove si è posto, come già peraltro nello studio di un gas di particelle identiche (sezione(1.2)), $k = \frac{2\pi n}{L}$. Si noti che questa scelta è giustificata dal fatto che noi siamo ora interessati unicamente allo studio dello spettro degli stati eccitati dalla nostra corda.

Passiamo infine a considerare il limite continuo dell'operatore di traslazione U_T . Una prima osservazione è che quest'operatore è associato alla

traslazione di Δ che nel limite continuo si annulla. Più appropriato è dunque studiare $(U_T)^{\frac{d}{\Delta}}$ che genera la traslazione di un segmento d tenuto fisso nel limite. Dall'analisi precedente risulta evidente che:

$$(U_T)^{\frac{d}{\Delta}} = e^{-i\frac{X}{\Delta}d} \quad \frac{X}{\Delta} = \sum_{l=-N}^N \frac{2\pi l}{L} A_l^\dagger A_l \rightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi l}{L} A_l^\dagger A_l . \quad (3.5.148)$$

La corda elastica ha simmetria traslazionale continua e quindi possiede una quantità di moto conservata. In base all'Eq. (2.0.9) che nel nostro caso si scrive:

$$\chi_{j+1} = e^{i\frac{P\Delta}{\hbar}} \chi_j e^{-i\frac{P\Delta}{\hbar}} , \quad (3.5.149)$$

l'operatore P va identificato con

$$P = \hbar \frac{X}{\Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hbar \frac{2\pi n}{L} A_n^\dagger A_n \equiv \sum_k \hbar k A_k^\dagger A_k . \quad (3.5.150)$$

La nostra conclusione è che la corda elastica quantistica continua si identifica con un sistema di bosoni, che normalmente vengono chiamati fononi, in analogia con i fotoni che sono associati alle corrispondenti eccitazioni del campo elettromagnetico. L'energia di un fonone è v_s volte il modulo dell'impulso.

Questa conclusione va considerata sostitutiva di quella basata sulla quantizzazione canonica dei modi normali. Tale costruzione risulta infatti difficile perché il numero dei modi normali è infinito e quindi da questo punto di vista la corda elastica appare come un sistema composto da infiniti componenti. La definizione stessa dello spazio degli stati quale prodotto tensoriale infinito degli spazi associati ai singoli modi normali è matematicamente problematica se non si basa su uno spazio di Fock come quello testè considerato dei fononi.

La costruzione che abbiamo messo a punto consiste nel quantizzare una versione discreta del modello e ragionare poi sul significato fisico di questo al limite $N \rightarrow \infty$. In questo senso il modello discreto si presenta come una regolarizzazione del modello continuo. Una procedura abbreviata consiste nel partire dal modello continuo troncando le somme ad un numero finito $(2N + 1)$ di gradi di libertà. In questo caso N è immediatamente collegato con un fattore di taglio sulle frequenze che nel gergo della teoria dei campi viene chiamato cut-off. Nei mezzi elastici reali, per esempio in un cristallo, di cui il nostro modello elastico appare come un modello unidimensionale, i numeri d'onda dei fononi variano in un dominio limitato, che nel nostro caso

è un segmento di semi-lunghezza pari a $\frac{N\pi}{L}$, che è detto zona di Brillouin. Nel caso dei fotoni invece la situazione reale corrisponde, per quel che se ne sa, al limite continuo.

Questa caratterizzazione delle eccitazioni elementari dei mezzi elastici costituisce un risultato essenzialmente nuovo, che non è direttamente deducibile dalla meccanica quantistica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà e giustifica, a posteriori, il metodo di quantizzazione basata su un processo di regolarizzazione del sistema classico e di rinormalizzazione dell'energia.

I risultati ottenuti sul campo elastico in una dimensione possono essere facilmente generalizzati al caso più interessante di un mezzo elastico tridimensionale. Il caso del sistema discreto di atomi in interazione elastica a 3 dimensioni appare in partenza più complesso del sistema a 1 dimensione perché i reticoli atomici che organizzano le posizioni di equilibrio degli stessi atomi possono avere strutture e quindi simmetrie roto-traslazionali diverse, inoltre in generale la velocità di propagazione delle onde elastiche dipende dalla direzione di oscillazione degli atomi, cioè dalla polarizzazione dell'onda stessa, e da quella di propagazione dell'onda; di conseguenza, anche al limite in cui i numeri d'onda sono molto piccoli rispetto alle dimensioni della zona di Brillouin e in cui il sistema appare omogeneo e continuo, non si ha in generale isotropia. Lasciando ai testi e ai corsi di fisica dei solidi l'analisi di questi problemi, noi ci limiteremo a considerare il caso continuo omogeneo e isotropo, pronti a introdurre procedure di regolarizzazione analoghe a quelle trattate nel caso unidimensionale.

Consideriamo dunque le oscillazioni elastiche di un cubo di lato L di un materiale omogeneo e isotropo assumendo condizioni di periodicità al contorno in modo da poter utilizzare la simmetria traslazionale del sistema.

3.5.1 Quantizzazione di un campo elastico in tre dimensioni

⁷ Il campo d'onda elastico tridimensionale $\vec{\chi}(\vec{r}, t)$, che descrive ad ogni istante gli spostamenti dei punti del mezzo dalla loro posizione d'equilibrio, ha natura vettoriale.

⁷Si veda anche [3] (§82)

Al limite elastico la densità d'energia del campo corrisponde alla più generale funzione quadratica delle derivate prime di $\vec{\chi}$ invariante per rototraslazione, cioè:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[\rho \sum_i (\dot{\chi}_i)^2 + \tau \sum_{i,j} (\nabla_i \chi_j)^2 + \sigma \left(\sum_i \nabla_i \chi_i \right)^2 \right]. \quad (3.5.151)$$

Il campo elastico può essere sviluppato in serie di Fourier utilizzando una base del tutto analoga a quella assegnata in Eq.(3.2.11) distinguendo ora, invece dei diversi stati di spin, i modi di polarizzazione. Avendo il campo natura vettoriale, i coefficienti del suo sviluppo di Fourier devono avere la stessa natura. Possono quindi essere sviluppati secondo una opportuna base ortonormale di polarizzazione. Dato che anche in un sistema omogeneo e isotropo la velocità di propagazione di un'onda può dipendere dall'angolo fra la direzione di polarizzazione e quello di propagazione dell'onda stessa, come accade infatti se il coefficiente σ in (3.5.151) non è nullo, è opportuno decomporre i coefficienti dello sviluppo di Fourier secondo una base tridimensionale riferita al numero d'onda $\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}$ (vedi (3.2.11)).

Facendo dunque eccezione per il modo zero che verrà trascurato d'ora in poi, possiamo scegliere la base:

$$\vec{\epsilon}_{\alpha,\vec{k}} \quad \text{con} \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.5.152)$$

con:

$$\vec{\epsilon}_{3,\vec{k}} = \frac{\vec{k}}{k}, \quad (3.5.153)$$

e tale che valga la condizione di ortonormalità:

$$\vec{\epsilon}_{\beta,\vec{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\gamma,\vec{k}}^* = \delta_{\beta,\gamma}. \quad (3.5.154)$$

A titolo di esempio si potrà scegliere $\vec{\epsilon}_{2,\vec{k}}$ con componenti $\frac{1}{\sqrt{k_2^2+k_3^2}}(0, k_3, -k_2)$ e $\vec{\epsilon}_{1,\vec{k}} = \vec{\epsilon}_{2,\vec{k}} \wedge \vec{k}/k$ in modo da completare la terna destrorsa.

Evidentemente la varietà delle scelte riguarda i due versori di polarizzazione trasversi $\vec{\epsilon}_{a,\vec{k}}$ per $a = 1, 2$. Una scelta fisicamente molto interessante è quella corrispondente agli stati di polarizzazione circolare che sarebbe meglio indicare tramite $\vec{\epsilon}_{\pm,\vec{k}}$ definiti da $\vec{\epsilon}_{\pm,\vec{k}} = 1/\sqrt{2}(\vec{\epsilon}_{1,\vec{k}} \pm i\vec{\epsilon}_{2,\vec{k}})$ essendo gli $\vec{\epsilon}_{a,\vec{k}}$ scelti come sopra o in qualunque altro modo equivalente. Si noti in proposito che se si passa da una coppia $\vec{\epsilon}_{a,\vec{k}}$ a un'altra ottenuta dalla prima tramite una

rotazione di un angolo φ intorno all'asse \vec{k} si ha $\vec{\epsilon}_{\pm, \vec{k}} \rightarrow \exp(\pm i\varphi)\vec{\epsilon}_{\pm, \vec{k}}$. Quindi la scelta degli $\vec{\epsilon}_{\pm, \vec{k}}$ varia in generale per una fase che può essere fissata tramite la condizione:

$$\vec{\epsilon}_{\pm, -\vec{k}} = \vec{\epsilon}_{\pm, \vec{k}}^* . \quad (3.5.155)$$

Questa condizione è soddisfatta partendo dalla scelta reale degli $\vec{\epsilon}_{a, \vec{k}}$ fatta sopra perché si ha $\vec{\epsilon}_{a, \vec{k}} = -\vec{\epsilon}_{a, -\vec{k}}$ per $a = 2, 3$ e quindi $\vec{\epsilon}_{1, \vec{k}} = \vec{\epsilon}_{1, -\vec{k}}$ da cui segue (3.5.155).

Tornando al campo d'onda, introduciamo la decomposizione di Fourier:

$$\vec{\chi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} a_{\alpha, \vec{k}}(t) , \quad (3.5.156)$$

con la condizione di realtà:

$$\vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}}^* a_{\alpha, \vec{k}}^* = \vec{\epsilon}_{\alpha, -\vec{k}} a_{\alpha, -\vec{k}} . \quad (3.5.157)$$

Sostituendo la decomposizione di Fourier in (3.5.151), otteniamo per l'energia del sistema:

$$\mathbf{E} = \int d\vec{r} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \left[\rho |\dot{a}_{\alpha, \vec{k}}|^2 + \left(\tau k^2 + \sigma (\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}})^2 \right) |a_{\alpha, \vec{k}}|^2 \right] . \quad (3.5.158)$$

Da questo risultato vediamo che, perché l'energia del sistema sia positiva, è necessario che τ sia positivo e che $\sigma \geq -\tau$.

A questo punto, abbiamo ottenuto per l'energia un'espressione quadratica in termini delle ampiezze di Fourier del tutto analoga alla (3.5.114).⁸ In analogia con la (3.5.143) possiamo dunque introdurre:

$$\omega_{\alpha, \vec{k}} = \sqrt{\frac{\tau k^2 + \sigma (\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}})^2}{\rho}} \equiv k v_{\alpha, \vec{k}} , \quad (3.5.159)$$

e, in analogia con la (3.5.145) e tenendo conto della condizione di realtà (3.5.157), poniamo:

$$a_{\alpha, \vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho \omega_{\alpha, \vec{k}}}} \left(A_{\alpha, \vec{k}} + (-1)^{s(\alpha)} A_{\alpha, -\vec{k}}^\dagger \right) , \quad (3.5.160)$$

⁸Si noti in particolare che per ragioni di semplicità di notazione e diversamente da quanto appare in (3.5.114), abbiamo tenuto distinti nella sommatoria in (3.5.158) gli addendi identici corrispondenti a numeri d'onda opposti

dove abbiamo definito $\epsilon_{\alpha, \vec{k}}^* = (-1)^{s(\alpha)} \epsilon_{\alpha, -\vec{k}}$

Il campo elastico (3.5.142) diventa nel caso tridimensionale:

$$\vec{\chi}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L^3}} \sum_{\alpha, \vec{k} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\alpha, \vec{k}}}} \left[\vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} A_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_{\alpha, \vec{k}} t} + \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}}^* A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega_{\alpha, \vec{k}} t} \right], \quad (3.5.161)$$

l'hamiltoniano (3.5.147) diventa:

$$H = \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar \omega_{\alpha, \vec{k}} A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger A_{\alpha, \vec{k}}, \quad (3.5.162)$$

e il momento (3.5.150):

$$\vec{P} = \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar \vec{k} A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger A_{\alpha, \vec{k}}. \quad (3.5.163)$$

L'espressione (3.5.161) ci permette di chiarire l'interpretazione quantistica degli stati di polarizzazione circolare.

Per questo consideriamo le componenti i -esime, con $i = x, y$ della trasformata di Fourier del campo di deformazione calcolata per un numero d'onda $\vec{k} = k\hat{z}$ parallelo all'asse z (\hat{z} è il versore dell'asse z):

$$\tilde{\chi}(k\hat{z})^{(i)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho L^3 \omega_{\pm, k\hat{z}}}} \sum_{h=\pm} \epsilon_{h, k\hat{z}}^{(i)} \left[A_{h, k\hat{z}} + A_{h, -k\hat{z}}^\dagger \right]. \quad (3.5.164)$$

Consideriamo l'azione su questo operatore di una rotazione di un angolo δ intorno all'asse z . Se il sistema non fosse quantizzato in una scatola cubica, bensì cilindrica, con asse di simmetria parallelo all'asse z , come mostrato in Eq.(2.0.10) tale rotazione corrisponderebbe all'operatore unitario $\exp(-i\delta J_z/\hbar)$. Lo stesso accade se il volume di quantizzazione è infinito. L'analisi che segue è quindi appropriata in volume di quantizzazione infinito. Tuttavia, assumendo che i modi di polarizzazione del campo non siano influenzati dal volume di quantizzazione osserviamo che la rotazione considerata trasforma le componenti di $\tilde{\chi}(k\hat{z})^{(i)}$ in $\exp(i\delta J_z/\hbar) \tilde{\chi}(k\hat{z})^{(i)} \exp(-i\delta J_z/\hbar)$. In base alla Eq. (2.0.11), tenendo conto che il campo si trasforma come un vettore a due componenti abbiamo per la sua componente x :

$$e^{i\delta J_z/\hbar} \tilde{\chi}(k\hat{z})^{(x)} e^{-i\delta J_z/\hbar} = \cos \delta \tilde{\chi}(k\hat{z})^{(x)} - \sin \delta \tilde{\chi}(k\hat{z})^{(y)}. \quad (3.5.165)$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=\pm} \epsilon_{h,k\hat{z}}^{(x)} e^{i\delta J_z/\hbar} \left[A_{h,k\hat{z}} + A_{h,-k\hat{z}}^\dagger \right] e^{-i\delta J_z/\hbar} \\ &= \sum_{h=\pm} \left(\cos \delta \epsilon_{h,k\hat{z}}^{(x)} - \sin \delta \epsilon_{h,k\hat{z}}^{(y)} \right) \left[A_{h,k\hat{z}} + A_{h,-k\hat{z}}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (3.5.166)$$

Ricordando che la terna dei vettori di polarizzazione in Eq.(3.5.152)) è ortogonale e destrorsa si ha $\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(x)} = \epsilon_{2,k\hat{z}}^{(y)}$ e $\epsilon_{2,k\hat{z}}^{(x)} = -\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(y)}$, da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos \delta \epsilon_{\pm,k\hat{z}}^{(x)} - \sin \delta \epsilon_{\pm,k\hat{z}}^{(y)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \delta \left(\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(x)} \pm i\epsilon_{2,k\hat{z}}^{(x)} \right) - \sin \delta \left(\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(y)} \pm i\epsilon_{2,k\hat{z}}^{(y)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \delta \left(\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(x)} \pm i\epsilon_{2,k\hat{z}}^{(x)} \right) + \sin \delta \left(\epsilon_{2,k\hat{z}}^{(x)} \mp i\epsilon_{1,k\hat{z}}^{(x)} \right) \right) = e^{\mp i\delta} \epsilon_{\pm,k\hat{z}}^{(x)}. \end{aligned} \quad (3.5.167)$$

Sostituendo in Eq.(3.5.166) si trova:

$$e^{i\delta J_z/\hbar} \left[A_{h,k\hat{z}} + A_{h,-k\hat{z}}^\dagger \right] e^{-i\delta J_z/\hbar} = e^{-ih\delta} \left[A_{h,k\hat{z}} + A_{h,-k\hat{z}}^\dagger \right], \quad (3.5.168)$$

da cui si ha, separando la parte di distruzione da quella di creazione:

$$\exp(iJ_z\delta/\hbar) A_{h,\vec{k}} \exp(-iJ_z\delta/\hbar) = \exp(-ih\delta) A_{h,\vec{k}}, \quad (3.5.169)$$

e quindi

$$\exp(iJ_z\delta/\hbar) A_{h,\vec{k}}^\dagger \exp(-iJ_z\delta/\hbar) = \exp(ih\delta) A_{h,\vec{k}}^\dagger. \quad (3.5.170)$$

Traducendo l'effetto della rotazione sugli operatori di creazione $A_{h,\vec{k}}^\dagger$ in quello sugli stati di singola particella:

$$\begin{aligned} & \exp(iJ_z\delta/\hbar) A_{h,\vec{k}}^\dagger \exp(-iJ_z\delta/\hbar) |\Psi_0\rangle = \exp(iJ_z\delta/\hbar) A_{h,\vec{k}}^\dagger |\Psi_0\rangle \\ &= \exp(ih\delta) A_{h,\vec{k}}^\dagger |\Psi_0\rangle, \end{aligned} \quad (3.5.171)$$

si trova che l'*elicità* di questi stati del campo ($A_{h,\vec{k}}^\dagger |\Psi_0\rangle$), cioè la loro proiezione del momento angolare totale sul numero d'onda, vale $h\hbar$. Un eventuale stato con polarizzazione longitudinale, cioè nel nostro caso lungo l'asse z , ha invece *elicità* nulla.

Evidentemente il momento angolare di cui si parla contiene in generale contributi orbitali e contributi dal momento angolare proprio della particella

che è detto *spin* assimilando la particella a una trottola. Dato che il momento angolare orbitale è necessariamente ortogonale all'impulso della particella, l'elicità coincide con la proiezione dello spin della particella sul suo impulso. L'esempio del campo elastico mostra come le proprietà geometriche dei campi quantistici, nel nostro caso la deformazione elastica è un campo vettoriale, si traducono in proprietà dello spin della stessa.

Per un solido all'equilibrio termico a temperatura $T = 1/(k_B\beta)$ la matrice densità fononica è:

$$\prod_{\vec{k}, \alpha} \left((1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha, \vec{k}}}) \exp(-\beta\hbar\omega_{\alpha, \vec{k}} A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger A_{\alpha, \vec{k}}) \right) . \quad (3.5.172)$$

3.5.2 Quantizzazione del campo elettromagnetico

⁹ Abbiamo così quantizzato il campo elastico tridimensionale nello spazio di Fock dei fononi di un mezzo omogeneo e isotropo. Va notato che se $\sigma = -\tau$ la velocità e quindi l'energia associate ai fononi longitudinali si annullano e quindi questi fononi non partecipano più alla dinamica.

Questa situazione è esattamente quella che si realizza nel caso del campo elettromagnetico. Infatti se consideriamo le oscillazioni del campo elettromagnetico nel vuoto, che per semplicità limitiamo alla solita scatola cubica con condizioni al contorno periodiche, è ben noto che queste sono descritte dalle equazioni di Maxwell che si scrivono:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 . \quad (3.5.173)$$

Introducendo il potenziale vettore di Coulomb A e quello elettrostatico ϕ tramite:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \quad , \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\phi , \quad (3.5.174)$$

l'energia nel vuoto, in cui $\phi = 0$, è:

$$\mathbf{E} = \int d\vec{r} \frac{\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2}{2} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \left[\epsilon_0 \left| \dot{\vec{A}} \right|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left| \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right|^2 \right] . \quad (3.5.175)$$

appare evidente, confrontando con la (3.5.158), l'identità del campo elettromagnetico con un campo elastico in un mezzo omogeneo e isotropo in

⁹Si veda anche [3] (§80), [4] (§84), [15] (§2.1, §2.4)

cui $\rho = \epsilon_0$ e $\tau = -\sigma = \frac{1}{\mu_0}$. Questo campo è privo di stati polarizzati longitudinalmente. Si ha ora:

$$\omega_{\alpha, \vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} k \equiv ck . \quad (3.5.176)$$

E l'espressione del potenziale vettore nello spazio di Fock fotonico è :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\lambda=\pm, \vec{k} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[\vec{\epsilon}_{\lambda, \vec{k}} A_{\lambda, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{\epsilon}_{\lambda, \vec{k}}^* A_{\lambda, \vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega_{\vec{k}} t} \right] . \quad (3.5.177)$$

Dove abbiamo scelto di quantizzare su stati di elicità definita.

3.5.3 Quantizzazione di un campo scalare relativistico

¹⁰ Passiamo a considerare il campo (elastico) scalare relativistico, intendendo con ciò che la densità di energia è quadratica nelle derivate prime del campo nello stesso modo degli esempi precedenti. Nell'ambito relativistico si usa dedurre la dinamica da un principio di minima azione. Trattandosi di campi, l'azione è costruita come l'integrale spazio-temporale di una densità Lagrangiana che, nel caso elastico, dipende quadraticamente dal campo e dalle sue derivate prime, cioè:

$$A = c \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\vec{r} \mathcal{L}(x) , \quad (3.5.178)$$

e le equazioni del campo sono determinate richiedendo l'invarianza dell'azione per variazioni infinitesime del campo $\delta\phi(x)$ e delle sue derivate $\delta\partial\phi(x) = \partial\delta\phi(x)$ localizzate in un dominio spazio-temporale arbitrario, ma contenuto nel dominio di integrazione dell'azione. La corrispondente variazione della densità Lagrangiana è data da:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x) &\equiv \delta\phi(x) \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x)} + \delta\partial_x\phi(x) \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_x\phi(x))} = \delta\phi(x) \left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x)} - \partial_x \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_x\phi(x))} \right] \\ &+ \partial_x \left[\phi(x) \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_x\phi(x)} \right] . \end{aligned} \quad (3.5.179)$$

¹⁰Si veda anche [3] (§83) [9] (§3.2.1)

Passando quindi alla variazione dell'azione l'ultimo termine non da contributo perché è una derivata spazio-temporale di una quantità localizzata all'interno del dominio d'integrazione e si ha quindi la condizione di stazionarietà:

$$\begin{aligned}\delta A &= c \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\vec{r} \delta \mathcal{L}(x) \\ &= c \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\vec{r} \delta \phi(x) \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_x \phi(x))} \right] = 0\end{aligned}\quad (3.5.180)$$

che implica, data l'arbitrarietà del supporto di $\delta\phi$, l'equazione del campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_x \phi(x))} = 0 . \quad (3.5.181)$$

Non è difficile dimostrare che le equazioni del campo sono invarianti per trasformazioni di Lorentz se la densità Lagrangiana si trasforma come un campo scalare, cioè, data la trasformazione di Lorentz Λ :

$$\mathcal{L}_\Lambda(x) \equiv \mathcal{L}(\phi_\Lambda(x), \partial \phi_\Lambda(x), \Lambda^{-1}x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) . \quad (3.5.182)$$

Come risulta in modo ovvio dalla teoria della relatività, partendo da un campo scalare $\phi(x)$ possono essere costruiti solo due scalari quadratici nel campo e nelle derivate prime. Essi sono $\partial^T \phi g \partial \phi$ e ϕ^2 , dunque la densità Lagrangiana deve essere una combinazione lineare di questi due termini. Dato che il campo ϕ è definito a meno di una costante moltiplicativa si può sempre fissare il coefficiente del primo termine a ± 1 , mentre quello del secondo, che ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato, appare come un parametro fisico. I segni verranno stabiliti in base a criteri di stabilità. Avremo dunque la densità Lagrangiana;

$$\mathcal{L}(x) = a \partial_x^T \phi g \partial_x \phi(x) / 2 + b \phi^2(x) / 2 . \quad (3.5.183)$$

Il caso in cui la densità Lagrangiana non dipende esplicitamente da x , ma solo tramite il campo, nel nostro esempio elastico, a e b non dipendono da x , la teoria è evidentemente invariante per traslazioni nello spazio-tempo e valgono ovviamente le equazioni che scriviamo in forma tetra-vettoriale:

$$(g\partial)^\mu \mathcal{L}(x) = (g\partial)^\mu \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} + (g\partial)^\mu (g\partial)^\nu \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{(\partial (g\partial)^\nu \phi(x))} , \quad (3.5.184)$$

che, usando le equazioni del campo, diventano:

$$\begin{aligned} & (g\partial)^\mu \mathcal{L}(x) - (g\partial)^\nu \left[(g\partial)^\mu \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial ((g\partial)^\nu \phi(x))} \right] \\ &= \partial_\nu \left[g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x) - (g\partial)^\mu \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\nu \phi(x))} \right] \equiv \partial_\nu T^{\mu,\nu} = 0 , \end{aligned} \quad (3.5.185)$$

Separando componenti spaziali e temporali si trova:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \partial_t \left[\dot{\phi}(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\dot{\phi}(x))} - \mathcal{L}(x) \right] + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left[\dot{\phi}(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\vec{\nabla} \phi(x))} \right] = 0 \quad (3.5.186) \\ & \partial_t \left[-\nabla_i \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\dot{\phi}(x))} \right] + \nabla_j \left[\delta_{i,j} \mathcal{L}(x) - \nabla_i \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\nabla_j \phi(x))} \right] = 0 . \end{aligned}$$

L'associazione canonica invarianza-conservazione indice l'interpretazione di:

$$U(x) \equiv \dot{\phi}(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\dot{\phi}(x))} - \mathcal{L}(x) , \quad (3.5.187)$$

come densità di energia, e di:

$$\vec{P}(x) \equiv -\vec{\nabla} \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\dot{\phi}(x))} , \quad (3.5.188)$$

come densità di impulso e i termini corrispondenti sotto divergenza come densità di flusso di energia e impulso.

Nel caso libero, partendo dalla densità Lagrangiana (3.5.183) si ha:

$$U = -a(\dot{\phi}(x))^2/c^2 - \mathcal{L}(x) = -a\frac{1}{2}[(\dot{\phi}(x))^2/c^2 + \vec{\nabla} \phi(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x)] - b\phi^2(x)/2 . \quad (3.5.189)$$

Da quest'equazione è immediato dedurre ulteriori vincoli per i coefficienti della densità Lagrangiana. La condizione di stabilità dinamica impone la positività della densità di energia, infatti altrimenti sarebbe possibile estrarre dal sistema quantità arbitrariamente grandi di energia. Quindi, osservando che il coefficiente del quadrato delle derivate prime non può essere nullo altrimenti il modello non ha dinamica, poniamo $a = -\alpha^2 < 0$ e $b = -\beta^2 \geq 0$. D'altra parte, in assenza di una definizione indipendente del campo, possiamo sostituire ϕ con ϕ/α . In questo modo la densità in (3.5.183) diventa:

$$\mathcal{L}(x) = -\partial_x^T \phi g \partial_x \phi(x)/2 - k_c^2 \phi^2(x)/2 , \quad (3.5.190)$$

dove $k_c = \beta/\alpha = 2\pi/\lambda_c$ ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza ed è reale. Si ha allora la densità di energia:

$$U(x) = \frac{1}{2} [(\dot{\phi}(x))^2/c^2 + \vec{\nabla}\phi(x) \cdot \vec{\nabla}\phi(x) + k_c^2\phi^2(x)] . \quad (3.5.191)$$

e la densità di impulso:

$$\vec{P}(x) = -\vec{\nabla}\phi(x)\dot{\phi}(x)/(c^2) . \quad (3.5.192)$$

Per procedere alla quantizzazione del campo scalare libero si osservi la stretta analogia fra la (3.5.191) e la densità di energia di un campo elastico con una sola componente come risulterebbe dalla Eq.(3.5.151) con $\rho = 1/c^2$, $\tau = 1$ e $\sigma = 0$. L'unica variante è dovuta al termine in k_c^2 che non è presente nel caso delle deformazioni elastiche a causa della presenza del modo zero traslatorio. Comunque, limitando il sistema a un volume cubico con condizioni al contorno periodiche, si ha nuovamente che la riduzione ai modi normali corrisponde alla trasformata di Fourier:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} a_{\vec{k}}(t) , \quad (3.5.193)$$

con la condizione di realtà:

$$a_{\vec{k}}^* = a_{-\vec{k}} . \quad (3.5.194)$$

Sostituendo la decomposizione di Fourier in (3.5.191) e integrando, otteniamo per l'energia del sistema:

$$\mathbf{E} = \int d\vec{r} U(x) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left[\frac{1}{c^2} |\dot{a}_{\vec{k}}|^2 + (k^2 + k_c^2) |a_{\vec{k}}|^2 \right] . \quad (3.5.195)$$

Nuovamente abbiamo ottenuto per l'energia un'espressione quadratica in termini delle ampiezze di Fourier del tutto analoga alla (3.5.114). In analogia con la (3.5.143) possiamo dunque introdurre:

$$\omega_{\vec{k}} = c\sqrt{k^2 + k_c^2} , \quad (3.5.196)$$

e, in analogia con la (3.5.145) e tenendo conto della condizione di realtà (3.5.157), poniamo:

$$a_{\vec{k}} = c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} (A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger) . \quad (3.5.197)$$

Il campo scalare (3.5.193) diventa:

$$\phi(\vec{r}, t) = c\sqrt{\frac{\hbar}{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega_{\vec{k}}t} + A_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega_{\vec{k}}t} \right], \quad (3.5.198)$$

e si ha l'Hamiltoniano:

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}}, \quad (3.5.199)$$

e l'impulso (3.5.150):

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}}. \quad (3.5.200)$$

Alla luce della seconda quantizzazione questi operatori forniscono una precisa interpretazione del nostro sistema in termini di un gas di un numero indefinito di particelle non interagenti. In particolare lo stato di singola particella $A_{\vec{k}}^\dagger \Psi_0$ corrisponde allo stato con impulso $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ e energia:

$$E(p) = \hbar \omega_{\vec{k}} = \hbar c \sqrt{k^2 + k_c^2} = \sqrt{c^2 p^2 + \hbar^2 c^2 k_c^2}. \quad (3.5.201)$$

Si tratta dunque di un gas relativistico di particelle con massa

$$m = \hbar k_c / c = \hbar / (c \lambda_c). \quad (3.5.202)$$

Le particelle non hanno spin perché il campo non ha stati di polarizzazione e lo stato di una particella è invariante per rotazioni intorno alla direzione dell'impulso.

È importante notare che se avessimo introdotto nella densità Lagrangiana un termine anarmonico del tipo

$$-\lambda \phi^4(x) / (4! \hbar c), \quad (3.5.203)$$

questo avrebbe reso i bosoni del gas fra loro interagenti inducendo per esempio processi di scattering come apparirà da alcuni esercizi presentati nel seguito. Similmente, nel caso di due campi scalari Φ e ϕ un termine nella densità Lagrangiana del tipo

$$gM \sqrt{\frac{c}{\hbar^3}} \Phi(x) \phi^2(x), \quad (3.5.204)$$

ha l'effetto di un'interazione

3.6 I campi elastici nel limite a volume infinito

Gli sviluppi fin qui considerati hanno fatto riferimento a sistemi in un volume finito per ovvie ragioni di semplicità e di convenienza, consideriamo ora brevemente come variano i risultati principali al limite di volume di quantizzazione infinito ($L \rightarrow \infty$).

Il punto di partenza di questa analisi è la constatazione che a volume finito (il solito cubo di lato L) i numeri d'onda si distribuiscono secondo i vertici di un reticolo di passo $\frac{2\pi}{L}$; dunque, mediando su distanze molto superiori a questo passo, si osserva una densità degli stati nello spazio dei numeri d'onda pari a $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$. Per questo, nel caso di funzioni definite sul reticolo dei numeri d'onda lentamente variabili da sito a sito, e quindi in particolare nel limite di volume infinito assumendo regolarità di operatori e funzioni d'onda, possiamo pensare di interpolare le funzioni con altre continue definite dappertutto e la somma con un integrale rispetto alla misura:

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d\vec{k} . \quad (3.6.205)$$

Contestualmente si sostituisce

$$\delta_{\vec{k},\vec{q}} \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}) , \quad (3.6.206)$$

in modo che la sommatoria rispetto a \vec{k} della delta di Kronecker vada nell'integrale della delta di Dirac. Considerando allora gli elementi della base di onde piane si passa da:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} , \quad (3.6.207)$$

normalizzate secondo:

$$\int d\vec{r} \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r})\psi_{\vec{q}}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k},\vec{q}} , \quad (3.6.208)$$

alla base continua:

$$\psi(\vec{k}, \vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{(2\pi)^3}} , \quad (3.6.209)$$

con la normalizzazione:

$$\int d\vec{r} \psi^*(\vec{k}, \vec{r}) \psi(\vec{q}, \vec{r}) = \delta(\vec{k} - \vec{q}) . \quad (3.6.210)$$

Gli operatori di creazione e distruzione su onde piane cambiano le proprie regole di commutazione in modo conseguente, si passa cioè da (3.3.55):

$$[A_{\vec{k}}, A_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} , \quad (3.6.211)$$

a:

$$[A(\vec{k}), A^\dagger(\vec{q})] = \delta(\vec{k} - \vec{q}) , \quad (3.6.212)$$

avendo sostituito:

$$A_{\vec{k}} \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}} A(\vec{k}) . \quad (3.6.213)$$

E' facile verificare che le espressioni per l'energia cinetica, la densità di carica e il potenziale d'interazione diventano indipendenti dal volume; in particolare, per esempio, si ha

$$T = \int d\vec{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} A^\dagger(\vec{k}) A(\vec{k}) \quad (3.6.214)$$

e la (3.3.74) diventa:

$$V = \frac{1}{2} \int d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{q} \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^3} v(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} A^\dagger(\vec{k} + \vec{q}) A(\vec{k}' - \vec{q})^\dagger A(\vec{k}') A(\vec{k}) . \quad (3.6.215)$$

Passando allo studio del campo elastico osserviamo che in una dimensione gli esponenti che appaiono nei fattori $\frac{2\pi}{L}$ vengono divisi per 3; per cui per esempio $A_n \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} A(k)$; conseguentemente l'espressione del campo elastico in una dimensione (3.5.142) diventa:

$$\chi(x, t) = a_B + \frac{P_B}{M} t + \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\rho}} \int dk \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left[A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} + A(k)^\dagger e^{-ikx + i\omega(k)t} \right] . \quad (3.6.216)$$

Analogamente va modificata l'espressione del campo elastico in tre dimensioni, dove peraltro la potenza di 2π nel coefficiente davanti all'integrale è

triplicata. Nello stesso modo possiamo scrivere l'espressione del potenziale vettore elettromagnetico come:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\alpha=\pm} \int d\vec{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left[\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{k}) A_\alpha(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-ickt} \right. \\ &\quad \left. + \vec{\epsilon}_\alpha^*(\vec{k}) A_\alpha(\vec{k})^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}+ickt} \right]. \end{aligned} \quad (3.6.217)$$

Brevi cenni circa l'azione delle trasformazioni di Lorentz sullo spazio di Fock relativistico sono dati in Appendice D.

3.6.1 L'effetto Casimir

¹¹ Una situazione interessante in cui emergono le correzioni al limite di volume infinito è quella dell'effetto Casimir, cioè la presenza di forze attrattive fra le armature di un condensatore scarico a facce piane parallele e privo di dielettrico a temperatura nulla. Schematizziamo il condensatore come due piani paralleli conduttori ideali posti a distanza d , scegliamo l'asse x perpendicolare ai piani che lo intercettano nei punti $x = 0$ e $x = d$.

Il campo elettrico all'interno del condensatore è vincolato, oltre che dalla condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, dalle condizioni al bordo $E_y(x, y, z) = E_z(x, y, z) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_x(x, y, z) = 0$ per $x = 0$ e per $x = d$. Il campo che soddisfa queste condizioni può essere sviluppato in modi normali del tipo:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}_\parallel, x) = a^{(1)} \vec{\epsilon}_\parallel e^{i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{r}} \sin(\pi n x / d) \quad (3.6.218)$$

dove l'indice \parallel distingue i vettori paralleli alle armature e si deve porre $\vec{\epsilon}_\parallel \cdot \vec{k}_\parallel = 0$ e $n = 1, \dots, \infty$.

Si hanno anche modi normali del tipo:

$$\vec{E}^{(2)}(\vec{r}_\parallel, x) = a^{(2)} \vec{v}_x e^{i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{r}}, \quad (3.6.219)$$

e del tipo:

$$\vec{E}^{(2)}(\vec{r}_\parallel, x) = a^{(2)} \left[\frac{\vec{k}_\parallel d}{\pi n} \sin(\pi n x / d) + i \vec{v}_x k_\parallel^2 \cos(\pi n x / d) \right] e^{i\vec{k}_\parallel \cdot \vec{r}}. \quad (3.6.220)$$

¹¹Si veda anche [9] (§3.2.4)

Si è posto \vec{v}_x eguale al versore dell'asse x e $n = 1, \dots, \infty$.

Dunque si hanno due modi con frequenza angolare $\omega_n = c\sqrt{\pi^2 n^2/d^2 + k_{\parallel}^2}$ e uno solo con frequenza angolare $\omega_0 = ck_{\parallel}$. La somma delle energie di punto zero per unità di superficie del condensatore corrisponde all'espressione, formale perché divergente,

$$\begin{aligned} E/S &= c\hbar/2 \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[k_{\parallel} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\pi^2 n^2/d^2 + k_{\parallel}^2} \right] \\ &\equiv c\hbar/2 \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\omega_0(k_{\parallel}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(k_{\parallel}) \right]. \end{aligned} \quad (3.6.221)$$

La densità di energia in assenza delle armature corrisponde a

$$\begin{aligned} E_{\infty}/(dS) &= c\hbar \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn/d\sqrt{\pi^2 n^2/d^2 + k_{\parallel}^2} \\ &= c\hbar/\pi \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dx \sqrt{x^2 + k_{\parallel}^2}. \end{aligned} \quad (3.6.222)$$

Evidentemente, come si è detto, le espressioni per le densità di energia che sono puramente formali perché divergenti, possono essere rese meno formali assumendo che solo le frequenze inferiori a quella di plasma siano sensibili alla presenza delle armature e quindi in entrambe le espressioni le frequenze angolari vadano moltiplicate per una funzione di taglio $\phi(\omega)$ dove $\phi(x)$ vale 1 per frequenze inferiori a quella di plasma e si annulla con tutte le sue derivate sopra questa frequenza. Introdotta la funzione di taglio ha senso confrontare le espressioni (3.6.221) e (3.6.222), moltiplicata per d , calcolando la variazione della somma delle energie di punto zero per unità di superficie dovuta alla presenza della seconda armatura

$$\begin{aligned} \Delta/S &\equiv (E - E_{\infty})/S \equiv \hbar \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\omega_0(k_{\parallel})\phi(\omega_0(k_{\parallel}))/2 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(k_{\parallel})\phi(\omega_n(k_{\parallel})) - \int_0^{\infty} dn\omega_n(k_{\parallel})\phi(\omega_n(k_{\parallel})) \right] \\ &= \frac{c\hbar}{4\pi} \int_0^{\infty} dw \left[\frac{1}{2}\sqrt{w} \phi(\sqrt{w}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w} \phi\left(\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w}\right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} dn\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w} \phi\left(\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.6.223)$$

Per semplificare le nostre espressioni introduciamo la funzione:

$$\begin{aligned}
F(n) &\equiv \frac{c\hbar}{4\pi} \int_0^\infty dw \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w} \phi\left(\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + w}\right) & (3.6.224) \\
&\equiv \frac{c\hbar\pi^2}{4d^3} \int_0^\infty dz \sqrt{n^2 + z} \tilde{\phi}(\sqrt{n^2 + z}) = \frac{c\hbar\pi^2}{4d^3} \int_{n^2}^\infty dz \sqrt{z} \tilde{\phi}(\sqrt{z})
\end{aligned}$$

e quindi esprimiamo Δ/S come:

$$\Delta/S = \frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty F(n) . \quad (3.6.225)$$

L'effetto studiato si riconduce dunque alla differenza tra una somma e un integrale di cui la somma fornisce il valore approssimato ottenibile tramite interpolazione lineare, cioè col metodo dei trapezi. Queste differenza può essere calcolata col metodo di Eulero-Mc-Laurin che descriviamo qui di seguito.

Consideriamo una successione di funzioni $P_n(x)$ periodiche con periodo 1, cioè tali che $P_n(x+1) = P_n(x)$ e definite dalle relazioni valide nell'intervallo $(0, 1)$:

$$\begin{aligned}
P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad , \quad P_n(x) = P'_{n+1}(x)/(n+1) \quad , \\
\int_0^1 P_n(x) dx = 0 \quad , & \quad (3.6.226)
\end{aligned}$$

dove P'_n indica la derivata di P_n . Dato che P_1 ha una discontinuità di prima specie, P_n è continua con $n-2$ di derivate e quindi, per $n > 1$, $P_n(1) = P_n(0)$ si annulla per n dispari e per n pari definisce il numero di Bernoulli B_n . Non è difficile ricavare $B_2 = 1/6$ e $B_4 = -1/30$.

Usando le funzioni $P_n(x)$ possiamo valutare Δ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(n) dn &= \int_0^\infty P_0(n) F(n) dn = \int_0^\infty P'_1(n) F(n) dn = \frac{1}{2} F(0) \\
&+ \sum_{n=1}^\infty F(n) - \frac{1}{2} \int_0^\infty P'_2(n) F'(n) dn = \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) \\
&+ \frac{1}{2} P_2(0) F'(0) + \frac{1}{3!} \int_0^\infty P'_3(n) F^{(2)}(n) dn = \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) \\
&+ \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} P_n(0) F^{(n-1)}(0) & \quad (3.6.227)
\end{aligned}$$

dove $F^{(n)}$ sta per la derivata ennesima. Nel caso in considerazione da (3.6.225) troviamo:

$$F'(n) = -\frac{c\hbar\pi^2}{2d^3}n^2\tilde{\phi}(n) \quad (3.6.228)$$

dove $\tilde{\phi}$ vale 1 nell'origine dove si annullano tutte le sue derivate. Troviamo quindi che

$$F^{(n)}(0) = -\frac{c\hbar\pi^2}{d^3}\delta_{n,3} . \quad (3.6.229)$$

A questo punto possiamo combinare i risultati espressi dalle (3.6.225), (3.6.227) e (3.6.229) ottenendo il risultato per la densità di energia superficiale del condensatore riferita a quella del vuoto:

$$\begin{aligned} \Delta/S &= \frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P_n(0) F^{(n-1)}(0) \\ &= \frac{B_4}{4!} \frac{c\hbar\pi^2}{d^3} = -\frac{c\hbar\pi^2}{720 d^3} . \end{aligned} \quad (3.6.230)$$

Come ben si vede il risultato non dipende dalla natura delle armature del condensatore, cioè da ϕ e implica una pressione negativa sulle stesse armature che tende a schiacciare il condensatore stesso $P = \frac{c\hbar\pi^2}{240 d^4}$. Per una distanza dell'ordine del micron si ha una pressione dell'ordine di 10^{-3} *Pascal* che, anche se con una certa difficoltà, è stata misurata trovando un valore in ottimo accordo con quello teorico.

3.7 Esercizi

1. Un'impurezza posta nell'origine delle coordinate in un cristallo interagisce con i fononi longitudinali tramite:

$$V = \frac{\kappa\hbar}{2v\rho\Omega} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \frac{A_{\vec{k}_1}^\dagger A_{\vec{k}_2}}{\sqrt{k_1 k_2}}$$

dove Ω è il volume del cristallo, $v = 5 \cdot 10^3$ *m/s* la velocità dei fononi, $\rho = 5 \cdot 10^3$ *kg/m³* la densità del cristallo e i \vec{k}_i sono numeri d'onda.

-) Valutate la dimensione della costante κ , che vale 1 in unità m.k.s..

-) Calcolate l'elemento di matrice di V fra lo stato di un fonone con numero d'onda \vec{p}_1 e quello di un fonone con numero d'onda \vec{p}_2 .

-) Calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ la sezione d'urto totale di scattering di un fonone da parte dell'impurezza (si ricordi che il flusso incidente è dato da v/Ω) usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16),

-) Usando la matrice densità (3.5.172) calcolare, nello stesso limite, il valor medio di V se il cristallo è all'equilibrio termico a temperatura T (si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$).

(Sol: κ ha le dimensioni di una costante elastica, dunque $\kappa = 1 \text{ Joule} \times m^2$, l'elemento di matrice vale: $\frac{\kappa \hbar}{2v\rho\Omega\sqrt{p_1 p_2}}$, la sezione d'urto vale $\sigma = \frac{\kappa^2}{4\pi v^4 \rho^2} \simeq 5 \cdot 10^{-24} m^2$, il valor medio vale $\bar{V} = \kappa k_B^2 T^2 / (24v^3 \rho \hbar)$)

2. Un atomo con massa $m = 10^{-25} \text{ kg}$ muovendosi in un fluido interagisce con i fononi longitudinali del fluido stesso tramite l'operatore:

$$H_I = g \sqrt{\frac{\hbar^3 v^2}{\Omega}} \sum_{\vec{p}, \vec{k}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} \frac{A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{k}},$$

dove $a_{\vec{p}}$ è l'operatore di distruzione di un atomo con impulso \vec{p} e $A_{\vec{k}}$ quello di un fonone con impulso \vec{k} e v è la velocità del suono.

Se $g = 10^{-4}$ e $v = 10^2 \text{ m/s}$ calcolare quanti fononi sono emessi in media per unità di cammino percorso da un atomo con velocità V compresa fra 50 m/s e 200 m/s . Calcolate anche l'impulso medio perso dall'atomo per unità di tempo in funzione di V .

Si noti che l'emissione dei fononi non è isotropa. Si noti inoltre che l'impulso medio perso dall'atomo per unità di tempo è il contributo atomico alla viscosità moltiplicato per la velocità dell'atomo.

(Sol: Stato iniziale $a_{\vec{p}}^\dagger \Psi_0$ finale $A_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \Psi_0$, l'elemento di matrice di H_I è $\delta_{\vec{p}, \vec{k}+\vec{q}} g \sqrt{\frac{\hbar^3 v^2}{\Omega k}}$.
Dalla regola d'oro si ha: $\dot{P} = \frac{g^2 v^2}{2\pi \hbar} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty k dk \delta[Vk \cos \theta - vk - k^2/(2m)]$
 $= \frac{g^2 v^2}{2\pi \hbar V} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d \cos \theta \delta[\cos \theta - v/V - k/(2mV)] = \frac{g^2 v^2}{2\pi \hbar V} \int_0^\infty dk \Theta(1 - v/V - k/(2mV))$
 $= \frac{g^2 v^2 m}{\pi \hbar V} (V - v) \Theta(V - v)$, dove Θ è la funzione gradino.

Quindi si ha emissione solo per $V > 100 \text{ m/s}$, e per $V = 200 \text{ m/s}$ il numero medio di fononi emessi per unità di lunghezza è: $\frac{g^2 v^2 m}{\pi \hbar V^2} (V - v) \Theta(V - v) \simeq 10^3 / (4\pi) m^{-1}$.

Da \dot{P} si potrebbe calcolare l'impulso ceduto per unità di tempo da un atomo delle pareti del condotto in cui fluisce il superfluido, per semplicità assumendo il valore massimo ammissibile $2m(V - v)$ si avrebbe un impulso ceduto per unità di tempo, cioè una forza viscosa sull'atomo pari a $2 \frac{g^2 v^2 m^2}{\pi \hbar V} (V - v)^2 \Theta(V - v)$ e quindi una viscosità sulle pareti pari a $2N_A/S \frac{g^2 v^2 m^2}{\pi \hbar V} (V - v)^2 \Theta(V - v)$ dove N_A/S è il numero di atomi per unità di superficie.)

3. Un'impurezza inserita in un reticolo cristallino ne altera localmente la densità e quindi induce un termine nell'Hamiltoniano fononico che è quadratico nella derivata temporale del campo fononico stesso.

Per semplicità consideriamo solo i fononi longitudinali indicando con $A_{\vec{k}}$ e $A_{\vec{k}}^\dagger$ gli operatori di distruzione e creazione sullo stato con numero d'onda \vec{k} .

Schematizziamo il termine indotto come:

$$H_I = \frac{\lambda}{D^6 v_S^2} \int d\vec{r} d\vec{r}' e^{-\frac{r^2 + r'^2}{D^2}} \vec{\chi}(\vec{r}) \cdot \vec{\chi}(\vec{r}'),$$

dove λ è un coefficiente con le dimensioni di un'energia, v_S la velocità dei fononi longitudinali, e la restrizione ai fononi longitudinali implica:

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = -i \sqrt{\frac{v_S \hbar}{2\rho\Omega}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\vec{k}}{\sqrt{k}} [A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger]$$

Si vuole calcolare nel limite di volume $\Omega \rightarrow \infty$ il valor medio di H_I a temperatura $T = 1/(\beta k_B)$. Questo è dato da $Tr[\rho_\beta H_I] \equiv \bar{H}_I$ dove ρ_β è la matrice densità fononica, cioè di un gas di Bosoni non interagenti e con potenziale chimico nullo. Si valuti esplicitamente il risultato nel limite di grande raggio D dell'impurezza e di grande temperatura, cioè quando $\beta\hbar/D \ll \ll 1$.

(Sol: Sostituendo l'espressione del la derivata del campo si ottiene: $H_I = -\lambda\hbar\pi^3/(2\rho v_S\Omega) \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \exp(-(k^2 + p^2)D^2/4) \vec{k} \cdot \vec{p} / \sqrt{pk} [A_{\vec{p}} + A_{-\vec{p}}^\dagger] [A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger]$. Si calcola il valor medio usando il teorema di Wick termico ottenendo:
 $\bar{H}_I = \lambda\hbar\pi^3/(2\rho v_S\Omega) \sum_{\vec{k}} k \exp(-k^2 D^2/2) [2N_{\vec{k}} + 1] \simeq \lambda\hbar/(16\rho v_S) \int d\vec{k} k \exp(-k^2 D^2/2) (\exp(\beta\hbar v_S k) + 1)/(\exp(\beta\hbar v_S k) - 1) \simeq \lambda/(8\beta\rho v_S^2) \int d\vec{k} \exp(-k^2 D^2/2) = \lambda(2\pi)^{3/2}/(8\beta\rho v_S^2 D^3)$)

4. Mostrare che le equazioni (3.5.181) applicate alla densità Lagrangiana $\mathcal{L} = -(gF)^{\alpha\beta}(gF)^{\beta\alpha}/4$ dove $F^{\alpha\beta} = (g\partial)^\alpha A^\beta - (g\partial)^\beta A^\alpha$ e g è la matrice metrica che è definita da: $g^{\mu,\nu} = 2\delta_{\mu,0}\delta_{\nu,0} - \delta_{\mu,\nu}$, cioè le equazioni:

$$(g\partial)^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial((g\partial)^\mu A^\nu)} = 0$$

coincidono con le equazioni di Maxwell con $j_s = \rho_s = 0$.

(Sol: Si possono seguire due vie diverse, la prima parte dall'osservazione che $\mathcal{L} = \epsilon_0|\vec{E}|^2/2 - |\vec{B}|^2/(2\mu_0)$ in cui \vec{E} e \vec{B} vanno scritti in termini dei potenziali. La seconda invece parte da $\partial F^{\alpha\beta}/(\partial((g\partial)^\mu A^\nu)) = \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}$ quindi $\partial \mathcal{L}/(\partial((g\partial)^\mu A^\nu)) = -1/2[(gFg)^{\nu\mu} - (gFg)^{\mu\nu}] = (gFg)^{\mu\nu}$ si ha allora le equazioni $(g\partial)^\mu (gFg)^{\mu\nu} = (\partial^T g\partial)(gA)^\nu - (\partial)^\nu (\partial^T A) = 0$ che sostituendo l'espressione di A^μ in funzione di \vec{A} e ϕ da le equazioni in forma omogenea.)

5. Calcolare, nel limite di volume di quantizzazione $\Omega \rightarrow \infty$, il commutatore:

$$[A_i(\vec{r}, 0), E_j(\vec{0}, 0)]$$

dove $\vec{A}(\vec{r}, t)$ è il potenziale vettore del campo elettromagnetico dato in Eq.(3.5.177) e \vec{E} è il campo elettrico. (Si tenga conto che per i vettori di polarizzazione vale la formula: $\sum_\alpha \epsilon_{\alpha,i}^*(\vec{k})\epsilon_{\alpha,j}(\vec{k}) = \delta_{i,j} - \frac{k_i k_j}{k^2}$ e inoltre $\sum_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})/(k^2\Omega) \rightarrow 1/(4\pi r)$.)

(Sol: $[A_i(\vec{r}, 0), E_j(\vec{0}, 0)] = -i\hbar/\epsilon_0[\delta(\vec{r})\delta_{i,j} + \nabla_i \nabla_j (1/(4\pi r))]$. Si noti che la condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ è rispettata dal risultato.)

6. Si consideri lo spazio degli stati fotonici in una cavità a pareti riflettenti. Questo spazio è lo spazio di Fock dei fotoni con frequenza (e quindi energia) inferiore a un certo valore detto frequenza di plasma delle pareti che nel caso in studio è $\nu_P = 10^{16}$ Hertz.

Assumendo che lo stato quantistico della cavità sia il vuoto di Fock calcolate, partendo dall'espressione del potenziale vettore in seconda quantizzazione con la somma sui numeri d'onda tagliata alla frequenza di plasma, il valore medio del quadrato del campo elettrico nel centro della cavità. (Si sostituisca la somma sui numeri d'onda con un integrale).

(Sol: Dagli appunti (pg.31) risulta

$$\vec{E}(\vec{0}, 0) = -i\sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\alpha \neq 3} \sum_{\vec{k}, k < \frac{2\pi\nu_P}{c}} \sqrt{\frac{ck}{2}} \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} [A_{\alpha, \vec{k}} - A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger],$$

d'altra parte il valor medio nel vuoto: $\langle \Psi_0 [A_{\alpha, \vec{k}} - A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger] [A_{\beta, \vec{q}} - A_{\beta, \vec{q}}^\dagger] \Psi_0 \rangle = -\delta_{\vec{k}, \vec{q}} \delta_{\alpha, \beta}$ per cui si ha $\langle \Psi_0 E^2 \Psi_0 \rangle = \frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3} \sum_{\alpha \neq 3, \vec{k}, k < \frac{2\pi\nu_P}{c}} \frac{ck}{2} \simeq \frac{\hbar c}{\epsilon_0 2\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi\nu_P}{c}} k^3 dk = \frac{2\pi^2 \hbar \nu_P^4}{\epsilon_0 c^3}$

7. Due bosoni relativistici con massa m interagiscono tramite il termine della densità Lagrangiana $-\lambda\phi^4(x)/(4!\hbar c)$. Calcolare la sezione d'urto differenziale baricentrale in funzione dell'energia della coppia interagente $2\hbar\omega(k)$ e dell'angolo di scattering usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol: Sostituendo in $\int d\vec{r} \lambda \phi^4(\vec{r})/(4!\hbar c)$ l'espressione data in (3.5.198) a $t = 0$ si ottiene il termine Hamiltoniano:

$$H_I = c^3 \lambda \hbar / (96L^3) \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} \delta_{\sum_i \vec{k}_i, \vec{0}} \prod_i ((A_{\vec{k}_i} + A_{-\vec{k}_i}^\dagger) / \sqrt{\omega(k_i)})$$

Si noti che, dato che le particelle sono identiche, l'integrale sull'impulso di ciascuna particella finale ($\hbar\vec{k}_i$, $i = 1, 2$) va limitato a metà dell'angolo solido. L'elemento di matrice di H_I vale $c^3 \lambda \hbar / (4L^3 \omega^2(k)) \delta_{\vec{k}_1, -\vec{k}_2}$ il cui modulo al quadrato nel limite di grande volume è $c^6 \lambda^2 \hbar^2 (2\pi)^3 / (16L^9 \omega^4(k)) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$. Il flusso è $\Phi = 2kc^2 / (\omega(k)L^3)$, la sezione d'urto è il rapporto fra la probabilità di transizione per tempo unitario e il flusso e vale: $d\sigma / (d\cos\theta d\varphi) \equiv dP / (dtd\cos\theta d\varphi\Phi) = c^2 \lambda^2 / (64(2\pi)^2 \omega^2(k)) = c^2 \hbar^2 \lambda^2 / (16(2\pi)^2 E_B^2)$. Tenendo conto dell'identità delle particelle la sezione d'urto totale risulta $\sigma = c^2 \lambda^2 / (32\pi \omega^2(k)) = \lambda^2 / (32\pi(k^2 + \mu^2)) = \lambda^2 \hbar^2 c^2 / (32\pi E_B^2)$.

Trattandosi del primo esempio di un calcolo di sezione d'urto relativistica è opportuno osservare che la formula per la sezione d'urto può essere fattorizzata, ovviamente nel limite di volume infinito, in due termini: se indichiamo con E le energie e P gli impulsi, in particolare con E_B e P_B energie totale e impulso relativo baricentrale dei due corpi iniziali, abbiamo in primo luogo il fattore di flusso invariante che corrisponde a $2\pi\hbar^3 c^4 / (4\hbar E_{I1} E_{I2} \Phi) = 2\pi\hbar^3 c^2 / (4E_B P_B)$ da cui si è omesso un fattore Ω^{-1} che si compensa col fattore reciproco presente nello spazio delle fasi. Il secondo fattore è l'integrale sulla misura di spazio delle fasi invariante finale del modulo al quadrato dell'elemento di matrice dell'interazione che vale: $(\hbar^{3-F} c^{2F} (2\pi)^{3-3F}) \int \prod_{f=1}^F (d\vec{P}_f / 2E_f) \delta(\sum_{f=1}^F \vec{P}_f) \delta(E_B - \sum_{f=1}^F E_f) |\mathcal{M}|^2$ dove F

è il numero delle particelle finali cioè 2, mentre $|\bar{\mathcal{M}}|^2$ è la somma sulle polarizzazioni divisa per la molteplicità di quelle iniziali, ove applicabile, del modulo quadro dell'elemento di matrice invariante di transizione, nel caso in studio $\mathcal{M} = \lambda/(\hbar c)$. L'elemento di matrice invariante si ottiene da quello della densità Lagrangiana nell'origine dello spazio-tempo omettendo i fattori $\hbar c/\sqrt{2E\Omega}$ portati dai campi.)

8. Una particella relativistica di massa M e priva di spin corrispondente al campo relativistico quantizzato nel volume Ω , che, con una definizione diversa rispetto a quanto descritto nel paragrafo (4.4.3) e più adatta al caso in esame, è:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega}} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \frac{A_{\vec{p}} + A_{-\vec{p}}^\dagger}{(c^2 p^2 + M^2 c^4)^{1/4}},$$

interagisce col campo relativistico $\phi(\vec{r})$ definito come $\Phi(\vec{r})$, ma associato a particelle di massa nulla corrispondenti agli operatori di distruzione $a_{\vec{q}}$ (\vec{q} è un impulso), tramite l'Hamiltoniano di interazione:

$$H_I = gM \sqrt{\frac{c}{\hbar^3}} \int d\vec{r} \Phi(\vec{r}) \phi^2(\vec{r}).$$

Questa interazione induce il decadimento di una particella con massa M e energia $E \geq Mc^2$ in due particelle di massa nulla. Calcolate, in funzione di E , la probabilità per unità di tempo di questo decadimento ricordando che le due particelle nello stato finale sono identiche usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

Commentate il risultato alla luce della dilatazione dei tempi.

(Sol: Lo stato iniziale è dato da $|I\rangle = A_{\vec{P}}^\dagger |0\rangle$, quello finale da $|F\rangle = a_{\vec{Q}}^\dagger a_{\vec{Q}'}^\dagger |0\rangle$ si ha: $\langle F|H_I|I\rangle = \delta_{\vec{P}, \vec{Q}+\vec{Q}'} gM c^{5/2} \hbar^{3/2} / \sqrt{2\Omega E Q Q'}$. Si applica la regola d'oro integrando sull'impulso \vec{Q} in coordinate polari e si risolve il vincolo di conservazione dell'energia in funzione del coseno dell'angolo fra l'impulso \vec{Q} e \vec{P} . Si consiglia di distinguere le particelle finali integrando in ϕ fra 0 e π . Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{g^2 M^2 c^5}{4\pi E \hbar} \int_0^\pi d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dQ \frac{Qc}{E-Qc} \delta(E-Qc-c\sqrt{P^2+Q^2}-2PQ\cos\theta) \\ &= \frac{g^2 M^2 c^5}{4E\hbar P} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dQ \delta(\cos\theta - x(Q)) \end{aligned}$$

$$= \frac{g^2 M^2 c^5}{4EhP} \int_0^\infty dQ \Theta(1 - x^2(Q)) = \frac{g^2 M^2 c^5}{4EhP} \int_{(E-cP)/(2c)}^{(E+cP)/(2c)} dQ$$

dove $x(Q) = (2EQ/c - M^2 c^2)/(2PQ)$ si ha dunque $\dot{P} = \frac{g^2 M^2 c^4}{4Eh}$. Il risultato è inversamente proporzionale a E e quindi confermando la dilatazione dei tempi.

Osserviamo infine che il conto può essere effettuato in modo covariante usando le indicazioni dell'esercizio precedente con la variante che nel calcolo di vite medie non appare il fattore di flusso che va sostituito con $\pi \hbar c^2 / E_B$, sempre a meno del fattore $1/\Omega$.)

9. Si hanno tre campi scalari relativistici, il campo Φ con massa M , il campo ϕ con massa $m = M/2$ e il campo φ con massa nulla. Questi campi interagiscono tramite il termine della densità Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = gM \sqrt{\frac{c}{\hbar^3}} \Phi(x) \phi(x) \varphi(x) .$$

Si ha inizialmente una particella di massa M a riposo, si vuole calcolare la probabilità per unità di tempo del decadimento della particella iniziale in una particella di massa m e una di massa nulla.

Si calcoli nel volume finito Ω l'elemento di matrice dell'operatore $H_I = - \int d\vec{r} \mathcal{L}_{int}(\vec{r}, 0)$ fra lo stato iniziale e quello finale per due impulsi generici delle due particelle finali, se ne calcoli il modulo al quadrato. Infine si applichi la regola d'oro nel limite di volume infinito sommando su tutti i valori possibili degli impulsi delle particelle finali.

Si noti che nelle formule sugli appunti appaiono numeri d'onda e non impulsi. Nel caso si voglia lavorare con impulsi va osservato che $\omega(p) = E(p)/\hbar = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}/\hbar$ e quindi, a volume finito Ω il campo si decompone secondo: $\phi(\vec{r}) = (\hbar c / \sqrt{2\Omega}) \sum_{\vec{p}} \frac{\exp(i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar)}{\sqrt{E(p)}} [A_{\vec{p}} + A_{-\vec{p}}^\dagger]$ e, nel limite di volume infinito, la somma sugli impulsi non va come quella sui numeri d'onda.

(Sol: Lavorando con gli impulsi e indicando con $A_{\vec{p}}$ l'operatore di distruzione di Φ , con $a_{\vec{p}}$ quello di ϕ e con $\alpha_{\vec{p}}$ quello di φ si ha:

$$H_I = -gM c^2 \sqrt{\frac{\hbar^3}{8\Omega}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}} \frac{\delta_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}, \vec{0}}}{\sqrt{k\sqrt{p^2 + M^2 c^2} \sqrt{q^2 + m^2 c^2}}} (A_{\vec{p}} + A_{-\vec{p}}^\dagger) (a_{\vec{q}} + a_{-\vec{q}}^\dagger) (\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^\dagger) .$$

Lo stato iniziale è $|I\rangle = A_0^\dagger |\Psi_0\rangle$, quello finale $|F\rangle = a_K^\dagger \alpha_Q^\dagger |\Psi_0\rangle$, quindi $|\langle F|H_I|I\rangle|^2 = g^2 M^2 c^4 \frac{\hbar^3}{8\Omega} \frac{\delta_{\vec{Q}+\vec{K}, \vec{0}}}{KMc\sqrt{K^2+m^2c^2}}$. Applicando la regola d'oro la somma sugli stati finali riguarda un solo impulso perché la somma degli impulsi delle due particelle è nulla, quindi si ha l'integrale $(\Omega/\hbar^3) \int d\vec{K}$ e la conservazione dell'energia è vincolata da

$$\delta(c(Mc-K-\sqrt{K^2+m^2c^2})) = \frac{\delta(K - \frac{c(M^2-m^2)}{2M})}{c(1+K/\sqrt{K^2+m^2c^2})} = \frac{\sqrt{K^2+m^2c^2}}{Mc^2} \delta(K - \frac{c(M^2-m^2)}{2M}).$$

Infine la probabilità di decadimento per unità di tempo è:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (2\pi/\hbar) g^2 M^2 c^4 \frac{\hbar^3}{8\Omega} (\Omega/(2\pi\hbar)^3) \int d\vec{K} \delta(K - \frac{c(M^2-m^2)}{2M}) / (KM^2c^3) \\ &= \frac{g^2 M^2 c^4}{8(2\pi)^2 \hbar} (4\pi) \int_0^\infty dK \frac{K}{M^2 c^3} \delta(K - \frac{c(M^2-m^2)}{2M}) = \frac{g^2 c^2 (M^2-m^2)}{16\pi\hbar M}, \end{aligned}$$

che è evidentemente dimensionalmente corretta.)

10. Calcolare, in funzione dell'energia $\hbar\omega$ del fotone, la probabilità di decadimento di un atomo di idrogeno da un livello eccitato I (corrispondente alla funzione d'onda $\psi_{2,1,M}(\vec{r}) \exp(i\vec{p}_I \cdot \vec{R})/L^{3/2}$ dove \vec{r} è la posizione relativa elettrone-protone e \vec{R} posizione baricentrale) con momento angolare unitario e terza componente M allo stato fondamentale F (corrispondente alla funzione d'onda $\psi_{1,0}(\vec{r}) \exp(i\vec{p}_F \cdot \vec{R})/L^{3/2}$) di momento angolare orbitale nullo usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16). Si applichi l'approssimazione di dipolo elettrico in cui si trascura lo spin, si considera il nucleo infinitamente pesante e l'hamiltoniana di transizione è:

$$H_I = \frac{e}{m} \vec{A}(\vec{R}) \cdot \vec{p},$$

dove p è l'impulso relativo elettrone-protone e $vA(\vec{R})$ il potenziale vettore calcolato nel baricentro atomico. Si ponga inoltre l'energia di eccitazione atomica eguale a $\hbar\omega$ e

$$\int d\vec{r} \psi_{1,0}^*(\vec{r}) z \psi_{2,1,0}(\vec{r}) = \gamma,$$

dove z è la terza coordinata dell'elettrone.

(Sol: Dato che il risultato non può dipendere da M , si sceglie per convenienza $M = 0$ e si osserva che $\vec{p} = im[H_A, \vec{r}]/\hbar$ da cui $\int d\vec{r} \psi_{1,0}^*(\vec{r}) \vec{p} \psi_{2,1,0}(\vec{r}) = (im\omega) \int d\vec{r} \psi_{1,0}^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_{2,1,0}(\vec{r})$, infine, per invarianza per rotazioni intorno all'asse z , $\int d\vec{r} \psi_{1,0}^*(\vec{r}) x \psi_{2,1,0}(\vec{r}) = 0$, e lo stesso vale per y . Si conclude che $\int d\vec{r} \psi_{1,0}^*(\vec{r}) \vec{p} \cdot \vec{e}_z \psi_{2,1,0}(\vec{r}) = im\gamma\omega \epsilon^{(z)}$. A questo punto si può calcolare l'elemento di matrice di H_I fra lo stato iniziale e quello finale comprendente un fotone di numero d'onda

\vec{k} e polarizzazione l . Si ha $\langle F|H_I|I \rangle = i\sqrt{\hbar/2\epsilon_0ckL^3}e\gamma\omega\epsilon_{\vec{k},l}^{(z)}\delta_{\vec{p}_I,\vec{p}_F+\vec{k}}$ per cui nel limite considerato $\frac{dP}{dt} = 2\pi/\hbar \lim_{L^3 \rightarrow \infty} \sum_{\vec{k},\vec{p}_F,l} |\langle F|H_I|I \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar ck) = e^2\gamma^2\omega^2/(8\pi^2\epsilon_0c) \int d\vec{k}/k \delta(\hbar\omega - \hbar ck) \sum_l |\epsilon_{\vec{k},l}^{(z)}|^2 = e^2\gamma\omega^3/(4\pi\epsilon_0\hbar c^3) \int_{-1}^1 d\cos\theta \sum_l |\epsilon_{\vec{k},l}^{(z)}|^2$. Per valutare $\sum_l |\epsilon^{(z)}|^2$ conviene pensare a polarizzazioni piane del fotone scegliendo quella nel piano fra \vec{k} e l'asse z e quella ortogonale allo stesso piano, si ha $|\epsilon_{\vec{k},l}^{(z)}|^2 = \sin^2\theta$ nel primo caso e zero nel secondo. Sostituendo si ottiene infine: $\frac{dP}{dt} = \frac{4}{3}\alpha\gamma^2\frac{\omega^3}{c^2}$

3.8 Le trasformazioni canoniche lineari.

¹² Un metodo di calcolo molto potente in seconda quantizzazione è quello basato sull'ottimizzazione della scelta dell'algebra degli operatori di creazione e distruzione tramite trasformazioni canoniche, cioè trasformazioni che, appunto perchè canoniche, non cambiano le regole di commutazione (3.3.41). Tra le trasformazioni canoniche quelle normalmente prese in considerazione sono le trasformazioni lineari del tipo

$$A_\nu \rightarrow A'_\nu = \sum_\lambda a_{\nu,\lambda}A_\lambda + \sum_\lambda b_{\nu,\lambda}A_\lambda^\dagger - c_\nu, \quad (3.8.231)$$

che risultano canoniche se

$$\left[\left(\sum_\lambda a_{\nu,\lambda}A_\lambda + \sum_\lambda b_{\nu,\lambda}A_\lambda^\dagger - c_\nu \right), \left(\sum_\rho a_{\mu,\rho}A_\rho + \sum_\rho b_{\mu,\rho}A_\rho^\dagger - c_\mu \right) \right] = 0, \quad (3.8.232)$$

cioè

$$\sum_\lambda [a_{\nu,\lambda}b_{\mu,\lambda} - a_{\mu,\lambda}b_{\nu,\lambda}] = 0, \quad (3.8.233)$$

e se

$$\left[\left(\sum_\lambda a_{\nu,\lambda}A_\lambda + \sum_\lambda b_{\nu,\lambda}A_\lambda^\dagger - c_\nu \right), \left(\sum_\rho b_{\mu,\rho}^*A_\rho + \sum_\rho a_{\mu,\rho}^*A_\rho^\dagger - c_\mu^* \right) \right] = \delta_{\nu,\mu}, \quad (3.8.234)$$

cioè

$$\sum_\lambda [a_{\nu,\lambda}a_{\mu,\lambda}^* - b_{\nu,\lambda}b_{\mu,\lambda}^*] = \delta_{\mu,\nu}. \quad (3.8.235)$$

¹²Si veda anche [10] (Part. III)

Si noti che in generale una trasformazione del tipo (3.8.231) è accompagnata con un cambiamento dello stato di vuoto, infatti i nuovi operatori di distruzione non annullano più il vecchio vuoto, anzi lo trasformano nello stato

$$\left[\sum_{\lambda} a_{\nu,\lambda} A_{\lambda} + \sum_{\lambda} b_{\nu,\lambda} A_{\lambda}^{\dagger} - c_{\nu} \right] |\Psi_{\{0\}}\rangle , \quad (3.8.236)$$

Nel caso in cui il numero delle particelle sia conservato, cioè tipicamente nel caso di particelle massive non relativistiche con le importanti eccezioni che verranno discusse nel seguito del corso, la trasformazione canonica deve commutare col numero delle particelle. È facile verificare che questo impone l'annullarsi dei coefficienti b e c . Segue dalla (3.8.235) che in questo caso la matrice dei coefficienti a deve essere unitaria e dalla (3.8.236) che il vuoto non cambia.

Abbiamo già osservato che in questa situazione la trasformazione rappresenta semplicemente un cambiamento della base degli stati di singola particella su cui si è costruito il formalismo e la matrice a^* è costituita dai coefficienti dello sviluppo degli elementi della nuova base in termini di quelli della vecchia. Dunque, trattandosi di basi ortonormali,

$$a_{\mu,\eta}^* = \langle \psi_{\mu} | \psi'_{\eta} \rangle . \quad (3.8.237)$$

3.8.1 Stati coerenti

¹³ Un altro caso particolare interessante di trasformazione del tipo (3.8.231) corrisponde a:

$$A_{\nu} \rightarrow A'_{\nu} = A_{\nu} - c_{\nu} , \quad (3.8.238)$$

Contrariamente alla trasformazione corrispondente a un cambiamento di base di singola particella (3.8.238) comporta un cambiamento dello stato di vuoto. Infatti il nuovo vuoto $|\Psi'_{\{0\}}\rangle$ non è annichilato dai vecchi operatori di distruzione come il vuoto originale, si ha invece:

$$A'_{\nu} |\Psi'_{\{0\}}\rangle = (A_{\nu} - c_{\nu}) |\Psi'_{\{0\}}\rangle = 0 . \quad (3.8.239)$$

Dunque il nuovo vuoto è autovettore dei vecchi operatori di distruzione A_{ν} con autovalore c_{ν} . Possiamo ricavare esplicitamente la relazione fra i due vuoti esprimendo:

$$|\Psi'_{\{0\}}\rangle = \sum_{\{N_{\mu}\}} c_{\{N_{\mu}\}} |\Psi_{\{N_{\mu}\}}\rangle . \quad (3.8.240)$$

¹³Si veda anche [15] (Cap. 2), [11] (§2.2.1)

Applicando (3.8.239) e usando (3.3.34), abbiamo:

$$\begin{aligned}
A_\nu |\Psi'_{\{0\}}\rangle &= \sum_{\{N_\mu\}} c_{\{N_\mu\}} \sqrt{N_\nu} |\Psi_{\{N_\mu - \delta_{\nu, \mu}\}}\rangle \\
&= \sum_{\{N_\mu\}} c_{\{N_\mu + \delta_{\nu, \mu}\}} \sqrt{N_\nu + 1} |\Psi_{\{N_\mu\}}\rangle \\
&= \sum_{\{N_\mu\}} c_\nu c_{\{N_\mu\}} |\Psi_{\{N_\mu\}}\rangle .
\end{aligned} \tag{3.8.241}$$

Si ha dunque:

$$c_{\{N_\mu + \delta_{\nu, \mu}\}} = \frac{c_\nu}{\sqrt{N_\nu + 1}} c_{\{N_\mu\}} , \tag{3.8.242}$$

che fornisce una relazione di ricorrenza risolta da:

$$c_{\{N_\mu\}} = \prod_\mu \frac{c_\mu^{N_\mu}}{\sqrt{N_\mu!}} c_{\{0\}} . \tag{3.8.243}$$

Abbiamo quindi:

$$|\Psi'_{\{0\}}\rangle = c_{\{0\}} \sum_{\{N_\nu\}} \prod_\mu \frac{c_\mu^{N_\mu}}{\sqrt{N_\mu!}} |\Psi_{\{N_\mu\}}\rangle . \tag{3.8.244}$$

Il coefficiente $c_{\{0\}}$ può essere calcolato usando la condizione di normalizzazione:

$$|c_{\{0\}}|^2 \sum_{\{N_\nu\}} \prod_\mu \frac{|c_\mu|^{2N_\mu}}{N_\mu!} = |c_{\{0\}}|^2 e^{\sum_\nu |c_\nu|^2} = 1 , \tag{3.8.245}$$

ottenendo finalmente, modulo la solita fase, e nell'ipotesi che la serie all'esponente di e sia convergente:

$$|\Psi'_{\{0\}}\rangle = e^{-\sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{2}} \sum_{\{N_\nu\}} \prod_\mu \frac{c_\mu^{N_\mu}}{\sqrt{N_\mu!}} |\Psi_{\{N_\mu\}}\rangle . \tag{3.8.246}$$

E' chiaro che se invece la serie diverge lo stato di vuoto cercato non esiste nello spazio di Fock. Dunque la trasformazione (3.8.238), pur rispettando le regole di commutazione, non è canonica nel senso che non è realizzata dall'azione di un operatore unitario nello spazio di Fock.

Si può notare a questo proposito che:

$$|\Psi'_{\{0\}}\rangle = e^{-\sum_{\nu} \frac{|c_{\nu}|^2}{2}} \sum_{\{N_{\nu}\}} \prod_{\mu} \frac{(c_{\mu} A_{\mu}^{\dagger})^{N_{\mu}}}{N_{\mu}!} |\Psi_{\{0\}}\rangle = e^{-\sum_{\nu} \frac{|c_{\nu}|^2}{2}} e^{\sum_{\mu} c_{\mu} A_{\mu}^{\dagger}} |\Psi_{\{0\}}\rangle , \quad (3.8.247)$$

che, utilizzando la formula:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A,B]}{2}} , \quad (3.8.248)$$

valida per qualunque coppia di operatori A e B commutanti col loro commutatore, può essere riscritta:

$$|\Psi'_{\{0\}}\rangle \equiv |\Psi(\{c_{\mu}\})\rangle = e^{\sum_{\mu} [c_{\mu} A_{\mu}^{\dagger} - c_{\mu}^* A_{\mu}]} |\Psi_{\{0\}}\rangle \equiv U(\{c_{\mu}\}) |\Psi_{\{0\}}\rangle , \quad (3.8.249)$$

in cui appare in modo esplicito la struttura della trasformazione unitaria che realizza quella canonica, sempre nell'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{\nu} |c_{\nu}|^2$.

Lo stato $|\Psi(\{c_{\mu}\})\rangle$ sopra definito è chiamato stato coerente di ampiezza $\{c_{\mu}\}$; va notato che due stati coerenti di diversa ampiezza non sono ortogonali; essi sono autovettori corrispondenti a autovalori diversi dello stesso insieme di operatori non autoaggiunti! Al variare delle ampiezze gli stato coerenti forniscono una base sovra-completa per lo spazio di Fock. Ovviamente nel caso di particelle massive non relativistiche gli stati coerenti non hanno significato fisico, sono invece importanti in ottica quantistica dato che essi corrispondono agli stati quantistici generati da sorgenti classiche. Questi stati forniscono altresì rappresentazioni particolarmente utili dei fasci di luce.

3.8.2 Trasformazioni di Bogoliubov

Non meno interessante è il caso delle trasformazioni canoniche che, in un sistema invariante per traslazioni, lasciano invariato l'operatore momento totale. Esprimendo la trasformazione canonica in termini degli operatori di creazione e distruzione su stati a numero d'onda fissato:

$$A_{\vec{k}} \rightarrow A'_{\vec{k}} = \sum_{\vec{q}} a_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} b_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}}^{\dagger} - c_{\vec{k}} , \quad (3.8.250)$$

dobbiamo imporre la condizione che:

$$\vec{P} \equiv \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} A_{\vec{k}}^{\dagger} A_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} A_{\vec{k}}^{\dagger} A'_{\vec{k}} . \quad (3.8.251)$$

Il modo più semplice per esprimere questa condizione è richiedere che il momento commuti nello stesso modo:

$$[\vec{P}, A_{\vec{k}}] = -\hbar \vec{k} A_{\vec{k}}, \quad (3.8.252)$$

con gli operatori $A_{\vec{k}}$ e $A'_{\vec{k}}$. Applicando la regola di commutazione ai due membri della (3.8.250) otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{k} A'_{\vec{k}} &= \sum_{\vec{q}} \vec{k} a_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} \vec{k} b_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}}^\dagger - \vec{k} c_{\vec{k}} \\ &= \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}} - \sum_{\vec{q}} \vec{q} b_{\vec{k},\vec{q}} A_{\vec{q}}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.8.253)$$

da cui, confrontando i coefficienti degli operatori corrispondenti, otteniamo:

$$(\vec{k} - \vec{q}) a_{\vec{k},\vec{q}} = 0 \quad , \quad (\vec{k} + \vec{q}) b_{\vec{k},\vec{q}} = 0 \quad , \quad \vec{k} c_{\vec{k}} = 0, \quad (3.8.254)$$

cioè:

$$a_{\vec{k},\vec{q}} = u(\vec{k}) \delta_{\vec{k},\vec{q}} \quad , \quad b_{\vec{k},\vec{q}} = v(\vec{k}) \delta_{\vec{k},-\vec{q}} \quad , \quad c_{\vec{k}} = c \delta_{\vec{k},\vec{0}}, \quad (3.8.255)$$

dove u e v sono funzioni a valore complesso. Il ruolo e l'effetto del termine $c_{\vec{k}}$ è già stato ampiamente discusso nelle pagine precedenti, trascureremo quindi questo termine nel seguito della discussione limitandoci a osservare che la condensazione di Bose è rappresentabile in termini di una trasformazione canonica invariante per traslazioni con c dell'ordine del numero totale di particelle.

È sempre possibile rendere reali le funzioni u e v sfruttando la libertà di ridefinire gli operatori di distruzione moltiplicandoli per un fattore di fase, libertà corrispondente alla moltiplicazione degli stati della base di singola particella per il fattore opposto. In queste condizioni la condizione (3.8.235) diventa:

$$u^2(\vec{k}) - v^2(\vec{k}) = 1, \quad (3.8.256)$$

che equivale a:

$$u(\vec{k}) = \cosh(\chi(\vec{k})) \quad , \quad v(\vec{k}) = \sinh(\chi(\vec{k})). \quad (3.8.257)$$

La condizione (3.8.233) equivale invece alla richiesta che $\chi(\vec{k}) = \chi(-\vec{k})$.

E' possibile determinare anche in questo caso l'operatore unitario che realizza la trasformazione canonica nello spazio di Fock. Esso è dato da:

$$U(\chi) = e^{\sum_{\vec{k}} \frac{\chi(\vec{k})}{2} [A_{\vec{k}} A_{-\vec{k}} - A_{\vec{k}}^\dagger A_{-\vec{k}}^\dagger]} . \quad (3.8.258)$$

Va notato che la situazione è analoga a quella già incontrata nel caso degli stati coerenti, infatti perché l'operatore $U(\chi)$, che appare formalmente unitario, essendo l'esponenziale di un operatore formalmente anti-autoaggiunto, sia realmente unitario nello spazio di Fock è necessario che la funzione χ sia a quadrato sommabile. In caso contrario la trasformazione considerata non sarebbe canonica nello spazio di Fock.

3.8.3 L'oscillatore squeezed

¹⁴ Una prima applicazione molto semplice delle trasformazioni canoniche che coinvolgono operatori di creazione e distruzione si ha nello studio degli stati, cosiddetti *squeezed* di un oscillatore armonico.

Poniamo di avere a disposizione un oscillatore armonico di cui possiamo cambiare a piacimento la costante elastica k e quindi la pulsazione ω . Uno stato *squeezed* può essere preparato come segue: si aumenta la costante elastica da k a $k + \delta$ e si seleziona lo stato fondamentale dell'oscillatore modificato. Partendo dalle (3.5.119) si ha facilmente che scarto quadratico medio in posizione dello stato così ottenuto è $\frac{\hbar}{2\sqrt{m(k+\delta)}}$ ed è quindi inferiore a quello di uno stato coerente o dello stato fondamentale dell'oscillatore iniziale ¹⁵. Per questo lo stato preparato è detto *squeezed*. Se ora ripristiniamo bruscamente la costante elastica iniziale, ci si chiede come varierà nel tempo $\langle x^2 \rangle$, il valor medio di x^2 .

L'Hamiltoniano dell'oscillatore *squeezed* H_s si ottiene da quello iniziale H tramite le (3.5.119) :

$$H_s = H + \frac{\delta}{2} x^2 = \hbar \left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\delta}{2\sqrt{mk}} \right) (A^\dagger A + \frac{1}{2}) + \frac{\delta}{4\sqrt{mk}} (A^2 + A^{2\dagger}) \right] , \quad (3.8.259)$$

dove A è l'operatore di distruzione dell'oscillatore iniziale.

¹⁴Si veda anche [15] (Cap. 7), [11] (§2.2.2)

¹⁵Quanto segue ha senso anche per δ negativo purché ovviamente maggiore di $-k$.

H_s può essere posto in forma canonica:

$$H_s = \hbar \sqrt{\frac{k + \delta}{m}} (A_s^\dagger A_s + \frac{1}{2}) \quad (3.8.260)$$

tramite la trasformazione:

$$A = \cosh \chi A_s + \sinh \chi A_s^\dagger \quad (3.8.261)$$

con

$$\tanh(2\chi) = -\frac{\delta}{2k + \delta} \rightarrow \sinh(2\chi) = -\frac{\delta}{2\sqrt{k(k + \delta)}}, \quad \cosh(2\chi) = -\frac{2k + \delta}{2\sqrt{k(k + \delta)}}, \quad (3.8.262)$$

come si verifica facilmente per sostituzione di (3.8.262) in (3.8.259).

Segue da ciò che lo stato squeezed $|0_s\rangle$ soddisfa a $t = 0$ $A_s|0_s\rangle = 0$ e si evolve nel tempo in $|t_s\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|0_s\rangle$.

Noi vogliamo calcolare:

$$\begin{aligned} \langle t_s | x^2 | t_s \rangle &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} \langle t_s | (A + A^\dagger)^2 | t_s \rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} \langle 0_s | (Ae^{-i\omega t} + A^\dagger e^{i\omega t})^2 | 0_s \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} \langle 0_s | ((\cosh \chi A_s + \sinh \chi A_s^\dagger)e^{-i\omega t} + (\cosh \chi A_s^\dagger + \sinh \chi A_s)e^{i\omega t})^2 | 0_s \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} \langle 0_s | ((\cosh \chi e^{-i\omega t} + \sinh \chi e^{i\omega t})A_s + (\cosh \chi e^{i\omega t} + \sinh \chi e^{-i\omega t})A_s^\dagger)^2 | 0_s \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} (\cosh \chi e^{-i\omega t} + \sinh \chi e^{i\omega t})(\cosh \chi e^{i\omega t} + \sinh \chi e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} (\cosh^2 \chi + \sinh^2 \chi + 2 \sinh \chi \cosh \chi \cos(2\omega t)) = \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mk}} (\cosh(2\chi) + \sinh(2\chi) \cos(2\omega t)) = \frac{\hbar(2k + \delta(1 - \cos(2\omega t)))}{4k\sqrt{m(k + \delta)}} \\ &= \frac{\hbar}{2k\sqrt{m(k + \delta)}} (k + \delta \sin^2(\omega t)). \end{aligned} \quad (3.8.263)$$

Da cui si vede che $\langle t_s | x^2 | t_s \rangle$ oscilla con frequenza doppia fra il valore squeezed iniziale e $\sqrt{\frac{k + \delta}{k}}$ volte il valore corrispondente allo stato fondamentale di H . Si può vedere facilmente che $\langle t_s | p^2 | t_s \rangle$ oscilla in opposizione di fase rispetto

a $\langle t_s | x^2 | t_s \rangle$. Gli stati squeezed hanno un ruolo molto importante in ottica quantistica perché esistono mezzi non lineari in cui è possibile cambiare la costante dielettrica tramite campi esterni.

3.8.4 Teoria della superfluidità

¹⁶ Un'altra applicazione significativa delle trasformazioni canoniche riguardanti i sistemi invarianti per traslazioni, che sono dette trasformazioni di Bogoliubov, è quella a un gas bosonico con interazione repulsiva a bassissima densità.

L'applicazione si basa sull'ipotesi che nello stato fondamentale del sistema e nei suoi stati eccitati di energia più bassa l'occupazione dello stato con numero d'onda nullo $N_{\vec{0}}$ sia macroscopica e quindi praticamente eguale al numero totale delle particelle N . Equivalentemente diciamo che il grosso degli atomi occupa lo stato con numero d'onda nullo con probabilità $1 - O(1/N)$..

Naturalmente, a priori, è possibile che gli stati a bassa eccitazione siano combinazioni lineari di stati con $N_{\vec{0}}$ diverso, ma sempre dell'ordine di N . Per esempio questa combinazione potrebbe corrispondere a quella di uno stato coerente di ampiezza N sul modo con $\vec{k} = \vec{0}$. ¹⁷

In questa situazione la sostituzione $a_{\vec{k}}$ con $\hat{a}_{\vec{k}} + \sqrt{N}\delta_{\vec{k},\vec{0}}$ equivale a una trasformazione canonica che trasforma lo stato fondamentale e i primi stati eccitati in stati a bassa occupazione (rispetto a N). È importante ricordare che il gas è interagente e che la sostituzione indicata corrisponde a una (prima) trasformazione canonica:

$$a_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}} + \sqrt{N}\delta_{\vec{k},\vec{0}}. \quad (3.8.264)$$

L'Hamiltoniana di partenza è data da:

$$H = \sum_{\vec{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} + \frac{1}{2L^3} \tilde{v}(0) N(N-1) + \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{q} \neq 0, \vec{p}, k} \tilde{v}(q) a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{p}}, \quad (3.8.265)$$

dove N è l'operatore numero di particelle e abbiamo separato il termine di interazione con impulso trasferito nullo dal resto.

¹⁶Si veda anche [3] (§85), [10] (Part. IV)

¹⁷Dato che il numero quantico di uno stato coerente in un oscillatore è distribuito secondo la legge di Poisson: $P_n = |\alpha|^{2n} \exp(-|\alpha|^2)/n!$ dove α è l'ampiezza bisogna pensare che il numero totale degli atomi non sia fisso ma distribuito secondo la stessa Poissoniana in base all'equilibrio con un serbatoio.

Quanto sia realistica l'affermazione circa gli stati fatta sopra dipende dalla rarefazione del gas e dall'interazione. Si noti in particolare che, se l'interazione avesse componenti attrattive, come sempre accade fra gli atomi, lo stato fondamentale sarebbe solido e non avrebbe niente a che fare con gli stati parzialmente condensati di cui sopra, pure un solido si avrebbe con interazione repulsiva se lo stato fosse denso.

Applicando la trasformazione canonica sopra menzionata, nel limite di volume infinito, si trova

$$H = L^3 \frac{\rho^2 \tilde{v}(0)}{2} + \sum_{\vec{q} \neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} + \frac{\rho}{2} \sum_{\vec{q} \neq 0} \tilde{v}(q) [2\hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{q}} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{q}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{-\vec{q}}] + O(L^{-\frac{3}{2}}) \quad (3.8.266)$$

dove $\rho \simeq \frac{\bar{N}}{L^3}$ è la densità del gas e l'ultimo termine raggruppa i contributi che si annullano al limite di volume infinito con ρ costante. Il primo termine che da un contributo additivo all'energia diverge correttamente con il volume perché l'energia è una grandezza estensiva.

A questo punto appare evidente l'utilità di una trasformazione di Bogoliubov:

$$\hat{a}_{\vec{q}} = \cosh \chi(q) A_{\vec{q}} + \sinh \chi(q) A_{-\vec{q}}^\dagger \quad (3.8.267)$$

scelta in modo da ridurre H nel limite di volume infinito nella forma canonica dell'Hamiltoniano di un gas di particelle indipendenti. Per ottenere questo risultato basta calcolare il coefficiente del termine $A_{\vec{q}} A_{-\vec{q}}$ nell'espressione di H dopo la trasformazione e porre la condizione che esso si annulli. Si ha così:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q) \right] \sinh \chi(q) \cosh \chi(q) + \frac{\rho \tilde{v}(q)}{2} [\cosh^2 \chi(q) + \sinh^2 \chi(q)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q) \right] \sinh(2\chi(q)) + \rho \tilde{v}(q) \cosh(2\chi(q)) \right] = 0 \quad (3.8.268) \end{aligned}$$

da cui si ha subito:

$$\begin{aligned} \tanh(2\chi(q)) = -\frac{\rho \tilde{v}(q)}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q)} \longrightarrow \quad \sinh(2\chi(q)) &= -\frac{\rho \tilde{v}(q)}{\sqrt{\frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2 q^2 \rho \tilde{v}(q)}{m}}} \\ \cosh(2\chi(q)) &= \frac{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q)}{\sqrt{\frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2 q^2 \rho \tilde{v}(q)}{m}}} \end{aligned} \quad (3.8.269)$$

Se la trasformazione canonica è così fissata, al limite di volume infinito si ha:

$$\begin{aligned}
H &= L^3 \frac{\rho^2 \tilde{v}(0)}{2} \\
&+ \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3q \left[\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q) \right) \frac{\cosh(2\chi(q)) - 1}{2} + \frac{1}{2} \rho \tilde{v}(q) \sinh(2\chi(q)) \right] \\
&+ \int d^3q \left[\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \rho \tilde{v}(q) \right) \cosh(2\chi(q)) + \rho \tilde{v}(q) \sinh(2\chi(q)) \right] A^\dagger(\vec{q}) A(\vec{q}) \\
&= L^3 \left[\frac{\rho^2 \tilde{v}(0)}{2} + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3q \left(\sqrt{\frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2 q^2 \rho \tilde{v}(q)}{m}} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \rho \tilde{v}(q) \right) \right] \\
&+ \int d^3q \sqrt{\frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2 q^2 \rho \tilde{v}(q)}{m}} A^\dagger(\vec{q}) A(\vec{q}) . \tag{3.8.270}
\end{aligned}$$

Qui abbiamo tenuto conto di quanto esposto nel Paragrafo 3.6 di questi appunti circa il limite a volume infinito.

Per quel che riguarda il risultato mostrato in (3.8.270) osserviamo che l'energia dello stato fondamentale diverge come il volume, come ci si aspettava. Più interessante: le eccitazioni elementari del gas sono simili a particelle, per questo Landau le chiamò *quasi-particelle* con energia cinetica

$$E_c(q) = \sqrt{\frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \frac{\hbar^2 q^2 \rho \tilde{v}(q)}{m}} . \tag{3.8.271}$$

L'aspetto rilevante di questo risultato è che per piccoli p si ha:

$$E_c(q) \simeq \hbar \sqrt{\frac{\rho \tilde{v}(0)}{m}} q , \tag{3.8.272}$$

che è la legge dispersiva di un'eccitazione sonora con velocità $v_s = \sqrt{\frac{\rho \tilde{v}(0)}{m}}$.

Landau mostrò che questo risultato implica che, se il gas fluisce in un condotto con velocità inferiore a v_s , non può scambiare quantità di moto con le pareti del condotto e quindi la viscosità del gas si annulla. Si ha dunque uno stato super-fluido.

Non è difficile capire l'argomento di Landau se ci si mette nel sistema in cui il fluido è a riposo e sono gli atomi delle pareti che si muovono. Infatti in questo sistema un'interazione elementare di un atomo delle pareti col fluido dovrebbe creare una quasi-particella in un processo che conserva energia e

impulso. Se \vec{v}_A è la velocità iniziale dell'atomo, \vec{v}'_A quella finale e M_A la sua massa, si dovrebbe avere:

$$\begin{aligned} M_A \vec{v}_A - M_A \vec{v}'_A &= \hbar \vec{q} \\ \frac{1}{2} M_A [v_A^2 - v'^2_A] &= \hbar v_s q . \end{aligned} \quad (3.8.273)$$

Combinando le due equazioni si ottiene;

$$\vec{q} \cdot \left(\frac{\vec{v}_A + \vec{v}'_A}{2} \right) = v_s q \leq \left| \frac{\vec{v}_A + \vec{v}'_A}{2} \right| q , \quad (3.8.274)$$

che è sicuramente violata se $v_A < v_s$. In queste condizioni la violazione della conservazione di energia e impulso implica l'impossibilità dell'interazione e quindi l'annullarsi della viscosità.

3.9 Esercizi

1. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda [a_0^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_0] .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo e, se possibile, confrontare il risultato approssimato ottenuto con quello esatto.

(Sol: $E_F = N (\omega - \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}) \simeq -\frac{N\lambda^2}{2\omega}$)

2. Dato un sistema di bosoni in tre dimensioni quantizzati in una scatola periodica di lato L , l'operatore di distruzione sullo stato con numero d'onda \vec{k} sia $a_{\vec{k}}$ valutare il valore medio dell'operatore

$$a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$$

nello stato

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) a_{\vec{k}}^\dagger \right)^N \Psi_0$$

dove Ψ_0 è lo stato di vuoto e $\sum_{\vec{k}} |\psi(\vec{k})|^2 = 1$. Interpretare il risultato alla luce delle trasformazioni canoniche lineari.

(Sol: $\sum_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) a_{\vec{k}}^\dagger \equiv A_\psi^\dagger$ è l'operatore di creazione sullo stato con funzione d'onda $\psi(\vec{k})$ e si ha $[a_{\vec{k}}, A_\psi^\dagger] = \psi(\vec{k})$. Si trova quindi subito per il valor medio: $N \psi^*(\vec{k}) \psi(\vec{k}')$.)

3. Per un sistema di bosoni identici in una dimensione con Hamiltoniana imperturbata:

$$H = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger a_n$$

e soggetto alla perturbazione:

$$H_I = \lambda (a_1^\dagger + a_1),$$

calcolare la correzione al secondo ordine dell'energia dello stato vuoto. (a^\dagger e a sono gli operatori di creazione e distruzione) Confrontare il risultato con quello del calcolo esatto.

(Sol: i due risultati coincidono e danno $-\frac{\lambda^2}{\omega}$)

4. Il campo elettromagnetico quantizzato in volume Ω interagisce con una particella puntiforme di gran massa posta nell'origine tramite l'Hamiltoniana (in ordine normale):

$$H_I = \frac{e^2}{M^2} : |A(\vec{0})|^2 : .$$

Calcolatene l'elemento di matrice fra uno stato coerente di ampiezza: $a(\vec{k}, \alpha) = a \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} \delta_{\alpha, 1}$ dove \vec{k}_1 ha componenti $(k, 0, 0)$ e lo stato di polarizzazione 1 è parallelo all'asse z e lo stato coerente di ampiezza $b(\vec{k}, \alpha) = b \delta_{\vec{k}, \vec{k}_2} \delta_{\alpha, 1}$ dove \vec{k}_2 ha componenti $(k \cos \theta, k \sin \theta, 0)$ assumendo θ non nullo.

(Sol: Essendo H_I in ordine normale nella decomposizione del potenziale vettore (Eq.(145) degli appunti) la parte di distruzione va sostituita con $b(\vec{k}, \alpha)$ e quella di

creazione con $a^*(\vec{k}, \alpha)$. Segue che l'elemento di matrice vale $\frac{e^2}{M^2} \frac{\hbar}{\epsilon_0(2\pi)^3} \frac{1}{2ck} (a^* + b)^2 < a(\vec{k}, \alpha), b(\vec{k}, \alpha) > = \frac{e^2}{M^2} \frac{\hbar}{\epsilon_0\Omega} \frac{1}{2ck} (a^* + b)^2 e^{-\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}}$

5. L'Hamiltoniana di una corda elastica orizzontale, tenuta fissa ai suoi estremi e soggetta alla sua forza peso può essere molto rozzamente schematizzata tramite:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} [\omega n a_n^\dagger a_n + A n^{-\frac{3}{2}} (a_n^\dagger + a_n)].$$

Determinare lo stato fondamentale del sistema ricavando la trasformazione unitaria che lo lega al stato di vuoto.

(Sol: Stato coerente con ampiezza $\alpha = -\frac{A}{\omega n^{\frac{5}{2}}}$ ed energia $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^4 \omega}$)

6. Un'impurezza inserita in un reticolo cristallino di volume Ω allontana da se gli atomi del reticolo applicando su di essi una forza repulsiva. Questo induce un nuovo termine nell'Hamiltoniano del campo fononico longitudinale dato da:

$$H_{imp} = \lambda \int d\vec{r} e^{-r^2/D^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}_L(\vec{r}),$$

dove λ ha le dimensioni di una densità di energia e, come ben noto:

$$\vec{\chi}_L(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 \Omega}} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}}{\sqrt{k^3}} [A_{3,\vec{k}} - A_{3,-\vec{k}}^\dagger] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Valutare esattamente, nel limite di volume Ω infinito, la variazione dell'energia del cristallo dovuta all'impurezza.

(Sol: Per energia del cristallo si intende quella dello stato fondamentale del campo fononico. Dato che il campo fonico trasversale non interagisce ci si limita al campo fononico longitudinale il cui Hamiltoniano è dato da $H_0 + H_{imp}$. H_{imp} è un'interazione lineare negli operatori di creazione e distruzione e quindi il problema si risolve esattamente. Sostituendo l'espressione del campo si trova: $H_{imp} + i\lambda D^3 \sqrt{\hbar\pi^3/(2\rho\Omega v_3)} \sum_{\vec{k}} \sqrt{k} [A_{3,\vec{k}} - A_{3,-\vec{k}}^\dagger] \exp(-k^2 D^2/4)$. Considerando quindi $H_0 + H_{imp}$ e applicando lo stesso metodo del problema precedente si trova la variazione d'energia: $\Delta E = -(2\pi)^{3/2} \lambda^2 D^3 / (16\rho v_3^2)$)

7. L'Hamiltoniana di una corda elastica di lunghezza L , densità ρ e tensione $v^2\rho$ quantizzata con condizioni al contorno periodiche è:

$$H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar\omega_k A_k^\dagger A_k ,$$

dove $k = \frac{2\pi n}{L}$ è il numero d'onda. Il sistema è perturbato da una forza esterna elastica corrispondente all'energia:

$$E_P = \frac{M}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dr \chi^2(r)$$

dove $\chi(r)$ è la deformazione della corda ed è data, omettendo il modo zero, da:

$$\chi(r) = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\omega_k}} (A_k + A_{-k}^\dagger) .$$

Sempre dimenticando il modo zero e non considerando l'energia dello stato fondamentale, individuare la trasformazione canonica lineare che riduce l'Hamiltoniana perturbata in forma canonica e calcolare l'energia cinetica delle quasi-particelle.

(Sol: $\tanh \chi(k) = -\frac{M}{2\rho\omega_k^2 + M}$, $E_k = \hbar\sqrt{\omega_k^2 + \frac{M}{\rho}}$)

8. La densità Lagrangiana del campo scalare relativistico ϕ è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 + 2gm^3 (\frac{c}{\hbar})^{7/2} \phi] .$$

Dopo aver calcolato la densità di energia del campo quantizzato in un volume cubico Ω con condizioni al contorno periodiche tenendo conto della necessità di aggiungere una costante alla densità di energia in modo da annullare l'energia del vuoto e individuate la trasformazione canonica che collega la rappresentazione di Fock trovata con quella a $g = 0$.

(Sol: La densità di energia secondo l'Eq.(3.5.186) degli appunti è:

$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [(\dot{\phi})^2/c^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 - 2gm^3 (\frac{c}{\hbar})^{7/2} \phi] \sim \frac{1}{2} [(\dot{\phi})^2/c^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} (\phi - gm(\frac{c}{\hbar})^{3/2})^2]$, dove abbiamo aggiunto la costante $g^2 m^4 (\frac{c}{\hbar})^5$ in modo che la densità di energia classica sia nulla; si noti che $g = x\hbar$ dove x è adimensionato, successivamente bisognerà cancellare l'energia di punto zero.

Risulta quindi che la trasformazione $\phi \rightarrow \hat{\phi} = \phi - gm(\frac{c}{\hbar})^{3/2}$ riduce la densità di energia a $\frac{1}{2}[(\hat{\phi})^2/c^2 + (\nabla\hat{\phi})^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\hat{\phi})^2]$. Si tratta di verificare che a livello quantistico esiste una trasformazione unitaria U per cui $\hat{\phi} = U\phi U^\dagger$.

Per $g = 0$ ϕ si quantizza come in Eq.(3.5.197) degli appunti cioè $\phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sqrt{\frac{c^2\hbar}{2\Omega\omega(k)}} (A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger)$ dove $\omega(k) = c\sqrt{k^2 + (mc/\hbar)^2}$. Inserendo questa espressione nella densità di energia in termini di ϕ data sopra e integrando si ha, omettendo l'energia di punto zero:

$$H = \sum_{\vec{k}} [\hbar\omega(k) A_{\vec{k}}^\dagger A_{\vec{k}} - \delta_{\vec{k},\vec{0}} gm \sqrt{\frac{c^3\Omega}{2\hbar^3}} (A_{\vec{0}} + A_{\vec{0}}^\dagger)] = \sum_{\vec{k}} [\hbar\omega(k) (A_{\vec{k}}^\dagger - \delta_{\vec{k},\vec{0}} g \sqrt{\frac{c^7\Omega m^5}{2\hbar^5}}) (A_{\vec{k}} - \delta_{\vec{k},\vec{0}} g \sqrt{\frac{c^7\Omega m^5}{2\hbar^5}}) - \delta_{\vec{k},\vec{0}} g^2 m^4 \frac{\Omega c^5}{2\hbar^5}] = \sum_{\vec{k}} [\hbar\omega(k) \hat{A}_{\vec{k}}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}} - \delta_{\vec{k},\vec{0}} g^2 m^4 \frac{\Omega c^5}{2\hbar^5}] .$$

La trasformazione canonica generata da $U = \exp(g\sqrt{\frac{c^7\Omega m^5}{2\hbar^5}} (A_{\vec{0}}^\dagger - A_{\vec{0}}))$

da $U A_{\vec{k}} U^\dagger = \hat{A}_{\vec{k}} = A_{\vec{k}} - \delta_{\vec{k},\vec{0}} g \sqrt{\frac{c^7\Omega m^5}{2\hbar^5}}$ e trasforma il vuoto a $g = 0$ nello stato fondamentale $U\Psi_0$ che è lo stato coerente di ampiezza $\delta_{\vec{k},\vec{0}} g \sqrt{\frac{c^7\Omega m^5}{2\hbar^5}}$.

9. Un oscillatore armonico di massa m e costante elastica $2k$ in una dimensione si trova all'istante iniziale ($t = 0$) nello stato fondamentale. Bruscamente la costante elastica diventa k . Calcolare l'evoluzione temporale del valor medio del quadrato della posizione e dell'impulso dell'oscillatore.

$$(\text{Sol: } \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4\sqrt{2m\omega}} (3 - \cos(2\omega t)) , \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{4\sqrt{2}} (3 + \cos(2\omega t)))$$

10. Si consideri l'Hamiltoniano di un sistema di bosoni quantizzati in una scatola cubica di volume Ω :

$$H = \hbar c \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \Theta(P - p) [p a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{4p\lambda^2} (2a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + 1)]$$

dove Θ è la funzione a gradino e $\vec{p} \equiv 2\pi\vec{n}/\Omega^{1/3}$ è il numero d'onda. Utilizzando il metodo della trasformazione canonica si determini, per grandi valori di $P\lambda \gg 1$ e nel limite $\Omega \rightarrow \infty$, la densità di energia (E/Ω) dello stato fondamentale e l'energia degli stati di singola quasiparticella. (Si noti che per grandi $X: \int_0^X x^2(\sqrt{x^2+1} - x)dx \rightarrow X^2/4 - \ln(2X)/8 + 1/32$)

(Sol:

$$H = \hbar c \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \Theta(P - p) [\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A_{\vec{p}}^\dagger A_{\vec{p}} + 1/2(\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} - p)]$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \hbar c \int d\vec{p} \sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A^\dagger(\vec{p}) A(\vec{p}) + \hbar c \Omega / (2\pi)^2 \int_0^P p^2 dp (\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} - p) \\ &\rightarrow \hbar c \int d\vec{p} \sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A^\dagger(\vec{p}) A(\vec{p}) + \hbar c \Omega / (16\pi^2) (P^2 / (\lambda^2) - \ln(2P\lambda)) / (2\lambda^4) + 1 / (8\lambda^4) \end{aligned}$$

11. Lo stato *squeezed* $|\chi\rangle$ di un oscillatore armonico è annichilato dalla combinazione $\cosh \chi a - \sinh \chi a^\dagger$, si ha cioè: $(\cosh \chi a - \sinh \chi a^\dagger)|\chi\rangle = 0$. Calcolate lo sviluppo dello stato nella base degli stati stazionari $|n\rangle$ e la probabilità P_n che lo stato si trovi nel n -mo livello energetico .

(Sol: Posto $|\chi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ si ha: $c_1 = 0$ e $c_{n+2} = \sqrt{(2n-1)! / (2n)!} (\tanh \chi)^n c_0$. La condizione di normalizzazione è allora (usando $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! / (n!)^2 x^n = 1 / \sqrt{1-4x}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((2n)! / (n!)^2) (\tanh \chi / 2)^{2n} c_0^2 = c_0^2 / \sqrt{1 - \tanh^2 \chi} = 1$$

e quindi $c_{2n} = (\sqrt{(2n)!} / n!) (\tanh \chi / 2)^n (1 - \tanh^2 \chi)^{1/4}$ e:

$$P_n = ((2n)! / (n!)^2) (\tanh \chi / 2)^{2n} \sqrt{1 - \tanh^2 \chi}$$

Capitolo 4

La statistica di Fermi-Dirac

¹ Scopo di questa quarta parte è l'estensione del metodo della seconda quantizzazione a sistemi di particelle identiche soddisfacenti la statistica di Fermi-Dirac e quindi con funzioni d'onda antisimmetriche. In analogia col caso precedente, allo scopo di costruire una base ortonormale completa per lo spazio degli stati di N particelle, $\mathcal{H}_A^{(N)}$ ne scegliamo una per lo spazio $\mathcal{H}^{(1)}$ di particella singola. Se la base scelta è $\{\psi_\nu(\eta)\}$, dove η sta ad indicare un insieme completo di variabili commutanti e ν enumera gli autovalori di un'osservabile massima, gli elementi della base di $\mathcal{H}_A^{(N)}$ sono costruiti scegliendo in tutti i modi possibili N stati distinti di singola particella e costruendo il prodotto antisimmetrizzato delle corrispondenti funzioni d'onda

$$\Psi_{\nu_1, \dots, \nu_N}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \mathcal{A} \prod_{i=1}^N \psi_{\nu_i}(\eta_i) \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P(N)} \prod_{i=1}^N (-1)^{|P(N)|} \psi_{\nu_i}(\eta_{P_i}) , \quad (4.0.1)$$

dove $(-1)^{|P(N)|}$ indica la parità della corrispondente permutazione degli stati, cioè quella del numero degli scambi di coppie necessari per ottenere la permutazione voluta. Questo numero è dato da:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=k+1}^N \theta_{P_{\nu_k}, P_{\nu_m}} , \quad (4.0.2)$$

dove la funzione $\theta_{\mu\nu}$ vale uno sull'asse se $\mu > \nu$ e zero altrimenti. Il fattore di normalizzazione, che nel caso bosonico era stato indicato con k , è

¹Si veda anche [2] (§63), [5], [4] (§65)

direttamente sostituito con $1/\sqrt{N!}$. La stessa funzione d'onda si ottiene dividendo per la radice di $N!$ il determinante della matrice quadrata in cui l'elemento della i -esima riga e j -esima colonna è $\psi_{\nu_i}(\eta_j)$. Tale determinante è detto determinante di Släter. È chiaro che la funzione d'onda così costruita si annulla se due stati di singola particella coincidono, come previsto dal principio di esclusione di Pauli, che esclude numeri d'occupazione diversi da 0 ed 1. In base alla formula (3.2.15) questo giustifica la scelta del fattore di normalizzazione.

Rimane da determinare il segno della funzione d'onda, questo evidentemente cambia se si cambia l'ordine delle righe e quindi dipende dall'ordine con cui sono stati scelti gli stati occupati e può essere fissato una volta per tutte scegliendo un ordine per gli stati della base di singola particella e stabilendo che, come le colonne del determinante di Släter sono ordinate con l'indice di particella crescente, le righe lo sono secondo l'indice di stato crescente. Stabilito ciò le funzioni d'onda (4.0.1) sono univocamente definite se è data la successione dei numeri d'occupazione e quindi anche in questo caso il generico elemento della base può essere indicato tramite la successione $\{N_\nu\}$ dei numeri di occupazione degli stati di particella singola che possono solo assumere i valori 0 o 1. Rimane il fatto che la base costruita dipende, oltre che dalla base di singola particella, dal particolare ordinamento scelto per la stessa base.

Osserviamo in particolare che per l'operatore \mathcal{A} definito in (4.0.1) vale la relazione:

$$\mathcal{A} \prod_{l=1}^N \psi_{\nu_l}(\eta_l) = (-1)^{\sum_{k=1}^N \sum_{m=k+1}^N \theta_{\nu_k \nu_m}} \sqrt{N!} \Psi_{\{N_\nu\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) . \quad (4.0.3)$$

Infatti l'esponente di -1 a secondo membro conta il numero degli scambi necessari per trasformare in ordine crescente l'insieme ν_1, \dots, ν_N .

Avendo così fissato la base di riferimento, in analogia col caso bosonico, vogliamo calcolare l'azione di un operatore di singola particella $F^{(1)}$ sul generico stato della nostra base. Per questo partiamo dalla equazione (3.2.20) che non dipende dalla statistica scegliendo la sequenza ν_1, \dots, ν_N in ordine crescente. Usando l'invarianza di $F^{(1)}$ per permutazioni, cioè che, per qualunque permutazione P , si ha $\sum_{i=1}^N f(\xi_{P_i}) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)$, e tenendo conto della (4.0.3) troviamo:

$$F^{(1)} \Psi_{\{N_\nu\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\mu} \sum_{i=1}^N f_{\mu, \nu_i} \mathcal{A} \prod_{j=1, j \neq i}^N \psi_{\nu_j}(\eta_j) \psi_{\mu}(\eta_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu} \left[N_{\mu} f_{\mu, \mu} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) + \sum_{i=1}^N (1 - N_{\mu}) N_{\nu_i} f_{\mu, \nu_i} \right. \\
&\quad \left. \left[\theta_{\mu \nu_i} (-1)^{\sum_{j=i+1}^N \theta_{\mu \nu_j}} + \theta_{\nu_i, \mu} (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} \theta_{\nu_j \mu}} \right] \Psi_{\{N_{\sigma} - \delta_{\sigma, \nu_i} + \delta_{\sigma, \mu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) \right] \\
&= \sum_{\mu} \left[N_{\mu} f_{\mu, \mu} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) + \sum_{i=1}^N (1 - N_{\mu}) N_{\nu_i} f_{\mu, \nu_i} \right. \\
&\quad \left. \left[\theta_{\mu \nu_i} (-1)^{\sum_{\tau=\nu_i+1}^{\mu} N_{\tau}} + \theta_{\nu_i, \mu} (-1)^{\sum_{\tau=\mu}^{\nu_i-1} N_{\tau}} \right] \Psi_{\{N_{\sigma} - \delta_{\sigma, \nu_i} + \delta_{\sigma, \mu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) \right] \\
&= \sum_{\mu} \left[N_{\mu} f_{\mu, \mu} \Psi_{\{N_{\nu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) + \sum_{i=1}^N (1 - N_{\mu}) N_{\nu_i} f_{\mu, \nu_i} \right. \\
&\quad \left. (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} (N_{\tau} - \delta_{\tau, \nu_i}) + \sum_{\tau=1}^{\nu_i-1} N_{\tau}} \Psi_{\{N_{\sigma} - \delta_{\sigma, \nu_i} + \delta_{\sigma, \mu}\}}^{(A)}(\eta_1, \dots, \eta_N) \right].
\end{aligned} \tag{4.0.4}$$

Infatti se l'indice μ è eguale a qualche ν_i , cioè se $N_{\mu} = 1$, l'unico contributo alla somma su i viene dall'addendo per cui $\nu_i = \mu$, gli altri termini corrispondono nel primo membro dell'equazione ad addendi in cui lo stesso stato appare due volte e quindi nulli dopo antisimmetrizzazione. Il primo termine a secondo membro, quello proporzionale a N_{μ} , corrisponde appunto al caso $N_{\mu} = 1$. Il secondo termine, in cui si è inserito il fattore $1 - N_{\mu}$ rende conto dei contributi della somma su μ con $N_{\mu} = 0$. In questo caso l'espressione all'esponente di -1 si ottiene da quello che appare in (4.0.3) valutandone la variazione se lo stato occupato da una delle particelle è passato da ν_i a μ . Evidentemente tale variazione corrisponde al numero degli scambi necessari per portare la successione $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{i-1}, \mu, \nu_{i+1}, \dots, \nu_N$ all'ordine naturale della base. Infatti per $\mu > \nu_i$ l'esponente di -1 nel primo termine conta gli stati occupati con indice compreso fra ν_{i+1} e μ mentre, per $\mu < \nu_i$, l'esponente di -1 nel secondo termine conta gli stati occupati con indice compreso fra μ e ν_{i-1} .

4.1 Lo spazio di Fock e l'algebra CAR.

² In completa analogia col caso bosonico possiamo fattorizzare l'azione dell'operatore di singola particella nella distruzione di una particella nello stato iniziale seguita dalla creazione nello stato finale, a questo scopo introduciamo

²Si veda anche [5]

i necessari operatori di creazione e distruzione e lo spazio di Fock fermionico definito come la somma cartesiana dello spazio generato dallo stato di vuoto $\mathcal{H}^{(0)}$, dello spazio di singola particella $\mathcal{H}^{(1)}$ e della serie infinita degli spazi degli stati di N fermioni $\mathcal{H}_A^{(N)}$

$$\mathcal{H}_A \equiv \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \bigoplus_{N=1}^{\infty} \mathcal{H}_A^{(N)} . \quad (4.1.5)$$

Nello spazio di Fock fermionico introduciamo la base ortonormale costituita dagli autostati dei numeri di occupazione sugli stati della base di singola particella scelta all'inizio. Essi sono

$$\{|\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle\} , \text{ con la condizione } \sum_{\nu} N_\nu < \infty , \quad (4.1.6)$$

e con N_ν eguale a zero o uno. Definiamo poi l'operatore di distruzione fermionico tenendo conto della (4.0.4)

$$A_\mu |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} N_\tau} N_\mu |\Psi_{\{N_\nu - \delta_{\nu,\mu}\}}\rangle , \quad (4.1.7)$$

ed il corrispondente hermitiano coniugato, operatore di creazione sullo stato μ

$$A_\mu^\dagger |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} N_\tau} (1 - N_\mu) |\Psi_{\{N_\nu + \delta_{\nu,\mu}\}}\rangle , \quad (4.1.8)$$

in cui il fattore $(1 - N_\mu)$ rende conto del fatto che, mentre l'operatore di distruzione annulla lo stato vuoto, quello di creazione annulla quello occupato. Da queste relazioni segue come nel caso bosonico l'identificazione

$$F^{(1)} = \sum_{\mu,\lambda} f_{\mu,\lambda} A_\mu^\dagger A_\lambda , \quad (4.1.9)$$

in tutto lo spazio di Fock.

Infatti si ha:

$$A_\mu^\dagger A_\lambda |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = N_\lambda (1 - N_\mu + \delta_{\lambda\mu}) (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} N_\tau - \theta_{\mu,\lambda} + \sum_{\tau=1}^{\lambda-1} N_\tau} |\Psi_{\{N_\sigma - \delta_{\sigma,\lambda} + \delta_{\sigma,\mu}\}}^{(A)}\rangle , \quad (4.1.10)$$

mentre

$$A_\lambda A_\mu^\dagger |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = (N_\lambda + \delta_{\lambda\mu}) (1 - N_\mu) (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} N_\tau + \sum_{\tau=1}^{\lambda-1} N_\tau + \theta_{\lambda,\mu}} |\Psi_{\{N_\sigma - \delta_{\sigma,\lambda} + \delta_{\sigma,\mu}\}}^{(A)}\rangle . \quad (4.1.11)$$

Da cui si ha subito la relazione di anticommutazione

$$\{A_\mu, A_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu,\lambda} . \quad (4.1.12)$$

Analogamente calcolando il prodotto

$$A_\mu A_\lambda |\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = (-1)^{\sum_{\tau=1}^{\mu-1} N_\tau + \sum_{\tau=1}^{\lambda-1} N_\tau + \theta_{\mu\lambda}} N_\lambda (N_\mu - \delta_{\lambda,\mu}) |\Psi_{\{N_\nu - \delta_{\nu,\mu} - \delta_{\nu,\lambda}\}}\rangle , \quad (4.1.13)$$

si vede subito che il quadrato di un operatore di distruzione è nullo, si vede anche che per $\lambda \neq \mu$ il secondo membro della equazione precedente cambia segno se si scambiano gli operatori. Si ha quindi la regola di anticommutazione

$$\{A_\mu, A_\nu\} = 0 . \quad (4.1.14)$$

Si ha inoltre;

$$A_\mu |\Psi_{\{0\}}\rangle = 0 . \quad (4.1.15)$$

Infine, iterando la (4.1.8), è possibile costruire un generico elemento della base degli autostati dei numeri d'occupazione partendo dallo stato di vuoto

$$|\Psi_{\{N_\nu\}}\rangle = \prod_{\nu}^{(ord)} (A_\nu^\dagger)^{N_\nu} |\Psi_{\{0\}}\rangle , \quad (4.1.16)$$

dove il prodotto deve essere inteso ordinato nel senso degli indici crescenti da sinistra verso destra.

Gli operatori di creazione e distruzione appena introdotti generano un'algebra (4.1.12) e (4.1.14) che viene chiamata CAR, cioè algebra delle relazioni di anti-commutazione canoniche. Lo stato di vuoto che soddisfa (4.1.15) genera tramite (4.1.16) una *rappresentazione di Fock* dell'algebra CAR. Cioè, gli stati costruiti tramite (4.1.16) costituiscono un sistema ortonormale di autovettori dei numeri d'occupazione identificabile con la base su cui si è costruito lo spazio di Fock. Infatti, dalle relazioni (4.1.12), (4.1.14) e (4.1.15) si mostra che gli operatori di creazione e distruzione agiscono sugli stati (4.1.16) secondo le regole (4.1.8) e (4.1.7).

Come nel caso bosonico un difetto della nostra presentazione dell'algebra CAR è la sua dipendenza dalla scelta di una base per lo spazio degli stati a una particella $\mathcal{H}^{(1)}$. Nuovamente si mostra che partendo da un'altra base i cui elementi corrispondano alle funzioni d'onda $\{\varphi_\nu(\eta)\}$ si ha:

$$\bar{A}_\nu^\dagger = \sum_{\mu} \langle \psi_\mu | \varphi_\nu \rangle A_\mu^\dagger , \quad (4.1.17)$$

e quindi anche:

$$\bar{A}_\nu = \sum_{\mu} \langle \varphi_\nu | \psi_\mu \rangle A_\mu . \quad (4.1.18)$$

L'ultima equazione è consistente col fatto che il vuoto non è cambiato, perché esso è annichilato dagli operatori di distruzione di entrambe le basi.

Più in generale data un'algebra CAR generata da A_ν^\dagger e A_μ , gli operatori:

$$\bar{A}_\nu = \sum_{\mu} U_{\nu,\mu} A_\mu , \quad (4.1.19)$$

$$\bar{A}_\nu^\dagger = \sum_{\mu} U_{\nu,\mu}^* A_\mu^\dagger , \quad (4.1.20)$$

dove U è una matrice unitaria ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) generano la stessa algebra e forniscono una rappresentazione di Fock equivalente partendo dallo stesso stato di vuoto.

Infine, due qualunque funzioni d'onda (due stati) di singola particella g e f possiamo definire gli operatori:

$$A(f)^\dagger = \sum_{\mu} \langle \psi_\mu | f \rangle A_\mu^\dagger , \quad A(g) = \sum_{\mu} \langle g | \psi_\mu \rangle A_\mu , \quad (4.1.21)$$

ottenendo subito:

$$\{A(g), A(f)\} = 0 \quad , \quad \{A(g), A^\dagger(f)\} = \langle g | f \rangle , \quad (4.1.22)$$

esprimendo così le regole CAR in modo indipendente dalla scelta di una base. La rappresentazione di Fock è poi specificata dalla dello stato di vuoto tale che sia $A(f)\Psi_{\{0\}} = 0$ per qualunque f .

Quanto sopra conclude la costruzione dell'algoritmo della seconda quantizzazione nel caso fermionico almeno per quel che riguarda gli operatori ad una particella; confrontando con l'analoga costruzione relativa al caso bosonico, balzano agli occhi le strette analogie. Possiamo riassumere il confronto dicendo che si passa dal caso bosonico a quello fermionico sostituendo le regole di commutazione canoniche con analoghe regole di anticommutazione. Anche nel caso fermionico, come in quello bosonico, partendo dalle regole di anticommutazione canoniche ed introducendo lo stato di vuoto come autovettore nullo simultaneo di tutti gli operatori di distruzione è possibile ricostruire l'intera struttura dello spazio di Fock.

Passiamo ora a considerare come l'algoritmo si estende alla costruzione degli operatori a molte particelle. Continuando a seguire la linea del

caso bosonico consideriamo due operatori a particella singola $F^{(1)}$ e $G^{(1)}$. In analogia con la (3.3.69) confrontiamo il loro prodotto in rappresentazione di Schrödinger con quello nell'ambito del formalismo della seconda quantizzazione utilizzando le regole di anticommutazione canoniche

$$\begin{aligned}
F^{(1)}G^{(1)} &= \sum_{i,j=1}^N f(\xi_i) g(\xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^N f(\xi_i) g(\xi_i) + \sum_{i<j=1}^N (f(\xi_i) g(\xi_j) + g(\xi_i) f(\xi_j)) \\
&= \sum_{\mu,\lambda} f_{\mu,\lambda} A_{\mu}^{\dagger} A_{\lambda} \sum_{\nu,\rho} g_{\nu,\rho} A_{\nu}^{\dagger} A_{\rho} \\
&= \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} A_{\mu}^{\dagger} (\{A_{\lambda}, A_{\nu}^{\dagger}\} - A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda}) A_{\rho} \\
&= \sum_{\mu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\lambda,\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\rho} + \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\rho} A_{\lambda} . \quad (4.1.23)
\end{aligned}$$

Si noti che nell'ultima espressione abbiamo riassorbito il segno negativo dell'ultimo termine scambiando fra loro i due operatori di distruzione. È ora possibile identificare gli operatori a due particelle che appaiono nello sviluppo del prodotto ottenendo come nel caso bosonico

$$\sum_{i<j=1}^N (f(\xi_i) g(\xi_j) + g(\xi_i) f(\xi_j)) = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} [f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} + g_{\mu,\lambda} f_{\nu,\rho}] A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\lambda} A_{\rho} . \quad (4.1.24)$$

Osservando che

$$\begin{aligned}
&\int d\eta_1 d\eta_2 \psi_{\mu}^*(\eta_1) \psi_{\nu}^*(\eta_2) (f(\xi_1) g(\xi_2) + g(\xi_1) f(\xi_2)) \psi_{\lambda}(\eta_1) \psi_{\rho}(\eta_2) \\
&= f_{\mu,\lambda} g_{\nu,\rho} + g_{\mu,\lambda} f_{\nu,\rho} , \quad (4.1.25)
\end{aligned}$$

possiamo generalizzare la relazione (4.1.24) ad un generico operatore a due particelle

$$F^{(2)} = \sum_{i<j=1}^N f(\xi_i, \xi_j) \quad (4.1.26)$$

scrivendo

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho} f_{\mu\nu,\lambda\rho} A_{\mu}^{\dagger} A_{\nu}^{\dagger} A_{\rho} A_{\lambda} , \quad (4.1.27)$$

dove si è posto

$$f_{\mu\nu,\lambda\rho} \equiv \int d\eta_1 d\eta_2 \psi_\mu^*(\eta_1) \psi_\nu^*(\eta_2) f(\xi_1, \xi_2) \psi_\lambda(\eta_1) \psi_\rho(\eta_2) . \quad (4.1.28)$$

È importante ricordare l'ordine in cui appaiono gli operatori di creazione e distruzione in (4.1.27) e cioè in particolare che il primo ed il quarto operatore corrispondono a stati che nell'elemento di matrice (4.1.28) sono occupati dalla particella 1, mentre il secondo e terzo operatore corrispondono agli stati della particella 2. Evidentemente nulla cambia se si scambiano simultaneamente gli operatori di distruzione e quelli di creazione, operazione che corrisponde allo scambio della particella 1 con la 2 nell'elemento di matrice. Invece uno scambio dei soli operatori di distruzione o di quelli di creazione comporta un cambiamento di segno nell'operatore.

A titolo di esempio, considerando un sistema di fermioni quantizzati in una scatola cubica di lato L con condizioni al contorno di periodicità, e scegliamo come base di singola particella quella delle onde piane

$$\psi_{\vec{k},\sigma}(\vec{r}, \lambda) = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta_{\sigma,\lambda} . \quad (4.1.29)$$

Il potenziale di interazione a due corpi

$$V = \sum_{i<j=1}^N v(\vec{r}_i - \vec{r}_j) , \quad (4.1.30)$$

corrisponde all'operatore:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{p},\vec{k},\vec{q},\sigma,\sigma'} \int d^3r v(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} a_{\vec{p}+\vec{q},\sigma}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q},\sigma'}^\dagger a_{\vec{k},\sigma'} a_{\vec{p},\sigma} \\ & \equiv \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{p},\vec{k},\vec{q},\sigma,\sigma'} \tilde{V}(q) a_{\vec{p}+\vec{q},\sigma}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q},\sigma'}^\dagger a_{\vec{k},\sigma'} a_{\vec{p},\sigma} . \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Un sistema fisico in cui è particolarmente utile il riferimento a una base di onde piane è quello degli elettroni in un conduttore.

Un altro punto che merita un commento riguarda la validità del **Teorema di Wick** nel caso fermionico ³. Dato che l'algebra CCR è sostituita dalla CAR quando si riduce il valor medio nel vuoto di un prodotto di operatori di

³Si vedano anche [8] (pgg. 163-64), [7] (§4.3)[9] (§4.2.2)

creazione e distruzione spostando i distruttori alla destra dei creatori bisogna ricordare che ogni scambio di operatori comporta un cambiamento di segno. Questo si ripercuote nella versione fermionica della Eq.(3.3.85) che risulta:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle = \delta_{\sigma_1, -} \sum_{j=2}^K (-1)^j \delta_{\nu_j, \nu_1} \delta_{\sigma_j, +} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j, =2}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle , \quad (4.1.32)$$

e quindi, mantenendo la stessa definizione di contrazione, $C_{i,j} = \delta_{\sigma_i, -} \delta_{\sigma_j, +} \delta_{\nu_i, \nu_j}$ la Eq.(3.3.86) diventa:

$$\langle \Psi_0 \prod_{k=1}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle = \sum_{j=2}^K (-1)^j C_{1,j} \langle \Psi_0 \prod_{k \neq j, =2}^K A_{\nu_k}^{\sigma_k} \Psi_0 \rangle . \quad (4.1.33)$$

Iterando questa equazione come nel caso bosonico si ottiene la espressione del valor medio in questione in una somma di prodotti di contrazioni su tutte le riduzioni possibili di un insieme ordinato di $2N$ elementi in N coppie pure ordinate. Tuttavia nel caso fermionico ogni prodotto è accompagnato da un segno $(-1)^S$ dove S conta il numero degli scambi necessari per avvicinare, rendere contigui, i componenti di tutte le coppie.

Nel caso di un gas di fermioni non interagenti la prima delle due equazioni in Eq.(3.3.93) resta valida perché gli operatori fermionici commutano con l'operatore numero d'occupazione esattamente come i bosonici. Ma si ha:

$$\begin{aligned} Tr \left(e^{-\beta(H-\mu N)} A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) &= e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(A_{\nu_1}^{\sigma_1} e^{-\beta(H-\mu N)} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) \\ &= e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(e^{-\beta(H-\mu N)} A_{\nu_2}^{\sigma_2} A_{\nu_1}^{\sigma_1} \right) \\ &= \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \delta_{\nu_1, \nu_2} e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(e^{-\beta(H-\mu N)} \right) \\ &- e^{-\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} Tr \left(e^{-\beta(H-\mu N)} A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) , \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{Tr \left(\exp(-\beta(H - \mu N)) A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right)}{Z} &\equiv Tr \left(\rho A_{\nu_1}^{\sigma_1} A_{\nu_2}^{\sigma_2} \right) \\ &= \frac{\delta_{\nu_1, \nu_2} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2}}{e^{\sigma_1 \beta(\epsilon_{\nu_1} - \mu)} + 1} \equiv C(\beta)_{1,2} . \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Per $C(\beta)_{1,2}$ si ha l'espressione equivalente scritta in termini della distribuzione di Fermi ($\bar{N}_\nu = 1/\exp(\beta(\epsilon_\nu - \mu)) + 1$):

$$C(\beta)_{1,2} = \delta_{\nu, \rho} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} \frac{(1 - \sigma_1)(1 - \bar{N}_\nu) + (1 + \sigma_1)\bar{N}_\nu}{2} . \quad (4.1.36)$$

Passando al calcolo del valor medio termico di un prodotto di creatori e distruttori in modo parallelo al caso bosonico si trova:

$$Tr \left(\rho \prod_{k=1}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) = \sum_{j=2}^{2M} (-1)^j C(\beta)_{1,j} Tr \left(\rho \prod_{k \neq j, k=2}^{2M} A_{\nu_k}^{\sigma_k} \right) . \quad (4.1.37)$$

Questa equazione può essere iterata come la Eq.(4.1.33) e nello stesso modo da l'espressione del valor medio nella somma di prodotti di contrazioni (4.1.36) su tutte le riduzioni possibili in coppie del prodotto di $2N$ operatori accompagnati dal segno $(-1)^P$ descritto sopra.

4.2 Le trasformazioni canoniche nel caso fermionico.

⁴ Per concludere questa trattazione della seconda quantizzazione dei sistemi di fermioni discutiamo brevemente le trasformazioni lineari degli operatori di creazione e distruzione che sono canoniche conservando le regole di anticommutazione. Consideriamo dunque la trasformazione

$$A_\nu \rightarrow A'_\nu = \sum_\lambda \alpha_{\nu,\lambda} A_\lambda + \sum_\lambda \beta_{\nu,\lambda} A_\lambda^\dagger , \quad (4.2.38)$$

da cui abbiamo escluso a priori un termine inomogeneo dato che esso commuta invece di anticommutare con tutti gli operatori.

Richiedendo la conservazione delle regole di anticommutazione canoniche poniamo

$$\left[\sum_\lambda \alpha_{\nu,\lambda} A_\lambda + \sum_\lambda \beta_{\nu,\lambda} A_\lambda^\dagger, \sum_\rho \alpha_{\mu,\rho} A_\rho + \sum_\rho \beta_{\mu,\rho} A_\rho^\dagger \right]_+ = 0 , \quad (4.2.39)$$

da cui si deduce subito

$$\sum_\lambda [\alpha_{\nu,\lambda} \beta_{\mu,\lambda} + \alpha_{\mu,\lambda} \beta_{\nu,\lambda}] = 0 , \quad (4.2.40)$$

richiediamo inoltre

$$\left[\sum_\lambda \alpha_{\nu,\lambda} A_\lambda + \sum_\lambda \beta_{\nu,\lambda} A_\lambda^\dagger, \sum_\rho \beta_{\mu,\rho}^* A_\rho + \sum_\rho \alpha_{\mu,\rho}^* A_\rho^\dagger \right] = \delta_{\mu,\nu} , \quad (4.2.41)$$

⁴Si veda anche [3] (§87-88)

ottenendo

$$\sum_{\lambda} [\alpha_{\nu,\lambda} \alpha_{\mu,\lambda}^* + \beta_{\nu,\lambda} \beta_{\mu,\lambda}^*] = \delta_{\mu,\nu} . \quad (4.2.42)$$

Se ci limitiamo a considerare le trasformazioni che conservano il numero delle particelle, cioè quelle per cui i coefficienti $\beta_{\mu,\nu}$ sono nulli, troviamo, esattamente come nel caso bosonico, che la matrice dei coefficienti $\alpha_{\mu,\nu}$ in una trasformazione canonica è unitaria e la trasformazione stessa corrisponde ad un cambiamento della base di singola particella da cui è partita la costruzione del formalismo.

In modo del tutto analogo al caso bosonico è possibile definire per i fermioni le trasformazioni canoniche che lasciano invariato l'operatore momento totale e lo spin totale. Queste trasformazioni possono essere scritte in termini degli operatori di creazione e distruzione su stati a numero d'onda e terza componente dello spin σ fissato:

$$A_{\vec{k},\sigma} \rightarrow a_{\vec{k},\sigma} = \sum_{\vec{q},\sigma'} \alpha_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} A_{\vec{q},\sigma'} + \sum_{\vec{q},\sigma'} \beta_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} A_{\vec{q},\sigma'}^{\dagger} . \quad (4.2.43)$$

Imponendo le regole di commutazione canoniche con momento e spin totali, cioè che le trasformazioni preservino esplicitamente la conservazione dell'impulso e dello spin, si ottiene

$$(\vec{k} - \vec{q}) \alpha_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = 0 \quad , \quad (\vec{k} + \vec{q}) \beta_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = 0 , \quad (4.2.44)$$

e analogamente per lo spin:

$$(\sigma - \sigma') \alpha_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = 0 \quad , \quad (\sigma + \sigma') \beta_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = 0 , \quad (4.2.45)$$

da cui si ha subito:

$$\alpha_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = u(\vec{k}, \sigma) \delta_{\vec{k},\vec{q}} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad , \quad \beta_{\vec{k},\sigma,\vec{q},\sigma'} = v(\vec{k}, \sigma) \delta_{\vec{k},-\vec{q}} \delta_{\sigma,-\sigma'} , \quad (4.2.46)$$

dove u e v sono in generale funzioni a valore complesso che, tuttavia, come nel caso bosonico, possono essere rese reali ridefinendo gli operatori di distruzione tramite opportuni fattori di fase. In queste condizioni la (4.2.42) diventa:

$$u^2(\vec{k}, \sigma) + v^2(\vec{k}, \sigma) = 1 , \quad (4.2.47)$$

che equivale a:

$$u(\vec{k}, \sigma) = \cos \theta(\vec{k}, \sigma) \quad , \quad v(\vec{k}, \sigma) = \sin \theta(\vec{k}, \sigma) . \quad (4.2.48)$$

La condizione (4.2.40) equivale invece alla richiesta che :

$$\theta(\vec{k}, \sigma) = -\theta(-\vec{k}, -\sigma) . \quad (4.2.49)$$

Pertanto la trasformazione canonica si scrive:

$$a_{\vec{k}, \sigma} = \cos \theta(\vec{k}, \sigma) A_{\vec{k}, \sigma} + \sin \theta(\vec{k}, \sigma) A_{-\vec{k}, -\sigma}^\dagger . \quad (4.2.50)$$

Nel caso più frequente in cui l'interazione non dipende dallo spin e il sistema è isotropo si ha:

$$\theta(\vec{k}, \sigma) = \theta(k, \sigma) = \sigma \theta(k) \quad (4.2.51)$$

e la trasformazione diventa:

$$\mathcal{A}_{\vec{k}, \sigma} = \cos \theta(k) A_{\vec{k}, \sigma} + \sigma \sin \theta(k) A_{-\vec{k}, -\sigma}^\dagger , \quad (4.2.52)$$

e quindi:

$$A_{\vec{k}, \sigma} = \cos \theta(k) \mathcal{A}_{\vec{k}, \sigma} - \sigma \sin \theta(k) \mathcal{A}_{-\vec{k}, -\sigma}^\dagger . \quad (4.2.53)$$

4.2.1 Particelle e buche.

⁵ Un esempio particolarmente semplice, ma nondimeno importante, di applicazione di trasformazioni canoniche di questo tipo è quella a un gas degenere di fermioni non interagenti. Il riferimento tipico è agli elettroni della banda esterna in un conduttore che, come si vedrà, possono essere considerati come liberi nella solita scatola con condizioni al contorno periodiche.

L'Hamiltoniano del sistema di elettroni è:

$$H = \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon(k) A_{\vec{k}, \sigma}^\dagger A_{\vec{k}, \sigma} , \quad (4.2.54)$$

in cui abbiamo escluso la dipendenza dell'energia di singola particella dallo spin e abbiamo considerato per semplicità un sistema isotropo. Lo stato fondamentale di questo sistema è caratterizzato da numero d'occupazione 1 in tutti gli stati contenuti in una sfera di raggio k_F definito da $\sum_{k \leq k_F} 2 = N$, detta la sfera di Fermi. Lo stato nello spazio di Fock $|\Psi_F\rangle$ è ottenuto operando sul vuoto tramite tutti gli operatori di creazione con $k \leq k_F$.

⁵Si veda anche [9] (§2.4.1)

Evidentemente l'espressione è assai complessa, ma lo stesso stato può essere individuato più semplicemente dicendo che per $k \leq k_F$:

$$A_{\vec{k},\sigma}^\dagger |\Psi_F\rangle = 0, \quad (4.2.55)$$

mentre per $k > k_F$:

$$A_{\vec{k},\sigma} |\Psi_F\rangle = 0. \quad (4.2.56)$$

Queste due equazioni permettono di identificare Ψ_F col vuoto ($\mathcal{A}_{\vec{k},\sigma} \Psi_F = 0$ per ogni \vec{k} e σ) corrispondente alla trasformazione canonica (4.2.52) con:

$$\theta(\vec{k}, \sigma) = \sigma \frac{\pi}{2} \quad \text{per } k \leq k_F, \sigma = \pm 1 \quad (4.2.57)$$

e $\theta = 0$ altrimenti.

Si ha dunque la trasformazione canonica:

$$A_{\vec{k},\sigma} = \Theta(\epsilon(k) - \epsilon_F) \mathcal{A}_{\vec{k},\sigma} + \sigma \Theta(\epsilon_F - \epsilon(k)) \mathcal{A}_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger. \quad (4.2.58)$$

Data la discontinuità di θ , si preferisce usare due simboli diversi per gli operatori di distruzione corrispondenti a numeri d'onda interni, o esterni, alla sfera di Fermi, per cui si pone:

$$\mathcal{A}_{\vec{k},\sigma} = \Theta(\epsilon(k) - \epsilon_F) a_{\vec{k},\sigma} + \Theta(\epsilon_F - \epsilon(k)) b_{\vec{k},\sigma} \quad (4.2.59)$$

e quindi:

$$A_{\vec{k},\sigma} = \Theta(\epsilon(k) - \epsilon_F) a_{\vec{k},\sigma} + \sigma \Theta(\epsilon_F - \epsilon(k)) b_{-\vec{k},-\sigma}^\dagger. \quad (4.2.60)$$

Gli stati con numeri d'onda interni al mare di Fermi vengono occupati da buche, mentre per numeri d'onda esterni si pone $a = A$ e si parla di particelle.

Se consideriamo l'operatore numero di particelle troviamo che esso viene scritto nella forma:

$$\begin{aligned} N_{op} &= \sum_{\vec{k},\sigma,k>k_F} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{k},\sigma,k\leq k_F} b_{\vec{k},\sigma} b_{\vec{k},\sigma}^\dagger \\ &= \sum_{\vec{k},\sigma,k>k_F} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{k},\sigma,k\leq k_F} [1 - b_{\vec{k},\sigma}^\dagger b_{\vec{k},\sigma}] \\ &= N + \sum_{\vec{k},\sigma,k>k_F} a_{\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{k},\sigma} - \sum_{\vec{k},\sigma,k\leq k_F} b_{\vec{k},\sigma}^\dagger b_{\vec{k},\sigma}. \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

Dunque, nel settore dello spazio di Fock con numero di elettroni eguale a N si ha la condizione:

$$\sum_{\vec{k}, \sigma, k > k_F} a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} = \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} b_{\vec{k}, \sigma}^\dagger b_{\vec{k}, \sigma} , \quad (4.2.62)$$

cioè: il numero delle particelle eguaglia quello delle buche. Nello stato fondamentale tali numeri si annullano e le eccitazioni elementari del sistema consistono in creazioni di coppie particella-buca.

Moltiplicando ambo i membri dell'Eq.(4.2.61) per la carica dell'elettrone e e ricordando che il sistema è immerso in una carica positiva ionica che compensa quella di N elettroni si ha per l'operatore carica totale:

$$Q = \sum_{\vec{k}, \sigma, k > k_F} e a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} - \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} e b_{\vec{k}, \sigma}^\dagger b_{\vec{k}, \sigma} , \quad (4.2.63)$$

da cui appare che le buche portano carica opposta agli elettroni, quindi positiva. È ormai generalmente nota l'importanza in elettronica del concetto di buca contrapposto a quello di elettrone.

Utilizzando la Eq.(4.2.61) possiamo scrivere l'Hamiltoniano nella forma:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}, \sigma, k > k_F} (\epsilon(k) - \epsilon_F) a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} - \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} (\epsilon_F - \epsilon(k)) b_{\vec{k}, \sigma}^\dagger b_{\vec{k}, \sigma} + \epsilon_F N \\ &= \sum_{\vec{k}, \sigma, k > k_F} (\epsilon(k) - \epsilon_F) a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} + \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} (\epsilon_F - \epsilon(k)) b_{\vec{k}, \sigma}^\dagger b_{\vec{k}, \sigma} \\ &\quad - \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} (\epsilon_F - \epsilon(k)) + \epsilon_F N , \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

infatti il termine aggiunto proporzionale a ϵ_F è nullo per la Eq.(4.2.61) e gli ultimi due termini riproducono l'energia dello stato fondamentale

$$\epsilon_F N - \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} (\epsilon_F - \epsilon(k)) = \sum_{\vec{k}, \sigma, k \leq k_F} \epsilon(k) \equiv E_F ,$$

mentre i coefficienti dei termini operatoriali, cioè le energie dei singoli modi, sono positivi e si annullano sulla superficie di Fermi. Quindi in definitiva si ha:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \Theta(\epsilon(k) - \epsilon_F) (\epsilon(k) - \epsilon_F) a_{\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{k}, \sigma} \\ &\quad + \sum_{\vec{k}, \sigma} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(k)) (\epsilon_F - \epsilon(k)) b_{\vec{k}, \sigma}^\dagger b_{\vec{k}, \sigma} + E_F . \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

4.2.2 Applicazione della trasformazioni canoniche alla BCS: il modello di Richardson

Un'applicazione più significativa del metodo delle trasformazioni canoniche è quella alla teoria della superconduttività, o, più precisamente al modello di BCS [16].

Per dare un'idea, per quanto imprecisa, della teoria di BCS consideriamo un modello ultra-semplificato in una dimensione con interazione attrattiva fra particelle di spin opposto.

In un gas di fermioni non interagenti in una dimensione il livello di Fermi, cioè quello occupato con energia massima, corrisponde a 4 stati di singola particella con numero d'onda $\pm k_F$ e spin $\pm \frac{1}{2}$. Se R è la distanza di interazione e $k_F R \gg 1$ e se l'interazione riguarda solo particelle di spin opposto, possiamo considerare le dinamiche degli stati con numeri d'onda nelle vicinanze di k_F e spin $+$ e $-k_F$ e spin $-$ come un problema separato da quello dell'interazione di particelle con gli stessi numeri d'onda ma spin opposti. Infatti se una particella con spin $+$ e numero d'onda $p \simeq k_F$ interagisce con una con spin $-$ numero d'onda simile, dovendo una delle due particelle aumentare il proprio impulso e l'altra diminuirlo, l'interazione stessa è ostacolata dal principio d'esclusione. Questo non succede se la particelle con spin $-$ ha numero d'onda $k \simeq -k_F$. Dunque le cose vanno come se le particelle con spin $+$ e numero d'onda $p \simeq k_F$ interagissero solo con particelle con spin $-$, come peraltro abbiamo ipotizzato, e con numero d'onda opposto. Inoltre, data l'ipotesi sulla distanza d'interazione che equivale ad ammettere solo interazioni con numeri d'onda scambiati molto piccoli rispetto a k_F l'interazione ha effetto solo su particelle nelle vicinanze del livello di Fermi.

La densità degli stati al livello di Fermi nel volume Ω si calcola nel solito modo ricordando che il numero di stati d'impulso, non contiamo lo spin, sotto un impulso p è dato da $N_p = 4\pi(2mE)^{3/2}\Omega/(3h^3)$ e quindi $dN_p/(dE) = 4\pi m^2 v_F \Omega / h^3 \equiv 1/\epsilon$ dove v_F è la velocità delle particelle al livello di Fermi. Se n conta gli stati nelle vicinanze del livello di Fermi la loro energia cinetica riferita al livello di Fermi può essere approssimata da

$$\epsilon(k) - \epsilon_F = \epsilon n . \quad (4.2.66)$$

Per semplificare la trattazione, tramite una trasformazione canonica banale, sostituiamo l'operatore di distruzione $a_{-k,-}$ con $a_{k,-}$; in questo modo tutte la particelle interagenti hanno numeri d'onda vicini, ma si perde la conservazione dell'impulso nell'interazione.

Dunque nel modello, che in realtà fu proposto da Richardson nei primi anni '60, gli stati di singolo elettrone sono descritti da un numero quantico $-\infty < n < \infty$ oltre che dallo spin, il livello di Fermi corrisponde a $n = 0$ e gli elettroni interagiscono, attraendosi, solo per $|n| \leq N$ dove $N \simeq \frac{L}{2\pi R}$. Assumiamo quindi per il nostro modello l'Hamiltoniano:

$$H = \epsilon \sum_{m=-N}^N \sum_{\sigma=\pm} m a_{m,\sigma}^\dagger a_{m,\sigma} - G \sum_{n=-N}^N a_{n,+}^\dagger a_{n,-}^\dagger - \sum_{p=-N}^N a_{p,-} a_{p,+} . \quad (4.2.67)$$

Abbiamo escluso dalla dinamica gli elettroni con $|n| > N$ perché questi non interagiscono. Evidentemente $\epsilon = \hbar^3/4\pi m^2 v_F \Omega$. La costante G deve essere inversamente proporzionale al volume per cui si pone $G = \epsilon g$.

Come si vede gli elettroni interagiscono solo se fanno parte di una coppia con spin opposti e eguale n , si tratta di una proprietà che viene detta *blocking*.

Il modello vuole riprodurre nel modo più semplice possibile la formazione di coppie legate di elettroni con spin opposto e numero d'onda vicino a quello del livello di Fermi, formazione che è favorita, anche se l'interazione attrattiva è debole, dalla densità costante degli stati che si ha in una dimensione e anche in tre dimensioni vicino al livello di Fermi.

Formandosi coppie legate di elettroni, *coppie di Cooper*, esse si comporterebbero in modo analogo ai bosoni e potrebbero condensare in uno stato superfluido, cioè superconduttore.

Nella situazione presente, dato che gli elettroni spaiati non interagiscono, possiamo limitarci a studiare stati formati unicamente da coppie, cioè creati gli operatori:

$$b_n^\dagger = a_{n,+}^\dagger a_{n,-}^\dagger . \quad (4.2.68)$$

L'intera dinamica sarà quindi descritta da b_n^\dagger e dagli operatori:

$$b_n = a_{n,-} a_{n,+} \quad e \quad n_k = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm} a_{k,\sigma}^\dagger a_{k,\sigma} , \quad (4.2.69)$$

che soddisfano le regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [b_n, b_p^\dagger] &= \delta_{n,p} (1 - 2n_p) \\ [n_n, b_p] &= -\delta_{n,p} b_p \\ [b_n, b_p] &= 0 \quad , \quad b_n^2 = 0 . \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

In particolare :

$$H = \epsilon \left[\sum_{m=-N}^N 2m n_m - g \sum_{n,p=-N}^N b_n^\dagger b_p \right] . \quad (4.2.71)$$

Un metodo semplice, anche se approssimato, per studiare lo stato fondamentale del sistema e quindi verificare la condensazione, è quello variazionale basato sulle trasformazioni di Bogoliubov.

Noi ci limitiamo a studiare il sistema col metodo variazionale introducendo le trasformazioni di Bogoliubov

$$a_{n,\sigma} = \cos(\theta_n)A_{n,\sigma} + \sigma \sin(\theta_n)A_{n,-\sigma}^\dagger, \quad (4.2.72)$$

per cui l'Hamiltoniano diventa:

$$\begin{aligned} H &= \epsilon \left[\sum_{n=-N}^N n \sum_{\sigma} (\cos(\theta_n)A_{n,\sigma}^\dagger + \sigma \sin(\theta_n)A_{n,-\sigma}) \right. \\ &\quad (\cos(\theta_n)A_{n,\sigma} + \sigma \sin(\theta_n)A_{n,-\sigma}^\dagger) \\ &\quad -g \sum_{m=-N}^N (\cos(\theta_m)A_{m,+}^\dagger + \sin(\theta_m)A_{m,-})(\cos(\theta_m)A_{m,-}^\dagger - \sin(\theta_m)A_{m,+}) \\ &\quad \left. \sum_{p=-N}^N (\cos(\theta_p)A_{p,-} - \sin(\theta_p)A_{p,+}^\dagger)(\cos(\theta_p)A_{p,+} + \sin(\theta_p)A_{p,-}^\dagger) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Si sceglie poi come stato di prova su cui calcolare il valor medio di H lo stato, che indichiamo con $|\bar{0}\rangle$, annichilato dagli $A_{n,\sigma}$ ($A_{n,\sigma}|\bar{0}\rangle = 0$) e si calcola:

$$\langle \bar{0}|H|\bar{0}\rangle = 2\epsilon \sum_{n=-N}^N n \sin^2 \theta_n - G \left[\left(\sum_{n=-N}^N \sin(2\theta_n) \right)^2 / 4 + \sum_{n=-N}^N \sin^4 \theta_n \right]. \quad (4.2.74)$$

Ora la condizione di stazionarietà del valor medio dell'Hamiltoniano, che fornisce la migliore approssimazione possibile allo stato fondamentale nell'ambito dell'insieme scelto degli stati di prova, da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{0}|H|\bar{0}\rangle}{\partial \theta_n} &= 2\epsilon n \sin(2\theta_n) - G \cos(2\theta_n) \sum_{p=-N}^N \sin(2\theta_p) \\ &\quad + G \sin(2\theta_n)(\cos(2\theta_n) - 1) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

Ricordiamo che, in assenza di interazione, la trasformazione canonica che identifica lo stato fondamentale con quello di vuoto corrisponde a $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ per $n < 0$ e $\theta_n = 0$ per $n > 0$. Si tratta della trasformazione che definisce gli operatori di creazione e distruzione delle buche. Nel caso in esame dobbiamo

aspettarci che la soluzione dell'equazione variazionale approssimi quella del caso libero per interazioni non troppo forti e per grandi $|n|$ per cui gli effetti dell'interazione sono trascurabili. Segue che θ_n deve soddisfare le seguenti condizioni: $\theta_n \simeq \frac{\pi}{2}$ per $n \simeq -N$ e $\theta_n \simeq 0$ per $n \simeq N$.

La (4.2.75) si semplifica se passiamo al limite del continuo, cioè del limite $\Omega \rightarrow \infty$, in cui $N \rightarrow \infty$ con $N\epsilon = \Lambda$ costante e la forza dell'interazione G , che deve essere inversamente proporzionale al volume, viene posta come $G = \epsilon g$ con g indipendente da N .

Se introduciamo la funzione $\theta(x)$ tale che $\theta_n = \theta(n\epsilon)$ e assumiamo che $\theta(x)$ sia una funzione continuamente derivabile abbiamo: $\sum_{p=-N}^N \sin(2\theta_p) \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(2\theta(x)) dx$. Possiamo concludere che nel limite del continuo la (4.2.75) diventa:

$$2x \sin(2\theta(x)) = g \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(2\theta(y)) dy \cos(2\theta(x)) \equiv 2\Delta \cos(2\theta(x)) \quad (4.2.76)$$

perché l'ultimo termine a secondo membro della (4.2.75) è di ordine ϵ e quindi trascurabile rispetto ai primi due.

Se $\Delta \ll \Lambda$, cioè se g è piccolo, le condizioni $\theta(-\Lambda) \simeq \frac{\pi}{2}$ e $\theta(\Lambda) \simeq 0$ identificano la soluzione di (4.2.76):

$$\tan(2\theta(x)) = \frac{\Delta}{x} \longrightarrow \sin(2\theta(x)) = \frac{\Delta}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}, \quad \cos(2\theta(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}} \quad (4.2.77)$$

Dalla definizione di Δ implicita in (4.2.76) si ha:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{g}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(2\theta(y)) dy = \frac{g}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\Delta}{\sqrt{y^2 + \Delta^2}} dy \\ &= \frac{g\Delta}{2} \int_{-\frac{\Lambda}{\Delta}}^{\frac{\Lambda}{\Delta}} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} dz = g\Delta \sinh^{-1} \frac{\Lambda}{\Delta} \end{aligned} \quad (4.2.78)$$

cioè

$$\Delta = \frac{\Lambda}{\sinh \frac{1}{g}} \quad (4.2.79)$$

che, per piccoli g equivale a:

$$\Delta = 2\Lambda e^{-\frac{1}{g}}. \quad (4.2.80)$$

Quindi $\frac{\Delta}{\Lambda}$ è esponenzialmente piccolo se g è piccolo. Δ viene chiamato *gap* ed è indice di condensazione. È significativo il fatto che il gap non sia una

funzione analitica della costante d'interazione g e quindi i risultati che stiamo ottenendo non siano raggiungibili tramite uno sviluppo perturbativo. Questo fatto non è sorprendente perché ci si aspetta che il comportamento del sistema cambi completamente se cambia il segno di g , cioè se si passa da forze attrattive che tendono a legare le particelle nelle vicinanze dell'energia di Fermi, dove la densità degli stati non si annulla, a forze repulsive.

Tornando alla (4.2.74) possiamo valutare il valore approssimato per l'energia dello stato fondamentale nel limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
E_F &\simeq \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\Lambda}^{\Lambda} x dx (1 - \cos(2\theta(x))) - \frac{g}{4} \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(2\theta(y)) dy \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\Lambda}^{\Lambda} x dx (1 - \cos(2\theta(x))) - \frac{\Delta}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(2\theta(y)) dy \right] \\
&= -\frac{1}{\epsilon} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left[x \cos(2\theta(x)) + \frac{\Delta}{2} \sin(2\theta(x)) \right] dx \\
&= -\frac{1}{\epsilon} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{x^2 + \frac{\Delta^2}{2}}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}} dx = -\frac{1}{\epsilon} \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \Delta^2} . \tag{4.2.81}
\end{aligned}$$

Il fatto che E_F diverga nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ non deve stupire, infatti l'energia del sistema è una funzione estensiva e quindi diverge nel limite di volume L infinito. Sostituendo l'espressione ottenuta per ϵ si ha per la densità di energia:

$$\frac{E_F}{L} = -\frac{\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + \Delta^2}}{h v_F} . \tag{4.2.82}$$

Per capire il significato di questo risultato osserviamo che nel caso di elettroni non interagenti (che corrisponde a $\Delta = 0$) $\frac{E_{F0}}{L} = \frac{\Lambda^2}{h v_F}$. Si vede quindi che per piccoli Δ :

$$\frac{E_F - E_{F0}}{L} \simeq -\frac{\Delta^2}{2 v_F h} , \tag{4.2.83}$$

dunque il gap è direttamente collegato all'energia di condensazione del sistema.

A questo punto possiamo riconsiderare l'intera Hamiltoniana dopo la trasformazione canonica e nel limite continuo $\epsilon \rightarrow 0$ con:

$$\epsilon n = x \quad , \quad \epsilon N = \Lambda \quad , \quad G = \epsilon g \quad , \quad A_{n,\sigma} = \epsilon A(x, \sigma) . \tag{4.2.84}$$

Troviamo:

$$H = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx x \left[\cos(2\theta(x)) N(x) + \sin(2\theta(x)) (B(x) + B^\dagger(x)) - \frac{1}{\epsilon} \cos(2\theta(x)) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -g\epsilon \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dy \left[\cos^2(\theta(y))B^\dagger(y) - \sin^2(\theta(y))B(y) + (1 - N(y))\frac{\sin(2\theta(y))}{2\epsilon} \right] \\
& \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dz \left[\cos^2(\theta(z))B(z) - \sin^2(\theta(z))B^\dagger(z) + (1 - N(y))\frac{\sin(2\theta(z))}{2\epsilon} \right] \\
& = -\frac{1}{\epsilon} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx \left[x \cos(2\theta(x)) + \frac{\Delta}{2} \sin(2\theta(x)) \right] \\
& + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx [(x \cos(2\theta(x)) + \Delta \sin(2\theta(x)))N(x) \\
& - (\Delta \cos(2\theta(x)) - x \sin(2\theta(x))(B^\dagger(x) + B(x))] + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \tag{4.2.85}
\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (4.2.79). Osservando che nell'ultima espressione il primo termine è stato calcolato in (4.2.81) e, in base alle (4.2.77), il coefficiente di $B(x) + B^\dagger(x)$ è nullo, si ottiene finalmente:

$$H = -\frac{1}{\epsilon}\Lambda\sqrt{\Lambda^2 + \Delta^2} + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx\sqrt{x^2 + \Delta^2}N(x) + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \tag{4.2.86}$$

Questo va confrontato con quello che si otterrebbe nel limite del continuo partendo dal modello libero, cioè con:

$$H_0 = -\frac{\Lambda^2}{\epsilon} + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx|x|N(x), \tag{4.2.87}$$

e mostra chiaramente l'effetto dell'interazione e il significato del gap. Mentre nel caso libero l'energia di eccitazione degli stati di singola quasi-particella varia fra zero e infinito, l'interazione attrattiva introduce un valore minimo positivo di questa energia, che coincide col gap Δ . Per eccitare una quasi-particella il sistema richiede un trasferimento di energia superiore al gap; questo implica che per campi piccoli la resistività del sistema si annulla, cioè la superconduttività.

Un'ovvia obiezione a un'interpretazione così diretta della (4.2.86) è che l'Hamiltoniano (4.2.74) contiene altri termini, oltre a quelli mostrati esplicitamente. Si tratta di termini che, usando le espressioni introdotte in Eq.(4.2.69) adattate alle quasi particelle, appaiono come combinazioni lineari degli operatori $B^\dagger(x)B(x)$, $B^\dagger(x)B^\dagger(x)$, $B(x)B(x)$, $N(x)N(x)$, $N(x)B(x)$ e $B^\dagger(x)N(x)$. Questi sono termini d'interazione fra quasi-particelle con costante di interazione ϵg , che si annulla nel limite del continuo, ed è quindi ragionevole pensare che abbiano scarsi effetti nel in questo limite.

Questa ragionevole attesa è confermata completamente dallo studio della soluzione esatta del problema. Naturalmente l'analisi dello spettro esatto di H supera di molto i limiti di questo corso. È però importante sapere che i risultati da noi ottenuti in modo approssimato nel limite di volume infinito sono in realtà risultati esatti.

4.3 Esercizi

1. Calcolare il valor medio dell'operatore:

$$V = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}; \sigma_1, \sigma_2 = \pm} v(k) a_{\vec{p}+\vec{k}, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{q}-\vec{k}, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{q}, \sigma_2} a_{\vec{p}, \sigma_1} ,$$

nello stato di due elettroni quantizzati in una scatola cubica di lato L con condizioni al contorno periodiche:

$$a_{\vec{p}_1, +}^\dagger a_{\vec{p}_2, +}^\dagger \Psi_0 .$$

(Sol: $\frac{1}{L^3} [v(0) - v(|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|)]$.)

2. Per un sistema di elettroni quantizzato in una buca tridimensionale con condizioni al contorno periodiche, calcolare in seconda quantizzazione, nella rappresentazione del numero di occupazione rispetto al momento ed allo spin, l'operatore di interazione a due corpi corrispondente al potenziale

$$v(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Discutere in particolare la dipendenza dell'interazione dallo spin degli elettroni.

(Sol: $V = \lambda \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} a_{\vec{p}+\vec{q}, +}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}, -}^\dagger a_{\vec{k}, -} a_{\vec{p}, +}$.)

3. Dato uno stato rappresentato dal vettore Ψ_s e l'operatore densità di particella $\rho(\vec{R}) = \sum_{\sigma} \Phi^\dagger(\vec{R}, \sigma) \Phi(\vec{R}, \sigma)$, si chiama funzione di correlazione della densità relativa allo stato s l'espressione

$$G(\vec{R}) = \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \Psi_s \rangle \langle \Psi_s, \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle .$$

Calcolare il valore della funzione G nel caso in cui lo stato s è quello di due fermioni identici entrambi con spin $+\frac{1}{2}$ e con numeri d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 rispettivamente, quantizzati in una scatola di lato L con condizioni al bordo periodiche.

(Sol: $G(\vec{R}) = \frac{2\delta(\vec{R})}{L^3} - \frac{2}{L^6}(\cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{R}) + 1)$.)

4. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + \lambda \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} \left[a_{p+2,+}^\dagger a_{r-2,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} + a_{p-2,+}^\dagger a_{r+2,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} \right] .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

(Sol: $-2\frac{\lambda^2}{\alpha}$.)

5. Gli elettroni in un filo conduttore formano con buona approssimazione un gas Fermionico unidimensionale degenere con numero d'onda di Fermi pari a $k_F = \pi(N - 2)/(2L)$ dove L è la lunghezza del filo e N il numero di elettroni nella banda di conduzione. Sul filo si trova un'impurezza che interagisce con gli elettroni proporzionalmente alla loro densità. Si ha quindi l'energia d'interazione:

$$H_i = \lambda \rho(0) = \lambda \sum_{p,q,\sigma} a_{p,\sigma}^\dagger a_{q,\sigma} .$$

Posto $\lambda = 10^{-30} \text{ Joule} \cdot m$, e $k_F = 10^9 \text{ m}^{-1}$, si calcoli la correzione all'energia dello stato fondamentale del sistema fino al secondo ordine in λ , e nel limite di grandi L .

Può risultare utile la seguente relazione: $\int_0^1 \log(1-x) dx/x = -2 \int_0^1 \log(1+x) dx/x = -\pi^2/6$

(Sol. La correzione al primo ordine è evidentemente: $\Delta E_1 = \lambda 2k_F/\pi \sim 6,4 \cdot 10^{-22} \text{ Joule}$, quella del secondo ordine è:

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= -\frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int_{-k_F}^{k_F} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\Theta(p^2 - k_F^2)}{\hbar^2(p^2 - q^2)/(2m)} = -\frac{m\lambda^2}{\hbar^2\pi^2} \int_{-1}^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\Theta(y^2 - 1)}{(y^2 - x^2)} \\ &= -\frac{4m\lambda^2}{\hbar^2\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{2x} \int_1^{\infty} dy \left[\frac{1}{(y-x)} - \frac{1}{(y+x)} \right] = -\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \log \frac{1+x}{1-x} = -\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2\pi^2} \frac{3\pi^2}{12} = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} \\ &\sim 4.8 \cdot 10^{-23} \text{ Joule .} \end{aligned}$$

6. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} \\ &+ g \sum_{p,r=-\infty,\sigma}^{\infty} a_{p+1,\sigma}^\dagger a_{r-1,-\sigma}^\dagger a_{r,-\sigma} a_{p,\sigma} . \end{aligned}$$

Calcolare al primo ordine in λ la correzione all'energia dei primi stati eccitati del sistema con spin totale nullo.

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_{n,+}^\dagger a_{n,+} - a_{n,-}^\dagger a_{n,-}] |S\rangle = 0).$$

(Sol: I primi stati eccitati del sistema sono gli stati: $a_{\tau(N+1),\sigma}^\dagger a_{\lambda N,\sigma} |F\rangle$ dove $|F\rangle$ è lo stato fondamentale e le variabili τ, σ, λ valgono \pm . Tali stati sono degeneri e quindi si applica la corrispondente teoria delle perturbazioni al primo ordine. I termini dell'interazione che agiscono fra stati degeneri sono quelli con p e r dello stesso segno, essi hanno elementi di matrice non nulli solo fra stati con $\tau = \lambda$. Quindi le energie degli stati con $\tau = -\lambda$ non hanno correzioni al primo ordine, mentre si ha un elemento di matrice pari a g fra gli stati con $\tau = \lambda$ e σ opposti. La somma di questi stati ha una correzione pari a g mentre la differenza ha $-g$.)

7. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + \frac{\lambda}{L} \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-1}^1 a_{p+q,+}^\dagger a_{r-q,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} .$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

$$(\text{Si ricordi che } \sum_{n=0}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} .)$$

$$(\text{Sol: } E = \frac{\hbar^2}{mL^2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{3} + \frac{\lambda(2N+1)^2}{L} - \frac{2\lambda^2 m}{\hbar^2(2N+1)} .)$$

8. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + \lambda \sum_{p,r,s=-\infty}^{\infty} e^{-\mu|s|} a_{p+s,+}^\dagger a_{r-s,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} .$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ assumendo che $\mu N \gg 1$.

(Sol: $E = 2\alpha N(N + 1) + \lambda(2N + 1)^2 - \frac{\lambda^2 e^{2\mu}}{\alpha(e^{2\mu} - 1)^2} + O(\lambda^3)$.)

9. Gli elettroni in un solido con impulso di Fermi P_F interagiscono tramite l'operatore energia potenziale:

$$V = \frac{\lambda}{2\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} e^{-\mu k} a_{\vec{p}+\vec{k},+}^\dagger a_{\vec{q}-\vec{k},-}^\dagger a_{\vec{q},-} a_{\vec{p},+} .$$

Gli elettroni quantizzati in un scatola cubica di volume Ω con condizioni al contorno periodiche e gli indici \pm indicano lo stato di spin. L'energia cinetica degli elettroni $\epsilon(p)$ è funzione del modulo dell'impulso e, nelle vicinanze del livello di Fermi ($p \sim P_F$), si ha: $\epsilon(p) \simeq \epsilon_F + v(p - P_F)$. Assumendo $\mu P_F \gg 1$ si calcolino le correzioni al primo e secondo ordine in λ all'energia dello stato fondamentale del sistema e si valuti il valore delle correzioni alla densità di energia dello stato fondamentale al limite di volume infinito. (Essendo $\mu P_F \gg 1$, e quindi il raggio di variabilità di \vec{k} piccolissimo rispetto a quello del mare di Fermi mentre p e q non si discostano molto da P_F , si osservi che è possibile approssimare sistematicamente nei calcoli $|\vec{p}+\vec{k}|$ con $p+k \cos \theta$ e $|\vec{q}-\vec{k}|$ con $q+k \cos \theta'$, dove θ e θ' sono rispettivamente l'angolo fra \vec{p} e \vec{k} e \vec{q} e $-\vec{k}$)

(Sol: $E_1 \rightarrow \frac{\lambda \Omega P_F^6}{72 \pi^4 \hbar^6}$
 $E_2 \simeq -\frac{\lambda^2}{4\Omega^2} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} \frac{e^{-2\mu k}}{vk(\cos \theta + \cos \theta')}$ $\Theta(p + k \cos \theta - P_F) \Theta(q + k \cos \theta' - P_F) \Theta(P_F - p) \Theta(P_F - q)$
 $\rightarrow -\frac{\lambda^2 \Omega}{27 \pi^6 \hbar^9 v} \int_0^\infty dk k e^{-2\mu k} \int_0^1 \frac{d \cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta'} \frac{d \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} \int_{P_F - k \cos \theta}^{P_F} p^2 dp \int_{P_F - k \cos \theta'}^{P_F} q^2 dq$
 $\simeq -\frac{\lambda^2 \Omega P_F^4}{2^9 \pi^6 \hbar^9 \mu^4 v} (1 - \log 2)$)

10. Si consideri un sistema di N bosoni e $4N + 2$ fermioni su un segmento con condizioni al contorno periodiche. Se $a_{n,\sigma}$ è l'operatore di distruzione fermionico sullo stato con numero d'onda n e spin σ e A_n quello bosonico lo stato con numero d'onda n , l'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \left(\alpha \sum_{\sigma} a_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma} + \beta A_n^{\dagger} A_n \right) + \lambda \sum_{n,m=-\infty, \sigma}^{+\infty} \left(a_{n+1,\sigma}^{\dagger} A_{m-1}^{\dagger} + a_{n-1,\sigma}^{\dagger} A_{m+1}^{\dagger} \right) A_m a_{n,\sigma} ,$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

(Sol: $E = 2N \left(\alpha(N + 1) - 2 \frac{\lambda^2}{\alpha + \beta} \right)$.)

11. Un atomo può essere schematizzato come un sistema a due livelli con differenza di energia $E_2 - E_1 = \Delta > 0$ e massa praticamente infinita. Uno spazio di Hilbert bidimensionale coincide con lo spazio di Fock fermionico corrispondente a un singolo stato a una particella. Siano A e A^{\dagger} operatori di distruzione e creazione nello spazio di Fock e $|0\rangle$ il suo vuoto, gli stati corrispondenti ai due livelli atomici possono essere identificati con $|0\rangle$ e $A^{\dagger}|0\rangle$, sia il primo fra i due lo stato fondamentale dell'atomo. L'Hamiltoniano imperturbato dell'atomo è:

$$H_A = \Delta A^{\dagger} A + E_1$$

L'atomo interagisce con un sistema degenere di fermioni (elettroni) con spin $1/2$ e massa $m = 10^{-30} kg$ e energia di Fermi E_F , tramite lo operatore

$$V = \frac{\lambda \hbar c}{\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} [A + A^{\dagger}] (a_{\vec{p}+\vec{q}, \sigma})^{\dagger} a_{\vec{p}, \sigma}$$

dove $(a_{\vec{p}, \sigma})^{\dagger}$ è l'operatore di creazione di una particella con impulso \vec{p} e spin σ quantizzata nel volume Ω . Ponendo $\lambda = 10^{-23} m^2$, $\Delta = 1 eV$ e $E_F = 10^{-2} eV$ calcolare il tempo medio di decadimento dell'atomo dal livello 2 al livello 1. Trascurate correzioni al risultato di ordine E_F/Δ .

Se la vita media dell'atomo per decadimento radiativo è $\tau = 10^{-8} s$ con quale probabilità l'atomo decade emettendo un fotone?

(Sol: applicando la regola d'oro e sommando sugli spin finali si ha:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{m\lambda^2 c^2}{\pi^3 \hbar^5} \int_0^{P_F} q^2 \sqrt{q^2 + 2m\Delta} dq \simeq \frac{m\lambda^2 c^2 P_F^3}{3\pi^3 \hbar^5} \sqrt{2m\Delta} \simeq 10^9 s^{-1}$$

12. L'Hamiltoniano del modello di BCS in forma semplificata é dato da

$$H = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{\alpha}{N} n N_n - \frac{g}{N} \sum_{n=-N, n \neq 0}^N b_n^\dagger \sum_{m=-N, m \neq 0}^N b_m$$

dove $N_n = \sum_{\sigma} a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma}$, $b_n = a_{n,-} a_{n,+}$ e gli operatori di creazione e distruzione soddisfano le relazioni di anti-commutazione $[a_{\sigma,n}, a_{\sigma',m}^\dagger]_+ = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,m}$. Calcolate i commutatori $[N_n, b_m]$ e $[b_n, b_m^\dagger]$.

Utilizzando le regole di commutazione di cui sopra cercate gli autostati di H corrispondenti ai vettori della forma: $|\gamma\rangle \equiv \sum_{n=-N, n \neq 0}^N c_n b_n^\dagger |0\rangle$.

(Sol: Le regole di commutazione sono: $[b_n, b_m^\dagger] = \delta_{n,m}(1 - N_n)$, $[N_n, b_m] = -2\delta_{n,m} b_m$. L'equazione agli autovalori è:

$$H|\gamma\rangle = \left[\sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{\alpha}{N} n c_n - \frac{g}{N} \sum_{p=-N, p \neq 0}^N c_p \sum_{n=-N, n \neq 0}^N |b_n^\dagger|0\rangle \right] = E \sum_{n=-N, n \neq 0}^N c_n b_n^\dagger |0\rangle$$

da cui si trova $1 = \frac{g}{N} \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{1}{E - \frac{\alpha}{N} n}$ che ammette $2N$ soluzioni)

13. Facendo riferimento al sistema descritto nell'esercizio precedente, assumendo che l'energia di Fermi sia data da $n = 0$ calcolate la correzione fino al secondo ordine in g all'energia dello stato fondamentale.

(Sol: Lo stato fondamentale imperturbato è: $|\Omega\rangle = \prod_{n=-N}^{-1} b_n^\dagger |0\rangle$,

$$V|\Omega\rangle = \frac{g}{N} [|\Omega\rangle - \sum_{m=1}^N b_m^\dagger \sum_{p=-N}^{-1} \prod_{n=-N, n \neq p}^{-1} b_n^\dagger |0\rangle]$$

Quindi la correzione all'energia è data da: $\Delta E = -g - \frac{1}{2} \frac{g^2}{N\alpha} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{n+m} \rightarrow -g - \frac{g^2}{2\alpha} (2 \ln 2 - 1)$. al limite $N \rightarrow \infty$)

14. Si tratti col metodo della trasformazione canonica un sistema di fermioni in una dimensione i cui operatori di distruzione sono a_n (con n

intero $-\infty < n < \infty$) e la cui hamiltoniana è

$$H = \sum_n \left[n^2 a_n^\dagger a_n + \lambda c_n \left(a_{-n}^\dagger a_n^\dagger + a_n a_{-n} \right) \right] .$$

con $c_n = n$ per $|n| \leq N$ e $c_n = 0$ per $|n| > N$.

(Sol: Ci occupiamo solo dei valori di $|n|$ inferiori a N . Consideriamo una trasformazione canonica del tipo: $a_n = \cos \theta_n A_n + \sin \theta_n A_{-n}^\dagger$ dove A_n sono i nuovi operatori di distruzione e $\theta_{-n} = -\theta_n$. La condizione di diagonalizzazione di H , cioè, l'annullarsi dei coefficienti dei termini $A_n A_{-n}$ nel suo sviluppo, equivale alla condizione $\tan(2\theta_n) = 2\lambda/n$, da cui segue $\cos(2\theta_n) = |n|/\sqrt{n^2 + 4\lambda^2}$ e $\sin(2\theta_n) = 2n\lambda/(|n|\sqrt{n^2 + 4\lambda^2})$. Quindi l'angolo θ_n ha una discontinuità da $-\pi/2$ a $\pi/2$ attraversando l'origine dell'asse n dai valori negativi a quelli positivi mentre tende ad annullarsi a grandi $|n|$. Sostituendo si ha infine:

$$H = \sum_{|n| < N} \left(\frac{n^2 - \sqrt{n^4 + 4\lambda^2 n^2}}{2} + \sqrt{n^4 + 4\lambda^2 n^2} A_n^\dagger A_n \right) + \sum_{|n| > N} n^2 A_n^\dagger A_n .$$

15. Calcolate il valor medio del prodotto $d_{\vec{k}}(t)d_{\vec{q}}(0)$, dove l'operatore $d_{\vec{k}}(t)$ è l'evoluto in rappresentazione di Heisenberg della trasformata di Fourier spaziale della densità di particelle ($d_{\vec{k}} = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$), per un gas degenere di elettroni non interagenti a temperatura $T = 1/(k\beta)$ e potenziale chimico μ con $\vec{k} \neq \vec{0}$. Valutatene la trasformata di Fourier temporale:

$$\delta(\vec{k} + \vec{q})C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} Tr[\rho d_{\vec{k}}(t)d_{\vec{q}}(0)] ,$$

nel limite di grandi volumi.

Mostrare che $\hbar\omega C(\omega)$ è proporzionale alla potenza media assorbita dal gas sotto l'azione di un potenziale elettrico pari a $V = V_0 \cos(\omega t) \cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$ e calcolatene la costante di proporzionalità avendo posto $\delta(\vec{k} + \vec{q}) = \Omega/(2\pi)^3 \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}}$.

(Sol: In seconda quantizzazione $d_{\vec{k}}(t) = \sum_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} \exp(it(\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}})/\hbar)$, quindi il valor medio, in funzione della matrice densità ρ_β , vale

$$Tr[\rho_\beta d_{\vec{k}}(t)d_{\vec{q}}(0)] = \sum_{\vec{p},\vec{p}',\sigma,\sigma'} Tr[\rho a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} a_{\vec{p}'+\vec{q},\sigma'}^\dagger a_{\vec{p}',\sigma} \exp(it(\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}})/\hbar)]$$

dove si è posto $\epsilon_{\vec{p}} = \hbar^2 p^2/(2m)$. Dal teorema di Wick termico troviamo:

$Tr[\rho_\beta d_{\vec{k}}(t)d_{\vec{q}}(0)] = \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \sum_{\vec{p},\sigma} \exp(it(\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{p}})/\hbar) \bar{N}_{\vec{p}+\vec{k}}(1 - \bar{N}_{\vec{p}})$
e quindi, nel limite di grande volume,

$$\delta(\vec{k} + \vec{q})C(\omega) = 2\pi\delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \sum_{\vec{p},\sigma} \delta(\omega + (\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{p}})/\hbar) \bar{N}_{\vec{p}+\vec{k}}(1 - \bar{N}_{\vec{p}}) .$$

Da cui:

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_{\vec{p},\sigma} \delta(\omega + (\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{p}})/\hbar) \bar{N}_{\vec{p}+\vec{k}}(1 - \bar{N}_{\vec{p}}) \\ &= 4\pi \int d\vec{p} \delta(\omega + (\epsilon_{\vec{p}+\vec{k}} - \epsilon_{\vec{p}})/\hbar) \bar{N}_{\vec{p}+\vec{k}}(1 - \bar{N}_{\vec{p}}) \\ &= 8\pi^2 \int_0^\infty dp p^2 \exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] / [(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \hbar\omega - \mu)] + 1)(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] + 1)] \\ &\int_{-1}^1 d \cos \theta \delta(\omega + \hbar(k^2 + 2kp \cos \theta)/2m) \\ &= 4\pi^2 m / (\hbar k) \int_0^\infty dp^2 \exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] / [(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \hbar\omega - \mu)] + 1)(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] + 1)] \Theta(1 - (m\omega/\hbar k + k/2)^2/p^2) \\ &= 4\pi^2 m / (\hbar k) \int_{(m\omega/\hbar k + k/2)^2}^\infty dp^2 \exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] / [(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \hbar\omega - \mu)] + 1)(\exp[\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)] + 1)] \\ &= 8\pi^2 m^2 / (\hbar^3 k) \int_{m(\omega/k + \hbar k/(2m))^2/2}^\infty d\epsilon \exp[\beta(\epsilon - \mu)] / [(\exp[\beta(\epsilon - \hbar\omega - \mu)] + 1)(\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1)] . \end{aligned}$$

Passando alla nuova variabile d'integrazione $z = \exp[\beta(\epsilon - \mu)]$ e quindi $dz = \beta \exp[\beta(\epsilon - \mu)] d\epsilon$ troviamo l'integrale elementare:

$$C(\omega) = 8\pi^2 m^2 / (\beta \hbar^3 k) \int_{\exp[\beta((m\omega/k + \hbar k/2)^2/(2m) - \mu)]}^\infty dz / [(z + 1)(e^{-\beta \hbar \omega} z + 1)] .$$

Infine:

$$C(\omega) = 8\pi^2 m^2 / (\beta \hbar^3 k (1 - e^{-\beta \hbar \omega})) \log \frac{\exp[\beta((m\omega/k + \hbar k/2)^2/(2m) - \mu)] + e^{\beta \hbar \omega}}{\exp[\beta((m\omega/k + \hbar k/2)^2/(2m) - \mu)] + 1} .$$

A bassa temperatura: $\beta\mu \gg \gg 1$ si ha:

$$C(\omega) = 8\pi^2 m^2 / (\hbar^3 k) \Theta(\mu + \hbar\omega - \frac{m}{2}(\omega/k + \hbar k/(2m))^2) \int_{\frac{m}{2}(\omega/k + \hbar k/(2m))^2}^{\mu + \hbar\omega} d\epsilon \Theta(\epsilon - \mu)$$

Veniamo ora al secondo punto. L'Hamiltoniano di interazione col potenziale è:

$$\begin{aligned} H_I \cos(\omega t) &= -eV_0 \cos(\omega t) \int d\vec{r} [\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})] \rho(\vec{r})/2 \\ &= -eV_0 \cos(\omega t) [d_{\vec{k}} + d_{-\vec{k}}]/2 . \end{aligned}$$

Dalla regola d'oro troviamo che la probabilità di assorbimento per unità di tempo di un quanto $\hbar\omega$ partendo dallo stato iniziale $|I\rangle$ è data da:

$$\begin{aligned} &2\pi/\hbar \sum_F |\langle F|H_I/2|I\rangle|^2 \delta(E_F - \hbar\omega - E_I) \\ &= 1/(4\hbar^2) \int_{-\infty}^\infty dt \sum_F e^{it(E_I - E_F)/\hbar} \langle I|H_I|F\rangle \langle F|H_I|I\rangle e^{i\omega t} \\ &= 1/(4\hbar^2) \int_{-\infty}^\infty dt \sum_F \langle I|H_I(t)|F\rangle \langle F|H_I(0)|I\rangle e^{i\omega t} \\ &= 1/(4\hbar^2) \int_{-\infty}^\infty dt \langle I|H_I(t)H_I(0)|I\rangle e^{i\omega t} . \end{aligned}$$

Mediando sulla distribuzione termica degli stati iniziali del gas fermionico troviamo per la potenza assorbita:

$$\begin{aligned} W &= \hbar\omega (eV_0)^2 / (4\hbar^2) \int_{-\infty}^\infty dt Tr [\rho_\beta [d_{\vec{k}} + d_{-\vec{k}}](t) [d_{\vec{k}} + d_{-\vec{k}}]] e^{i\omega t} / 4 \\ &= \omega (eV_0)^2 / (8\hbar) \int_{-\infty}^\infty dt Tr [\rho_\beta [d_{\vec{k}}(t) d_{-\vec{k}}]] e^{i\omega t} \\ &= \Omega \omega (eV_0)^2 C(\omega) / (8\hbar (2\pi)^3) , \end{aligned}$$

e quindi la potenza assorbita per unità di volume risulta $\omega (eV_0)^2 C(\omega) / (\hbar (4\pi)^3)$.)

16. Gli operatori corrispondenti alle componenti dello spin totale di un gas di elettroni quantizzati in un scatola cubica di volume Ω sono dati da: $S_i = \hbar/2 \sum_{\vec{p},\alpha,\beta} a_{\vec{p},\alpha}^\dagger a_{\vec{p},\beta} (\sigma_i)_{\alpha,\beta}$ dove σ_i sono le matrici di Pauli e α

e β assumono i valori \pm . La risposta dello spin del gas a un campo magnetico è legata alla funzione di correlazione di due componenti dello spin.

Nel caso di un impulso magnetico di breve durata ci si riduce al calcolo del valor medio del prodotto di due componenti dello spin, per esempio dell'operatore

$$A = \sum_{\vec{p}, \vec{k}} a_{\vec{p},+}^\dagger a_{\vec{p},-} a_{\vec{k},-}^\dagger a_{\vec{k},+} .$$

Se il potenziale chimico del gas è $\mu \simeq 4 \cdot 10^{-19}$ Joule e la temperatura tale che $\beta\mu \simeq 10^2$ calcolate, usando il teorema di Wick termico per gli elettroni nel limite di grande Ω , il valor medio \bar{A} dell'operatore A/Ω trascurando correzione dell'ordine $1/(\beta\mu)$

$$\begin{aligned} \text{(Sol: Il teorema di Wick termico per gli elettroni da: } \bar{A} &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}(1 - N_{\vec{p}}) = \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} \frac{e^{\beta(p^2/(2m) - \mu)}}{(1 + e^{\beta(p^2/(2m) - \mu)})^2} \simeq \frac{1}{h^3} \int d\vec{p} \frac{e^{\beta(p^2/(2m) - \mu)}}{(1 + e^{\beta(p^2/(2m) - \mu)})^2} \simeq \frac{(2m)^{3/2}}{\beta^{3/2} h^3} \int d\vec{q} \frac{e^{q^2 - \beta\mu}}{(1 + e^{q^2 - \beta\mu})^2} \\ &= \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{\beta^{3/2} h^3} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \frac{e^{x - \beta\mu}}{(1 + e^{x - \beta\mu})^2} = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{\beta^{3/2} h^3} \int_{-\beta\mu}^\infty dy \sqrt{y + \beta\mu} \frac{e^y}{(1 + e^y)^2} \\ &\simeq \frac{2\pi(2m)^{3/2} \sqrt{\mu}}{\beta h^3} \int_{-\beta\mu}^\infty dy \frac{e^y}{(1 + e^y)^2} \simeq \frac{\pi(m)^{3/2} \sqrt{2\mu}}{\beta h^3} \int_{-\infty}^\infty dy \frac{1}{\cosh^2(y/2)} = \frac{4\pi(m)^{3/2} \sqrt{2\mu}}{\beta h^3} \\ &\sim 1,6 \cdot 10^{26} .) \end{aligned}$$

4.4 I campi spinoriali

⁶ Abbiamo discusso nella sezione 3.5.3 la costruzione e la quantizzazione del campo scalare relativistico e abbiamo accennato in particolare alle proprietà di covarianza dei campi. Ci siamo limitati fin qui a considerare l'esempio dei campi scalari, che come si è detto si trasformano secondo l'equazione

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) . \quad (4.4.88)$$

Un altro esempio di grande importanza è quello dei campi tetra-vettoriali, per i quali

$$A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) . \quad (4.4.89)$$

Il caso generale è quello di un sistema di campi complessi ϕ_α , $\alpha = 1, \dots, n$, con la legge di trasformazione

$$\phi'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^n S(\Lambda)_\alpha^\beta \phi_\beta(\Lambda^{-1}x) , \quad (4.4.90)$$

⁶Si veda anche [12] (cap. 5)

Che, facendo riferimento all'origine dello spazio-tempo, si scrive in forma matriciale:

$$\phi' = S(\Lambda)\phi . \quad (4.4.91)$$

La matrice $S(\Lambda)$ soddisfa la condizione

$$S(\Lambda\Lambda') = S(\Lambda)S(\Lambda') , \quad (4.4.92)$$

e la moltiplicazione è intesa nel senso delle matrici. Il campo tetra-vettoriale fornisce un esempio ovvio di questa legge.

Una domanda naturale nell'ambito della teoria dei campi relativistici è se sia possibile introdurre un campo *relativistico spinoriale*, cioè un campo ξ a due componenti complesse in forma di matrice colonna per cui una rotazione di un angolo θ intorno all'asse di direzione \vec{n} induce la trasformazione:

$$\xi' = \exp(-i\theta\vec{\sigma} \cdot \vec{n}/2)\xi , \quad (4.4.93)$$

dove il vettore $\vec{\sigma}$ ha valore matriciale e le sue componenti coincidono con le matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (4.4.94)$$

Evidentemente si tratta di individuare una matrice 2x2 $L(\Lambda)$ dipendente dai parametri della trasformazione di Lorentz Λ che rappresenta su ξ nell'origine dello spazio tempo l'effetto di un cambiamento di sistema di riferimento:

$$\xi' = L(\Lambda)\xi . \quad (4.4.95)$$

Va notato che L , come peraltro anche la matrice di rotazione, non fornisce una rappresentazione univoca della corrispondente trasformazione di Lorentz infatti è ben noto, e anche evidente, che una rotazione di un angolo giro cambia il segno di ξ e quindi l'effetto di una qualunque trasformazione di Lorentz su ξ è definito a meno di un segno. Questo fatto rispecchia un aspetto matematico assai profondo della teoria dei gruppi di trasformazioni, nel senso che le trasformazioni spinoriali non rappresentano propriamente il gruppo di Lorentz, ma il suo ricoprimento universale, come insegna la teoria dei gruppi topologici a cui rinviamo gli interessati questo aspetto.

Tornando a $L(\Lambda)$, in analogia con la ben nota costruzione della trasformazione dei tetra-vettori (degli eventi), dato che conosciamo l'azione delle

rotazioni, possiamo dedurre quella di una trasformazione qualunque ricavando l'azione di una particolare trasformazione speciale, cioè di quella corrispondente al passaggio fra due sistemi di riferimento con assi paralleli con velocità relativa parallela all'asse z . Più in generale consideriamo una trasformazione che è intercambiabile, cioè commuta, con qualunque rotazione intorno all'asse z e che pertanto corrisponde a una matrice $L(\theta, \beta)$ diagonale con σ_z . Qui abbiamo tenuto in considerazione il fatto che una trasformazione del tipo considerato risulta eguale a una combinazione, e quindi al prodotto matriciale, di una rotazione di un angolo θ intorno all'asse z e una trasformazione di Lorentz propria con velocità βc . Abbiamo dunque la condizione di diagonalità che scriviamo:

$$L(\theta, \beta) = \exp(A(\theta, \beta)/2 + \sigma_z B(\theta, \beta)/2) , \quad (4.4.96)$$

dove A e B sono numeri complessi con parte immaginaria $-2\pi \leq \text{Im}A, \text{Im}B \leq 2\pi$. A questo punto è necessario introdurre qualche ulteriore informazione fisica circa il campo spinoriale. Le informazioni necessarie sono fornite dalla meccanica quantistica che precisa che il bilineare $(\xi^\dagger(x)\xi(x))$, dove $\xi(x)$ è un vettore colonna e $\xi^\dagger(x)$ è il vettore trasposto, cioè riga, e complesso coniugato di $\xi(x)$ e il prodotto matriciale è inteso, come avviene normalmente, righe per colonne, ha significato di una densità di probabilità e pertanto si trasforma come la componente tempo di un quadri-vettore. Faremo uso delle parentesi per isolare i prodotti matriciali che danno un numero, come quello di una matrice riga per una colonna. Dato che le trasformazioni sono lineari le componenti spaziali dello stesso tetravettore devono avere la struttura $(\xi^\dagger \vec{V} \xi)$, dove \vec{V} deve essere un vettore con componenti a valore matriciale per cui $\exp(i\theta \vec{\sigma} \cdot \vec{n}/2) \vec{V} \exp(-i\theta \vec{\sigma} \cdot \vec{n}/2)$ corrisponde al vettore ruotato. Ricordando che una qualunque matrice 2×2 si può scrivere come una combinazione lineare della matrice unità e della matrici di Pauli è immediato verificare che

$$\vec{V} = \zeta \vec{\sigma} . \quad (4.4.97)$$

Questo è un tipico esercizio di meccanica quantistica la cui soluzione consiste nella verifica che le matrici di Pauli si trasformano l'una nell'altra come le componenti di un vettore in base alla regola appena data. Per esempio si ha:

$$\begin{aligned} & \exp(i\theta \sigma_z/2) \sigma_x \exp(-i\theta \sigma_z/2) \\ &= (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2) \sigma_z) \sigma_x (\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) \sigma_z) \\ &= (\cos(\theta/2)^2 - \sin(\theta/2)^2) \sigma_x - 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \sigma_y \\ &= \cos \theta \sigma_x - \sin \theta \sigma_y , \end{aligned} \quad (4.4.98)$$

che coincide con la legge di trasformazione della componente x di un vettore per una rotazione (antioraria) di un angolo θ intorno all'asse z .

Combinando ora Eq.(4.4.96) con Eq.(4.4.97) studiamo la legge di trasformazione di $(\xi^\dagger \xi)$ e la identifichiamo con quella nota delle componenti di un tetravettore le cui componenti spaziali hanno necessariamente la forma $\zeta(\xi^\dagger \vec{\sigma} \xi)$ come mostrato sopra. Abbiamo:

$$\begin{aligned} & (\xi^\dagger \exp(A^*(\theta, \beta)/2 + \sigma_z B^*(\theta, \beta)/2) \exp(A(\theta, \beta)/2 + \sigma_z B(\theta, \beta)/2) \xi) \\ &= \exp(\text{Re}A)(\theta, \beta) [\cosh(\text{Re}B)(\theta, \beta) (\xi^\dagger \xi) + \sinh(\text{Re}B)(\theta, \beta) (\xi^\dagger \sigma_z \xi)] \\ &= \gamma [(\xi^\dagger \xi) + \beta \zeta(\xi^\dagger \sigma_z \xi)] , \end{aligned} \quad (4.4.99)$$

dove abbiamo posto $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned} & \zeta(\xi^\dagger \exp(A^*(\theta, \beta)/2 + \sigma_z B^*(\theta, \beta)/2) \sigma_z \exp(A(\theta, \beta)/2 + \sigma_z B(\theta, \beta)/2) \xi) \\ &= \zeta \exp(\text{Re}A)(\theta, \beta) [\cosh(\text{Re}B)(\theta, \beta) (\xi^\dagger \sigma_z \xi) + \sinh(\text{Re}B)(\theta, \beta) (\xi^\dagger \xi)] \\ &= \gamma \zeta [(\xi^\dagger \sigma_z \xi) + \beta (\xi^\dagger \xi)] , \end{aligned} \quad (4.4.100)$$

da cui ricaviamo il sistema:

$$\begin{aligned} \exp(\text{Re}A)(\theta, \beta) \cosh(\text{Re}B)(\theta, \beta) &= \gamma \\ \exp(\text{Re}A)(\theta, \beta) \sinh(\text{Re}B)(\theta, \beta) &= \zeta \gamma \beta \\ \exp(\text{Re}A)(\theta, \beta) \sinh(\text{Re}B)(\theta, \beta) \zeta &= \gamma \beta , \end{aligned} \quad (4.4.101)$$

quindi:

$$\zeta = \pm 1 , \quad \text{Re}A(\theta, \beta) \equiv 0 , \quad \text{Re}B(\theta, \beta) = \tanh^{-1} \beta \equiv \chi , \quad (4.4.102)$$

Dove χ è la rapidità corrispondente a β . Quindi abbiamo due possibili soluzioni:

$$L(\theta, \beta) = \exp(i \text{Im}A(\theta, \beta)/2 + \sigma_z (i \text{Im}B(\theta, \beta) \pm \chi)/2) . \quad (4.4.103)$$

Notiamo che il fattore $\exp(i \text{Im}A(\theta, \beta)/2)$ è un fattore di fase che, data la corrispondenza fra il campo spinoriale e una funzione d'onda, non ha significato fisico se non in associazione con una trasformazione di gauge in elettrodinamica, e quindi può essere omissso. Per determinare $\text{Im}B(\theta, \beta)$ consideriamo l'azione di $L(\theta, \beta)$ su una componente trasversale del tetravettore, per esempio:

$$\zeta(\xi^\dagger \exp((\pm \chi - i \text{Im}B(\theta, \beta))\sigma_z/2) \sigma_x \exp((\pm \chi + i \text{Im}B(\theta, \beta))\sigma_z/2) \xi)$$

$$\begin{aligned}
&= \zeta \left(\xi^\dagger [\cosh(\chi/2) + \cos(\text{Im}B(\theta, \beta)/2) + (\sinh(\chi/2) - i \sin(\text{Im}B(\theta, \beta)/2))\sigma_z] \right. \\
&\quad \left. \sigma_x [\cosh(\chi/2) + \cos(\text{Im}B(\theta, \beta)/2) + (\sinh(\chi/2) + i \sin(\text{Im}B(\theta, \beta)/2))\sigma_z] \xi \right) \\
&= \zeta \left([\cos^2(\text{Im}B(\theta, \beta)/2) - \sin^2(\text{Im}B(\theta, \beta)/2)](\xi^\dagger \sigma_x \xi) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin(\text{Im}B(\theta, \beta)/2) \cos(\text{Im}B(\theta, \beta)/2) (\xi^\dagger \sigma_y \xi) \right) \\
&= \zeta [\cos \theta (\xi^\dagger \sigma_x \xi) - \sin \theta (\xi^\dagger \sigma_y \xi)] , \tag{4.4.104}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le ben note proprietà algebriche delle matrici di Pauli. Possiamo quindi concludere che $\text{Im}B(\theta, \beta) = -\theta$ e quindi

$$L(\theta, \beta) = \exp(\sigma_z(\pm\chi - i\theta)/2) . \tag{4.4.105}$$

Come è già stato fatto per le trasformazioni di Lorentz dalla conoscenza dell'azione delle rotazioni e di quella di una trasformazione di Lorentz propria con velocità βc possiamo dedurre l'azione di una trasformazione generale che corrisponde alla matrice

$$L_\pm(\Lambda) = \exp(\vec{\sigma} \cdot (\pm\vec{\chi} - i\vec{\theta})/2) . \tag{4.4.106}$$

Questa trasformazione dipende da 6 parametri come previsto: le componenti di χ e quelle di θ con $|\theta| \leq 2\pi$.

Abbiamo dunque trovato due tipi distinti di campi spinoriali relativistici che si distinguono per il segno davanti al vettore rapidità. Essi vengono chiamati rispettivamente destrorsi (segno +) e sinistrorsi (segno -) vengono normalmente distinti con un indice, rispettivamente sono indicati come ξ_R o ξ_L . La distinzione è fisicamente rilevante perché i vettori di rotazione θ e quelli di rapidità hanno proprietà di trasformazione diverse sotto riflessione degli assi Cartesiani, riflessioni di *parità*. La rapidità, come anche la velocità, cambia segno per riflessione (è un vettore polare) invece il vettore di rotazione non cambia (è un vettore assiale). Questo vuol dire che una riflessione di parità trasforma ξ_R in ξ_L o viceversa, a meno di una fase:

$$P : \xi_R(x) \rightarrow \xi_L(x_P) , \tag{4.4.107}$$

dove per il tetravettore $x = (x^0, \vec{x})$ abbiamo posto $x_P = (x^0, -\vec{x})$. Quindi i campi associati con un sistema fisico invariante per riflessioni di parità devono formare coppie $\xi_R - \xi_L$; anche per questo è opportuno trattare i due campi spinoriali sullo stesso piano confrontandone le proprietà.

In primo luogo, dato che la legge di trasformazione è già stata data in Eq.(4.4.106) cioè:

$$\xi'_R(x) = \exp(\vec{\sigma} \cdot (\vec{\chi}_\Lambda - i\vec{\theta}_\Lambda)/2) \xi_R(\Lambda^{-1}x) , \quad \xi'_L(x) = \exp(\vec{\sigma} \cdot (-\vec{\chi}_\Lambda - i\vec{\theta}_\Lambda)/2) \xi_L(\Lambda^{-1}x) , \quad (4.4.108)$$

osserviamo che abbiamo già individuato le forme bilineari che si trasformano come campi tetravettoriali cioè precisamente, introdotto il tetravettore σ con componenti $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$:

$$\sigma^0 = I \quad , \quad \sigma^1 = \sigma_x \quad , \quad \sigma^2 = \sigma_y \quad , \quad \sigma^3 = \sigma_z \quad , \quad (4.4.109)$$

dove I è la matrice identica, e il tetravettore $\bar{\sigma}$ con componenti $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\vec{\sigma})$:

$$\bar{\sigma}^0 = I \quad , \quad \bar{\sigma}^1 = -\sigma_x \quad , \quad \bar{\sigma}^2 = -\sigma_y \quad , \quad \bar{\sigma}^3 = -\sigma_z \quad , \quad (4.4.110)$$

abbiamo le proprietà di trasformazione:

$$(\xi'_R \sigma^\mu \xi_R)'(x) = \Lambda^\mu_\nu (\xi^\dagger_R \sigma^\nu \xi_R)(\Lambda^{-1}x) \quad , \quad (\xi'_L \bar{\sigma}^\mu \xi_L)'(x) = \Lambda^\mu_\nu (\xi^\dagger_L \bar{\sigma}^\nu \xi_L)(\Lambda^{-1}x) . \quad (4.4.111)$$

Inoltre per entrambi i tipi di spinore, assunta la proprietà di trasformazione Eq.(4.4.106) e quindi⁷ la condizione $\det L_\pm = 1$, vale la proprietà

$$L_\pm^T \sigma_y L_\pm = \sigma_y \quad ,$$

dove l'apice T indica l'usuale trasposizione matriciale. Per semplicità di notazione si preferisce usare invece di σ_y la matrice 2x2 antisimmetrica, cioè

$$\epsilon = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.112)$$

e quindi usare la relazione:

$$L^T \epsilon L \equiv \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \quad (4.4.113)$$

dato che $ad - bc = \det L = 1$. Abbiamo dunque che dati due spinori dello stesso tipo, entrambi R o entrambi L , si ha la possibilità di formare un campo scalare tramite i bilineari $(\eta_{R/L}^T \epsilon \xi_{R/L})$ cioè

$$(\eta_{R/L}^T \epsilon \xi_{R/L})'(x) = (\eta_{R/L}^T \epsilon \xi_{R/L})(\Lambda^{-1}x) . \quad (4.4.114)$$

⁷Infatti per una matrice quadrata qualunque è facile mostrare, e dovrebbe essere noto, che il logaritmo del determinante coincide con la traccia del logaritmo della matrice: $\ln(\det M) = Tr(\ln M)$.

Un'altra proprietà notevole di ϵ è espressa dall'identità:

$$\epsilon \vec{\sigma} = -\vec{\sigma}^T \epsilon == -\vec{\sigma}^* \epsilon , \quad (4.4.115)$$

che è diretta conseguenza della simmetria di σ_x e σ_z e della proprietà di anti-commutazione delle matrici di Pauli. Si noti che $\epsilon^T \epsilon = I$. Dalla Eq.(4.4.115) si ricava facilmente una relazione antilineare fra gli spinori dei due diversi tipi, infatti si ha:

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi'_R)^*(x) &= \epsilon \exp(\vec{\sigma}^* \cdot (i\vec{\theta}_\Lambda + \vec{\chi}_\Lambda)/2) \xi_R^*(\Lambda^{-1}x) \\ &= \epsilon \exp(\vec{\sigma}^T \cdot (i\vec{\theta}_\Lambda + \vec{\chi}_\Lambda)/2) \xi_R^*(\Lambda^{-1}x) \\ &= \exp(\epsilon \vec{\sigma}^T \epsilon^T \cdot (i\vec{\theta}_\Lambda + \vec{\chi}_\Lambda)/2) \epsilon \xi_R^*(\Lambda^{-1}x) = \exp(\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\theta}_\Lambda - \vec{\chi}_\Lambda)/2) \epsilon \xi_R^*(\Lambda^{-1}x) . \end{aligned}$$

Quindi il campo $\epsilon \xi_{R/L}^*$ si trasforma come un campo $\eta_{L/R}$ di tipo opposto.

4.4.1 La quantizzazione dei campi spinoriali

Volendo costruire una teoria quantistica dei campi spinoriali è opportuno cominciare dalla ricerca delle densità Lagrangiane partendo dai casi più semplici. Avendo due scelte alternative sviluppiamo uno dei due casi, quello del campo ξ_R , e poi discutiamo le varianti indotte dall'altro caso.

La nostra costruzione del campo è stata centrata sull'esistenza del campo tetravettoriale di componenti $(\xi_R^\dagger \sigma^\mu \xi_R)$, siccome la derivata parziale spazio-temporale di un campo scalare moltiplicata per la matrice metrica g si trasforma come un altro campo tetravettoriale, è evidente che è possibile costruire la più semplice densità Lagrangiana scalare combinando i due tetravettori, cioè:

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)} = \frac{i}{2} (\xi_R^\dagger \sigma^\mu \overset{\circ}{\partial}_\mu \xi_R) \sim i (\xi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi_R) , \quad (4.4.116)$$

dove abbiamo introdotto la notazione $f \overset{\circ}{\partial}_\mu g = f \partial_\mu g - (\partial_\mu f)g$ e il fattore i rende la densità Lagrangiana Hermitiana dopo quantizzazione. Evidentemente, dato che la densità Lagrangiana è definita a meno di un termine derita totale spazio-temporale è possibile, perdendo però l'Hermiticità a prima vista, sostituire la derivata $\overset{\circ}{\partial}$ con l'ordinaria derivata parziale a destra ∂ . È evidente che la nostra $\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(R)}$ è la più semplice possibile dato che per invarianza sotto rotazioni essa deve dipendere da un numero pari di campi spinoriali e deve contenere almeno una deriavata spazio-temporale, senza la quale non c'è propagazione e quindi dinamica.

Prima di passare oltre è importante notare che i campi spinoriali hanno la dimensione di $\sqrt{E/L^2}$, mentre i campi bosonici hanno quella di $\sqrt{E/L}$.

Tenendo conto di quanto esposto nel paragrafo dedicato al campo scalare relativistico 3.5.3 possiamo dedurre l'equazione del campo ξ_R :

$$\sigma_\mu \partial^\mu \xi_R = \dot{\xi}_R/c + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \xi_R = 0 . \quad (4.4.117)$$

Nel volume finito Ω questa equazione ha per soluzione onde piane con frequenza negativa:

$$\xi_R^{(-)} = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} w_{\vec{p}}^{(+)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - |\vec{k}|ct)} , \quad (4.4.118)$$

e con frequenza positiva

$$\xi_R^{(+)} = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} w_{\vec{p}}^{(-)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + |\vec{k}|ct)} \quad (4.4.119)$$

dove $w_{\vec{k}}^{(\lambda)}$ con $\lambda = \pm$ sono spinori normalizzati ($(w^{(\lambda)*} w^{(\lambda)}) = 1$) che soddisfano le equazioni

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{k} w_{\vec{k}}^{(\lambda)} = \lambda |\vec{k}| w_{\vec{k}}^{(\lambda)} . \quad (4.4.120)$$

Dati gli angoli polari $0 \leq \theta \leq \pi$ e $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ di \vec{k} si usa scegliere

$$\begin{aligned} w_{\vec{k}}^{(+)} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} , \\ w_{\vec{k}}^{(-)} &= \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (4.4.121)$$

Evidentemente $w_{\vec{k}}^{(\lambda)}$ sono periodici in φ con periodo 4π e quindi assumono più valori nell'angolo giro. Questo è conseguenza diretta del fatto che il gruppo di simmetria delle teorie spinoriali non è il gruppo di Lorentz ma il suo gruppo di ricoprimento universale. Con la nostra scelta, passando da \vec{k} a $-\vec{k}$, cioè da θ a $\pi - \theta$ e da φ a $\varphi - \pi \text{ sign}(\varphi)$,⁸ si ha

$$w_{-\vec{k}}^{(\lambda)} = -i \text{sign}(\varphi) w_{\vec{k}}^{(-\lambda)} . \quad (4.4.122)$$

Inoltre si ha

$$w_{\vec{k}}^{(\lambda)} = \lambda \epsilon (w_{\vec{k}}^{(-\lambda)})^* . \quad (4.4.123)$$

⁸ $\text{sign}(x) = x/|x|$

Per quantizzare la teoria spinoriale corrispondente alla Lagrangiana (4.4.116) seguiamo la procedura usata precedentemente per il campo scalare. Per questo calcoliamo la densità di energia usando (3.5.188) e otteniamo:

$$U = i (\xi_R^\dagger \dot{\xi}_R)/c - i (\xi_R^\dagger \vec{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi_R) = -i (\xi_R^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \xi_R) \quad (4.4.124)$$

Limitandoci sempre al volume finito Ω ricaviamo l'espressione dell'energia:

$$E = -i \int d\vec{r} (\xi_R^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \xi_R) . \quad (4.4.125)$$

Il passo successivo consiste nella riduzione ai modi normali tramite trasformata di Fourier del campo:

$$\xi_R(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} \sum_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k}}(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} , \quad (4.4.126)$$

dove i coefficienti $\gamma_{\vec{k}}(t)$ hanno valore spinoriale a due componenti complesse; le loro parti reali e immaginarie sono le nostre variabili dinamiche in termini delle quali costruiamo l'Hamiltoniana:

$$H = \hbar c \sum_{\vec{k}} (\gamma_{\vec{k}}^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \gamma_{\vec{k}}) . \quad (4.4.127)$$

Evidentemente la riduzione ai modi normali non è ancora completa perché in (4.4.127) l'Hamiltoniana non appare come la somma di termini quadratici. Per questo è necessario sviluppare lo spinore $\gamma_{\vec{k}}$ in autovettori della matrice $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}$ cioè in termini degli spinori $w_{\vec{k}}^{(\pm)}$ definiti in (4.4.120):

$$\gamma_{\vec{k}} = A_{\vec{k},+} w_{\vec{k}}^{(+)} + A_{\vec{k},-} w_{\vec{k}}^{(-)} , \quad (4.4.128)$$

in cui le variabili dinamiche componenti di $\gamma_{\vec{k}}$ sono sostituiti dalle grandezze complesse $A_{\vec{k},\pm}$. Considerando la (4.4.119) e la (4.4.118) possiamo esplicitare la dipendenza dal tempo:

$$\gamma_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k},+} w_{\vec{k}}^{(+)} e^{-i|\vec{p}|ct} + A_{\vec{k},-} w_{\vec{k}}^{(-)} e^{i|\vec{p}|ct} , \quad (4.4.129)$$

da cui appare che $A_{\vec{k},-}$ evolve nel tempo come un operatore di creazione, piuttosto che di distruzione. Infatti l'Hamiltoniana si scrive:

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar c |\vec{k}| \left[A_{\vec{k},+}^\dagger A_{\vec{k},+} - A_{\vec{k},-}^\dagger A_{\vec{k},-} \right] , \quad (4.4.130)$$

da cui risulta evidente l'avvenuta diagonalizzazione di $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}$, ma anche che ai modi con elicità negativa ($\lambda = -$) corrisponde energia negativa.

Evidentemente questi modi con energia negativa sarebbero paradossali se le particelle spinoriali fossero bosoni, invece (in 4.2.2) abbiamo già affrontato e risolto un problema analogo nel caso dei fermioni. Infatti ricordiamo che, tentando di semplificare la descrizione dello stato fondamentale di un gas di fermioni non interagenti abbiamo spostato la scala delle energie ponendone l'origine all'energia di Fermi ϵ_F , questo ha generato un operatore Hamiltoniano analogo a quello in (4.4.130) dato che gli stati occupati hanno energia inferiore a quella di Fermi. Evidentemente in questo modo abbiamo sottratto all'energia del gas il prodotto di ϵ_F per il numero delle particelle. Nello stesso tempo però abbiamo effettuato la trasformazione canonica Eq.(4.2.58), Eq.(4.2.60) consistente nell'interpretazione degli operatori di distruzione di particelle su stati con energia inferiore al livello di Fermi (cioè stati interni al mare di Fermi) come operatori di creazione di buche, questo ha portato all'Hamiltoniano Eq.(4.2.65) in cui, separata l'energia dello stato fondamentale appaiono energie di eccitazione positive per tutti i modi.

Questo mostra come il problema degli stati con energia negativa si possa risolvere assumendo la statistica di Fermi-Dirac e fornisce in questo modo una chiara indicazione della *connessione spin-statistica*. In poche parole il sistema è a priori instabile perché, essendoci livelli di particelle con energia comunque bassa, sarebbe possibile estrarre una quantità infinita di energia da una sola particella spostandola dallo stato iniziale verso stati con energia sempre più bassa. Questo non sarebbe possibile se tutti gli stati con energia negativa fossero occupati e le particelle fossero fermioni.

In conclusione identifichiamo lo stato fondamentale del sistema relativistico, che necessariamente deve avere energia e impulso zero, con lo stato del gas con energia di Fermi $\epsilon_F = 0$, cioè appunto in cui tutti gli stati con energia negativa sono occupati. L'impulso totale è nullo per ragioni di simmetria dato che lo stato è isotropo.

Eseguiamo poi la trasformazione canonica Eq.(4.2.58), Eq.(4.2.60) che ora si scrive:

$$\frac{1 + \lambda}{2} a_{\vec{k}} + \frac{1 - \lambda}{2} b_{\vec{k}} = \frac{1 + \lambda}{2} A_{\vec{k}, \lambda} + \frac{\lambda - 1}{2} A_{-\vec{k}, \lambda}^\dagger, \quad (4.4.131)$$

dove va notato che, trasformando operatori di creazione in distruzione, non è cambiato il segno di λ perché λ corrisponde a elicità e non a spin; cambiando insieme il segno dello spin e del numero d'onda quello dell'elicità non cambia.

Abbiamo così introdotto quelle che in un conduttore sarebbero state chiamate buche, ma che in teoria relativistica si chiamano *antiparticelle*. Queste, peraltro, come nella teoria non-relativistica portano con segno opposto qualunque tipo di carica sia portata dalle particelle. Inoltre esse portano elicità opposta a quella delle particelle.

La trasformazione canonica conferma l'interpretazione degli operatori $A_{\vec{k},-}$ come operatori di creazione che nasce, come sopra osservato, dalle equazioni del campo.

Tenendo conto delle relazioni in Eq. (4.4.122) e (4.4.123) il campo fermionico stesso si scrive in volume finito come:

$$\xi_R(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})} [w_{\vec{p}}^{(+)} a_{\vec{p}} e^{-i|\vec{p}|ct} + \epsilon(w_{-\vec{p}}^{(-)})^* b_{-\vec{p}}^\dagger e^{i|\vec{p}|ct}] , \quad (4.4.132)$$

e nel limite di volume infinito:

$$\xi_R(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \int d\vec{p} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})} [w_{\vec{p}}^{(+)} a(\vec{p}) e^{-i|\vec{p}|ct} + \epsilon(w_{-\vec{p}}^{(-)})^* b^\dagger(-\vec{p}) e^{i|\vec{p}|ct}] . \quad (4.4.133)$$

L'elicità delle particelle spinoriali può essere analizzata nello stesso modo della polarizzazione e elicità degli stati fononici in paragrafo (3.5.1) (vedi Eqq.(3.5.164 - 3.5.170).)

Consideriamo dunque l'operatore unitario di rotazione di un angolo θ intorno all'asse di direzione \vec{n} su un sistema quantistico generico dato in Eq.(2.0.10). La Eq. (2.0.11) e nel caso specifico del nostro campo, l'Eq.(4.4.90) danno:

$$e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta/\hbar} \xi_R(\vec{r}, 0) e^{-i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta/\hbar} = e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\theta/2} \xi_R(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}, 0) , \quad (4.4.134)$$

dove \mathcal{R} è la matrice di rotazione delle coordinate. Passando alla trasformata di Fourier del campo: $\tilde{\xi}_R(\vec{k}, 0) \equiv \int d\vec{r} \xi_R(\vec{r}, 0) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})/(2\pi)^{3/2}$ abbiamo:

$$e^{i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta/\hbar} \tilde{\xi}_R(\vec{k}, 0) e^{-i\vec{J}\cdot\vec{n}\theta/\hbar} = e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\theta/2} \tilde{\xi}_R(\mathcal{R}^{-1}\vec{k}, 0) , \quad (4.4.135)$$

e scegliendo $\vec{n} = \vec{k}/k$ troviamo:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} \frac{\xi_R(\vec{k}, 0)}{\sqrt{\hbar c}} e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} &= e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} [w_{\vec{k}}^{(+)} a(\vec{k}) - \epsilon(w_{\vec{k}}^{(+)*})^* b^\dagger(-\vec{k})] e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} \\ &= w_{\vec{k}}^{(+)} e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} a(\vec{k}) e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} - \epsilon(w_{\vec{k}}^{(+)*})^* e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} b^\dagger(-\vec{k}) e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} \\ &= \frac{e^{-i\sigma_z\theta/2}}{\sqrt{\hbar c}} \xi_R(\vec{k}, 0) = e^{-i\theta/2} w_{\vec{k}}^{(+)} a(\vec{k}) - e^{i\theta/2} \epsilon(w_{\vec{p}}^{(+)*})^* b^\dagger(-\vec{k}) . \end{aligned} \quad (4.4.136)$$

Quindi troviamo le equazioni:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} a(\vec{k}) e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} &= e^{-i\theta/2} a(\vec{k}) \\ e^{i\vec{J}_z\theta/\hbar} b^\dagger(-\vec{k}) e^{-i\vec{J}_z\theta/\hbar} &= e^{i\theta/2} b^\dagger(-\vec{k}) , \end{aligned} \quad (4.4.137)$$

che sono del tutto analoghe alle Eq.(3.5.170) e indicano elicità $+1/2$ per la particella e $-1/2$ per l'anti-particella.

Una teoria perfettamente analoga a quella fin qui descritta si costruisce partendo dal campo ξ_L . Questa teoria differisce da quella ora esposta per il segno dell'elicità, nel senso che le particelle associate a ξ_L hanno elicità negativa e le antiparticelle positiva. Osserviamo comunque che la densità Lagrangiana è

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}}^{(L)} = \frac{i}{2} (\xi_L^\dagger \vec{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi_L) , \quad (4.4.138)$$

e quindi l'energia è:

$$E = i \int d\vec{r} (\xi_L^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \xi_L) . \quad (4.4.139)$$

Tutto il resto segue di conseguenza con lo scambio del segno dell'elicità che si ottiene sostituendo gli operatori di distruzione delle teoria R , $a_R(\vec{p})$ e $b_R(\vec{p})$ con $a_L(\vec{p})$ e $b_L(\vec{p})$ nonché $w_k^{(\lambda)}$ con $-\lambda w_k^{(-\lambda)}$.

Riconosciuto che i campi spinoriali vanno quantizzati secondo la statistica di Fermi-Dirac sorge la possibilità di aggiungere nuovo termine bilineare alle densità Lagrangiane Eq.(4.4.116) e Eq.(4.4.138) si tratta di un termine del tipo:

$$\mathcal{L}_M \equiv \frac{i}{2} \mu ((\xi^T \epsilon \xi) + (\xi^\dagger \epsilon \xi^*)) = -\frac{\mu}{2} ((\xi^T \sigma_y \xi) + (\xi^\dagger \sigma_y \xi^*)) , \quad (4.4.140)$$

che non è nullo se il campo spinoriale è considerato anticommutante. Si noti che il parametro μ , che ha dimensioni del reciproco di una lunghezza come quello che appare in Eq.(3.5.190), è stato scelto reale, a priori una scelta complessa sembrerebbe più generale, ma in realtà la fase di μ può essere cambiata a piacere compensando il cambiamento con una trasformazione di fase del campo. Si noti ancora che non si è specificato il tipo di campo spinoriale. Questo è dovuto al fatto che, se scriviamo, per esempio, \mathcal{L}_M in termini di un campo di tipo R e sostituiamo:

$$\xi_R = \epsilon \chi_L^* \quad (4.4.141)$$

troviamo la stessa espressione scritta in termini di χ_L . A questo punto considerando la densità Lagrangiana risultante dalla somma di Eq.(4.4.116) e di Eq.(4.4.140) abbiamo:

$$\mathcal{L}_{\text{Major.}} = \frac{i}{2} \left[(\xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu^* \xi) + \mu((\xi^T \epsilon \xi) + (\xi^\dagger \epsilon \xi^*)) \right] . \quad (4.4.142)$$

La corrispondente equazione del campo è:

$$\sigma_\mu \partial^\mu \xi + \mu \xi^* = 0 . \quad (4.4.143)$$

Il campo ξ è detto di Majorana, dal nome del fisico che ne propose la teoria. Da questa equazione è possibile mostrare che le particelle di Majorana hanno massa pari a $\hbar\mu/c$ e sono necessariamente neutre perché l'equazione stessa è incompatibile con la trasformazione di fase del campo corrispondente in meccanica quantistica a una trasformazione di gauge, come sarà discusso nel paragrafo 5.0.2.

4.4.2 La teoria spinoriale di Dirac

⁹ Allo scopo di costruire una teoria relativistica dell'elettrone e costruire quindi *l'elettrodinamica quantistica* (QED) Dirac propose una teoria invariante per trasformazioni di fase del campo corrispondenti a trasformazioni di gauge e anche invariante per trasformazioni di parità. Questa teoria deve necessariamente essere costruita in termini di una coppia di spinori di tipo opposto cioè in termini della coppia ξ_R , ξ_L . In presenza di due campi spinoriali ξ_R e ξ_L è possibile introdurre un termine analogo a \mathcal{L}_M in Eq. (4.4.140) ma compatibile con una trasformazione di fase (gauge) dei campi, tale termine si ottiene osservando, come sopra, che, dato ξ_L il campo $\epsilon \xi_L^*$ si trasforma come ξ_R , quindi $\xi_L^\dagger \xi_R$ si trasforma come un campo scalare e $\xi_L^\dagger \xi_R + \xi_R^\dagger \xi_L$ come un campo scalare Hermitiano. Pertanto, la densità Lagrangiana più generale invariante per trasformazioni di fase e di parità si costruisce combinando i termini in Eq.(4.4.116), Eq.(4.4.138) e quello appena descritto, si ha così

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \frac{i}{2} \left((\xi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu^* \xi_R) + (\xi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu^* \xi_L) \right) - k_c \left((\xi_R^\dagger \xi_L) + (\xi_L^\dagger \xi_R) \right) . \quad (4.4.144)$$

Praticamente in tutti i testi si utilizza una notazione che semplifica notevolmente la scrittura della teoria di Dirac. I campi spinoriali sono raggruppati

⁹Si veda anche [4] (Cap. 11) [9] (§2.2.1), [7] (§3.2)

in tetra-spinori colonna:

$$\psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi_R(x) \\ \xi_L(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi_{R1}(x) \\ \xi_{R2}(x) \\ \xi_{L1}(x) \\ \xi_{L2}(x) \end{pmatrix}. \quad (4.4.145)$$

Si introducono le matrici γ che sono 4x4 rappresentate come matrici 2x2 con elementi con valore matriciale 2x2:

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.4.146)$$

e si definisce la matrice riga:

$$\bar{\psi}(x) \equiv (\xi_L^\dagger(x) \quad \xi_R^\dagger(x)) = \psi^\dagger \gamma_0. \quad (4.4.147)$$

È evidente il ruolo di γ^5 , che distingue gli spinori destrorsi da quelli sinistrorsi. Le matrici che proiettano il tetra-spinore su queste componenti sono infatti

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} \xi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_L \end{pmatrix}. \quad (4.4.148)$$

Inoltre la matrice γ^0

Molti calcoli sono semplificati usando le proprietà algebriche delle matrici γ che, scegliendo la metrica con $g^{0,0} = 1$, si scrivono:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2I g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \\ \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \equiv -i \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{24} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (4.4.149)$$

Inoltre dall'Eq.(4.4.107) possiamo asserire che la matrice γ^0 corrisponde a una riflessione di parità P nel senso che:

$$P : \psi(x) \rightarrow \psi_P(x) = U_P^\dagger \psi(x) U_P = i\gamma^0 \psi(x_P). \quad (4.4.150)$$

Nella pratica molto spesso si usa cambiare la rappresentazione delle matrici γ e contestualmente quella dei tetra-spinori tramite una matrice unitaria U sostituendo le γ con $U\gamma U^\dagger$ e i tetra-spinori ψ con $U\psi$. La scelta di U dipende dal regime dinamico in cui ci si pone. Per esempio per calcoli non relativistici è più opportuna la scelta corrispondente a

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix},$$

cioè:

$$U\gamma^0U^\dagger = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad U\gamma^5U^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad U\vec{\gamma}U^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.151)$$

che scambia la matrice corrispondente a γ^5 con quella corrispondente a γ^0 che quindi risulta diagonale e cambia segno alle componenti spaziali di γ^μ .

In termini di queste matrici, la densità Lagrangiana di Dirac assume, a meno di una derivata totale, la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - k_c\bar{\psi}\psi. \quad (4.4.152)$$

La teoria va completata introducendo eventuali termini di interazione. La estensione più semplice è quella in presenza di un campo elettromagnetico esterno corrispondente a un potenziale vettore A^μ . Questa si fa seguendo il criterio di invarianza per trasformazioni di gauge come nel caso delle particelle cariche non relativistiche che saranno trattate in paragrafo 5.0.2 in cui si è stabilito che le derivate spazio-temporali ∂^μ nell'equazione delle onde, o dei campi, vanno sostituite con $\partial^\mu - ie/\hbar A^\mu$, nel qual caso si ottiene la densità Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu/\hbar)\psi - k_c\bar{\psi}\psi. \quad (4.4.153)$$

Altre interazioni sono inseribili nella teoria di Dirac introducendo termini costruiti tramite prodotti di termini bilineari nel campo di Dirac e altri campi o termini bilineari, per questo è utile conoscere una base dei possibili termini bilineari classificati per proprietà di trasformazione sotto trasformazioni di Lorentz e di parità. Il numero degli elementi di questa base è necessariamente 4×4 cioè 16. Tra questi 5 sono le componenti del tetravettore polare $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e lo scalare $\bar{\psi}\psi$, questi, espressi in termini delle componenti bi-spinoriali, appaiono come la somma di coppie di termini che si trasformano l'uno nell'altro per parità, tipicamente i tetravettori $\xi_R^\dagger\sigma^\mu\xi_R$ e $\xi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi_L$. Ovviamente si hanno anche le differenze fra gli stessi termini che formano un altro tetravettore e un altro scalare con parità opposta. In termini delle γ sono $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ e lo scalare $i\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Restano sei bilineari che si identificano con le componenti del tensore anti-simetrico $i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi$. In conclusione abbiamo i bilineari:

$$\mathcal{S} = \bar{\psi}\psi \quad \mathcal{P} = i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad \mathcal{V}^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \mathcal{A}^\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad \mathcal{T}^{\mu,\nu} = i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi. \quad (4.4.154)$$

L'interazione di Yukawa fra il campo del nucleone ψ e il mesone pseudoscalare π è $g_Y\mathcal{P}\pi$ mentre termini del tipo $G\mathcal{V}_\mu\mathcal{A}^\mu$, che violano la simmetria di parità appaiono nell'interazione debole.

4.4.3 Quantizzazione della teoria di Dirac nel caso libero

¹⁰ Considerando la Lagrangiana libera (4.4.152):

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - k_c \bar{\psi} \psi = i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi - k_c \psi^\dagger \beta \psi . \quad (4.4.155)$$

Nell'ultima equazione abbiamo introdotto le nuove matrici: $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i \equiv \beta \gamma^i$.

Procediamo alla quantizzazione della teoria corrispondente alla (4.4.155) in completa analogia con (4.4.116). La densità di energia corrispondente alla (4.4.155) è:

$$U = -i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + k_c \psi^\dagger \beta \psi . \quad (4.4.156)$$

Decomponendo ψ in serie di Fourier:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} \sum_{\vec{k}} \tilde{\psi}_{\vec{k}}(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} , \quad (4.4.157)$$

si ottiene l'Hamiltoniana:

$$H = \hbar c \sum_{\vec{k}} \tilde{\psi}_{\vec{k}}^\dagger (\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta k_c) \tilde{\psi}_{\vec{k}} \equiv \hbar c \sum_{\vec{k}} \tilde{\psi}_{\vec{k}}^\dagger h \tilde{\psi}_{\vec{k}} . \quad (4.4.158)$$

Per arrivare ai modi normali dobbiamo diagonalizzare la matrice h che nella rappresentazione delle matrici γ data in Eq.(4.4.151) risulta essere:

$$h = \vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta k_c = \begin{pmatrix} k_c & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_c \end{pmatrix} . \quad (4.4.159)$$

Inoltre decomponiamo lo spinore $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \varphi_{\vec{k}} \\ \chi_{\vec{k}} \end{pmatrix} , \quad (4.4.160)$$

ottenendo il sistema agli autovalori:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \chi_{\vec{k}} + k_c \varphi_{\vec{k}} &\equiv \kappa \varphi_{\vec{k}} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \varphi_{\vec{k}} - k_c \chi_{\vec{k}} &\equiv \kappa \chi_{\vec{k}} . \end{aligned} \quad (4.4.161)$$

¹⁰Si veda anche [9] (§2.4.1), [7] (§3.3)

Usando $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 = |\vec{k}|^2$ otteniamo $\kappa^2 = k_c^2 + |\vec{k}|^2$ e quindi:

$$\kappa = \pm \sqrt{k_c^2 + |\vec{k}|^2} \equiv \pm \omega_{\vec{k}}/c . \quad (4.4.162)$$

Si noti che \vec{k} è un numero d'onda e quindi $\omega_{\vec{k}}/c$ e κ sono reciproci di lunghezze come anche k_c che è il numero d'onda Compton, come già notato nel capitolo (3.5.2) . Nei libri di particelle si usano unità di misura quanto-relativistiche in cui $\hbar = c = 1$, in questi sistemi un reciproco di lunghezza ha le dimensioni di un'energia o di una massa, per questa ragione k_c viene normalmente indicato con $m = \hbar k_c/c$ e $\omega_{\vec{k}}/c$ e κ hanno significato di energia.

Nuovamente, tenendo conto delle Eq. (4.4.121) , (4.4.122) e (4.4.123) troviamo autovalori di segno opposto corrispondenti agli autovettori:

$$u_{\vec{k},\lambda}^{(+)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega(k)/c + k_c} w_{\vec{k}}^{(\lambda)} \\ \lambda \sqrt{\omega(k)/c - k_c} w_{\vec{k}}^{(\lambda)} \end{pmatrix} \quad u_{\vec{k},\lambda}^{(-)} = \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{\omega(k)/c - k_c} \epsilon(w_{-\vec{k}}^{(\lambda)})^* \\ \sqrt{\omega(k)/c + k_c} \epsilon(w_{-\vec{k}}^{(\lambda)})^* \end{pmatrix} , \quad (4.4.163)$$

in cui si è scelta la normalizzazione covariante:

$$(u_{\vec{k},\lambda}^{(\tau)\dagger} u_{\vec{k},\lambda'}^{(\tau')}) = 2\omega(k)/c \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\tau,\tau'} , \quad (4.4.164)$$

tenendo conto che $\psi^\dagger \psi$ è la quarta componente di un tetra-vettore. Si vede anche facilmente che:

$$(\bar{u}_{\vec{k},\lambda}^{(\pm)} u_{\vec{k},\lambda'}^{(\pm)}) = \pm 2k_c \delta_{\lambda,\lambda'} . \quad (4.4.165)$$

Volendo esprimere le funzioni d'onda u in termini dell'impulso $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ della massa m e dell'energia $E(p) = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ abbiamo:

$$u_{\vec{p},\lambda}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \begin{pmatrix} \sqrt{E(p)/c + mc} w_{\vec{p}}^{(\lambda)} \\ \lambda \sqrt{E(p)/c - mc} w_{\vec{p}}^{(\lambda)} \end{pmatrix} , \quad u_{\vec{p},\lambda}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \begin{pmatrix} -\lambda \sqrt{E(p)/c - mc} \epsilon(w_{-\vec{p}}^{(\lambda)})^* \\ \sqrt{E(p)/c + mc} \epsilon(w_{-\vec{p}}^{(\lambda)})^* \end{pmatrix} , \quad (4.4.166)$$

dove $w_{\vec{p}}^{(\lambda)} = w_{\frac{\hbar \vec{k}}{\hbar}}^{(\lambda)}$. La normalizzazione è: $\bar{u}_{\vec{p},\lambda}^{(\pm)} u_{\vec{p},\lambda'}^{(\pm)} = \pm \delta_{\lambda,\lambda'} 2mc/\hbar$.

Siamo ora in condizione di individuare i modi normali con la decomposizione:

$$\tilde{\psi}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{c}{2\omega(k)}} \sum_{\lambda} [A_{+,\vec{k},\lambda} u_{\vec{k},\lambda}^{(+)} + A_{-,\vec{k},\lambda} u_{\vec{k},\lambda}^{(-)}] , \quad (4.4.167)$$

ottenendo l'Hamiltoniana:

$$H = \hbar \sum_{\vec{k},\lambda} \omega(k) [A_{+,\vec{k},\lambda}^\dagger A_{+,\vec{k},\lambda} - A_{-,\vec{k},\lambda}^\dagger A_{-,\vec{k},\lambda}] . \quad (4.4.168)$$

Da questo punto l'analisi segue in stretta analogia quella della teoria di Weyl portando alla necessità della statistica di Fermi e delle anti-particelle (nel caso degli elettroni si tratta dei positroni o anti-particelle) identificando gli operatori $a_{\vec{k},\lambda}$ corrispondenti a $A_{+,\vec{k},\lambda}$ con i distruttori degli elettroni e $b_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ corrispondenti a $A_{-,-\vec{k},\lambda}$ con i creatori dei positroni.

In altri termini si effettua la trasformazione canonica:

$$A_{+,\vec{k},\lambda} = a_{\vec{k},\lambda} \quad , \quad A_{-,-\vec{k},\lambda} = b_{-\vec{k},\lambda}^\dagger . \quad (4.4.169)$$

Si ha quindi la decomposizione del campo:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) = & c \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{\omega(\vec{k})}} \left(a_{\vec{k},\lambda} u(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} \right. \\ & \left. + b_{\vec{k},\lambda}^\dagger v(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} \right) , \end{aligned} \quad (4.4.170)$$

dove si è posto:

$$u(\vec{k}, \lambda) = u_{\vec{k},\lambda}^{(+)} \quad , \quad v(\vec{k}, \lambda) = u_{-\vec{k},\lambda}^{(-)} . \quad (4.4.171)$$

Si noti la struttura analoga a quella del campo scalare dato in Eq.(3.5.198).

Volendo esprimere il campo in funzione di impulso ed energia si ha:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) = & \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(a_{\vec{p},\lambda} u(\vec{p}, \lambda) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E(p)t)/\hbar} \right. \\ & \left. + b_{\vec{p},\lambda}^\dagger v(\vec{p}, \lambda) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E(p)t)/\hbar} \right) \\ = & \frac{\sqrt{\hbar c}}{\sqrt{2\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{E(p)}} \left(\left(\begin{array}{c} \sqrt{E(p) + mc^2} \\ \lambda \sqrt{E(p) - mc^2} \end{array} \right) w_{\vec{p}}^{(\lambda)} a_{\vec{p},\lambda} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E(p)t)/\hbar} \right. \\ & \left. + \left(\begin{array}{c} -\lambda \sqrt{E(p) - mc^2} \\ \sqrt{E(p) + mc^2} \end{array} \right) \epsilon(w_{\vec{p}}^{(\lambda)})^* b_{\vec{p},\lambda}^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E(p)t)/\hbar} \right) , \end{aligned} \quad (4.4.172)$$

Si noti che se $m = 0$ il campo $\psi(\vec{r}, t)$ si decompone in due campi auto-spinori di γ^5 e che, nel limite di volume infinito il campo corrispondente all'autovalore 1 corrisponde esattamente a ξ_R se si identifica $a_{\vec{p},+}$ con $a_{\vec{p}}$ in Eq. (4.4.132) e $b_{\vec{p},-}$ con $b_{\vec{p}}$ nella stessa equazione.

In vista di applicazioni a processi relativistici è opportuno ricavare la *matrice densità impolarizzata* che è di frequente impiego nei calcoli espliciti. Si tratta di una matrice 4x4 i cui elementi sono dati da:

$$\rho_{\alpha,\beta}^{(\pm)}(\vec{k}) = \sum_{\lambda} u_{\pm\vec{k},\lambda,\alpha}^{(\pm)} \bar{u}_{\pm\vec{k},\lambda,\beta}^{(\pm)} . \quad (4.4.173)$$

Per calcolarla esplicitamente si utilizzano le relazioni:

$$\sum_{\lambda} w_{\vec{k},i}^{(\lambda)} (w_{\vec{k},j}^{(\lambda)})^* = \delta_{i,j} \quad , \quad \sum_{\lambda} \lambda k w_{\vec{k},i}^{(\lambda)} (w_{\vec{k},j}^{(\lambda)})^* = (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})_{i,j} \quad , \quad (4.4.174)$$

che sono facilmente deducibili dalla definizione delle w data nelle Eq's.(4.4.120) e (4.4.121). Usando le Eq.(4.4.174) si ha:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta}^{(\pm)}(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} (\omega(k)/c \pm k_c)I & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & \pm(k_c \mp \omega(k)/c)I \end{pmatrix} \\ &= (\gamma^0 \omega(k)/c - \vec{\gamma} \cdot \vec{k}) \pm k_c I \equiv \frac{1}{\hbar} (p^\mu \gamma_\mu \pm mc I) \quad , \quad (4.4.175) \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto il tetra-impulso della (anti)-particella p con $p^0 = E(p)/c = \hbar\omega(k)$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Nei calcoli di probabilità di transizione in cui appaiono somme sulle elicità di elementi di matrice in modulo al quadrato in base alla Eq.(4.4.175) appaiono tracce di prodotti di matrici γ (e anche γ^5 che peraltro è eguale a un prodotto di γ come appare in Eq.(4.4.149)). Sono quindi molto utili formule per le tracce di prodotti di queste matrici la più semplice delle quali, quelle per i prodotti di una e due matrici appaiono in Eq.(4.4.149). Dalla stessa equazione si deduce che, a causa delle proprietà di anti-commutazione delle matrici, la traccia del prodotto di un loro numero dispari è sempre nulla. Si possono poi dedurre formule per la traccia di prodotti di numeri pari di matrici come, per esempio:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu,\nu} g^{\rho,\sigma} + g^{\mu,\sigma} g^{\rho,\nu} - g^{\mu,\rho} g^{\nu,\sigma}) \quad . \quad (4.4.176)$$

Un'altra formula utile per le applicazioni al limite non relativistico è quella che si ottiene limitando in Eq.(4.4.172) la somma sugli impulsi a valori non relativistici ($p \ll mc$). In completa analogia col caso bosonico (Eq.(3.3.52)) introduciamo l'operatore funzione d'onda per le particelle, che è uno spinore a due componenti:

$$\Psi(\vec{r}, +) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} w_{\vec{p}}^{(\lambda)} a_{\vec{p},\lambda} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \quad , \quad (4.4.177)$$

e per le antiparticelle:

$$\Psi_i(\vec{r}, -) = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} \epsilon w_{\vec{p}}^{(\lambda)} b_{\vec{p},\lambda} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \quad . \quad (4.4.178)$$

Ora, in base alle Eq.(4.4.166) e nella rappresentazione data in Eq.(4.4.151) possiamo costruire un'approssimazione dall'espressione del campo di Dirac data in Eq.(4.4.172) valida per impulsi piccoli rispetto a mc . Esprimendo i tetraspinori di Dirac in termini di spinori a due componenti e tenendo conto della Eq.(4.4.121) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= c\sqrt{\frac{\hbar}{\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} \left[w_{\vec{p}}^{(\lambda)} a_{\vec{p},\lambda} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E(p)/c+mc}{2E(p)}} \\ \lambda\sqrt{\frac{E(p)/c-mc}{2E(p)}} \end{pmatrix} - \epsilon(w_{\vec{p}}^{(\lambda)})^* b_{\vec{p},\lambda}^\dagger \right. \\
&e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \left. \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{\frac{E(p)/c-mc}{2E(p)}} \\ \sqrt{\frac{E(p)/c+mc}{2E(p)}} \end{pmatrix} \right] \simeq \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} \sum_{\vec{p},\lambda} \left[w_{\vec{p}}^{(\lambda)} a_{\vec{p},\lambda} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda\frac{p}{2mc} \end{pmatrix} \right. \\
&- \epsilon(w_{\vec{p}}^{(\lambda)})^* b_{\vec{p},\lambda}^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} \left. \begin{pmatrix} -\lambda\frac{p}{2mc} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \sqrt{\hbar c} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}}{2mc} \end{pmatrix} \Psi(\vec{r}, +) \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} \frac{i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}}{2mc} \\ 1 \end{pmatrix} \Psi^\dagger(\vec{r}, -) \right] = \sqrt{\hbar c} (I + i\frac{\hbar\vec{\nabla}}{2mc} \cdot \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \Psi(\vec{r}, +) \\ \Psi^\dagger(\vec{r}, -) \end{pmatrix} \\
&\equiv \psi_{n.r.}(\vec{r}) \tag{4.4.179}
\end{aligned}$$

4.5 Esercizi

1. Mostrare che gli operatori unitari nello spazio di Fock spinoriale: P con $P^2 = -I$, $P^\dagger a_{\vec{p},\lambda} P = -\text{sign}(\varphi_{\vec{p}}) a_{-\lambda, -\vec{p}}$, $P^\dagger b_{\vec{p},\lambda} P = -\text{sign}(\varphi_{\vec{p}}) b_{-\lambda, -\vec{p}}$, operatore di *riflessione di parità*, e C con $C^2 = I$ e $C a_{\vec{p},\lambda} C = b_{\lambda, \vec{p}}$, operatore di *coniugazione di carica* agiscono sul campo spinoriale in modo locale, cioè $P^\dagger \psi(\vec{r}, t) P$ e $C \psi(\vec{r}, t) C$ dipendono solo dal campo spinoriale in un punto, eventualmente \vec{r} allo stesso istante t .

(Sol: Usando Eq. (4.4.172), (4.4.122) e (4.4.123) si trova subito che $P^\dagger \psi(\vec{r}, t) P = i\gamma^0 \psi(-\vec{r}, t)$ e $C \psi(\vec{r}, t) C = -i\gamma^2 \psi(\vec{r}, t)$.)

2. Discutere le proprietà del campo spinoriale relativistico se lo spazio ha due dimensioni.

(Sol: Se lo spazio ha due dimensioni (x,y) le trasformazioni di Lorentz si riducono alla combinazioni di rotazioni intorno all'asse z e a boost lungo un asse, e.g. x. Per il boost si possono ripetere le considerazioni svolte i 3 dimesioni che portano

alla conclusione che $(\xi^\dagger \xi)$, $\pm(\xi^\dagger \sigma_x \xi)$ e $\pm(\xi^\dagger \sigma_y \xi)$ sono componenti di un tri-vettore. In questo caso però un cambiamento di segno davanti alle componenti spaziali si ottiene tramite un rotazione di π intorno all'asse z che infatti riflette anche la rapidità. Si noti che essendo lo spin diretto lungo l'asse z l'elicità è comunque nulla. Non stupisce quindi che ci siano spinori di un solo tipo e che siano invarianti, a meno di una fase, per parità. Inoltre è immediato verificare che $(\xi^\dagger \sigma_z \xi)$ è invariante per qualunque trasformazione di Lorentz del tipo considerato. Quindi, posto $\bar{\xi} = \xi^\dagger \sigma_z$, $\gamma^0 = \sigma_z$, $\gamma^1 = \sigma_x$, $\gamma^2 = \sigma_y$ si ha una densità Lagrangiana in due dimensioni formalmente analoga a quella data in Eq.(4.4.152).)

3. Esprimere le componenti del bilineare $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ in termini dei corrispondenti operatori funzione d'onda a meno di correzione di ordine $p^2/m^2 c^2$ utilizzando l'Eq.(4.4.179). Ci si limiti a considerare il contributo delle particelle trascurando quello delle anti-particelle.

(Sol: Sostituendo l'operatore dato in Eq.(4.4.179) dove si è posto $\Psi(\vec{r}, -) = 0$ si ha per la componente tempo: $\bar{\psi} \gamma^0 \psi(\vec{r}) \simeq \hbar c (\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \Psi(\vec{r}, +))$. Per le componenti spaziali si ha

$$\bar{\psi} \gamma^i \psi(\vec{r}) \simeq \hbar c (\Psi^\dagger(\vec{r}, +), 0) \left(I + i \frac{\hbar \vec{\nabla}}{2mc} \cdot \vec{\gamma} \right) \gamma^0 \gamma^i \left(I + i \frac{\hbar \vec{\nabla}}{2mc} \cdot \vec{\gamma} \right) \begin{pmatrix} \Psi(\vec{r}, +) \\ 0 \end{pmatrix}$$

usando le relazioni $\gamma^j \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^0 \gamma^j \gamma^i$ e inoltre $\sigma^i \sigma^j = \delta^{i,j} + i \epsilon^{i,j,k} \sigma^k$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^i \psi(\vec{r}) \simeq & \frac{i \hbar^2 c}{2m} ((\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \nabla^i \Psi(\vec{r}, +)) - ((\nabla^i \Psi^\dagger(\vec{r}, +)) \Psi(\vec{r}, +))) \\ & - \frac{\hbar^2 c}{2m} \epsilon^{i,j,k} \nabla^j (\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \sigma^k \Psi(\vec{r}, +)) \end{aligned}$$

4. La teoria spinoriale chirale corrispondente alla densità Lagrangiana data in Eq.(4.4.116) degli appunti viene quantizzata partendo dallo sviluppo descritto nelle Eqq. (4.4.118) e (4.4.119) degli stessi appunti, cioè:

$$\xi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{\Omega}} \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm} A_{\vec{k}, \lambda} w_{\vec{k}}^{(\lambda)} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

dove lo spinore di polarizzazione $w_{\vec{k}}^{(\lambda)}$ è definito in Eqq. (4.4.120) e (4.4.121). L'Hamiltoniano corrispondente è dato in Eq. (4.4.128).

Se applichiamo la stessa decomposizione del campo al sistema corrispondente alla densità Lagrangiana di Majorana data in Eq.(4.4.140) degli appunti si trova un Hamiltoniano di forma diversa. Esprimete questo Hamiltoniano H_M in termini degli $A_{\vec{k},\lambda}$ e dei loro coniugati Hermitiani. Mostrate inoltre che questo H_M può essere trasformato, a meno di una costante eventualmente infinita, nella forma canonica per un gas ideale di Fermioni tramite una trasformazione di Bogoliubov, individuando la trasformazione e la forma finale dell'Hamiltoniano.

Si noti che nel caso relativistico, in cui i numeri quantici di una particella sono vettore d'onda $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ ed elicità λ invece che vettore d'onda e spin σ_z , la trasformazione di Bogoliubov non può essere isotropa. Essa va scritta nella forma: $A_{\vec{k},\lambda} = \cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda} + \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger$ con $\theta(\vec{k}, \lambda) = -\theta(-\vec{k}, \lambda) = S_{\vec{k}} \theta(k, \lambda)$.¹¹

(Sol: Si pone $H_M = -i \int d\vec{r} [(\xi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \nabla \xi) + \mu/2((\xi^T \epsilon \xi) + (\xi^\dagger \epsilon \xi^*))] = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} [k\lambda A_{\vec{k},\lambda}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} - S_{\vec{k}} \mu/2(A_{-\vec{k},\lambda} A_{\vec{k},\lambda} + A_{\vec{k},\lambda}^\dagger A_{-\vec{k},\lambda}^\dagger)]$ dove si è fatto uso delle regole di commutazione e della relazione $w_{-\vec{k}}^{(\lambda)} = S_{\vec{k}} \sigma_y w_{\vec{k}}^{*(\lambda)}$. Applicando la trasformazione canonica si ha:
 $H = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} [k\lambda (\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda}^\dagger + \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}) (\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda} + \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger) - S_{\vec{k}} \mu/2((\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda} - \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda}^\dagger) (\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda} + \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger) + (\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda}^\dagger + \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}) (\cos \theta(\vec{k}, \lambda) a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger - \sin \theta(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k},\lambda})]$. Ora la condizione di diagonalizzazione dell'Hamiltoniano, cioè l'annullarsi del coefficiente dei termini aa è: $\tan(2\theta(\vec{k}, \lambda)) = S_{\vec{k}} \mu / (k\lambda)$ da cui $\cos(2\theta(\vec{k}, \lambda)) = k\lambda / \sqrt{k^2 + \mu^2}$ e $\sin(2\theta(\vec{k}, \lambda)) = S_{\vec{k}} \mu / \sqrt{k^2 + \mu^2}$. Poste queste condizioni si ha, trascurando costanti additive: $H = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} [k\lambda \cos(2\theta(\vec{k}, \lambda)) + S_{\vec{k}} \mu \sin(2\theta(\vec{k}, \lambda))] a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda} = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{k^2 + \mu^2} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda}$ Si tratta quindi di un gas di particelle relativistiche di spin 1/2 e massa $\hbar\mu/c$. Non ci sono antiparticelle distinte dalle particelle.)

5. Calcolare, in funzione dell'angolo θ e dell'energia totale E , la sezione d'urto differenziale baricentrale relativa alla diffusione elastica impolarizzata al primo ordine di un fermione di massa m (campo ψ) da parte di un bosone di massa nulla (campo ϕ) interagenti tramite la densità Lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{mc^2} : \bar{\psi} \psi \phi^2 :$$

usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

¹¹Quindi si avrà, per esempio, $\theta(\vec{k}, \lambda) = \theta(k, \lambda) k_z / |k_z| = \text{sign } k_z \theta(k, \lambda)$.

(Sol: Tenendo conto di Eq.(4.4.170) e Eq.(3.5.198) si ottiene l'Hamiltoniana di interazione da due corpi:

$$H_I = -gc\hbar^2/(2m\Omega) \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}, \lambda, \lambda'} \frac{(\bar{u}_{\vec{p}+\vec{q}, \lambda}^{(+)} u_{\vec{p}, \lambda'}^{(+)})}{\sqrt{\omega(\vec{p}+\vec{q})\omega(p)k|\vec{k}-\vec{q}|}} a_{\vec{p}+\vec{q}, \lambda}^\dagger a_{\vec{p}, \lambda'} A_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}}.$$

Si noti che $(\bar{u}.u)$ ha le dimensioni di un numero d'onda. Se il fermione iniziale ha numero d'onda \vec{p}_I e elicit  λ_I e quello finale numero d'onda \vec{p} e elicit  λ_F e gli scalari hanno rispettivamente numeri d'onda $-\vec{p}_I$ e \vec{k}_F , il modulo quadro dell'elemento di matrice di transizione  :

$$\frac{g^2 c^2 \hbar^4}{4m^2 \Omega^2} \frac{(\bar{u}_{\vec{p}_F, \lambda_F}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)} u_{\vec{p}_F, \lambda_F}^{(+)})}{\omega(p_F)\omega(p_I)k_F p_I} \delta_{\vec{p}_F + \vec{k}_F}.$$

Il fattore di flusso $\Phi = c(cp_I/\omega(p_I) + 1)/\Omega$, trattandosi del caso impolarizzato si tratta di sommare la sezione d'urto differenziale rispetto alle due elicit  e di dividere per due. Si ha quindi la sezione d'urto differenziale impolarizzata:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta d\varphi} &= \frac{\pi}{\hbar} \frac{g^2 c \hbar^4}{4m^2 (2\pi)^3 (cp_I/\omega(p_I) + 1)} \int_0^\infty dp \sum_{\lambda_I, \lambda_F} \frac{(\bar{u}_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)} u_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)})}{\omega(p)\omega(p_I)pp_I} \\ p^2 \delta(\hbar(cp + \omega(p) - cp_I - \omega(p_I))) &= \frac{g^2 \hbar^2}{2m^2 (4\pi)^2 (cp_I + \omega(p_I))^2} \sum_{\lambda_I, \lambda_F} (\bar{u}_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)}) \\ (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)} u_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)})|_{p=p_I} & \end{aligned}$$

L'ultimo fattore, la somma sulle elicit , si calcola come un traccia di due matrici densit  date in Eq.(4.4.175):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_I, \lambda_F} (\bar{u}_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_I}^{(+)} u_{\vec{p}, \lambda_F}^{(+)})|_{p=p_I} &= \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}((p_I^\mu \gamma_\mu + mc I)(p^\nu \gamma_\nu + mc I))|_{p=p_I} \\ &= 4(\omega^2(p_I)/c^2 - \vec{p}_I \cdot \vec{p} + m^2 c^2/\hbar^2) = 4p_I^2(1 - \cos\theta) + 8m^2 c^2/\hbar^2, \end{aligned}$$

dove si sono usate le relazioni in Eq.(4.4.149). Osservando che l'energia totale baricentrale   $E_B = \hbar(cp_I + \omega(p_I))$ ponendo l'impulso nel centro di massa $P = \hbar p_I$ si ha infine:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\varphi} = \frac{g^2 c^2 \hbar^2}{(2\pi)^2 E_B^2} \left(1 + \frac{P^2}{m^2 c^2} \frac{1 - \cos\theta}{2}\right).$$

Facendo riferimento alle formule covarianti presentate nell'esercizio (8) del gruppo (3.7) osserviamo che nel nostro caso $\mathcal{M} = 2g(\bar{u}_F u_I)/(mc^2)$

6. Calcolare al primo ordine perturbativo, in funzione del quadrato dell'energia baricentrale $s = E_B^2$, la sezione d'urto differenziale baricentrale

relativa alla produzione di una coppia di particelle top-antitop fermioni di massa $M = 150 \text{ Gev}/c^2$ (campo Ψ) da parte di una coppia impolarizzata quark-antiquark, fermioni di massa nulla (campo ψ) interagenti tramite la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \frac{4\hbar g}{M^2 c^3} (\bar{\psi}\psi)(\bar{\Psi}\Psi) ,$$

dove $\frac{g^2}{4\pi} = 10^{-4}$ usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol: Tenendo conto di Eq.(4.4.170) si ottiene l'Hamiltoniana di interazione da due corpi e indicando con α e β gli operatori dei quark:

$$H_I = -g\hbar^3/(M^2\Omega) \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}, \lambda, \lambda', \tau, \tau'} \frac{(\bar{U}_{\vec{p}+\vec{q}, \tau}^{(+)} U_{\vec{q}-\vec{k}, \tau'}^{(-)}) (\bar{u}_{\vec{k}, \lambda'}^{(-)} u_{\vec{p}, \lambda}^{(+)})}{\sqrt{\omega(\vec{p}+\vec{q})\omega(\vec{k}-\vec{q})kp}} a_{\vec{p}+\vec{q}, \tau}^\dagger b_{\vec{k}-\vec{q}, \tau'}^\dagger \alpha_{\vec{p}, \lambda} \beta_{\vec{k}, \lambda'} .$$

Se il quark iniziale ha numero d'onda \vec{p}_I e elicità λ_1 e l'anti-quark numero d'onda $-\vec{p}_I$ e elicità λ_2 , se inoltre il top finale ha numero d'onda \vec{p} e elicità τ_1 e l'anti-top numero d'onda \vec{k} e elicità τ_2 , il modulo quadro dell'elemento di matrice di transizione è:

$$\frac{g^2\hbar^6}{M^4\Omega^2} \frac{(\bar{U}_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)} U_{-\vec{k}, \tau_2}^{(-)}) (\bar{U}_{-\vec{k}, \tau_2}^{(-)} U_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)} u_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)})}{\omega(p)\omega(k)p_I^2} \delta_{\vec{p}+\vec{k}} .$$

Il fattore di flusso $\Phi = 2c/\Omega$, trattandosi del caso impolarizzato si tratta di sommare la sezione d'urto differenziale rispetto alle 4 elicità e di dividere per 4. Si ha quindi la sezione d'urto differenziale impolarizzata:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\varphi} = \frac{\pi}{2\hbar} \frac{g^2\hbar^6}{2cM^4(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \delta(\hbar(2\omega(p) - 2cp_I))$$

$$\frac{\sum_{\tau_1, \tau_2} (\bar{U}_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)} U_{\vec{p}, \tau_2}^{(-)}) (\bar{U}_{\vec{p}, \tau_2}^{(-)} U_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)}) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)} u_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)})}{\omega(p)\omega(k)p_I^2}$$

Procedendo come nell'esercizio precedente abbiamo

$$\sum_{\tau_1, \tau_2} (\bar{U}_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)} U_{\vec{p}, \tau_2}^{(-)}) (\bar{U}_{\vec{p}, \tau_2}^{(-)} U_{\vec{p}, \tau_1}^{(+)}) = 8p^2 , \quad \sum_{\lambda_1, \lambda_2} (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)} u_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)}) (\bar{u}_{\vec{p}_I, \lambda_1}^{(+)} u_{\vec{p}_I, \lambda_2}^{(-)}) = 8p_I^2 .$$

Osservando che l'energia totale baricentrale è $E_B = 2\hbar\omega(p) = 2cp_I$ e che $p = \sqrt{p_I^2 - M^2c^2/\hbar^2}$ si ha infine:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\varphi} = \frac{g^2\hbar^2}{(4\pi)^2 c^6 M^4 E_B} (E_B^2 - 4M^2c^4)^{3/2} .$$

In questo caso, con riferimento all'esercizio (8) del gruppo (3.7), si ha $\mathcal{M} = \hbar g(\bar{U}U)(\bar{u}u)/(M^2c^3)$

7. Un mesone π di massa M (campo ϕ) decade in un anti-leptone di massa m (campo ψ_l) e un neutrino ν privo di massa (campo ψ_ν) ed entrambi di spin $1/2$ tramite l'interazione

$$\mathcal{L}_I = f\sqrt{\hbar c}/Mc^2[\partial_\mu\phi(\bar{\psi}_\nu(1-\gamma^5)\gamma^\mu\psi_l) + \partial_\mu\phi^\dagger(\bar{\psi}_l(1-\gamma^5)\gamma^\mu\psi_\nu)] ,$$

calcolare in funzione delle masse e della costante f , reale, la vita media del mesone a riposo usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol: Tenendo conto delle equazioni di Dirac e della possibilità di aggiungere derivate spazio temporali si può scrivere $\mathcal{L}_I \equiv imf/(M\sqrt{c\hbar})[\phi/(\bar{\psi}_\nu(1-\gamma^5)\psi_l) + \phi^\dagger/(\bar{\psi}_l(1+\gamma^5)\psi_\nu)]$, il primo termine è responsabile del decadimento, il corrispondente elemento di matrice invariante (vedi esercizi (8) e (9) del gruppo (3.7)) è $\mathcal{M} = imf/(M\sqrt{c\hbar})(\bar{u}_\nu(1-\gamma^5)u_l)$ il cui modulo al quadrato sommato sulle elicità è $\sum |\mathcal{M}|^2 = m^2 f^2/(M^2 c\hbar^3) Tr(\gamma_\mu p_\nu^\mu \gamma^\lambda (1-\gamma^5)(\gamma_\lambda p_l^\lambda - mc)(1+\gamma^5))$
 $= 2m^2 f^2/(M^2 c\hbar^3) Tr(\gamma_\mu p_\nu^\mu \gamma_\lambda p_l^\lambda) = 8m^2 f^2/(M^2 c\hbar^3) p_\nu^\mu p_{l,\mu}$, dove p_l e p_n sono i tetra-impulsi delle particelle finali. Dunque $\sum |\mathcal{M}|^2 = 8m^2 f^2 |p_\nu|/(M\hbar^3)$. Di conseguenza la probabilità di decadimento per unità di tempo è:

$$1/\tau = \frac{\pi\hbar}{M} \frac{8m^2 f^2}{M\hbar^3} \frac{c^4\hbar}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_\nu}{4c(Mc^2 - cp_n)} \delta(Mc^2 - cp_\nu - c\sqrt{p_\nu^2 + m^2c^2})$$

$$= \frac{2m^2 f^2 c^4}{2\pi\hbar M^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^2 dp_n}{c(Mc^2 - cp_\nu)} \frac{\delta(p_\nu - c(M^2 - m^2)/(2M))}{Mc^2/(Mc - p_\nu)} = \frac{f^2 m^2 c^2 (M^2 - m^2)^2}{4\pi\hbar M^5}$$

8. Nel decadimento β^+ un nucleo di peso A e carica Z si trasforma in un altro nucleo dello stesso peso e carica $Z - 1$ emettendo un positrone e un neutrino. La transizione può avvenire senza cambiamento dello spin nucleare (J), nel qual caso è detta di Fermi, o con $|\Delta J| = 1$, detta di Gamow-Teller. Consideriamo una transizione di Fermi. Dato che la differenza fra le masse nucleari iniziale e finale è in generale inferiore di 3 ordini di grandezza rispetto a quella del nucleo iniziale e spesso supera di un ordine di grandezza quella dell'elettrone, il processo è relativistico per positrone e neutrino, ma non per il nucleo. In queste condizioni la densità Lagrangiana di interazione che ha la forma relativistica:

$$\mathcal{L}_I = g_V \hbar/(m_p^2 c^3)[(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e(1+\gamma^5)\gamma_\mu \psi_\nu) + (\bar{\psi}_\nu(1+\gamma^5)\gamma^\mu \psi_e)(\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p)] ,$$

dove gli indici si riferiscono ai diversi tipi di particelle coinvolte, può essere scritta e nel sistema di riferimento del nucleo iniziale in forma semi-relativistica sostituendo al bilineare vettoriale $(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\vec{r})$

la densità $\delta_{\mu,0}\hbar c(\Psi_n^\dagger(\vec{r})\Psi_p(\vec{r}))$ dove è sottintesa la somma sugli indici di spin e si sono introdotti gli operatori funzione d'onda definiti in Eq.(3.3.52) (Si veda l'esercizio (3) di questo gruppo.). Utilizzando il formalismo dello spin isotopico in cui $\Psi_p(\vec{r})$ e $\Psi_n(\vec{r})$ sono i due elementi di un vettore colonna corrispondente allo spin isotopico 1/2 possiamo scrivere gli operatori densità di spin isotopico come $(\Psi^\dagger(\vec{r})\tau_i\Psi(\vec{r})) \equiv I_i(\vec{r})$ i cui integrali spaziali sono le componenti dello spin isotopico $I_i = \int d\vec{r}I_i(\vec{r})$; in questo formalismo il termine di cui stiamo discutendo si scrive $I_-(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) - iI_2(\vec{r})$. Se la differenza di massa Δ_M fra nucleo iniziale e finale non supera, come di norma, la decina di MeV/c^2 i numeri d'onda delle particelle prodotte sono dell'ordine di grandezza di $10^{13} m^{-1}$ e quindi sono piccoli rispetto al reciproco del raggio nucleare $R^{-1} \simeq 10^{14} m^{-1}$. Se contemporaneamente lo stato nucleare finale appartiene allo stesso multipletto di spin isotopico di quello iniziale e quindi può essere ottenuto con buona approssimazione da quello iniziale operando con I_+ il decadimento β è detto *super-permesso* e la Hamiltoniana di interazione è ben approssimata da

$$H_I = g_V\hbar^2/(m_p^2c^2)[I_+(\bar{\psi}_e(1 + \gamma^5)\gamma^0\psi_\nu)(\vec{R}) + I_-(\bar{\psi}_e(1 + \gamma^5)\gamma^0\psi_\nu)(\vec{R})]$$

se \vec{R} è la posizione del baricentro nucleare. Sia I lo spin isotopico del multipletto. Trascurando l'energia di rinculo del nucleo finale e le correzioni sulla funzione d'onda del positrone finale dovute al campo Coulombiano del nucleo calcolate la vita media del decadimento per $I = 1$ e nel limite $\Delta_M \gg m_e$ usando la regola d'oro ricavata in (A.0.16).

(Sol : Come detto nel testo il rinculo nucleare assorbe pochissima energia e quindi il nucleo si comporta come un corpo di massa infinita, non vi è più il vincolo della conservazione dell'impulso come già visto nel esercizio (10) del gruppo (3.7). Pertanto l'elemento di matrice di H_I fattorizza nel prodotto di un contributo nucleare e di uno leptonic. Il contributo nucleare, cioè il modulo al quadrato dell'elemento di matrice di I_- si calcola con le regole del momento angolare e vale $I(I+1) - (Z-A/2)(Z-A/2-1)$ (2 nel caso $I = 1, Z - A/2 = 1$). L'elemento di matrice leptonic è: $\langle \Psi_0 b_{\vec{p},\lambda} a_{\vec{q}}(\bar{\psi}_\nu(1 + \gamma^5)\gamma^0\psi_e)(\vec{R})\Psi_0 \rangle$, dove a e b sono gli operatori di distruzione del neutrino e del positrone. La somma sulle elicità del corrispondente modulo al quadrato è: $2\hbar^2c^2 Tr[\gamma^\mu p_\mu c^0 \gamma^\lambda q_\lambda c^0]/(4q\sqrt{p^2 + m_e^2c^2}\Omega^2) = 2\hbar^2c^2[1 + qp \cos \theta/(q\sqrt{p^2 + m_e^2c^2})]/\Omega^2 \simeq 2\hbar^2c^2(1 + \cos \theta)/\Omega^2$, dove θ è l'angolo fra gli impulsi del positrone e del neutrino e Ω è il volume in cui il sistema è quantizzato. Questo calcolo tratta la funzione d'onda finale del positrone come un'onda piana e mostra che le due particelle tendono a essere emesse nella stessa direzione, cosa facilmente spiegabile in termini della loro elicità e del loro momento angolare

totale. Applicando la regola d'oro, si ha: $1/\tau$

$$\simeq \frac{2\pi}{\hbar} 2 \frac{2g_v^2 \hbar^6}{m_p^4 c^2} \int \frac{d\vec{p}d\vec{q}}{(2\pi\hbar)^6} \delta(c(p+q-\Delta_M c)) = \frac{2g_v^2 c^2 (\Delta_M^2 - m_e^2)^{5/2}}{30\pi^3 \hbar m_p^4} F\left(\frac{m_e}{\sqrt{\Delta_M^2 - m_e^2}}\right).$$

dove $F(x) = 1 - 5x^2/2 + 15x^4(\sqrt{1+x^2} \ln(1/x + \sqrt{1+1/x^2}) - 1)/2$.)

9. Lo spinore di Dirac Ψ di massa M si accoppia allo spinore di Dirac ψ di massa m e allo scalare ϕ di massa nulla tramite la densità Lagrangiana :

$$\mathcal{L}_i = \frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \phi [(\bar{\psi}\Psi) + (\bar{\Psi}\psi)] ,$$

dove $g = 10^{-7}$, $Mc^2 = 10^9$ eV e $mc^2 = 0,5 \cdot 10^6$ eV .

Calcolate il tempo medio di decadimento (cioè il reciproco della probabilità per unità di tempo) della particella Ψ a riposo in ψ e ϕ .

(Sol: L'elemento di matrice dell'Hamiltoniano di interazione nel volume Ω è: $\langle F|H_I|I\rangle = g \sqrt{\frac{\hbar^5 c}{8\Omega M q \sqrt{p^2+m^2 c^2}}} (\bar{u}_{\lambda,\vec{p}} U_{\lambda',\vec{0}}) \delta_{\vec{p}+\vec{q}}$ dove u e U sono rispettivamente lo spinore di polarizzazione della ψ e della Ψ dati in Eq.(4.4.162) degli appunti, \vec{p} e \vec{q} sono gli impulsi dello spinore finale e dello scalare e λ e λ' sono elicità.

La probabilità di decadimento per unità di tempo si trova mediando sulle polarizzazioni iniziali e sommando su quelle finali quanto dato dalla regola d'oro, cioè: $\dot{P} = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 c$

$\int d\vec{p} \frac{\hbar^5}{8h^3 M p \sqrt{p^2+m^2 c^2}} \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\lambda'} (\bar{u}_{\lambda,\vec{p}} U_{\lambda',\vec{0}}) (\bar{U}_{\lambda',\vec{0}} u_{\lambda,\vec{p}}) \delta(Mc^2 - cp - c\sqrt{p^2+m^2 c^2})$. Indicando con P^μ le componenti dei tetraimpulso dello spinore iniziale e con p^μ quelle dello spinore finale e applicando la Eq. (4.4.171) degli appunti si ha:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{g^2 c}{32\pi\hbar} \int \frac{d\vec{p}}{M p \sqrt{p^2+m^2 c^2}} \text{Tr}((\gamma_\mu P^\mu + Mc(\gamma_\nu p^\nu + mc)) \delta(Mc^2 - cp - c\sqrt{p^2+m^2 c^2})) \\ &= \frac{g^2 c}{2\hbar} \int \frac{p dp}{M \sqrt{p^2+m^2 c^2}} (P^\mu p_\mu + Mmc^2) \delta(Mc^2 - cp - c\sqrt{p^2+m^2 c^2}) \\ &= \frac{g^2}{2\hbar} \int \frac{p dp}{\sqrt{p^2+m^2 c^2}} (Mc\sqrt{p^2+m^2 c^2} + Mmc^2) \delta(Mc - p - \sqrt{p^2+m^2 c^2}) \\ &= \frac{g^2}{2\hbar} \int \frac{p dp}{\sqrt{p^2+m^2 c^2}} (Mc\sqrt{p^2+m^2 c^2} + Mmc^2) \frac{\sqrt{p^2+m^2 c^2}}{Mc} \delta(p - \frac{M^2-m^2}{2M} c) \\ &= \frac{g^2 c^2}{2\hbar M} \frac{(M+m)^2}{2M} \frac{M^2-m^2}{2M} = \frac{g^2 c^2}{8\hbar M^3} (M+m)^2 (M^2-m^2) \simeq \frac{g^2 M c^2}{8\hbar} \simeq 310^8 s^{-1} , \text{ dato} \\ &\text{che } m \text{ è trascurabile rispetto a } M. \text{ Quindi il tempo medio di decadimento è circa } 3 \cdot 10^{-9} \text{ s .) } \end{aligned}$$

10. Il momento attuale è cruciale per la fisica delle alte energie perché dovrebbe concludersi entro l'anno prossimo la ricerca della famigerata

particella di Higgs, almeno se la sua massa non si discosta troppo dagli attesi $M_H = 130 \text{ GeV}/c^2$. In queste condizioni la particella decade praticamente solo in una coppia di quark b e \bar{b} con massa di $5 \text{ GeV}/c^2$ a cui la particella di Higgs, cui si associa il campo H , si accoppia tramite la densità Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{\hbar c}} H(\bar{\psi}\psi),$$

dove $g = 2 \cdot 10^{-2}$.

È importante valutare la larghezza del picco nella distribuzione in energia dei prodotti di decadimento che corrisponde alla particella di Higgs. Questa larghezza vale $\hbar dP/dt$ dove dP/dt è la probabilità di decadimento per unità di tempo. Calcolate la larghezza partendo dai dati forniti.

(Sol: Seguendo la traccia degli esercizi precedenti troviamo che la somma sulle polarizzazioni finali del modulo quadro dell'elemento di matrice di transizione è dato da $g^2 \hbar^3 c^3 |\vec{p}|^2 \delta \vec{p}_b, -\vec{p}_{\bar{b}} / (\Omega M_H E_b)$ dove $p_b \simeq E_b / (2c)$ stabilisce la relazione cinematica fra impulso ed energia di ciascun quark la cui massa è trascurabile rispetto all'energia disponibile. Di conseguenza si ha: $\hbar dP/dt \simeq g^2 M_H c^2 / (8\pi) \simeq 210^{-3} \text{ GeV}$.)

11. Uno spinore impolarizzato di Dirac con massa trascurabile interagisce con un campo vettoriale classico che nel sistema di riferimento considerato vale $V^\mu(\vec{r}) = \epsilon^\mu \exp(-r^2/D^2)$, tramite l'Hamiltoniano di interazione:

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \int d\vec{r} (\bar{\psi}(\vec{r}) \epsilon_\mu \gamma^\mu \psi(\vec{r})) \exp(-r^2/D^2).$$

Calcolare la sezione d'urto differenziale di scattering (elastico) dello spinore impolarizzato se il tetravettore ϵ ha componente tempo eguale e opposta alla componente z che è pari a $\sqrt{\hbar c}/D$ e le altre componenti nulle e se \vec{p}_i è parallelo all'asse z .

(Sol: L'elemento di matrice fra lo stato con vettore d'onda \vec{p}_i ed elicità λ_i e quello con vettore d'onda \vec{p}_f ed elicità λ_f è dato da $H_{f,i} = \frac{g\sqrt{\hbar c}}{2\sqrt{p_i p_f} \Omega} (\bar{u}_f \epsilon_\mu \gamma^\mu u_i) (\sqrt{\pi} D)^3 \exp(-|\vec{p}_i - \vec{p}_f|^2 D^2/4)$. Quindi la sezione d'urto differenziale è:
 $d\sigma = \frac{\pi g^2 D^6 p^2}{4\hbar c} \exp(-p^2 D^2 (1 - \cos\theta)) (p_i \cdot \epsilon)(p_f \cdot \epsilon) d\cos\theta d\phi = \frac{\pi g^2 D^4 p^2}{2} \exp(-p^2 D^2 (1 -$

$$\cos \theta))$$
$$(1 + \cos \theta) d \cos \theta d \phi .)$$

Capitolo 5

La teoria delle perturbazioni e le interazioni indotte, applicazioni.

5.0.1 Interazioni delle particelle con i campi

Superando l'ambito dei campi puramente elastici, che sono normalmente detti liberi, nel senso che i loro modi normali non si accoppiano fra loro, consideriamo il caso di campi interagenti. Abbiamo già indicato alla fine del paragrafo (3.5.3) alcuni esempi di campi relativistici auto-interagenti Eq.(3.5.203) e Eq.(3.5.204). (Si vedano gli esercizi (8) e (9) nel gruppo (3.7)), ora consideriamo il caso di campi in interazione con particelle non relativistiche.

Il caso più semplice di interazione campo-particelle non relativistiche è quello di un campo scalare relativistico accoppiato a particelle non relativistiche di grande massa. L'Hamiltoniana di interazione, che introduce l'interazione nella dinamica è:

$$H_I = g\sqrt{c\hbar} \int d\vec{r} \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) , \quad (5.0.1)$$

dove ρ è l'operatore densità dato in Eq.(3.3.57) e g è una costante adimensionata. Indicando gli operatori di creazione e distruzione delle particelle non relativistiche tramite lettere minuscole ($a_q^\dagger, a_{\bar{p}}$) e usando la Eq.(3.5.198) a

$t = 0$, cioè in rappresentazione di Schrödinger, si trova:

$$H_I = g\hbar\sqrt{\frac{c^3}{2L^3}} \sum_{\vec{p}, \vec{k}} \frac{A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega(\vec{k})}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} , \quad (5.0.2)$$

dove $\omega(\vec{k})$ è dato in Eq.(3.5.196). Si noti la struttura dell'operatore trilineare negli operatori di creazione e distruzione e che quindi non conserva il numero delle particelle relativistiche, ma conserva l'impulso.

Questo modello fu sviluppato da Yukawa nel 1935 per l'interazione nucleare. L'idea è che particelle non relativistiche massive, i nucleoni, che possiedono due stati distinti, il protone con operatore di distruzione $a_{1,\vec{p}}$ e il neutrone con operatore di distruzione $a_{2,\vec{p}}$, interagiscano con un campo scalare relativistico, mesonico, a loro accoppiato tramite l'interazione descritta in Eq.(5.0.2), in cui evidentemente si trascura il grado di libertà di spin.

Anni dopo si scoprì che la particelle di Yukawa coincide col mesone $\vec{\pi}(x)$ che è pseudoscalare tripletto di spin isotopico, quindi vettore nello spazio corrispondente. Data la conservazione della parità nelle interazioni nucleari e considerando che i nucleoni sono particelle di spin 1/2 e quindi possono essere associati a campi di Dirac la densità Lagrangiana dell'interazione pione-nucleone è:

$$\mathcal{L}_{\pi,n}(x) = i\frac{g_Y}{\hbar c} \vec{\pi}(x)(\bar{\psi}(x)\gamma^5\vec{\tau}\psi(x)) , \quad (5.0.3)$$

dove con $\vec{\tau}$ si è indicato il vettore a valore matriciale le cui componenti sono le matrici di Pauli nello spazio dello spin isotopico del nucleone.

Il secondo caso riguarda l'interazione del campo elettromagnetico con particelle cariche. Va tenuto ben presente che la costante di struttura fine nel sistema pratico è definita come $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ vale circa $\frac{1}{137}$.

5.0.2 Interazione di particelle cariche col campo elettromagnetico

¹ La Lagrangiana di una particella di carica e e massa m immersa in un campo elettromagnetico è data da:

$$L = \frac{mv^2}{2} + e\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t) , \quad (5.0.4)$$

¹Si veda anche [4] (§63)

dove \vec{r} e \vec{v} sono rispettivamente posizione e velocità della particella. Infatti l'equazione del moto corrispondente è:

$$\begin{aligned}
ma_i &= -e \frac{d}{dt} A_i(\vec{r}, t) + e\vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(\vec{r}, t) - e \nabla_i \phi(\vec{r}, t) \\
&= -e \left[\dot{A}_i(\vec{r}, t) + \nabla_i \phi(\vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(\vec{r}, t) \right] \\
&= e E_i(\vec{r}, t) + e (\vec{v} \wedge B(\vec{r}, t))_i
\end{aligned} \tag{5.0.5}$$

Dalla (5.0.4) possiamo calcolare il momento coniugato a \vec{r} che risulta essere $\vec{p} = m\vec{v} + qe\vec{A}(\vec{r}, t)$ e quindi troviamo l'Hamiltoniano della particella:

$$H \equiv \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{(p - eA(\vec{r}, t))^2}{2m} + e\phi(\vec{r}, t) . \tag{5.0.6}$$

Si noti che in prima quantizzazione l'operatore $\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})$ appare come $-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}(\vec{r})$ che non è invariante per una trasformazione di gauge $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$. Però l'invarianza, o meglio la covarianza, viene ripristinata se la funzione d'onda $\psi(\vec{r})$ della particella carica su cui l'operatore opera viene moltiplicata per una fase opportuna $\psi(\vec{r}) \rightarrow \exp(ie\Lambda(\vec{r})/\hbar)\psi(\vec{r})$. Si ha infatti $(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}))\psi \rightarrow \exp(ie\Lambda(\vec{r})/\hbar)(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}))\psi$. Questo significa che la trasformazione di gauge su \vec{A} e la contemporanea moltiplicazione della funzione d'onda per il fattore di fase indicato trasformano soluzioni dell'equazione di Schrödinger in soluzioni della stessa equazione lasciando invariante la fisica. La fisica quantistica è dunque invariante di gauge.

In (5.0.6) l'interazione col campo di radiazione (\vec{A}) è data da:

$$H_I = -\frac{e}{2m} [\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{p}] + \frac{e^2 A^2(\vec{r}, t)}{2m} . \tag{5.0.7}$$

Pensando a un sistema di particelle identiche si ha evidentemente un operatore a una particella che in seconda quantizzazione può essere facilmente scritto in termini degli operatori $a_{\vec{k}}$ di distruzione di una particella sullo stato di numero d'onda \vec{k} :

$$H_I = \int \frac{d\vec{r}}{L^3} \left[-\frac{\hbar e}{2m} \sum_{\vec{p}, \vec{k}} (\vec{k} + 2\vec{p}) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{e^2 A^2(\vec{r}, t)}{2m} \right] a_{\vec{k}+\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} . \tag{5.0.8}$$

Il potenziale vettore quantizzato appare in (3.5.177) in rappresentazione di Heisenberg, ma per ridurlo in rappresentazione di Schrödinger basta porre

$t = 0$. Si ottiene allora in termini della costante di struttura fine $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$:

$$\begin{aligned}
H_I &= -\frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{L^3}} \sum_{\alpha=\pm, \vec{p}, \vec{k}} \frac{1}{\sqrt{k}} \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} (A_{\alpha, \vec{k}} + A_{\alpha, -\vec{k}}^\dagger) \\
&+ \frac{\hbar^2 \pi \alpha}{m L^3} \sum_{\alpha, \beta=\pm, \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} \frac{\vec{\epsilon}_{\alpha, -\vec{k}-\vec{q}} \cdot \vec{\epsilon}_{\beta, \vec{q}}}{\sqrt{q|\vec{q} + \vec{k}|}} a_{\vec{p}-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} [2A_{\alpha, \vec{k}+\vec{q}}^\dagger A_{\beta, \vec{q}} \\
&+ A_{\alpha, \vec{k}+\vec{q}}^\dagger A_{\alpha, -\vec{q}}^\dagger + A_{\alpha, -\vec{k}-\vec{q}} A_{\beta, \vec{q}}] . \tag{5.0.9}
\end{aligned}$$

Come si vede l'Hamiltoniano d'interazione contiene due termini distinti, nel primo, che è lineare nella carica e , viene assorbito oppure emesso un fotone; invece nel secondo, quadratico in e , intervengono due fotoni che possono essere creati o distrutti; in entrambi i termini una particella carica viene distrutta e ricreata con numero d'onda diverso in modo da conservare l'impulso totale. In particolare il termine che conserva il numero dei fotoni appare simile a un potenziale d'interazione diretta particella-fotone.

Si noti altresì che nel secondo termine è stato adottato il criterio di ordinamento normale che prevede che gli operatori di creazione siano posti alla sinistra di quelli di distruzione.

L'interazione di particelle cariche col campo elettromagnetico è data dall'operatore (5.0.9) che al limite di volume infinito diventa:

$$\begin{aligned}
H_I &= -\frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{(2\pi)^3}} \sum_{\alpha=\pm} \int d\vec{p} d\vec{k} \frac{1}{\sqrt{k}} \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} (A_{\alpha, \vec{k}} + A_{\alpha, -\vec{k}}^\dagger) \\
&+ \frac{\hbar^2 \pi \alpha}{m (2\pi)^3} \sum_{\alpha, \beta=\pm} \int d\vec{p} d\vec{k} d\vec{q} \frac{\vec{\epsilon}_{\alpha, -\vec{k}-\vec{q}} \cdot \vec{\epsilon}_{\beta, \vec{q}}}{\sqrt{q|\vec{q} + \vec{k}|}} a_{\vec{p}-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}} [2A_{\alpha, \vec{k}+\vec{q}}^\dagger A_{\beta, \vec{q}} \\
&+ A_{\alpha, \vec{k}+\vec{q}}^\dagger A_{\alpha, -\vec{q}}^\dagger + A_{\alpha, -\vec{k}-\vec{q}} A_{\beta, \vec{q}}] . \tag{5.0.10}
\end{aligned}$$

5.0.3 L'equazione di Dirac in un campo elettromagnetico classico

² Una variazione interessante sul tema trattato nel capitolo precedente riguarda il caso in cui le particelle sono spinori relativistici immersi in un campo

²Si veda anche [4] (§68)

elettromagnetico generato da sorgenti macroscopiche e quindi praticamente classico. Questa variante comprende fra gli altri il caso di un atomo di idrogeno in cui la sorgente del campo è il nucleo.

Nel caso in considerazione la dinamica è dettata dall'equazione di Dirac in un campo elettromagnetico esterno. Questa è data in Eq.(4.4.153). Il potenziale vettore ha componenti A^μ dove $A^0 = \phi/c$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$.

L'Hamiltoniano del sistema si ottiene sostituendo l'operatore di singola particella h in (4.4.159) con:

$$h_H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) + \beta k_c + e\phi/(\hbar c) \equiv \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}/\hbar) + \beta mc/\hbar + e\phi/(\hbar c), \quad (5.0.11)$$

come risulta chiaramente dalla Lagrangiana (4.4.152).

L'Hamiltoniano è un operatore di singola particella e quindi, almeno formalmente, lo studio degli autovalori e delle autofunzioni esaurisce il problema dinamico. Tuttavia bisogna sempre tenere presente che la quantizzazione comporta una trasformazione canonica che non conserva il numero delle particelle. In realtà lo studio degli autovettori di h_H è esauriente solo se le variazioni dell'energia potenziale mediate su una lunghezza d'onda sono piccole rispetto a mc^2 (si veda in proposito l'esercizio (4) del gruppo (5.3)).

Non avendo molto tempo a disposizione consideriamo il problema degli autostati di h_H limitandoci al caso puramente magneto-statico in cui $\phi = 0$ e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Decomponendo lo spinore a blocchi come in (4.4.160) si trova l'equazione agli autovalori:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) \chi + (mc/\hbar)\varphi &= E\varphi/(\hbar c) \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) \varphi &\equiv (E + mc^2)\chi/(\hbar c), \end{aligned} \quad (5.0.12)$$

dove per semplicità di notazione abbiamo posto $-i\vec{\nabla} \equiv \vec{k}$. Questo sistema sostituisce l'equazione di Schrödinger stazionaria.

Si noti che ora abbiamo scritto l'autovalore di $h = H/(\hbar c)$ come $E/(\hbar c)$, quindi nell'ultima equazione E rappresenta l'autovalore dell'energia, cioè dell'Hamiltoniano.

Se ci limitiamo a considerare il caso in cui $E = mc^2 + \epsilon$ con $\epsilon \ll mc^2$ troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) \chi &= \epsilon\varphi/(\hbar c) \\ \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar) \varphi &\simeq 2mc\chi/\hbar, \end{aligned} \quad (5.0.13)$$

e quindi:

$$\hbar \frac{(\vec{\sigma} \cdot (\vec{k} - e\vec{A}/\hbar))^2}{2mc} \varphi = \epsilon\varphi/(\hbar c) . \quad (5.0.14)$$

Tenendo conto che le componenti del vettore $\vec{k} - e\vec{A}/\hbar \equiv -i\vec{\nabla} - e\vec{A}/\hbar$ non commutano fra loro:

$$[k_i - eA_i/\hbar, k_j - eA_j/\hbar] = ie(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i)/\hbar = ie\epsilon_{ijk}B_k/\hbar , \quad (5.0.15)$$

si ha:

$$\epsilon_{ijk}(k_i - eA_i/\hbar)(k_j - eA_j/\hbar) = ieB_k/\hbar . \quad (5.0.16)$$

Inoltre usando la relazione:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{i,j} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k , \quad (5.0.17)$$

si ottiene subito:

$$\frac{|\hbar\vec{k} - e\vec{A}|^2}{2m} \varphi - \frac{e\hbar}{2m}(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})\varphi = \epsilon\varphi , \quad (5.0.18)$$

che non è altro che l'equazione di Schrödinger stazionaria per una particella con rapporto giromagnetico 2 come, appunto, l'elettrone.

Questo mostra che, con la dovuta cautela, tenendo conto che si stanno trascurando le fluttuazioni quantistiche del campo elettromagnetico l'equazione di Schrödinger stazionaria relativistica per un elettrone va scritta come:

$$\hbar c h_H\psi \equiv [c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) + \beta mc^2 + e\phi]\psi = E\psi . \quad (5.0.19)$$

L'applicazione tipica di questa equazione è al calcolo delle correzioni relativistiche ai livelli dell'atomo di idrogeno.

5.1 La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo

Per semplicità consideriamo un sistema generico la cui Hamiltoniana imperturbata H_0 ha spettro puramente continuo:

$$H_0 = \int da |E_a, \alpha\rangle E_a \langle E_a, \alpha| , \quad (5.1.20)$$

dove il simbolo di integrale sottintende anche la somma sui numeri quantici discreti α che risolvono la degenerazione degli stati stazionari.

Il sistema è soggetto a una perturbazione V i cui elementi di matrice $V_{a,b} \equiv \langle E_a, \alpha | V | E_b, \beta \rangle$ saranno eventualmente assoggettati a opportune ipotesi di regolarità.

Come è ben noto la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo introduce l'operatore di evoluzione in rappresentazione d'interazione $U(t, t')$ che si costruisce tramite l'equazione:

$$\dot{U}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} V e^{t/\hbar} e^{-iH_0 t'/\hbar} U(t, t') \equiv -\frac{i}{\hbar} V_I(t) U(t, t') . \quad (5.1.21)$$

Nella definizione di $V_I(t)$ abbiamo introdotto un fattore di spegnimento al tempo $-\infty$. In particolare la soluzione $U(t, -\infty)$ si costruisce tramite lo sviluppo perturbativo e nel limite $\epsilon \rightarrow 0+^3$:

$$\begin{aligned} U(t, -\infty) &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 V_I(t_1) U(t_1, -\infty) \\ &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 V_I(t_1) - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Considerando in particolare un generico elemento di matrice dell'operatore U si ha :

$$\begin{aligned} \langle E_b, \beta | U(t, -\infty) | E_a, \alpha \rangle &\equiv U(t, -\infty)_{b,a} \\ &= \delta(b-a) - \frac{i}{\hbar} V_{b,a} \int_{-\infty}^t dt_1 e^{i(E_b - E_a - i\epsilon)t_1/\hbar} - \frac{1}{\hbar^2} \int dc V_{b,c} V_{c,a} \\ &\quad \int_{-\infty}^t dt_1 e^{i(E_b - E_c - i\epsilon)t_1/\hbar} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{i(E_c - E_a - i\epsilon)t_2/\hbar} + \dots = \delta(b-a) \\ &\quad - \frac{e^{i(E_b - E_a - i\epsilon)t/\hbar}}{E_b - E_a - i\epsilon} V_{b,a} + \int dc V_{b,c} V_{c,a} \frac{e^{i(E_b - E_a - 2i\epsilon)t/\hbar}}{(E_b - E_a - 2i\epsilon)(E_c - E_a - i\epsilon)} + \dots \\ &\simeq \delta(b-a) - e^{i(E_b - E_a - i\epsilon)t/\hbar} \frac{T_{b,a}}{E_b - E_a - i\epsilon} , \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

dove

$$T_{b,a} = \left[V_{b,a} - \int dc \frac{V_{b,c} V_{c,a}}{E_c - E_a - i\epsilon} + \dots \right] = \int dc V_{b,c} \left[\delta(c-a) + \frac{T_{c,a}}{E_a - E_c + i\epsilon} \right] . \quad (5.1.24)$$

³Stiamo assumendo che il potenziale sia abbastanza regolare da permettere di fattorizzare nella formula che segue il limite su U nel prodotto del limite su T e sull'integrale in a, b

Va notato che abbiamo sostituito nell'ultimo passaggio in Eq.(5.1.23) il simbolo \simeq con \simeq allo scopo di indicare che i multipli dell'infinitesimo ϵ sono stati sostituiti con ϵ , ma per di più la fattorizzazione della formula con l'introduzione della matrice T lascia intendere che al posto dell'unica operazione $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ se ne è introdotta una indipendente per ciascun infinitesimo identificando $1/(E_b - E_a - i\epsilon)$ con la distribuzione $1/(E_b - E_a - i0_+)$. Questa sostituzione è permessa sotto opportune condizioni di regolarità per gli elementi di matrice di V . Intesa la validità della sostituzione dell'unica operazione di limite con molte indipendenti è facile stabilire la relazione esistente fra la matrice di transizione $U(0, -\infty)$ e le funzioni di scattering $\Psi^{(+)}$ di Lippman e Schwinger.

Infatti consideriamo il vettore di stato $U(0, -\infty)|E_a, \alpha\rangle$ usando la Eq.(5.1.23) e la Eq.(5.1.24) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U(0, -\infty)|E_a, \alpha\rangle &= \int db |E_b, \beta\rangle U(0, -\infty)_{b,a} = |E_a, \alpha\rangle \\ &+ \int db |E_b, \beta\rangle \frac{T_{b,a}}{E_a - E_b + i\epsilon} = |E_a, \alpha\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\epsilon} V U(0, -\infty)|E_a, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Questo mostra che $U(0, -\infty)|E_a, \alpha\rangle$ e $|\Psi^{(+)}_a\rangle$ soddisfano la stessa equazione di Lippman-Schwinger e quindi vanno identificate. A posteriori questo risultato giustifica la sostituzione dell'unica operazione $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ con una indipendente per ciascun infinitesimo perché la Lippman-Schwinger segue direttamente dall'equazione di Schrödinger con le opportune condizioni asintotiche.

Si vede quindi che la probabilità di trovare nello stato b il sistema preparato a $t = -\infty$ in a è:

$$P_{a \rightarrow b} = \frac{e^{\frac{2\epsilon t}{\hbar}}}{(E_b - E_a)^2 + \epsilon^2} |T_{b,a}|^2, \quad (5.1.26)$$

la cui variazione nell'unità di tempo può essere calcolata nel limite di ϵ infinitesimo:

$$\dot{P}_{a \rightarrow b} = \frac{2\epsilon e^{\frac{2\epsilon t}{\hbar}}}{\hbar[(E_b - E_a)^2 + \epsilon^2]} |T_{b,a}|^2 \rightarrow \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_b - E_a) |T_{b,a}|^2, \quad (5.1.27)$$

dato che $\epsilon/(x^2 + \epsilon^2) \rightarrow \pi\delta(x)$. Questa equazione generalizza la regola d'oro che viene riprodotta sostituendo T con la sua prima approssimazione V . Una deduzione diversa della regola d'oro, in cui lo stato iniziale è fissato a $t = 0$

e la probabilità di transizione è studiata a $t \rightarrow \infty$ è presentata in appendice A. La (5.1.27) giustifica il nome di *interazione efficace* per T .

La regola d'oro è stata già applicata, al primo ordine, in numerosi esercizi, in particolare in (23), (24) nel gruppo (3.4), inoltre negli esercizi (1) - (3) e (7) - (10) nel gruppo (3.7) e negli esercizi (5) - (11) del gruppo (4.5), qui aggiungiamo, a titolo di esempio, il calcolo dell'ampiezza di scattering elastico particella fotone al limite di piccola energie del fotone. In questo limite il primo termine in H_I da un contributo di secondo ordine alla sezione d'urto elastica nel centro di massa. Questo contributo è trascurabile rispetto a quello dovuto al secondo termine perché il rapporto fra i due contributi è dell'ordine di grandezza di quello fra l'energia del fotone e quella cinetica della particella.

Calcoliamo qui di seguito il contributo del primo ordine nel secondo termine di H_I mentre le correzioni al secondo ordine dal primo termine verranno calcolate nella prossima sezione.

Si può dunque calcolare l'ampiezza di scattering in approssimazione di Born tramite la formula:

$$H_{F,I} \equiv \delta(\vec{p}_f + \vec{k}_f - \vec{p}_i - \vec{k}_i) f = \langle \Psi\{0\} | a(\vec{p}_f) A_\alpha(\vec{k}_f) H_I A_\beta(\vec{k}_i)^\dagger a^\dagger(\vec{p}_i) | \Psi\{0\} \rangle , \quad (5.1.28)$$

da cui si ha subito:

$$f = \frac{\alpha}{m (2\pi)^2} \frac{\epsilon_\alpha^*(\vec{k}_f) \cdot \vec{\epsilon}_\beta(\vec{k}_i)}{\sqrt{k_f k_i}} . \quad (5.1.29)$$

Osservando che $\epsilon_\alpha^*(\vec{k}_f) \cdot \vec{\epsilon}_\beta(\vec{k}_i)$ vale 1 se entrambi i fotoni, iniziale e finale, sono polarizzati perpendicolarmente al piano di scattering, $\cos \theta$ se entrambi lo sono nel piano di scattering e zero altrimenti, si ha per la sezione d'urto differenziale nel centro di massa:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \hbar^2}{c + \frac{k_i}{m}} |f|^2 \delta(E_i - E_f) \delta(\vec{k}_f + \vec{p}_f) d\vec{k}_k d\vec{p}_f \\ &= \frac{e^4 X \delta(c k_i + \frac{k_i^2}{2m} - c k_f + \frac{p_f^2}{2m}) \delta(\vec{k}_f + \vec{p}_f)}{\epsilon_0^2 m^2 c^2 (4\pi)^2 (c + \frac{k_i}{m}) k_f k_i} d\vec{k}_k d\vec{p}_f \\ &\simeq \left(\frac{e^2 X}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 d\Omega . \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

dove abbiamo trascurato la velocità della particella $\frac{k_i}{m}$ rispetto a c e X vale 1 o $\cos \theta$ nei due stati di polarizzazione sopra descritti.

Considerando il caso impolarizzato e quindi mediando sulla polarizzazione iniziale e sommando su quella finale si ha la formula di Thomson:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (5.1.31)$$

È dunque chiaro che, almeno formalmente, la teoria quantistica in volume infinito può essere ottenuta tramite banali operazioni di limite sugli operatori di creazione e distruzione. Naturalmente l'operazione di limite può essere assai meno banale in presenza di interazioni che diventano singolari a volume infinito; un esempio ben noto è il potenziale Coulombiano. E' dunque possibile che il limite a volume infinito comporti l'apparire di singolarità che spesso vengono dette catastrofi infra-rosse

Un metodo di calcolo alternativo e più diretto consiste nel valutare l'elemento di matrice di transizione nel sistema quantizzato nel volume finito V partendo da (5.0.9). Si otterrà

$$H_{F,I} = \frac{2\pi\alpha\hbar^2}{mL^3} \frac{\epsilon_{\alpha,\vec{k}_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\beta,\vec{k}_f}^*}{\sqrt{k_i k_f}} \delta_{\vec{p}_i + \vec{k}_i, \vec{p}_f + \vec{k}_f} \quad (5.1.32)$$

da cui nel limite di grandi V si ha :

$$|H_{F,I}|^2 \rightarrow \frac{4\pi^2\alpha^2\hbar^4}{m^2L^9} (2\pi)^3 \frac{|\epsilon_{\alpha,\vec{k}_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\beta,\vec{k}_f}^*|^2}{k_i k_f} \delta(\vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{p}_f - \vec{k}_f). \quad (5.1.33)$$

D'altra parte la densità di flusso fotonico, cioè il numero di fotoni che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo è $J = (c + (\hbar k_i/m))/L^3$. A questo punto la sezione d'urto differenziale nel centro di massa, che si ottiene dividendo per J la probabilità di transizione per unità di tempo, data in Appendice (A.0.16), risulta essere:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)}{\hbar} \frac{|H_{F,I}|^2}{J} \delta \left(c\hbar k_i + \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} - c\hbar k_f + \frac{\hbar^2 p_f^2}{2m} \right) \frac{L^6}{(2\pi)^6} d\vec{k}_f d\vec{p}_f \quad (5.1.34)$$

che porta direttamente all'espressione in (5.1.30) se si trascura in essa $\frac{\hbar k}{m}$ rispetto a c .

5.1.1 Interazioni indotte

Il caso più semplice è quello dell'interazione fra nucleoni indotta dall'interazione di Yukawa data in Eq.(5.0.2).

Per valutare il potenziale indotto calcoliamo l'elemento di matrice $T_{b,a}$ dell'interazione efficace fra uno stato formato da un protone e da un neutrone con impulsi opposti: $|\psi_a\rangle = a_{\vec{q},1}^\dagger a_{-\vec{q},2}^\dagger |\psi_0\rangle$ e un altro stato dello stesso tipo: $|\psi_b\rangle = a_{\vec{p},1}^\dagger a_{-\vec{p},2}^\dagger |\psi_0\rangle$ con $\vec{p} \neq \vec{q}$. Si noti che abbiamo completamente trascurato lo spin. Dalla formula in Eq.(5.1.24) appare chiaramente che il termine lineare in $V \equiv H_I$ non contribuisce all'elemento di matrice perché H_I agendo su uno stato privo di mesoni ne aggiunge uno:

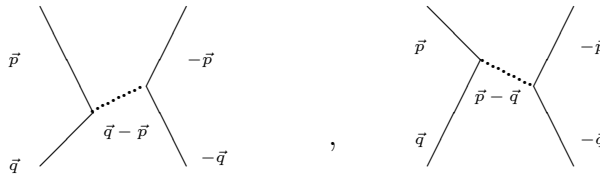
$$\begin{aligned} H_I |\psi_a\rangle &= g\hbar \sqrt{\frac{c^3}{2L^3}} \sum_{\vec{P}, \vec{k}, \sigma=1,2} \frac{A_{\vec{k}} + A_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega(\vec{k})}} a_{\vec{P}+\vec{k},\sigma}^\dagger, a_{\vec{P},\sigma} a_{\vec{q},1}^\dagger a_{-\vec{q},2}^\dagger |\psi_0\rangle \\ &= g\hbar \sqrt{\frac{c^3}{2L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega(\vec{k})}} [a_{\vec{q}+\vec{k},1}^\dagger a_{-\vec{q},2}^\dagger + a_{\vec{q},1}^\dagger a_{-\vec{q}+\vec{k},2}^\dagger] |\psi_0\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Analogamente l'azione di H_I sullo stato finale da:

$$H_I |\psi_b\rangle = g\hbar \sqrt{\frac{c^3}{2L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{A_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{\omega(\vec{k})}} [a_{\vec{p}+\vec{k},1}^\dagger a_{-\vec{p},2}^\dagger + a_{\vec{p},1}^\dagger a_{-\vec{p}+\vec{k},2}^\dagger] |\psi_0\rangle. \quad (5.1.36)$$

I possibili stati intermedi sono del tipo $|\psi_b\rangle = A_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}_1,1}^\dagger a_{\vec{p}_2,2}^\dagger |\psi_0\rangle$ con $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{k}$ e $\vec{p}_1 = \vec{p} + \vec{k} = \vec{q}$, $\vec{p}_2 = -\vec{p}$, oppure $\vec{p}_1 = \vec{p} = \vec{k} + \vec{q}$, $\vec{p}_2 = -\vec{p}$.

Si suole descrivere graficamente stati intermedi e processi di emissione e assorbimento tramite diagrammi, impropriamente detti di Feynman. Rappresentando i nucleoni tramite linee continue, i mesoni tramite linee punteggiate e il tempo crescente dal basso verso l'alto, si hanno i diagrammi riprodotti qui di seguito:



$$(5.1.37)$$

Come appare chiaramente nel diagramma di sinistra quando c'è il mesone la linea continua di sinistra, che è quella del protone, porta impulso $\hbar\vec{p}$,

mentre quella del neutrone a destra porta impulso $-\hbar\vec{q}$, nel diagramma a destra \vec{p} e \vec{q} si scambiano.

Se M è la massa del nucleone l'energia iniziale e finale $E_a = E_b = \hbar^2 p^2/M = \hbar^2 q^2/M$, mentre le energie dei due stati intermedi sono $E_c = \hbar^2 p^2/M + \hbar\omega(\vec{p} - \vec{q})$. Quindi $E_c - E_a = \hbar\omega(\vec{p} - \vec{q})$ e si ha:

$$T_{b,a} = -g^2 \frac{\hbar c^3}{\omega^2(\vec{p} - \vec{q})L^3} = -\frac{g^2 c \hbar}{L^3} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2 + 1/\lambda_c^2}. \quad (5.1.38)$$

Nel caso che ci fosse un'interazione diretta dovuta al potenziale $v(r)$ fra i nucleoni, al primo ordine in v si avrebbe $T_{b,a} = \tilde{v}(|\vec{p} - \vec{q}|)/L^3$, infatti il fattore 1/2 in Eq.(3.3.74) non appare perché abbiamo considerato l'interazione fra particelle distinte, neutrone e protone. Dal confronto appare che l'interazione indotta corrisponde a un'interazione da potenziale con:

$$\tilde{v}(k) \equiv \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} v(r) = -\frac{g^2 c \hbar}{k^2 + 1/\lambda_c^2}, \quad (5.1.39)$$

quindi si calcola

$$\begin{aligned} v(r) &\equiv -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{g^2 c \hbar}{k^2 + 1/\lambda_c^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int k^2 dk \int_{-1}^1 dx e^{-ikrx} \frac{g^2 c \hbar}{k^2 + 1/\lambda_c^2} = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int k dk [e^{ikr} - e^{-ikr}] \frac{g^2 c \hbar}{k^2 + 1/\lambda_c^2} = 2Re \left(\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int k dk e^{ikr} \frac{g^2 c \hbar}{k^2 + 1/\lambda_c^2} \right) \\ &= -\frac{g^2 c \hbar}{2\pi} \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r}, \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

che fornisce l'espressione del *potenziale di Yukawa*. Nella realtà le cose sono più complicate perché il potenziale di interazione fra i nucleoni contiene termini che dipendono dallo spin, si veda l'esercizio (1) della raccolta seguente.

Facendo riferimento alla sezione d'urto dell'effetto Thomson calcolata sopra osserviamo che il calcolo effettuato non esaurisce i termini di ordine e^2 nell'ampiezza. Infatti non abbiamo tenuto conto dell'effetto al secondo ordine perturbativo dei termini di (5.0.10) lineari nel potenziale vettore. Per questo è però necessario un ricorso alla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo oltre al primo ordine.

Nel caso specifico dell'interazione particella carica-fotone lo stato a va identificato con quello di una particella con impulso $\hbar\vec{p}$, non relativistico, e un fotone con numero d'onda \vec{k} e elicità λ mentre in b la particella ha impulso $\hbar\vec{p}'$ e il fotone numero d'onda \vec{k}' e elicità λ' . Dato che il termine preso in considerazione in (5.0.10) induce alternativamente l'emissione e l'assorbimento di un fotone, se $\vec{p} \neq \vec{p}'$ gli stati intermedi c di interesse, o non comprendono fotoni, bensì solo una particella con impulso $\hbar(\vec{p} + \vec{k})$, oppure comprendono il fotone iniziale e quello finale insieme alla particella con impulso $\hbar(\vec{p} - \vec{k}')$. Inoltre è conveniente scegliere il sistema di riferimento in cui \vec{p} e \vec{k} sono uguali e opposti così come \vec{p}' e \vec{k}' .

In questo caso, rappresentando gli elettroni tramite linee continue e i fotoni tramite linee punteggiate, si hanno i diagrammi di Feynman riprodotti qui di seguito:

$$(5.1.41)$$

Con la particolare scelta degli stati iniziale e finale e la conseguente selezione degli stati intermedi dovuta alla conservazione dell'impulso, si ha per la correzione a T :

$$\begin{aligned}
& - \int dc \frac{V_{b,c}V_{c,a}}{E_c - E_a - i\epsilon} \\
&= - \frac{\alpha\hbar^4}{(2\pi)^2 m \sqrt{k k'}} \left[\frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \vec{p}' \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}')}{\hbar(\vec{p} + \vec{k})^2/(2m) - \hbar p^2/(2m) - ck - i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \vec{p}' \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})}{\hbar(\vec{p} - \vec{k}')^2/(2m) - \hbar p^2/(2m) + ck' - i\epsilon} \right] \\
&\simeq \frac{\alpha\hbar^3}{(2\pi)^2 mc \sqrt{k k'}} \left[\frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \vec{p}' \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}')}{k} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \vec{p}' \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})}{k'} \right].
\end{aligned} \tag{5.1.42}$$

Confrontando questa espressione con (5.1.29) e ricordando che tutti i numeri d'onda, sono uguali in modulo ($k = k' = p = p'$), si vede subito che la

correzione calcolata appare di ordine $\hbar k/mc$ e quindi è trascurabile nel limite non relativistico.

5.1.2 Interazioni indotte in teorie relativistiche, il propagatore di Feynman

⁴ Per trarre la massima informazione dagli esempi trattati ripetiamo il calcolo dell'interazione di Yukawa in un sistema di riferimento qualunque.

Evidentemente nel paragrafo precedente abbiamo scelto di calcolare l'elemento di matrice di transizione elastica nel centro di massa per pure ragioni di semplicità di calcolo. Se invece consideriamo lo stesso elemento di matrice fra uno stato iniziale in cui le due particelle, a e b hanno *impulsi* generici \vec{p} e \vec{k} e quello finale con impulsi \vec{p}' e \vec{k}' mantenendo però il vincolo della conservazione dell'energia fra stato iniziale e finale, cioè $E_a(p) + E_b(k) = E_a(p') + E_b(k')$ il calcolo precedente fornisce l'elemento di matrice:

$$T_{F,I} = -\frac{g^2 \hbar^2 c^3}{2\omega(\vec{p} - \vec{p}') L^3} \left[\frac{1}{E_a(p') - E_a(p) + \hbar\omega(\vec{p} - \vec{p}') - i\epsilon} + \frac{1}{E_b(k') - E_b(k) + \hbar\omega(\vec{p} - \vec{p}') - i\epsilon} \right]. \quad (5.1.43)$$

Utilizzando la conservazione dell'energia questo si riduce a:

$$T_{F,I} = -\frac{g^2 \hbar^3 c^3}{L^3 [\hbar^2 \omega^2(\vec{p} - \vec{p}') - (E_a(p') - E_a(p))^2 - i\epsilon]}, \quad (5.1.44)$$

dove, dato che ora \vec{p} e \vec{p}' sono impulsi, si ha: $\omega(\vec{p}) = c\sqrt{p^2/\hbar^2 + 1/\lambda_c^2}$. Usando la Eq.(3.5.202) si ha anche $\omega(\vec{p}) = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}/\hbar$. Sostituendo quindi in $T_{F,I}$ si trova:

$$T_{F,I} = \frac{g^2 \hbar^3 c^3}{L^3 [(E_a(p') - E_a(p))^2 - c^2(\vec{p}' - \vec{p})^2 - m^2 c^4 + i\epsilon]}. \quad (5.1.45)$$

L'espressione al denominatore dell'Eq.(5.1.45) merita un commento. Le differenze $E_a(p') - E_a(p)$ e $c(\vec{p}' - \vec{p})$ appaiono alla luce della relatività le quattro

⁴Si veda anche [9] (Cap. 6), [12] (Cap. 4)

componenti della differenza fra il tetravettore energia-impulso della particella a nello stato finale e nello stato iniziale. Quindi si tratta del *tetravettore energia-impulso trasferito* dalla particella b alla a durante l'interazione. Se indichiamo con Q questo tetravettore, risulta subito che l'interazione indotta dallo scambio (emissione seguita da assorbimento) di un mesone fra i due nucleoni a e b è data dall'espressione:

$$T_{F,I} = \frac{g^2 \hbar^3 c^3}{L^3 [Q^2 - m^2 c^4 + i\epsilon]} , \quad (5.1.46)$$

dove evidentemente abbiamo indicato con Q^2 il quadrato invariante del tetravettore energia-impulso trasferito. A parte la presenza del volume di quantizzazione che è legata alla scelta del metodo di quantizzazione e che scompare nei calcoli fisici, appare in modo evidente l'invarianza relativistica dell'espressione trovata che rende conto in un unico termine dei due diagrammi considerati nel calcolo.

Il fattore $1/(Q^2 - m^2 c^4 + i\epsilon)$ che sostituisce i fattori con energie al denominatore nella formula Eq.(5.1.24) è la trasformata di Fourier del *Propagatore di Feynman* e la Eq.(5.1.46) fornisce il primo termine nello sviluppo dell'interazione nucleone-nucleone nella *Teoria delle Perturbazioni Covarianti di Feynman*. Un analogo propagatore, ma senza massa, appare nello sviluppo covariante dell'*Elettrodinamica Quantistica*.

Un altro commento all'applicazione dello sviluppo perturbativo dato in Eq. (5.1.24) alle teorie relativistiche e al corrispondente sviluppo in diagrammi di Feynman riguarda l'identificazione di quest'ultimo col calcolo delle correzioni quantistiche a una teoria semi-classica. Il parametro di sviluppo viene spesso identificato con \hbar . Se, per esempio, consideriamo le correzioni all'approssimazione di Born all'ampiezza di scattering elastico indotta dall'interazione data in Eq. (3.5.203) (Si veda per l'approssimazione di Born l'esercizio (7) del gruppo (3.7)) troviamo che nel limite di grande volume Ω e nel centro di massa l'elemento di matrice

$$\langle \vec{k}_2, \vec{k}_1 | H_I | \vec{p}_2, \vec{p}_1 \rangle = \frac{(2\pi)^3 \lambda c^3 \hbar^6}{4\Omega^2 E(k) E(p)} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) , \quad (5.1.47)$$

dove gli stati sono normalizzati come autostati dell'impulso \vec{p} e $E(p)$ è l'energia delle particelle con impulso \vec{p} . In base alla Eq. (5.1.24) possiamo calcolare il termine successivo nello sviluppo perturbativo dell'elemento di matrice di transizione baricentrale, trascurando i contributi con 4 particelle

nello stato intermedio troviamo:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{k}_2, \vec{k}_1 | T | \vec{p}_2, \vec{p}_1 \rangle &= \frac{(2\pi)^3 \lambda c^3 \hbar^6}{4\Omega^2 E(k) E(p)} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) - \frac{\Omega^2}{2h^6 E(k) E(p)} \\
\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left(\frac{(2\pi)^3 \lambda c^3 \hbar^6}{4\Omega^2} \right)^2 \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 &\frac{\delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)}{E(q)^2 (2E(p) - 2E(q) + i\epsilon)} \\
= \frac{(2\pi)^3 \lambda c^3 \hbar^6}{4\Omega^2 E(k) E(p)} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) &\left[1 - \frac{\lambda c^3}{16(2\pi)^3} \int d\vec{q} \frac{1}{E(q)^2 (2E(p) - 2E(q) + i\epsilon)} \right] \\
+ O(\lambda^3), & \tag{5.1.48}
\end{aligned}$$

La correzione è proporzionale a un integrale divergente (logaritmicamente), difficoltà viene risolta dalla *rinormalizzazione*, per'altro la correzione è di ordine λ come atteso. Dal punto di vista delle correzioni alla teoria semiclassica nello sviluppo in diagrammi di Feynman le cose cambiano, seppure in modo formale. Infatti questo è in realtà uno sviluppo in \hbar ad azione costante. Quindi, dato che nell'interazione in Eq. (3.5.203) appare il coefficiente $\frac{\lambda}{\hbar c}$ che va tenuto costante, il nostro λ adimensionato va sostituito con un nuovo parametro g con le dimensioni del reciproco di un'azione tramite $\lambda = \hbar g$. Evidentemente dopo questa sostituzione la correzione appare di ordine $\hbar c g$ e pertanto si annulla al limite *classico* in cui $\hbar \rightarrow 0$. Il termine dominante nel limite resta quello in approssimazione di Born.

5.2 L'interazione elettrone-fonone

⁵ Consideriamo ora le interazioni degli elettroni con i reticoli cristallini in cui sono immersi e quindi con i campi elastici che descrivono le deformazioni dei reticoli, considerando, in prima approssimazione, gli elettroni come particelle libere di muoversi in una scatola corrispondente al cristallo con condizioni al contorno periodiche.

Evidentemente, riferendosi agli elettroni con uno schema così elementare si introducono semplificazioni di due tipi differenti. La prima semplificazione, che peraltro corrisponde all'effetto di più facile controllo, consiste nel trascurare il fatto che, in un metallo, gli elettroni non si muovono liberamente, ma sono soggetti a forze dovute agli ioni del reticolo cristallino. La semplicità dell'effetto sta nel fatto che, in prima approssimazione, trascurando le

⁵Si veda anche [13] (Cap. X-XI) e [14] (Cap 1, §5.7, §6.12, §11.1)

possibili deformazioni del reticolo, cioè la presenza di fononi, le forze che si esercitano sugli elettroni sono periodiche, con periodo pari al passo reticolare, lungo ogni asse di simmetria traslazionale del reticolo. Si noti che la presenza dei fononi è tanto più trascurabile quanto più è bassa la temperatura.

Se chiamiamo T_i con $i = 1, 2, 3$ gli operatori che generano le traslazioni sulle funzioni d'onda del sistema, assumendo una dimensione del cristallo pari a $2N + 1$ passi reticolari lungo ogni asse e, come si è già detto, condizioni periodiche al bordo, si ha $T_i^{2N+1} = 1$ che implica che gli autovalori dei T_i , che sono unitari, coincidono con radici N -me dell'identità: $e^{\frac{2\pi i n_i}{2N+1}}$ con n_i intero e $-N \leq n_i \leq N$. Essendo i T_i operatori di simmetria del sistema, essi commutano con l'Hamiltoniano le cui autofunzioni di singola particella saranno anche autofunzioni dei T_i . Dunque la generica autofunzione sarà $\psi_{\alpha, n_i}(\vec{r}, \sigma)$ con:

$$T_i^m \psi_{\alpha, n_i}(\vec{r}, \sigma) \equiv \psi_{\alpha, n_i}(\vec{r} + m a \vec{i}, \sigma) = e^{\frac{2\pi i n_i m}{2N+1}} \psi_{\alpha, n_i}(\vec{r}, \sigma) , \quad (5.2.49)$$

dove \vec{i} è il versore dell'asse i -esimo. Per semplificare le formule stiamo assumendo un reticolo cubico di passo a .

È chiaro che l'Eq. (5.2.49) implica che la funzione d'onda moltiplicata per il fattore di fase opposto a $e^{-i \frac{2\pi \vec{n} \cdot \vec{r}}{(2N+1)a}}$ dove \vec{n} è un vettore con componenti n_i , diventa periodica con periodo a , quindi potremo scrivere:

$$\psi_{\alpha, n_i}(\vec{r}, \sigma) = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\alpha, \vec{k}}(\vec{r}, \sigma) , \quad (5.2.50)$$

dove la funzione u è periodica, e $\vec{k} = \frac{2\pi \vec{n}}{(2N+1)a} \equiv \frac{2\pi \vec{n}}{L}$ (L è il lato del cristallo) è evidentemente il numero d'onda che, nel caso presente, è vincolato ad avere componenti $|k_i| \leq \frac{\pi}{a}$, cioè a essere contenuto in un cubo di lato $\frac{2\pi}{a}$ che nel nostro caso definisce la zona di Brillouin. L'indice α che appare in u distingue le varie bande.

Da questo risultato, che corrisponde a quanto in letteratura viene chiamato *Teorema di Bloch* ([14] §1.4) appare chiaro che, almeno su distanze di molti passi reticolari, la funzione d'onda varia come la solita onda piana, seppure con numero d'onda limitato alla zona di Brillouin; questo giustifica l'uso di semplici onde piane nel caso di bande poco occupate in cui i numeri d'onda sono appunto piccoli rispetto all'inverso del passo reticolare.

Avendo così motivato l'uso di una base di onde piane possiamo ora discutere brevemente l'effetto delle deformazioni reticolari, cioè della presenza dei fononi. A questo scopo consideriamo l'energia potenziale V_I di interazione

fra un elettrone e il reticolo in cui è immerso; indicando con $\vec{r}_{\vec{n}}$ la posizione dello ione corrispondente al punto \vec{n} $a \equiv \sum_i n_i \vec{i} a$ del reticolo, abbiamo:⁶

$$V_I = \sum_{\vec{n}} v(\vec{r} - \vec{r}_{\vec{n}}) , \quad (5.2.51)$$

dove v è l'energia d'interazione elettrone-ione. Partendo dalla definizione del campo fononico $\vec{\chi}$ abbiamo:

$$\vec{r}_{\vec{n}} = \vec{n}a + \vec{\chi}(\vec{n}) . \quad (5.2.52)$$

In prima approssimazione possiamo ora assumere che in media χ sia piccolo rispetto a $|\vec{r} - \vec{r}_{\vec{n}}|$ e che (5.2.51) sia ben approssimata dal suo sviluppo di Taylor al primo ordine nel campo fononico. Evidentemente la bontà di quest'ipotesi dipende dagli stati elettronici a cui ci si riferisce e migliora al diminuire dei numeri d'onda coinvolti. Abbiamo allora:

$$V_I = \sum_{\vec{n}} v(\vec{r} - \vec{n}a) - \sum_{\vec{n}} \vec{\chi}(\vec{n}) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{r} - \vec{n}a) + O(\chi^2) . \quad (5.2.53)$$

Il primo termine in (5.2.53) altro non è che il potenziale periodico di cui si è già tenuto conto nella definizione delle funzioni d'onda di singolo elettrone, mentre il secondo approssima le correzioni all'interazione dovute al campo fononico; noi chiameremo questo termine d'interazione elettrone-fonone e lo indicheremo con h_I . Nel caso di grandi lunghezze d'onda rispetto al passo reticolare la sommatoria rispetto a \vec{n} nel secondo termine può esser approssimata con un integrale rispetto a \vec{R} scrivendo:

$$h_I = -\frac{1}{a^3} \int d\vec{R} \vec{\chi}(\vec{R}) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{r} - \vec{R}) = -\frac{1}{a^3} \int d\vec{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}(\vec{R}) v(\vec{r} - \vec{R}) . \quad (5.2.54)$$

tenendo conto dell'espressione (3.5.161) a $t = 0$, l'Hamiltoniano d'interazione h_I può essere scritto un termini degli operatori di creazione e distruzione fononici:

$$\begin{aligned} h_I &= -\frac{1}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L^3}} \sum_{\alpha, \vec{k} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\alpha, \vec{k}}}} \left[A_{\alpha, \vec{k}} \int d\vec{R} \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} \cdot \vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} v(\vec{r} - \vec{R}) + h.c. \right] \\ &= -\frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L^3}} \sum_{\alpha, \vec{k} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\alpha, \vec{k}}}} \left[A_{\alpha, \vec{k}} \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} \cdot \vec{k} \int d\vec{R} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} v(\vec{r} - \vec{R}) - h.c. \right] \end{aligned}$$

⁶Ci stiamo sempre riferendo a un reticolo cubico di passo a .

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{3,\vec{k}}}} [A_{3,\vec{k}} k \tilde{v}(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - h.c.] \\
&= -\frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{k} \tilde{v}(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} [A_{3,\vec{k}} - A_{3,-\vec{k}}^\dagger] , \tag{5.2.55}
\end{aligned}$$

dove *h.c.* indica l'hermitiano coniugato del termine precedente e v_3 è la velocità dei fononi longitudinali, gli unici che intervengono nell'interazione. L'operatore h_I è rappresentato in seconda quantizzazione nelle variabili fononiche, ma è un operatore di prima quantizzazione e di singola particella per quel che riguarda le variabili elettroniche. L'operatore H_I corrispondente a h_I in rappresentazione di seconda quantizzazione in tutte le variabili può essere ottenuto facilmente introducendo l'operatore di distruzione di un elettrone localizzato in analogia con quanto già fatto nel caso bosonico (3.3.52). Sia dunque:

$$\Psi(\vec{r}, \sigma) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} a_{\vec{p},\sigma} , \tag{5.2.56}$$

questo operatore espresso in termini degli operatori di distruzione $a_{\vec{p},\sigma}$ nella rappresentazione numero d'onda (e spin σ), avremo:

$$\begin{aligned}
H_I &= \sum_{\sigma} \int d\vec{r} \Psi^\dagger(\vec{r}, \sigma) h_I(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, \sigma) \\
&= -\frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 L^3}} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \sigma} \sqrt{k} \tilde{v}(k) a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} [A_{3,\vec{k}} - A_{3,-\vec{k}}^\dagger] . \tag{5.2.57}
\end{aligned}$$

Vale la pena di notare la stretta analogia fra questo operatore d'interazione elettrone-fonone e l'Hamiltoniana d'interazione particella-fotone (5.0.9).

Vogliamo ora mostrare seguendo quanto presentato nelle sezioni precedenti ((5.1) e seguenti) di questo capitolo come l'interazione elettrone-fonone induca al secondo ordine un'attrazione elettrone-elettrone che compete con la repulsione Coulombiana.

Per questo, sempre riferendoci alla formula per l'interazione efficace:

$$T_{b,a} = V_{b,a} - \int dc \frac{V_{b,c} V_{c,a}}{E_c - E_a - i\epsilon} + \dots$$

consideriamo lo stato iniziale a di due elettroni con spin e impulsi opposti corrispondente al ket $|\vec{k}, +, -\vec{k}, -\rangle$ e quello finale b corrispondente al ket

$|\vec{p}, +, -\vec{p}, -\rangle$ Si tratta ora di individuare gli stati intermedi c che contribuiscono alla somma. Questi contengono necessariamente un fonone oltre a due elettroni, infatti H_I induce processi in cui o si crea o si distrugge un fonone. Si tratta di distinguere il caso in cui il fonone è emesso dall'elettrone con spin $+$ e assorbito poi da quello con spin $-$ o viceversa. Nel primo caso emettendo il fonone l'elettrone con spin $+$ deve passare al numero d'onda \vec{p} e quindi il fonone creato deve aver numero d'onda $\vec{k} - \vec{p}$, nel secondo l'elettrone con spin $-$, emesso il fonone, deve passare al numero d'onda $-\vec{p}$ e il fonone ha numero d'onda $\vec{p} - \vec{k}$. In entrambi i casi gli stati intermedi c sono costituiti dall'elettrone che ha emesso il fonone, col numero d'onda cambiato, dall'altro elettrone col numero d'onda iniziale e dal fonone e l'energia $E_c = E(p) + E(k) + \hbar v_3 |\vec{p} - \vec{k}|$ e gli elementi di matrice di H_I sono dati da:

$$\langle c | H_I | \vec{k}, +, -\vec{k}, - \rangle = \frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 L^3}} \sqrt{|\vec{p} - \vec{k}|} \tilde{v}(|\vec{p} - \vec{k}|), \quad (5.2.58)$$

e da:

$$\langle \vec{p}, +, -\vec{p}, + | H_I | c \rangle = -\frac{i}{a^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 L^3}} \sqrt{|\vec{p} - \vec{k}|} \tilde{v}(|\vec{p} - \vec{k}|). \quad (5.2.59)$$

Anche in questo caso è possibile descrivere graficamente stati intermedi e processi di emissione e assorbimento tramite diagrammi. Rappresentando gli elettroni tramite linee continue, i fononi tramite linee punteggiate e il tempo crescente dal basso verso l'alto, si hanno i diagrammi riprodotti qui di seguito:

$$(5.2.60)$$

Tornando al calcolo della interazione effettiva definita in (5.1.23) si ottiene al secondo ordine in H_I :

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}, +, -\vec{p}, - | T | \vec{k}, +, -\vec{k}, - \rangle \\ &= \frac{\hbar}{\rho v_3 L^3 a^6} \frac{|\vec{p} - \vec{k}| \tilde{v}^2(|\vec{p} - \vec{k}|)}{E(k) - E(p) - \hbar v_3 |\vec{p} - \vec{k}| + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

Si vede quindi che l'interazione elettrone-fonone induce un'interazione diretta elettrone-elettrone corrispondente a un potenziale:

$$V_{eff} = \frac{\hbar}{\rho v_3 a^6} \frac{|\vec{p} - \vec{k}| \tilde{v}^2(|\vec{p} - \vec{k}|)}{E(k) - E(p) - \hbar v_3 |\vec{p} - \vec{k}| + i\epsilon}, \quad (5.2.62)$$

che ristretto ai processi elastici o quasi-elastici, cioè quando $|E(k) - E(p)| \ll \hbar v_3 |\vec{p} - \vec{k}|$ si riduce a:

$$V_{eff} = -\frac{1}{\rho v_3^2 a^6} \tilde{v}^2(|\vec{p} - \vec{k}|) = -\frac{1}{M v_3^2 a^3} \tilde{v}^2(|\vec{p} - \vec{k}|). \quad (5.2.63)$$

Abbiamo sostituito il prodotto della densità del solido ρ per il volume di una cella elementare a^3 con la massa di un atomo M .

Per procedere oltre nel nostro calcolo bisogna calcolare la trasformata di Fourier dell'energia potenziale elettrone-ione \tilde{v} e la velocità dei fononi longitudinali v_3 . L'interazione elettrone-ione sarebbe puramente Coulombiana se la presenza di una nuvola di elettroni liberi nel conduttore non schermasse le cariche. Infatti invece di:

$$\tilde{v}_v(q) = -\frac{Ze^2}{\epsilon_0 q^2}, \quad (5.2.64)$$

che sarebbe vera nel vuoto, in un conduttore si ha:

$$\tilde{v}(q) = -\frac{Ze^2 D^2}{\epsilon_0 (1 + q^2 D^2)}, \quad (5.2.65)$$

dove $D \simeq \sqrt{2\epsilon_0 E_F a^3} / (\sqrt{3}e)$ se E_F è l'energia di Fermi del conduttore (si veda Eq.(C.0.7) in appendice (C)). Si vede quindi che in un conduttore simile al ferro, in cui si ha un elettrone di conduzione per cella elementare la velocità di Fermi è 20 – 30 volte quella del suono. Si passa da alcune migliaia di metri al secondo a svariate decine di migliaia.

Un modo naturale per render conto della differenza è osservare che nella materia la costante dielettrica ϵ_0 va sostituita con $\epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$. Dal confronto delle due espressioni si ha subito che la costante dielettrica relativa ϵ_r dipende da q e vale:

$$\epsilon_r = \frac{1 + q^2 D^2}{q^2 D^2} \quad (5.2.66)$$

che per piccoli q diverge come

$$\epsilon_r \simeq \frac{1}{q^2 D^2} . \quad (5.2.67)$$

Questo risultato, cioè che la costante dielettrica di un conduttore diverge a grandi lunghezze d'onda, e quindi il suo valore a $q = 0$ è infinito, non stupisce dato che si tratta di un conduttore.

Tenendo conto di questo passiamo a considerare la velocità dei fononi v_3 . Per grandi lunghezze d'onda le oscillazioni longitudinali del reticolo, che originano dalle forze Coulombiane dovute agli spostamenti delle cariche, possono essere assimilate a oscillazioni di plasma cioè a onde di pressione in un sistema di cariche all'equilibrio. Le particelle cariche a cui ci si riferisce sono gli ioni che si muovono soggetti alla mutua repulsione Coulombiana nel campo elettrostatico degli elettroni che può essere considerato indipendente dal tempo a causa dell'alta velocità degli stessi. In effetti la nuvola elettronica si muove seguendo rigidamente il moto ionico ed è responsabile degli effetti dielettrici del solido (cioè di ϵ_r).

Se consideriamo un sistema di particelle con carica Q distribuite uniformemente con densità ρ , kg/m^3 . Una piccola fluttuazione della densità $\delta\rho(\vec{r}, t)$ corrispondente a uno spostamento delle particelle con velocità $\delta\vec{v}(\vec{r}, t)$, soddisfa l'equazione di conservazione del numero delle particelle che, al primo ordine nella fluttuazione, si scrive:

$$\delta\dot{\rho} + \rho\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0 . \quad (5.2.68)$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo si ha:

$$\delta\ddot{\rho} = -\rho\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{a} = -\frac{Q\rho}{M}\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{E} , \quad (5.2.69)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione delle particelle, M la loro massa e \vec{E} il campo elettrico nel punto considerato. Dalle equazioni di Maxwell abbiamo che $\nabla \cdot \delta\vec{E} = Q\delta\rho/(M\epsilon)$. Infatti la distribuzione di carica uniforme non produce alcun campo elettrico e quindi il campo stesso è unicamente generato dalle fluttuazioni. Si noti che sostituendo in questa formula l' ϵ_0 previsto dalle equazioni da Maxwell con l'indice di rifrazione dato in Eq.(5.2.67) si intende tener conto del fatto che il campo degli ioni è schermato dagli elettroni. Questi, muovendosi molto più rapidamente degli ioni, producono una nuvola di carica schermante che segue rigidamente gli ioni stessi.

Quindi otteniamo sostituendo nell'equazione precedente:

$$\delta\ddot{\rho} = -\frac{Q^2\rho}{\epsilon M^2}\delta\rho . \quad (5.2.70)$$

Questa è un'equazione armonica da cui si deduce subito che le fluttuazioni di carica oscillano con frequenza angolare (di plasma) data da:

$$\omega_P^2 = 4\pi^2\nu_P^2 = \frac{(Ze)^2\rho}{M^2\epsilon} , \quad (5.2.71)$$

dove ρ è sempre la densità del solido e Q è stato sostituito da Ze . Tenendo conto di (5.2.67) si ha dunque:

$$\omega_P^2(q) = \frac{(Ze)^2\rho D^2}{M^2\epsilon_0}q^2 , \quad (5.2.72)$$

da cui troviamo, data la massa dell'elettrone m_e , che la velocità delle onde, cioè v_3 è data da:

$$v_3 = \frac{ZeD}{M}\sqrt{\frac{\rho}{\epsilon_0}} \sim v_F Z \sqrt{\frac{m_e}{2M}} . \quad (5.2.73)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare il valore del potenziale efficace elettrone-elettrone indotto dai fononi (5.2.63):

$$V_{eff} = -\frac{1}{Mv_3^2 a^3}\tilde{v}^2(|\vec{p}-\vec{k}|) = -\frac{M\epsilon_0}{Z^2 e^2 D^2 \rho a^3} \left(\frac{Ze^2 D^2}{\epsilon_0}\right)^2 = -\frac{e^2 D^2}{\epsilon_0} . \quad (5.2.74)$$

Si vede subito che, tenendo conto dello schermaggio, il potenziale calcolato è eguale e opposto al potenziale repulsivo diretto tra due elettroni. In conclusione, almeno nello schema ultra semplificato che abbiamo trattato, l'interazione elettrone-elettrone indotta dai fononi bilancia esattamente la repulsione Coulombiana. L'identificazione di un conduttore con un gas di elettroni non interagenti non è poi così assurda.

Dato che l'interazione elettrone-ione riceve contributi repulsivi dal principio di esclusione di Pauli relativo agli elettroni più legati oltre che altri contributi di diversa origine, ci si deve aspettare che in realtà l'equilibrio fra le due interazioni fin qui discusse sia rotto, in particolare da deboli termini attrattivi a corte distanze.

Secondo la teoria BCS questi sono responsabili della superconduttività. Naturalmente il principio d'esclusione implica che l'interazione attrattiva abbia effetti significativi solo fra elettroni di spin opposto, altrimenti la funzione

d'onda deve annullarsi a corte distanze perché antisimmetrica e questo deprime gli effetti di qualunque interazione. Così si giustifica anche il fatto che nello studio dell'interazione indotta dai fononi ci siamo limitati a elettroni di spin opposto. Questi argomenti sono alla base del modello di BCS semplificato che abbiamo studiato tramite la trasformazioni canoniche.

5.3 Esercizi

1. Calcolare l'Hamiltoniano di interazione corrispondente nel limite non relativistico alla densità Lagrangiana data in Eq.(5.0.3). Tenendo conto appunto del vincolo non relativistico non si considerino i termini che contengono due operatori di creazione o due operatori di distruzione di barioni e antibarioni

(Sol: Inserendo direttamente Eq(4.4.179) in Eq.(5.0.3) si ottiene: $H_Y = -ig_Y \sqrt{\hbar c}$

$$\int d\vec{r} (\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \Psi(\vec{r}, -) \sigma_2) (I - i \frac{\hbar \vec{\nabla}}{2mc} \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\pi}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}) \gamma^0 \gamma^5 (I + i \frac{\hbar \vec{\nabla}}{2mc} \cdot \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \Psi(\vec{r}, +) \\ \Psi^\dagger(\vec{r}, -) \sigma_2 \end{pmatrix} .$$

Va notato che usiamo il simbolo di vettore, sia per i vettori spaziali, sia per quelli isotopici. Non ci pare che sia rischio di confusione perché i soli vettori isotopici sono $\vec{\pi}$ e $\vec{\tau}$. Selezionando i termini che creano e distruggono barioni oppure antibarioni rimaniamo solo con i termini in cui appare la matrice $\gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma}$, o ciò che è lo stesso $\vec{\gamma} \gamma^0 \gamma^5$ troviamo:

$$H_Y = g_Y \sqrt{\frac{\hbar^3}{4m^2c}} \int d\vec{r} (\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \Psi(\vec{r}, -) \sigma_2) \vec{\gamma} \gamma^0 \gamma^5 (\vec{\nabla}(\vec{\pi}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau})) \begin{pmatrix} \Psi(\vec{r}, +) \\ \Psi^\dagger(\vec{r}, -) \sigma_2 \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$H_Y = -g_Y \sqrt{\frac{\hbar^3}{4m^2c}} \int d\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [(\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \vec{\sigma} \vec{\tau} \Psi(\vec{r}, +)) + (\Psi(\vec{r}, -) \sigma_2 \vec{\sigma} \sigma_2 \vec{\tau} \Psi^\dagger(\vec{r}, -))] \cdot \vec{\pi}(\vec{r}) ,$$

che, riportato in ordine normale diventa:

$$H_Y = -g_Y \sqrt{\frac{\hbar^3}{4m^2c}} \int d\vec{r} \vec{\nabla} \cdot [(\Psi^\dagger(\vec{r}, +) \vec{\sigma} \vec{\tau} \Psi(\vec{r}, +)) + (\Psi^\dagger(\vec{r}, -) \vec{\sigma} \vec{\tau}^T \Psi(\vec{r}, -))] \cdot \vec{\pi}(\vec{r}) .$$

2. L'interazione col campo elettromagnetico di un atomo di un gas nobile pesante posto nell'origine delle coordinate può essere assimilata a quella

dovuta a una variazione locale della costante dielettrica che assumiamo valere $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0(1 + \delta(\vec{r})) = \epsilon_0(1 + \lambda \exp(-r^2/D^2))$. Si assume che la costante dielettrica non dipenda dal tempo perché l'atomo viene considerato di massa infinita e vincolato nell'origine.

In questa situazione si ha una variazione dell'Hamiltoniano del campo elettromagnetico pari a

$$H_i = \lambda \epsilon_0 \int d\vec{r} \exp(-r^2/D^2) E^2(\vec{r})/2 .$$

Si vuol calcolare in approssimazione di Born la sezione d'urto totale, cioè integrata sugli angoli, di diffusione di un fotone impolarizzato di numero d'onda q_i da parte dell'atomo ponendo $\lambda = 10^{-5}$, $q_i = 10^{10} m^{-1}$, e $D = 10^{-9} m$.

(Sol. Sostituendo l'espressione del campo elettrico quantistico nel volume di quantizzazione Ω si ha: $H_i = -\frac{\lambda \hbar c \pi^{3/2} D^3}{4\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', h, h'} \sqrt{k k'} \epsilon_{\vec{k}', h'} \cdot \epsilon_{\vec{k}, h} (A_{\vec{k}, h} - A_{-\vec{k}, h}^\dagger) (A_{\vec{k}', h'} - A_{-\vec{k}', h'}^\dagger) \exp(-(\vec{k} + \vec{k}')^2 D^2)/4$ dove h e h' indicano le elicità dei fotoni.

Applicando la regola d'oro e indicando con \vec{q}_i, h_i e \vec{q}_f, h_f i numeri d'onda e le elicità iniziali e finali del fotone e con θ l'angolo fra i due numeri d'onda, si ha:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\pi\Omega}{\hbar c} \left(\frac{\lambda \hbar c \pi^{3/2} D^3}{4\Omega} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{h_i, h_f} |\epsilon_{\vec{q}_f, h_f}^* \cdot \epsilon_{\vec{q}_i, h_i}|^2 4 q_i q_f \exp(-(\vec{q}_i - \vec{q}_f)^2 D^2)/2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} d\vec{q}_f \delta(\hbar c(q_i - q_f)) \\ &= \frac{\pi \lambda^2 D^6}{32} q_i^4 (1 + \cos \theta) \exp(-(1 - \cos \theta) q_i^2 D^2) d\varphi d \cos \theta . \text{ Quindi si ha:} \\ \sigma &= \frac{\pi^2 \lambda^2 D^6}{16} q_i^4 \int_{-1}^1 (1 + \cos \theta) \exp(-(1 - \cos \theta) q_i^2 D^2) d \cos \theta \\ &= \frac{\pi^2 \lambda^2 D^6}{16} q_i^4 \left[\frac{2}{q_i^2 D^2} - \frac{1}{q_i^4 D^4} + \frac{\exp(-2q_i^2 D^2)}{q_i^4 D^4} \right] \simeq \frac{\pi^2 \lambda^2 D^4}{8} q_i^2 \sim 1,2 \cdot 10^{-26} m^2 . \end{aligned}$$

Si noti la stretta analogia col calcolo dello scattering Thompson in sezione (5.1.)

3. Le particelle di un gas di bosoni con massa M nel volume Ω interagiscono con il campo scalare relativistico studiato nel paragrafo (5.0.1) tramite l'operatore:

$$H_I = g \sqrt{\hbar c} / \Omega \int d\vec{r} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \phi(\vec{r}) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{q}} \exp(i\vec{r} \cdot (\vec{q} - \vec{k}))$$

dove $a_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione bosonico. Calcolare, nel limite di grande M , l'interazione indotta tra i bosoni al secondo ordine in H_I e la sezione d'urto differenziale di scattering elastico nel centro di massa fra due bosoni.

(Sol: In termini degli operatori di creazione e distruzione del campo si ha $H_I = g \hbar c / \sqrt{2\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} (A_{\vec{q}} + A_{-\vec{q}}^\dagger) / (q^2 + \mu^2)^{1/4}$, Se calcoliamo gli elementi di matrice

dell'interazione indotta fra lo stato $|a\rangle = a_{\vec{Q}}^\dagger a_{-\vec{Q}}^\dagger |0\rangle$ e lo stato $|b\rangle = a_{\vec{K}}^\dagger a_{\vec{K}'}^\dagger |0\rangle$ con $\vec{Q} \neq \vec{0}$, $\vec{Q} \neq \vec{K}$, $\vec{Q} \neq \vec{K}'$ e $\vec{0} = \vec{K} + \vec{K}'$ si hanno contributi dagli stati intermedi in cui è stato creato uno scalare, cioè $|c\rangle = A_{-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{Q}+\vec{q}}^\dagger a_{-\vec{Q}}^\dagger |0\rangle$ e $|d\rangle = A_{-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{Q}}^\dagger a_{-\vec{Q}+\vec{q}}^\dagger |0\rangle$. Gli elementi di matrice rilevanti sono:

$$\begin{aligned} \langle c|H_I|a\rangle &= \langle d|H_I|a\rangle = g\hbar c / [\sqrt{2\Omega}(q^2 + \mu^2)^{1/4}] \\ \text{e } \langle b|H_I|c\rangle &= g\hbar c / [\sqrt{2\Omega}(q^2 + \mu^2)^{1/4}] \delta_{\vec{K}, -\vec{K}'} [\delta_{\vec{K}, \vec{Q}+\vec{q}} + \delta_{-\vec{K}, \vec{Q}+\vec{q}}], \\ \langle b|H_I|d\rangle &= g\hbar c / [\sqrt{2\Omega}(q^2 + \mu^2)^{1/4}] \delta_{\vec{K}, -\vec{K}'} [\delta_{\vec{K}, \vec{Q}-\vec{q}} + \delta_{-\vec{K}, \vec{Q}-\vec{q}}], \end{aligned}$$

Si ha anche $E_c - E_a = \hbar\omega(p) + Q^2/(2M) + \vec{q} \cdot \vec{Q}/M \simeq \hbar\omega(q)$ e $E_d - E_a = \hbar\omega(q) + Q^2/(2M) - \vec{Q} \cdot \vec{q}/M \simeq \hbar\omega(q)$.

Quindi l'elemento di matrice dell'interazione indotta è:

$$\langle b|T|a\rangle = -g^2\hbar c^3 \delta_{\vec{K}, -\vec{K}'} [1/\omega^2(\vec{Q} + \vec{K}') + 1/\omega^2(\vec{Q} - \vec{K}')] / \Omega$$

ed è eguale all'elemento di matrice fra gli stessi stati dell'operatore

$V = -g^2\hbar c/(2\Omega) \sum_{\vec{p}\vec{q}\vec{k}} 1/(p^2 + \mu^2) a_{\vec{q}+\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} a_{\vec{k}}$ corrispondente al potenziale a due corpi $v(r) = -g^2\hbar c \int d\vec{p} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}) / ((2\pi)^3(p^2 + \mu^2)) = g^2\hbar c \exp(-\mu r) / (4\pi r)$ detto Yukawiano repulsivo. La sezione d'urto differenziale di scattering elastico risulta essere:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \pi \left(\frac{g^2 mc}{8\pi\hbar} \right)^2 \left(\frac{Q^2 + \mu^2/2}{((Q^2 + \mu^2/2)^2 - Q^4 \cos^2\theta)} \right)^2 .$$

4. Un fascio di elettroni si muove lungo l'asse z e incontra nell'origine una barriera sottile corrispondente al potenziale $\phi(z) = V\delta(z)$ calcolare il potere riflettente della barriera nel limite di piccolo e grande $|V|$.

(Sol: Si usa l'equazione di Dirac nella forma (5.0.19) con $E > 0$, si assume che $\sigma_z\psi = \psi$ e si decompone ψ nelle componenti (φ, χ) nella rappresentazione (4.4.151) cioè:

$$-i\hbar c\chi' + eV\delta(z)\varphi = (E - mc^2)\varphi, \quad -i\hbar c\varphi' + eV\delta(z)\chi = (E + mc^2)\chi$$

si trova subito che in tutti i punti diversi dall'origine per un'onda piana con numero d'onda $\pm k$ si ha $\chi = (\pm\hbar ck/(E + mc^2))\varphi \equiv \pm\Lambda\varphi$. Inoltre $E = c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2k^2}$. Si cercano quindi soluzioni tipo onda incidente, riflessa e trasmessa cioè $\varphi_{z<0} = \exp(ikz) + \alpha \exp(-ikz)$, $\varphi_{z>0} = \beta \exp(ikz)$. Le equazioni d'onda presentano termini proporzionali a $\delta(z)$ dovuti alle discontinuità nell'origine di χ e φ , inoltre ci sono i termini dovuti al potenziale che devono essere regolarizzati in modo simmetrico rispetto al segno di z e che quindi valgono $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} eV\delta(z)(\varphi(\epsilon) + \varphi(-\epsilon))/2$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} eV\delta(z)(\chi(\epsilon) + \chi(-\epsilon))/2$. Confrontando i coefficienti di $\delta(z)$ nelle due equazioni e posto $\lambda = eV/(2\hbar c)$ si trova

$$\lambda(1 + \alpha + \beta) = i\Lambda(\beta + \alpha - 1) \quad , \quad \lambda\Lambda(1 - \alpha + \beta) = i(\beta - \alpha - 1) ,$$

quindi $\alpha + \beta = (\lambda + i\Lambda)/(\lambda - i\Lambda)$ e $\alpha - \beta = (\lambda\Lambda + i)/(\lambda\Lambda - i)$ quindi in particolare $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha - \beta|^2 = 1$ che corrisponde alla conservazione della corrente. Però il risultato è paradossale perché si ha $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta = 1$ e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \beta = -1$ che equivale a dire che nei due limiti di assenza della barriera e di barriera infinita si ha perfetta trasmissione. Evidentemente il risultato può solo essere interpretato ammettendo che nella descrizione collettiva che stiamo usando la densità di corrente calcolata riguarda la carica e non il numero delle particelle e quindi l'onda trasmessa possa essere interpretata sia in termini di elettroni singoli, sia in termini di elettroni accompagnati da coppie particella-antiparticella che sono prodotte in presenza di una barriera molto intensa. In ogni caso questo risultato mostra i limiti all'applicazione dell'equazione di Dirac in prima quantizzazione.)

5. Un sistema isotropo di elettroni in tre dimensioni, quantizzati in un volume Ω , interagisce con il campo fononico longitudinale tramite:

$$H_I = \frac{-i\lambda}{\sqrt{2v_3\rho\Omega}} \sum_{\vec{k}=\vec{n}\frac{\hbar\pi}{\Omega^{1/3}}, \vec{p}=\vec{m}\frac{\hbar\pi}{\Omega^{1/3}}, \sigma} \sqrt{k} e^{-\frac{kD}{\hbar}} a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} (A_{\vec{k}} - A_{-\vec{k}}^\dagger) .$$

dove $a_{\vec{p},\sigma}$ è l'operatore di distruzione di elettroni con impulso \vec{p} e spin σ e $A_{\vec{k}}$ quello di fononi longitudinali con impulso \vec{k} . $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, v_3 , la velocità dei fononi longitudinali, vale 10^4 m/s , $D = 10^{-8} \text{ m}$, l'impulso di Fermi $p_F = 3 \cdot 10^{-25} \text{ Newton} * \text{m}$, per cui $Dp_F \gg \hbar$. Calcolare la correzione fino al secondo ordine in λ alla densità di energia dello stato fondamentale. (Essendo $Dp_F \gg \hbar$, e quindi il raggio di variabilità di \vec{k} piccolissimo rispetto a quello del mare di Fermi mentre p non si discosta molto da p_F , si osservi che è possibile approssimare sistematicamente nei calcoli $E(p)$ con $v_F p$ dove $v_F \simeq 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ è la velocità degli elettroni alla superficie di Fermi, e $|\vec{p} + \vec{k}|$ con $p + k \cos \theta$, dove θ è l'angolo fra \vec{p} e \vec{k} .)

(Sol: $\frac{\Delta E}{\Omega} = -\frac{3\lambda^2 p_F^2}{64\pi^4 \hbar^2 v_F v_3 \rho D^4} (1 - \frac{v_3}{v_F} \ln(1 + \frac{v_F}{v_3}))$)

6. In un solido isolante tutti gli stati della banda di valenza sono completamente occupati da elettroni mentre le bande superiori sono vuote. Consideriamo le due bande vuote di energia inferiore, nella prima l'energia dell'elettrone sia data da $E_1 = \alpha k^2$ nella seconda $E_2 = \alpha k^2 + \beta$ dove k è l'impulso. Se gli elettroni nelle due bande interagiscono con i

fononi longitudinali tramite:

$$H_I = \frac{i\lambda}{\sqrt{\rho v_s \Omega}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \sqrt{q} [a_{1, \vec{p}+\vec{q}, \sigma}^\dagger a_{2, \vec{p}, \sigma} + a_{2, \vec{p}-\vec{q}, \sigma}^\dagger a_{1, \vec{p}, \sigma}] (A_{\vec{q}} - A_{-\vec{q}}^\dagger)$$

dove $A_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione del fonone longitudinale, $a_{i, \vec{p}, \sigma}$ quello dell'elettrone nella banda $i = 1, 2$ e v_s è la velocità dei fononi, calcolate la probabilità per unità di tempo della transizione nella banda 1 con emissione di un fonone da parte di un elettrone inizialmente nella banda 2 con energia minima. Si assuma che $v_s \gg 2\sqrt{\alpha\beta}$ e che $\beta/v_s \ll \pi/a$ essendo a il passo del reticolo. (Si calcoli il quadrato dell'elemento di matrice rilevante a volume finito e si passi poi a volume infinito applicando la regola d'oro.)

$$(\text{Sol: } \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda^2}{\rho \pi \hbar^4 v_s} \int_0^\infty dq q^3 \delta(\beta - \alpha q^2 - v_s q) \simeq \frac{\lambda^2 \beta^3}{\pi \rho \hbar^4 v_s^5})$$

7. Un fonone longitudinale in un solido conduttore interagisce con gli elettroni della banda di conduzione tramite:

$$H_I = -i\lambda \sqrt{\frac{1}{2\rho v \Omega}} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \sigma} \sqrt{k} a_{\vec{p}+\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} [A_{3, \vec{k}} - A_{3, -\vec{k}}^\dagger].$$

dove Ω è il volume del cristallo, $v \simeq 5 \cdot 10^3$ m/s la velocità dei fononi, $\rho \simeq 5 \cdot 10^3$ kg/m³ la densità del cristallo, \vec{p} e \vec{k} sono impulsi e σ spin, $\lambda = 1$ eV.

Quest'interazione può in particolare indurre la transizione fra lo stato di un fonone con impulso \vec{q} e quello di una coppia elettrone-vacanza con impulsi e spin \vec{p}, σ e \vec{p}', σ' rispettivamente, se l'impulso di Fermi $P_F \gg mv \sim q$, dove m è la massa dell'elettrone.

-) Calcolate l'elemento di matrice di H_I fra i due stati.
-) Calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ e per $q = 10^{-26} N \times s$ la probabilità per unità di tempo della transizione e quindi la lunghezza media l percorsa dal fonone prima di interagire.
-) Se il solido è in equilibrio termico a temperatura T con $kT \ll P_F^2/(2m)$ calcolare il valor media di \bar{l} sulla distribuzione dei fononi longitudinali.

Si suggerisce di calcolare l'integrale sugli impulsi finali in coordinate cilindriche con asse parallelo all'impulso del fonone che è l'asse di simmetria del processo

(Sol: L'elemento di matrice è: $-i\lambda\sigma\sqrt{\frac{q}{2\rho v\Omega}}\delta_{\sigma,-\sigma'}\delta_{\vec{q},\vec{p}+\vec{p}'}\Theta(p^2 - P_F^2)\Theta(P_F^2 - (p')^2)$.

La probabilità di transizione per unità di tempo: $\dot{P} = \frac{\lambda^2 m^2 q}{2\pi\rho\hbar^4}$ la lunghezza media percorsa: $l = v/\dot{P} \simeq 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Per valutarne il valor medio a temperatura T bisogna ricordare che la probabilità differenziale di un fonone longitudinale in funzione dell'impulso q è: $dP/(dq) \sim q^2/(\exp(\beta vq) - 1)$ e, poiché $l \sim q^{-1}$, $\bar{l} \simeq 4,35 v^2\rho\hbar^4/(\lambda^2 m^2 kT)$.

8. Nel volume Ω l'Hamiltoniano di interazione elettrone-fonone è dato da:

$$H_I = -i\frac{\mu}{\sqrt{2\rho v_3\Omega}} \sum_{\vec{k},\vec{p},\sigma} \sqrt{k} a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} [A_{\vec{k}} - A_{-\vec{k}}^\dagger].$$

Qui $A_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione di un fonone longitudinale di impulso \vec{k} , $a_{\vec{p},\sigma}$ quello elettronico, su uno stato di impulso \vec{p} e spin σ , $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ è la densità di massa del solido, $\mu = 0,1 \text{ eV}$ e $v_3 = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ la velocità dei fononi longitudinali.

Il sistema in studio è un conduttore a temperatura nulla con impulso di Fermi $p_F = mv_F$ a cui si è aggiunto un elettrone con impulso \vec{P} , molto vicino alla superficie di Fermi, e spin τ . Ponendo $P = p_F + \Delta$ si ha $\Delta^2/p_F^2 < 4v_3^2/v_F^2 = 10^{-2}$ essendo $v_F = 20 v_3$.

L'elettrone con impulso \vec{P} può perdere energia e impulso emettendo un fonone. Si vuol calcolare, all'ordine minimo in μ e in funzione di Δ , la probabilità per unità di tempo di questo processo e quindi il corrispondente cammino percorso in media dall'elettrone prima dell'emissione di un fonone. Si trascurino correzioni di ordine Δ/p_F .

Si calcoli infine il cammino percorso in media dall'elettrone per $\Delta = 10^{-27} \text{ Newton} \times s$.

(Sol: Evidentemente è conveniente descrivere gli stati nello spazio di Fock degli elettroni e delle buche in cui il mare di Fermi corrisponde al vuoto. Lo stato iniziale è dunque $|I\rangle = a_{\vec{p},\sigma}^\dagger|0\rangle$ quello finale $|F\rangle = a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger A_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle$ L'elemento di matrice $\langle F|H_I|I\rangle = i\delta_{\vec{p},\vec{p}+\vec{k}}\delta_{\sigma,\sigma'}i\mu\sqrt{k}/\sqrt{2\rho v_3\Omega}$. Approssimando le energie elettroniche tramite $\epsilon(p) \simeq v_F(p - p_F)$ e applicando la regola d'oro nel limite di volume infinito si ha

$$\dot{P} = \frac{\pi\mu^2}{\hbar\rho v_3} \int d\vec{p}' |\vec{p} - \vec{p}'| \delta(v_F(p - p') - v_3|\vec{p} - \vec{p}'|).$$

Usando per \vec{p}' le coordinate polari sferiche con $p_F < p' < p_F + \Delta$, scegliendo l'impulso iniziale come asse polare erisolvendo il vincolo di conservazione dell'energia in termini del coseno dell'angolo θ si ha

$$\dot{P} = \frac{4\pi^3 \mu^2 v_F}{h^4 \rho v_3^2} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_{p_F}^{p_F + \Delta} dp' (p')^2 (p - p') \delta(\cos \theta - x) J^{-1}(p, p') ,$$

dove $J = v_3^2 p p' / (v_F (p - p'))$ e $x = (1 - (v_F / v_3)^2) (p - p')^2 + 1$ che è sempre compreso fra -1 e 1 , si trova infine:

$$\dot{P} = \frac{4\pi^3 \mu^2 v_F^2}{h^4 \rho v_3^4} \int_{p_F}^{p_F + \Delta} dp' (p - p')^3 \frac{p'}{p} = \frac{4\pi^3 \mu^2 v_F^2 \Delta^3}{3h^4 \rho v_3^4} .$$

Il percorso medio è dato da $\frac{3h^4 \rho v_3^4}{4\pi^3 \mu^2 v_F \Delta^3} \sim 0,5m .$

9. Un atomo può essere schematizzato come un sistema di massa praticamente infinita con due livelli, entrambi con $J = 0$, la stessa parità e differenza di energia $E_2 - E_1 = \Delta > 0$. Lo spazio degli stati dell'atomo è bidimensionale e coincide con lo spazio di Fock corrispondente a un Fermione con un singolo stato. Siano A e A^\dagger operatori di distruzione e creazione nello spazio di Fock e $|0\rangle$ il suo vuoto, gli stati corrispondenti ai due livelli atomici possono essere identificati con $|0\rangle$ e $A^\dagger|0\rangle$, dove il primo fra i due è lo stato fondamentale dell'atomo. L'Hamiltoniano imperturbato dell'atomo è:

$$H_A = \Delta A^\dagger A + E_1$$

L'atomo è immerso in un cristallo e interagisce con un sistema degenerato di fermioni (elettroni) con spin $1/2$, massa $m = 10^{-30} kg$ e numero d'onda di Fermi $p_F = 5 \cdot 10^9 m^{-1}$, tramite l'operatore

$$V = \frac{g' \Delta}{\Omega p_F^3} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} [A + A^\dagger] (a_{\vec{p} + \vec{q}, \sigma})^\dagger a_{\vec{p}, \sigma}$$

dove $(a_{\vec{p}, \sigma})^\dagger$ è l'operatore di creazione di un elettrone con impulso \vec{p} e spin σ quantizzato nel volume Ω del cristallo. Gli elettroni, a loro volta, interagiscono con i fononi longitudinali del cristallo tramite

$$V' = i \frac{g \hbar v}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \frac{A_{\vec{q}} - A_{-\vec{q}}^\dagger}{\sqrt{q}} (a_{\vec{p} + \vec{q}, \sigma})^\dagger a_{\vec{p}, \sigma}$$

Le due interazioni V e V' inducono un'interazione effettiva $i\frac{X}{\sqrt{\Omega}}[A + A^\dagger]\sum_{\vec{Q}}[A_{\vec{Q}} - A_{-\vec{Q}}^\dagger]/\sqrt{Q}$ che accoppia l'atomo ai fononi. Ponendo la velocità dei fononi $v = 10^4$ m/s, $g = g' = 10^{-3}$, $\Delta = \hbar v p_F$ calcolare, trascurando correzioni di ordine $(2mv/(\hbar Q))^2 \simeq 10^{-3}$, il coefficiente X e quindi il tempo medio di decadimento dell'atomo dal livello 2 al livello 1 tramite l'emissione di un fonone. Si noti che i termini di interazione interessanti sono quelli con $Q = p_F$.

(Sol: Si tratta di calcolare l'elemento di matrice dell'interazione effettiva che accoppia l'atomo ai fononi. Questo riceve due contributi diversi a seconda se V agisce prima di V' o viceversa. Se lo stato iniziale è $A^\dagger|0\rangle$ e quello finale $A_{-\vec{Q}}^\dagger|0\rangle$ con

$Q = p_F$ gli stati intermedi nel primo caso sono $a_{\vec{p}+\vec{q},\sigma}^\dagger b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger|0\rangle \equiv |c_{1,\vec{p},\vec{q},\sigma}\rangle$ con \vec{p} , \vec{q} e σ variabili. Nel secondo caso invece sono $A^\dagger A_{-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}+\vec{q},\sigma}^\dagger b_{-\vec{p},-\sigma}^\dagger|0\rangle \equiv |c_{2,\vec{p},\vec{q},\sigma}\rangle$ sempre con \vec{p} , \vec{q} e σ variabili. Si ha $\langle c_{1,\vec{p},\vec{q},\sigma}|VA^\dagger|0\rangle = g'\Delta \sigma \Theta^>(\vec{p}+\vec{q})\Theta^<(\vec{p})/(\Omega p_F^3)$, e $\langle c_{2,\vec{p},\vec{q},\sigma}|V'A^\dagger|0\rangle = -ig\hbar\sigma v \Theta^>(\vec{p}+\vec{q})\Theta^<(\vec{p})/\sqrt{Q}\Omega$, dove si è posto $\Theta^>(\vec{p}) \equiv \Theta(p-p_F)$ e $\Theta^<(\vec{p}) \equiv \Theta(p_F-p)$.

Posto $Q = p_F$ si ha inoltre, $\langle 0|A_{-\vec{Q}}V'|c_{1,\vec{p},\vec{q},\sigma}\rangle = -ig\hbar\sigma v \Theta^>(\vec{p}+\vec{q})\Theta^<(\vec{p}) \delta_{-\vec{Q},\vec{q}}/\sqrt{Q}\Omega$, e $\langle 0|A_{-\vec{Q}}V|c_{2,\vec{p},\vec{q},\sigma}\rangle = g'\Delta \sigma \Theta^>(\vec{p}+\vec{q})\Theta^<(\vec{p}) \delta_{\vec{Q},\vec{q}}/(Q^3\Omega)$. Ora possiamo calcolare X usando la formula per le interazioni indotte al secondo ordine nel limite di grandi volumi:

$$\begin{aligned} -iX &= \frac{2igg'\hbar^2 v^2}{(2\pi)^3 Q^2} \int d\vec{p} \left[\frac{\Theta^>(\vec{p}-\vec{Q})\Theta^<(\vec{p})}{(\hbar^2/2m)(Q^2-2\vec{p}\cdot\vec{Q})-\hbar v Q-i\epsilon} + \frac{\Theta^>(\vec{p}+\vec{Q})\Theta^<(\vec{p})}{(\hbar^2/2m)(Q^2+2\vec{p}\cdot\vec{Q})+\hbar v Q-i\epsilon} \right] \\ &= \frac{2igg'\hbar^2 v^2}{(2\pi)^3 Q^2} \int d\vec{p} \left[\frac{\Theta^>(\vec{p}+\vec{Q})\Theta^<(\vec{p})}{(\hbar^2/2m)(Q^2+2\vec{p}\cdot\vec{Q})-\hbar v Q-i\epsilon} + \frac{\Theta^>(\vec{p}+\vec{Q})\Theta^<(\vec{p})}{(\hbar^2/2m)(Q^2+2\vec{p}\cdot\vec{Q})+\hbar v Q-i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

Passando in coordinate polari con asse polare la direzione di \vec{Q} si ha:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{4m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q^2} \int_0^Q p^2 dp \int_{-1}^1 dx \Theta(x + \frac{p}{2Q}) \left[\frac{1}{Q^2+2pQx-2mvQ/\hbar-i\epsilon} + \frac{1}{Q^2+2pQx+2mvQ/\hbar} \right] \\ &= -\frac{2m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q^3} \int_0^Q p dp \int_{-p^2}^{2pQ} dy \left[\frac{1}{Q^2+y-2mvQ/\hbar-i\epsilon} + \frac{1}{Q^2+y+2mvQ/\hbar} \right] \\ &= -\frac{2m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q^3} \int_0^Q p dp \left[\log[(Q^2+2pQ)^2 - 4m^2 v^2 Q^2/\hbar^2] - \log[(Q^2-p^2)^2 - 4m^2 v^2 Q^2 - i\epsilon] \right] \\ &= \frac{2m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q} \int_0^1 z dz \left[\log((1+2z)^2 - \alpha^2) - \log((1-z^2)^2 - \alpha^2 - i\epsilon) \right] \simeq \frac{2m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q} \int_0^1 z dz \left[2 \log(1+2z) - \log((1-z^2)^2 - \alpha^2 - i\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

Qui abbiamo trascurato termini di ordine $(2mv/(\hbar Q))^2 = \alpha^2 \simeq 10^{-3}$. Proseguendo il calcolo si ha: $\int_0^1 2z dz \log(1+2z) = \frac{1}{2} \int_0^2 dz \log(1+z) = \frac{3}{4} \log 3$, e $\int_0^1 z dz \log((1-z^2)^2 - \alpha^2 - i\epsilon) = \frac{1}{2} \int_0^1 dw [\log(w - \alpha - i\epsilon) + \log(w + \alpha)] \simeq -1 - i\frac{\pi\alpha}{2}$. Quindi, in fine si ha: $X \simeq \frac{m g g' v^2}{(2\pi)^2 Q} \left[\frac{3}{2} \log 3 + 2 + i\pi\alpha \right]$

Conoscendo X non resta che calcolare il tempo di decadimento τ che è dato da $1/\tau = \frac{|X|^2 Q}{\pi \hbar^2 v}$.

10. Nel volume Ω l'Hamiltoniano di interazione fra gli elettroni e il campo

elettromagnetico è dato, nel limite di bassa velocità, da:

$$H_{em} = \frac{\hbar e^2}{4\epsilon_0 m c \Omega} \sum_{l, l', \sigma = \pm, \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} \frac{\vec{\epsilon}_{l', \vec{k}-\vec{q}} \cdot \vec{\epsilon}_{l, \vec{q}}}{\sqrt{|\vec{q}||\vec{q}-\vec{k}|}} a_{\vec{p}+\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} \\ \left[2A_{l', \vec{q}-\vec{k}}^\dagger A_{l, \vec{q}} + A_{l', \vec{q}-\vec{k}}^\dagger A_{l, -\vec{q}} + A_{l', \vec{k}-\vec{q}} A_{l, \vec{q}} \right] .$$

dove m è la massa dell'elettrone. Quello di interazione elettrone-fonone è dato da:

$$H_I = -i\mu \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho v_3 \Omega}} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \sigma} \sqrt{k} e^{-Dk} a_{\vec{p}+\vec{k}, \sigma}^\dagger a_{\vec{p}, \sigma} [\alpha_{3, \vec{k}} - \alpha_{3, -\vec{k}}^\dagger] .$$

Gli $\alpha_{3, \vec{k}}$ sono gli operatori di distruzione fononici, $a_{\vec{p}, \sigma}$ quelli elettronici e $A_{l, \vec{k}}$ quelli fotonici, su uno stato di elicità l e numero d'onda \vec{k} , ρ è la densità di massa del solido, μ un parametro con le dimensioni di un'energia e v_3 la velocità dei fononi longitudinali.

Le due interazioni inducono, al primo ordine perturbativo in ciascuna di esse, una terza interazione lineare nel campo elastico e quadratica in quello elettromagnetico. Si vuol calcolare l'elemento di matrice dell'interazione indotta fra lo stato di un fotone e quello di un fotone e un fonone, con numero d'onda rispettivo \vec{q} , \vec{q}' e \vec{k} e con la stessa energia totale $E_F = E_I$, cioè con $cq = cq' + v_3 k$, nel limite in cui $\hbar p_F \ll mv_3$ e $k \ll p_F$. p_F è il numero d'onda alla superficie di Fermi, quindi ponendo $\hbar p_F = mv_F$ si ha $v_F \ll v_3$. La situazione considerata in cui la velocità di Fermi è più piccola di quella del suono è, come sappiamo, di scarso interesse fisico, ma viene proposta essendo analiticamente più semplice.

Si ricordi che nelle condizioni scelte il numero d'onda degli elettroni $p \simeq p_F$ soddisfa: $|\vec{p} \pm \vec{k}| \simeq p \pm k \cos \theta$, se θ è l'angolo fra i due vettori \vec{p} e \vec{k} e quindi $\hbar^2 |\vec{p} + \vec{k}|^2 / (2m) \simeq \hbar^2 p^2 / (2m) + \hbar v_F k \cos \theta$.

(Sol: L'elemento di matrice considerato dell'interazione indotta è dato da

$$T_{\vec{q}, \vec{q}', \vec{k}, l, l'} = -i\delta_{\vec{q}, \vec{q}'+\vec{k}} \frac{2e^2 \mu}{\epsilon_0 m c} \sqrt{\frac{\hbar^3 k}{2\rho \Omega^3 q q' v_3}} \epsilon_{l', \vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l, \vec{q}} e^{-Dk} \\ \sum_{\vec{p}} \Theta(p_F - p) \left[\frac{\Theta(|\vec{p} + \vec{k}| - p_F)}{\frac{\hbar^2}{2m} (|\vec{p} + \vec{k}|^2 - p^2) - \hbar v_3 k - i\epsilon} + \frac{\Theta(|\vec{p} - \vec{k}| - p_F)}{\frac{\hbar^2}{2m} (|\vec{p} - \vec{k}|^2 - p^2) + \hbar v_3 k - i\epsilon} \right]$$

che nel limite di grande volume Ω e all'ordine dominante in $\hbar k_F/(mv_3) = v_F/v_3$ diventa:

$$\begin{aligned} 2i\delta_{\vec{q},\vec{q}'+\vec{k}} \frac{e^2 \mu p_F^3}{(2\pi)^2 \epsilon_0 m^2 c} \sqrt{\frac{\hbar^3 k}{2\rho\Omega q q' v_3}} \epsilon_{l',\vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}} e^{-Dk} \int_0^1 dx \frac{x^2}{v_3^2 - v_F^2 x^2} \\ = -i\delta_{\vec{q},\vec{q}'+\vec{k}} \frac{\alpha \mu p_F^3}{3\pi m^2} \sqrt{\frac{2\hbar^5 k}{\rho\Omega q q' v_3^5}} e^{-Dk} \epsilon_{l',\vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}} \end{aligned}$$

dove α è la costante di struttura fina.)

11. Ripetere il calcolo dell'esercizio precedente nella situazione fisicamente molto più rilevante di un conduttore in cui $\hbar k_F/m \gg v_3$.

(Sol: Si parte dall'espressione integrale dell'esercizio precedente che da

$$T_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q},l,l'} = -i\delta_{\vec{q},\vec{q}'+\vec{k}} \frac{e^2 \mu p_F^3}{(2\pi)^2 \epsilon_0 m^2 c} \sqrt{\frac{2\hbar^3 k}{\rho\Omega q q' v_3}} \epsilon_{l',\vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}} e^{-Dk} \int_0^1 dx \frac{x^2}{v_F^2 x^2 - v_3^2 - i\epsilon}$$

dove ora la parte immaginaria infinitesima è importante. Infatti si ha, per $a < 1$: $\int_0^1 dx/(x - a^2 + i\epsilon) = \ln[(1 - a^2)/a^2] - i\pi$ e quindi il nostro elemento di matrice diventa:

$$-i\delta_{\vec{q},\vec{q}'+\vec{k}} \frac{\alpha \mu m}{\pi} \sqrt{\frac{k}{2\rho\Omega q q' v_3 \hbar}} e^{-Dk} [2v_F - v_3 [\ln((v_f + v_3)/(v_f - v_3)) - i\pi]] \epsilon_{l',\vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}}$$

dove α è la costante di struttura fina. Si noti che l'elemento di matrice non è più reale e che contestualmente il fonone può decadere in una coppia elettrone-buca (vedi esercizio (7))

12. Utilizzando il risultato dei problemi precedenti calcolare la probabilità per unità di cammino percorso nel solido e per unità di angolo solido di un processo in cui un fotone impolarizzato viene deviato a 90 gradi emettendo un fonone. Si ponga l'indice di rifrazione del mezzo eguale a 1. Il processo descritto corrisponde al cosiddetto scattering Raman-Stokes.

(Sol: Si esprime l'elemento di matrice calcolato nei problemi precedenti come

$$T_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q},l,l'} = -i\delta_{\vec{q},\vec{q}'+\vec{k}} \Lambda \sqrt{\frac{k}{\Omega q q'}} \epsilon_{l',\vec{q}'}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}} e^{-Dk}$$

Usando la regola d'oro si trova la probabilità di transizione per unità di tempo mediata sulle polarizzazioni iniziali e sommata su quelle finali:

$$d\dot{P} = \Lambda^2 / (8\pi^2 \hbar) \sum_{l,l'} |\epsilon_{l',\vec{q}}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}}|^2 d\Omega_{q'} \int_0^\infty q' dq' \delta[\hbar(c(q-q') - v_3|\vec{q}-\vec{q}'|)] |\vec{q}-\vec{q}'| / q e^{-2D|\vec{q}-\vec{q}'|} .$$

A 90 gradi $\sum_{l,l'} |\epsilon_{l',\vec{q}}^* \cdot \epsilon_{l,\vec{q}}|^2 = 1$ perché riceve contributo non nullo solo dallo stato di polarizzazione piana dei fotoni perpendicolari al piano di scattering. Inoltre il vincolo energetico corrisponde all'equazione $q-q' = \beta\sqrt{q^2 + (q')^2}$ dove $b = v_3/c \ll 1$ per cui $|\vec{q}-\vec{q}'| \simeq \sqrt{2}q$ e $q' \simeq q(1 - \sqrt{2}\beta)$. Quindi la riga Stokes è spostata da quella elastica di $\sqrt{2}\beta\nu$. Si ha infine $d\dot{P}/d\Omega_{q'} \simeq \Lambda^2 / (8\pi^2 \hbar^2 c) \sqrt{2} q e^{-2\sqrt{2}Dq}$ da cui:

$$d^2 P / (d\Omega_{q'} dl) \simeq \sqrt{2} \Lambda^2 / (8\pi^2 \hbar^2 c^2) q e^{-2\sqrt{2}Dq} .)$$

Bibliografia

- [1] J. J. Sakurai
Modern Quantum Mechanics
Revised Edition
Addison-Wesley Publishing Company, 1994
- [2] L. D. Landau and L. M. Lifshitz
Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory
Volume 3, Third Edition
Elsevier Science Ltd., 1977
- [3] A. S. Davidov
Quantum Mechanics
Second Edition
Pergamon Press (June 1976)
- [4] P. A. M. Dirac
The Principles of Quantum Mechanics
Fourth Edition
Oxford University Press, 1958
- [5] C. M. Becchi,
Second Quantization.
SCHOLARPEDIA JOURNAL (on line). vol. 5(6) (2010), pp. 7902
[http : //www.scholarpedia.org/article/Second_quantization](http://www.scholarpedia.org/article/Second_quantization)
- [6] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki
Thermo field dynamics and condensed states
North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982

- [7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder,
An Introduction to Quantum Field Theory,
Perseus Books, 1995 .
- [8] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov
Introduction to the Theory of Quantized Fields
Interscience Publishers Inc. New York, 1959
- [9] C. Itzykson e J.-B. Zuber
Quantum Field Theory
Mac-Graw-Hill Book Company 1985
- [10] N. N. Bogolubov, N. N. Bogolubov jr.
Introduction to Quantum Statistical Mechanics
Second Edition
World Scientific Publishing Company, Singapore, 2010
- [11] H. Umezawa
Advanced Field Theory, (Micro, Macro and Thermal Physics)
American Institute of Physics New York, 1992
- [12] C. M. Becchi, G. Ridolfi
An Introduction to Relativistic Processes and the Standard Model of
Electroweak Interactions
Springer-Verlag Italia, 2006
- [13] C. Kittel
Introduction to Solid State Physics
John Wiley and Sons Inc. New York, 1963
- [14] J. M. Ziman
Principles of the Theory of Solids
Cambridge University Press, 1965
- [15] C. C. Gerry, P. L. Knight
Introduction to Quantum Optics
Cambridge University Press, 2005
- [16] J. M. Roman, G. Sierra e J. Dukelsky
Large N limit of the exactly solvable BCS model: analytics versus nu-
merics
Nuclear Physics B634 (2002) 483.

Appendice A

Probabilità di transizione per unità di tempo in un sistema soggetto ad una perturbazione

Siano H_0 ed H_I l'hamiltoniana imperturbata e la perturbazione del sistema che si suppone invariante per traslazione. Si vuole conoscere la probabilità per unità di tempo della transizione, indotta dalla perturbazione fra uno stato metastabile corrispondente ad un autostato discreto di H_0^B parte baricentrale di H_0 , o, da un punto di vista relativistico, della massa, e rappresentato da un pacchetto d'onde piane

$$\int d\vec{p} f(\vec{p}) |\Psi_{\vec{p}}\rangle, \quad (\text{A.0.1})$$

ed uno qualunque degli stati appartenenti ad un piccolo volume dello spazio degli autostati dello spettro continuo di H_0^B , cioè in generale ad un piccolo volume dello spazio delle fasi di uno stato a molti corpi del sistema. Si deve dunque pensare ad un processo di disintegrazione di uno stato metastabile; il generico stato finale sarà allora una sovrapposizione degli stati di n corpi

$$|\Psi_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n}\rangle, \quad (\text{A.0.2})$$

Usando la rappresentazione d'interazione in cui il generico stato si evolve secondo la legge

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{i(H_0 + H_I)t}{\hbar}} |\Psi\rangle, \quad (\text{A.0.3})$$

considerando lo stato che al tempo iniziale ($t = 0$) coincide con (A.0.1) si ha, integrando al primo ordine in H_I l'equazione di evoluzione

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} H_I e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\Psi_I(t)\rangle, \quad (\text{A.0.4})$$

$$|\Psi_I(t)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} H_I e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}}\right) \int d\vec{p} f(\vec{p}) |\Psi_{\vec{p}}\rangle. \quad (\text{A.0.5})$$

Quindi la probabilità di rilevare al tempo $t > 0$ la transizione ad uno stato ad n corpi nel volume Ω nello spazio degli impulsi, è:

$$\begin{aligned} P_\Omega(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \int_\Omega d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \left| \int_0^t d\tau \int d\vec{p} f(\vec{p}) \langle \Psi_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} | e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} H_I e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} |\Psi_{\vec{p}}\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_\Omega d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \left| \int_0^t d\tau \int d\vec{p} f(\vec{p}) \langle \Psi_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} | H_I |\Psi_{\vec{p}}\rangle e^{\frac{i(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}})\tau}{\hbar}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_\Omega d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \\ &\quad \left| \int d\vec{p} f(\vec{p}) \langle \Psi_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} | H_I |\Psi_{\vec{p}}\rangle \frac{e^{\frac{i(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}})t}{\hbar}} - 1}{\frac{i(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}})}{\hbar}} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

dove abbiamo indicato con $E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n}$ ed $E_{\vec{p}}$ l'energia degli stati finale ed iniziale. Tenendo conto dell'invarianza per traslazioni possiamo scrivere

$$\langle \Psi_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} | H_I |\Psi_{\vec{p}}\rangle \equiv \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n), \quad (\text{A.0.7})$$

e, sostituendo nella (A.0.6), otteniamo

$$\begin{aligned} P_\Omega(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \int_\Omega d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} f(\vec{p}) \int d\vec{p}' f^*(\vec{p}') \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \delta\left(\vec{p}' - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \\ &\quad |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}})t}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}}{2\hbar}\right)^2} = \frac{1}{\hbar^2} \int_\Omega d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \\ &\quad \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}})t}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}}{2\hbar}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Consideriamo ora una funzione $f(x)$ continua e uniformemente limitata con la derivata prima limitata nell'intervallo $[-a, a]$ e l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2(tx)}{x^2} f(x) = t \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right), \quad (\text{A.0.9})$$

nel limite $t \rightarrow \infty$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) \rightarrow f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} = \pi f(0), \quad (\text{A.0.10})$$

Per verificare questo risultato indichiamo con C_0 l'estremo superiore $\sup_x |f(x)|$ e con $C_1 : \sup_{-a < x < a} |f'(x)|$ e decomponiamo il primo membro secondo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) &= \int_{-at}^{at} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) + \int_{-\infty}^{-at} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) \\ &+ \int_{at}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) = f(0) \int_{-at}^{at} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} + \int_{-at}^{at} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} \int_0^{\frac{y}{t}} dz f'(z) \\ &+ \int_{-\infty}^{-at} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) + \int_{at}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.11})$$

A questo punto abbiamo:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} \right| \\ & \leq 2(C_0 + |f(0)|) \int_{at}^{\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} + \frac{2C_1}{t} \int_0^{at} dy \frac{\sin^2 y}{y} \\ & \leq \frac{2(C_0 + |f(0)|)}{at} + 2\frac{2C_1}{t} \left[\frac{\pi^2}{8} + \ln \frac{2at}{\pi} \right] \\ & \leq \frac{4C_0}{at} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} + \ln \frac{2at}{\pi} \right] \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (\text{A.0.12})$$

che evidentemente tende a zero nel limite $t \rightarrow \infty$. Si noti che nelle applicazioni a è dell'ordine dell'energia disponibile diviso \hbar mentre, come vedremo fra un momento, C_0 corrisponde al massimo del prodotto della densità degli stati per $\frac{|T|^2}{\hbar}$. Questo permette di valutare l'ordine di grandezza del tempo in cui l'evoluzione della probabilità diventa lineare. Possiamo ora, combinando (A.0.9) e (A.0.10), ora dimostrata, scrivere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(tx)}{x^2} = \pi \delta(x). \quad (\text{A.0.13})$$

Sostituendo nella (A.0.8), assumendo che le condizioni di regolarità per f valgono per il prodotto della densità degli stati finali:

$$\rho(E) \equiv \int_{\Omega} d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \delta(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E) \quad (\text{A.0.14})$$

per $\frac{1}{\hbar} |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2$ pensata come funzione della differenza di energia fra lo stato iniziale metastabile e lo stato finale ad n corpi troviamo

$$\begin{aligned} P_{\Omega}(t) &\rightarrow_{t \rightarrow \infty} \frac{t\pi}{\hbar^2} \int_{\Omega} d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \\ &|T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \delta\left(\frac{E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}}{2\hbar}\right) \\ &= t \frac{2\pi}{\hbar} \int_{\Omega} d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \\ &|T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \delta(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}) . \end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

Evidentemente la crescita lineare di una probabilità a grandi tempi contrasta con il fatto che qualunque probabilità deve essere inferiore a 1. In effetti il limite considerato va inteso $t \rightarrow \infty$ e $H_I \rightarrow 0$ in modo da giustificare l'uso della teoria delle perturbazioni al primo ordine.

La crescita lineare della probabilità di transizione permette di definire, la dove essa si verifica in realtà, probabilità di transizione per unità di tempo

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\Omega}(t)}{dt} &\rightarrow_{t \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\hbar} \int_{\Omega} d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \int d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \\ &\delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \delta(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}) \\ &= \int_{\Omega} d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n d\vec{p} |f(\vec{p})|^2 \delta\left(\vec{p} - \sum_{i=1}^n \vec{k}_i\right) \\ &\delta(E_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} - E_{\vec{p}}) \frac{2\pi}{\hbar} |T(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \equiv \dot{P}_{\Omega}^{(as)} . \end{aligned} \quad (\text{A.0.16})$$

La formula (A.0.16) riproduce nel caso di un sistema invariante per traslazioni la ben nota formula d'oro.

Allo scopo di illustrare più chiaramente il significato della (A.0.16) consideriamo un caso particolare, non relativistico in cui lo stato finale è a due

corpi, e la corrispondente energia è

$$E_{\vec{P},\vec{k}} = \frac{P^2}{2M} + \frac{k^2}{2\mu}, \quad (\text{A.0.17})$$

con P e k momento totale e relativo dei due corpi e M e μ massa totale e ridotta del sistema. Poniamo inoltre l'energia iniziale

$$E_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2M} + Q, \quad (\text{A.0.18})$$

dove Q è l'energia liberata nella disintegrazione e, per semplicità assumiamo che l'ampiezza T in (A.0.16) sia costante e reale.

Scegliendo una funzione di pacchetto f reale e molto concentrata intorno a \vec{P}_0 e scegliendo la regione Ω nello spazio delle fasi finale in modo da comprendere il supporto di f per quel che riguarda il momento baricentrale e in modo che il modulo del momento relativo

$$\sqrt{2\mu Q} - \Delta < k < \sqrt{2\mu Q} + \Delta, \quad (\text{A.0.19})$$

e che la sua direzione sia compresa nell'angolo solido Γ , possiamo scrivere (A.0.16)

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\Omega}(t)}{dt} &= \frac{1}{\hbar^2} \int d\vec{P} k^2 dk d\cos\theta_k d\phi_k f^2(\vec{P} - \vec{P}_0) T^2 \frac{2 \sin\left(\frac{(Q - \frac{k^2}{2\mu})t}{\hbar}\right)}{\frac{Q - \frac{k^2}{2\mu}}{\hbar}} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \int k^2 dk d\cos\theta_k d\phi_k T^2 \delta\left(Q - \frac{k^2}{2\mu}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.20})$$

Come si vede è stato possibile eseguire direttamente l'integrale sulle variabili baricentrali tenendo conto della normalizzazione della funzione di pacchetto, è chiaro che questa restrizione della formula ai gradi di libertà relativi è possibile tutte le volte che l'ampiezza T varia poco al variare del momento baricentrale nel supporto di f . Si tratta ora di applicare la (A.0.20) moltiplicata sotto integrale per la funzione che vale $\Gamma T \hbar \mu k$ nell'intervallo (A.0.19) ed è nulla fuori. Dato che questa funzione soddisfa le condizioni di regolarità richieste avremo infine

$$\frac{dP_{\Omega}(t)}{dt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} = \frac{2\pi}{\hbar} \Gamma T^2 \int_{\sqrt{2\mu Q} - \Delta}^{\sqrt{2\mu Q} + \Delta} k^2 dk \delta\left(Q - \frac{k^2}{2\mu}\right) = \frac{2\pi}{\hbar} \Gamma T^2 \sqrt{2\mu^3 Q}. \quad (\text{A.0.21})$$

Appendice B

Lo spettro del modello di Richardson

In questa Appendice cerchiamo autovalori esatti dell'Hamiltoniano del modello di Richardson.

Partendo dalla (4.2.67) sostituiamo G con ϵg e cerchiamo autovettori di H del tipo:

$$|\varphi_\nu\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \sum_{p_1, \dots, p_\nu} \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \psi(p_1, \dots, p_\nu) b_{p_1}^\dagger \cdots b_{p_\nu}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.0.1})$$

dove la funzione $\Theta(p_1, \dots, p_\nu)$ si annulla se due qualunque delle variabili discrete p_i coincidono e vale 1 altrimenti. L'inserimento di Θ nell'espressione di (B.0.1) è ridondante perché $b_n^2 = 0$ tuttavia essa è opportuna se si passa all'analisi delle funzioni d'onda, cioè dei coefficienti. Le sommatorie rispetto agli indici p sono intese fra $-Ne$ a N .

Se $|\varphi_\nu\rangle$ è autostato di H si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} (H - \epsilon E) |\varphi_\nu\rangle &= \sum_{p_1, \dots, p_\nu} \left(\sum_{i=1}^{\nu} 2p_i - E \right) \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \psi(p_1, \dots, p_\nu) \frac{b_{p_1}^\dagger \cdots b_{p_\nu}^\dagger}{\sqrt{\nu!}} |0\rangle \\ &- g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_p b_p^\dagger \sum_{p_1, \dots, p_\nu} \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \psi(p_1, \dots, p_\nu) \frac{b_{p_1}^\dagger \cdots b_{p_{h-1}}^\dagger b_{p_{h+1}}^\dagger \cdots b_{p_\nu}^\dagger}{\sqrt{\nu!}} |0\rangle \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_\nu} \left[\left(\sum_{i=1}^{\nu} 2p_i - E \right) \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \psi(p_1, \dots, p_\nu) - g \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \right. \\ &\left. \sum_{h=1}^{\nu} \sum_p \prod_{j=1, j \neq h}^{\nu} (1 - \delta_{p, p_j}) \psi(p_1, \dots, p_{j-1} p_p, p_{j+1} \cdots p_\nu) \right] \frac{b_{p_1}^\dagger \cdots b_{p_\nu}^\dagger}{\nu!} |0\rangle = 0 \quad (\text{B.0.2}) \end{aligned}$$

(B.0.3)

Osserviamo ora che:

$$\Theta(p_1, \dots, p_\nu) \prod_{j=1, j \neq h}^{\nu} (1 - \delta_{p, p_j}) = \Theta(p_1, \dots, p_\nu) (1 - \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \delta_{p, p_j}) . \quad (\text{B.0.4})$$

Sostituendo in (B.0.3) si ha:

$$\sum_{p_1, \dots, p_\nu} \Theta(p_1, \dots, p_\nu) \left[\left(\sum_{i=1}^{\nu} 2p_i - E \right) \psi(p_1, \dots, p_\nu) - g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_p \left(1 - \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \delta_{p, p_j} \right) \psi(p_1, \dots, p_{h-1}, p, p_{h+1}, \dots, p_\nu) \right] \frac{b_{p_1}^\dagger \cdot \dots \cdot b_{p_\nu}^\dagger}{\nu!} |0\rangle \quad (\text{B.0.5})$$

Mostriamo ora che (B.0.5) è soddisfatta se, dati E_1, \dots, E_ν soluzioni, in generale complesse, del sistema di ν equazioni:

$$\frac{1}{g} + 2 \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \frac{1}{E_j - E_h} - \sum_p \frac{1}{2p - E_h} = 0 , \quad (\text{B.0.6})$$

si pone:

$$\psi(p_1, \dots, p_\nu) = C(E_j) \sum_{\Pi} \prod_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j}} , \quad (\text{B.0.7})$$

dove Π indica le permutazioni degli indici, $C(E_j)$ è un coefficiente di normalizzazione e:

$$E = \sum_{j=1}^{\nu} E_j . \quad (\text{B.0.8})$$

Da (B.0.6) e (B.0.8) si ha:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\nu} (2p_i - E) \psi(p_1, \dots, p_\nu) - g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_p \left(1 - \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \delta_{p, p_j} \right) \\ & \psi(p_1, \dots, p_{h-1}, p, p_{h+1}, \dots, p_\nu) = \sum_{\Pi} \left[\sum_{i=1}^{\nu} (2p_i - E_{\Pi_i}) \prod_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j}} \right. \\ & - g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_p \prod_{i=1, i \neq h}^{\nu} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j}} \frac{1}{2p - E_{\Pi_h}} \\ & \left. + g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \prod_{i=1, i \neq h}^{\nu} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h}} \frac{1}{2p_i - E_{\Pi_i}} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{\Pi} \sum_{h=1}^{\nu} \prod_{i=1, i \neq h}^{\nu} \frac{1}{2p_i - E_{\Pi_i}} \left[1 - g \sum_p \frac{1}{2p - E_{\Pi_h}} + g \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h}} \right]. \quad (\text{B.0.9})$$

Ora, usando (B.0.6) troviamo per (B.0.9):

$$\begin{aligned} & g \sum_{\Pi} \sum_{h=1}^{\nu} \prod_{i=1, i \neq h}^{\nu} \frac{1}{2p_i - E_{\Pi_i}} \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \left(\frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h}} - \frac{2}{E_{\Pi_j} - E_{\Pi_h}} \right) \\ &= g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \sum_{\Pi} \prod_{i=1, i \neq h, i \neq j}^{\nu} \frac{1}{2p_i - E_{\Pi_i}} \\ & \left(\frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h}} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j}} - \frac{2}{E_{\Pi_j} - E_{\Pi_h}} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j}} \right). \quad (\text{B.0.10}) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo osservare che, dati due indici diversi h e j , l'insieme delle permutazioni Π si divide in due sottoinsiemi $\Pi^{(1)}$ e $\Pi^{(2)}$ i cui elementi differiscono solo per lo scambio di Π_h con Π_j , tenendo conto di questo troviamo per (B.0.9):

$$\begin{aligned} & 2g \sum_{h=1}^{\nu} \sum_{j=1, j \neq h}^{\nu} \sum_{\Pi^{(1)}} \prod_{i=1, i \neq h, i \neq j}^{\nu} \frac{1}{2p_i - E_{\Pi_i^{(1)}}} \left(\frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h^{(1)}}} \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j^{(1)}}} \right. \\ & \left. - \frac{2}{E_{\Pi_j^{(1)}} - E_{\Pi_h^{(1)}}} \left(\frac{1}{2p_j - E_{\Pi_j^{(1)}}} - \frac{1}{2p_j - E_{\Pi_h^{(1)}}} \right) \right) = 0 \quad (\text{B.0.11}) \end{aligned}$$

Dunque (B.0.9) è nullo e quindi, appare evidente, confrontando con (B.0.3) e (B.0.5), che la funzione d'onda (B.0.7) definisce un autovettore di H corrispondente all'autovalore (B.0.8). Per ogni insieme E_i , $i = 1, \dots, \nu$ di soluzioni di (B.0.6) troviamo un autovalore $E = \sum_{i=1}^{\nu} E_i$ di H . Si noti che, anche se le E_i sono complesse, esse appaiono in coppie complesse coniugate e quindi E è in ogni caso reale. È particolarmente importante agli effetti del calcolo delle soluzioni di (B.0.6) il fatto che questa equazione si presenta come la condizione di equilibrio per un sistema di cariche elettriche in due dimensioni, o, se si vuole, di fili paralleli uniformemente carichi, costituito da $2N + 1$ cariche negative poste sull'asse reale a distanze intere, ν cariche negative di valore doppio e posizione corrispondente ai punti complessi E_i immerse in un campo elettrico costante all'infinito pari a $\frac{1}{g}$. Le soluzioni dell'equazione (B.0.6) nel limite $L \rightarrow \infty$ e l'espressione dell'energia dello stato fondamentale si trovano in [16].

Appendice C

Lo schermaggio elettrostatico in un conduttore ideale.

In sezione (5.2) si è parlato dell'effetto di schermaggio del potenziale elettrostatico in un conduttore ideale asserendo che l'equazione di Poisson all'interno del conduttore viene modificata nella forma:

$$-\nabla^2 V(\vec{r}) + \frac{1}{D^2} V(\vec{r}) = \frac{\rho_{ex}(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (\text{C.0.1})$$

Dell'origine di questa equazione e anche del valore del parametro D , che ha dimensioni di una lunghezza, si può facilmente render conto usando il metodo di Thomas-Fermi, che nei testi del Landau viene chiamato il metodo del *campo autoconsistente*.

Il punto di partenza è la formula che esprime la densità elettronica $dN_e/(d\Omega)$ in funzione del numero d'onda alla superficie di Fermi k_F , cioè:

$$\frac{dN_e}{d\Omega} = \frac{8\pi k_F^3}{3}. \quad (\text{C.0.2})$$

Thomas e Fermi suggeriscono che questa relazione sia valida anche in presenza di un potenziale elettrostatico $V(\vec{r})$ purché lentamente variabile: $|\nabla V|/V \ll k_F$.

Consideriamo un conduttore ideale corrispondente a un cristallo con reticolo cubico di passo a e assumiamo che la banda di conduzione contenga, in assenza di cariche esterne, un elettrone per cella elementare. In queste condizioni la densità elettronica nella banda di conduzione è :

$$\frac{dN_e}{d\Omega} = \frac{1}{a^3} = \frac{8\pi(2mE_F)^{\frac{3}{2}}}{3\hbar^3}, \quad (\text{C.0.3})$$

quindi si ha $E_F = (3/8\pi)^{2/3}\hbar^2/(2ma^2)$ e $k_F = (3/(8\pi))^{1/3}/a \simeq 1/(2a) < \pi/a$.

Poniamo di esporre il conduttore all'azione di cariche esterne e quindi di immergerlo in un campo elettrostatico, la densità elettronica localmente varia perché Eq.(C.0.2) continua a valere, ma k_F dipende dal punto secondo l'equazione $k_F(\vec{r}) = \sqrt{2m(E_F + eV(\vec{r}))/\hbar}$. Qui $V(\vec{r})$ è il potenziale elettrostatico generato dalle cariche esterne, dagli ioni che si suppongono immobili e dalle cariche elettroniche indotte, in altri termini è il potenziale autoconsistente di Landau. Usando la Eq.(C.0.2) troviamo la densità della carica indotta al primo ordine nel potenziale:

$$\begin{aligned}\rho_i(\vec{r}) &= -e\left[\frac{8\pi(2m(E_F + eV(\vec{r})))^{3/2}}{3\hbar^3} - \frac{8\pi(2mE_F)^{3/2}}{3\hbar^3}\right] \\ &\simeq -e\frac{8\pi(2mE_F)^{3/2}}{3\hbar^3}\frac{3eV(\vec{r})}{2E_F} = -e^2\frac{3V(\vec{r})}{2E_F a^3} \\ &= -\frac{(8\pi)^{2/3}3^{1/3}me^2}{\hbar^2 a}V(\vec{r}),\end{aligned}\tag{C.0.4}$$

e quindi possiamo scrivere l'equazione di Poisson per il potenziale autoconsistente tenendo conto, sia delle cariche esterne, sia di quelle indotte:

$$\begin{aligned}-\nabla^2 V(\vec{r}) &= \frac{\rho_{ex}(\vec{r})}{\epsilon_0} + \frac{\rho_i(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{ex}(\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{3e^2}{2\epsilon_0 E_F a^3}V(\vec{r}) \\ &= \frac{\rho_{ex}(\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{(8\pi)^{2/3}3^{1/3}me^2}{\epsilon_0 \hbar^2 a}V(\vec{r}).\end{aligned}\tag{C.0.5}$$

L'equazione di Poisson diventa:

$$-\nabla^2 V(\vec{r}) + \frac{(8\pi)^{2/3}3^{1/3}me^2}{\epsilon_0 \hbar^2 a}V(\vec{r}) = -\nabla^2 V(\vec{r}) + \frac{3e^2}{2\epsilon_0 E_F a^3}V(\vec{r}) = \frac{\rho_{ex}(\vec{r})}{\epsilon_0},\tag{C.0.6}$$

da cui si vede che

$$D = \frac{\hbar}{(8\pi)^{1/3}}\sqrt{\frac{\epsilon_0 a}{3^{1/3}e^2 m}} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 E_F a^3}{3e^2}}.\tag{C.0.7}$$

Se quindi si ha una carica Q posta nell'origine all'interno del conduttore si ha:

$$\int d\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \equiv \tilde{V}(\vec{k}) = \frac{Q}{\epsilon_0(k^2 + 1/D^2)},\tag{C.0.8}$$

dove D è dato in Eq.(C.0.7).

Appendice D

L'azione delle trasformazioni di Lorentz sullo spazio di Fock relativistico.

In sezione (3.5) si è parlato dei campi relativistici e della loro quantizzazione che, nella sezione (3.6) è stata estesa al limite di volume infinito. In sezione (4.4) sono stati introdotti i campi spinoriali relativistici. Questa appendice è dedicata allo studio dell'azione delle trasformazioni di Lorentz sugli spazi di Fock relativistici.

Dato che esiste un quadro generale dovuto a Wigner e presentato in numerosi libri di testo, come per esempio [9] qui ci limiteremo a considerare i casi più semplici iniziando dal caso scalare. Il punto di partenza è la definizione di campo relativistico tramite le sue proprietà di trasformazione date in Eq.(4.4.90), che per il campo scalare si riduce a Eq.(3.5.182) e per quello spinoriale in Eq.(4.4.95). Questa definizione va confrontata con la decomposizione dei campi liberi in termini degli operatori di creazione e distruzione, che è fornita, per il campo scalare in volume finito, in Eq.(3.5.198). Nel limite di volume infinito e in termini di energia e impulso e del tetravettore evento x di componenti (ct, \vec{r}) la decomposizione diventa

$$\phi(x) = \frac{c}{\sqrt{(2\pi)^3 \hbar}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} [A(\vec{p})e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} + A^\dagger(\vec{p})e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}] , \quad (\text{D.0.1})$$

dove si è posto $p \cdot x \equiv E(p)t - \vec{p} \cdot \vec{r}$ e $A(\vec{p})$ è l'operatore di distruzione sullo stato generalizzato con impulso \vec{p} .

Il campo spinoriale di Weyl destrorso si decompone come in Eq.(4.4.133) dove il bispinore $w_{\vec{p}}$ è dato in Eq.(4.4.121), e quello di Dirac, nel limite di volume infinito, diventa:

$$\begin{aligned}
& \psi(\vec{r}, t) \\
&= \frac{c}{\sqrt{\hbar}(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(a(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + b(\vec{p}, \lambda)^\dagger v(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \frac{\sqrt{c}}{\hbar\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(\left(\frac{\sqrt{E(\vec{p}) + mc^2}}{\lambda\sqrt{E(\vec{p}) - mc^2}} \right) w_{\vec{p}}^{(\lambda)} a(\vec{p}, \lambda) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-\lambda\sqrt{E(\vec{p}) - mc^2}}{\sqrt{E(\vec{p}) + mc^2}} \right) \epsilon(w_{\vec{p}}^{(\lambda)})^* b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} \right). \tag{D.0.2}
\end{aligned}$$

In generale una trasformazione di Lorentz Λ è parametrizzabile come il prodotto

$$\Lambda = \mathcal{R}(\vec{n}, \theta) B(\chi) \mathcal{R}(\vec{t}, \theta'), \tag{D.0.3}$$

dove $\mathcal{R}(\vec{n}, \theta)$ indica la rotazione dell'angolo θ intorno all'asse \vec{n} , l'asse \vec{t} è perpendicolare all'asse z e $B(\chi)$ indica la trasformazione di Lorentz fra sistemi con assi paralleli e velocità relativa $\beta c = c \tanh \chi$ parallela all'asse z che noi chiameremo impropriamente *boost*, cioè *spinta con rapidità* $\chi = \tanh^{-1} \beta$. Sullo spazio Fock la trasformazione ha l'azione unitaria corrispondente all'operatore $U(\Lambda)$. Quest'operatore lascia invariato il vuoto:

$$U(\Lambda)|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle. \tag{D.0.4}$$

Nel caso di un campo scalare Eq.(3.5.182) equivale a:

$$U(\Lambda)^\dagger \phi(x) U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x). \tag{D.0.5}$$

Dal punto di vista della dinamica delle particelle libere $U(\Lambda)$ va vista come una trasformazione canonica che lega l'operatore di distruzione $A(\vec{p})$ a $A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})$, cioè dallo stato con impulso \vec{p} a quello con l'impulso genrato dalla trasformazione inversa, cioè si ha:

$$U(\Lambda)^\dagger A(\vec{p}) U(\Lambda) = f(\vec{p}) A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}), \tag{D.0.6}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
& U(\Lambda)^\dagger [A(\vec{p}), A^\dagger(\vec{p}')] U(\Lambda) = |f(\vec{p})|^2 [A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}), A^\dagger(\vec{p}'_{\Lambda^{-1}})] \\
& = |f(\vec{p})|^2 \delta(\vec{p}_{\Lambda^{-1}} - \vec{p}'_{\Lambda^{-1}}) = \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \tag{D.0.7}
\end{aligned}$$

da cui segue che $|f(\vec{p})|^2$ è eguale allo Jacobiano $|\frac{\partial \vec{p}_{\Lambda^{-1}}}{\partial \vec{p}}|$. Dato che la trasformazione di Lorentz è decomponibile come in Eq. (D.0.3) nel prodotto di tre trasformazioni, lo Jacobiano è eguale al prodotto dei tre Jacobiani relativi alle stesse trasformazioni. Ma le rotazioni hanno Jacobiano unitario perché la misura $d\vec{p}$ è invariante per rotazioni, resta quindi solo lo Jacobiano relativo a $L(\beta)$ che peraltro lascia invariate le componenti x e y dell'impulso. In conclusione, posto $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, abbiamo

$$|f(\vec{p})|^2 = \frac{\partial p_{L^{-1}}^{(z)}}{\partial p^{(z)}} = \frac{\partial \gamma(p^{(z)} - \beta E(\vec{p}))}{\partial p^{(z)}} = \gamma \frac{E(\vec{p}) - \beta p^{(z)}}{E(\vec{p})} = \frac{E(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})}{E(\vec{p})} . \quad (\text{D.0.8})$$

Trascurando eventuali fasi di f , senza perdita di generalità dato che le fasi sono eliminabili tramite trasformazioni canoniche, troviamo che

$$\sqrt{E(\vec{p})} U(\Lambda)^\dagger A(\vec{p}) U(\Lambda) = \sqrt{E(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})} A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) , \quad (\text{D.0.9})$$

e quindi finalmente

$$\begin{aligned} & U(\Lambda)^\dagger \phi(x) U(\Lambda) \quad (\text{D.0.10}) \\ &= \frac{c}{\sqrt{(2\pi)^3 \hbar}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} [U(\Lambda)^\dagger A(\vec{p}) U(\Lambda) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} + U(\Lambda)^\dagger A^\dagger(\vec{p}) U(\Lambda) e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}] \\ &= \frac{c}{\sqrt{(2\pi)^3 \hbar}} \int \frac{d\vec{p} \sqrt{2E(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})}}{2E(\vec{p})} [A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} + A^\dagger(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}] \\ &= \frac{c}{\sqrt{(2\pi)^3 \hbar}} \int \frac{d\vec{p}_{\Lambda^{-1}}}{\sqrt{2E(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})}} [A(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) e^{-i\frac{\Lambda^{-1} p \cdot \Lambda^{-1} x}{\hbar}} + A^\dagger(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) e^{i\frac{\Lambda^{-1} p \cdot \Lambda^{-1} x}{\hbar}}] \\ &= \phi(\Lambda^{-1} x) . \end{aligned}$$

La nostra scelta di fase ha reso locale la trasformazione di Lorentz.

Vale ora la pena di considerare lo spazio di Fock associato al campo bispinoriale di Weyl $\xi_R(x)$ dato in Eq.(4.4.133) per cui si ha da Eq. (4.4.106):

$$U(\Lambda)^\dagger \xi_R(x) U(\Lambda) = L_+(\Lambda) \xi_R(\Lambda^{-1} x) , \quad (\text{D.0.11})$$

e quindi

$$\begin{aligned} & U(\Lambda)^\dagger \xi_R(x) U(\Lambda) \quad (\text{D.0.12}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \int d\vec{p} [w_{\vec{p}}^{(+)} U(\Lambda)^\dagger a(\vec{p}) U(\Lambda) e^{-ip \cdot x} + \epsilon(w_{\vec{p}}^{(-)})^* U(\Lambda)^\dagger b^\dagger(\vec{p}) U(\Lambda) e^{ip \cdot x}] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \int d\vec{p} [L_+(\Lambda) w_{\vec{p}}^{(+)} a(\vec{p}) e^{-ip \cdot \Lambda^{-1} x} - L_+(\Lambda) \epsilon(w_{\vec{p}}^{(-)})^* b^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot \Lambda^{-1} x}] , \end{aligned}$$

dove le Eq. (4.4.121), (4.4.122) e (4.4.122) equivalgono a

$$w_{\vec{p}} = e^{-i\varphi\frac{\sigma_z}{2}} e^{-i\theta\frac{\sigma_y}{2}} w_0^{(+)} \equiv \mathcal{R}(\vec{p})w_0^{(+)} , \quad (\text{D.0.13})$$

essendo θ e φ gli angoli polari di \vec{p} e $w_0^{(+)}$ il bi-spinore con componenti (1, 0). Dato che la trasformazione corrispondente a $U(\Lambda)$ è canonica si ha, come sopra:

$$\sqrt{|\vec{p}|} U(\Lambda)^\dagger a(\vec{p}) U(\Lambda) = e^{i\Phi(\Lambda, \vec{p})} \sqrt{|\vec{p}_{\Lambda^{-1}}|} a(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) . \quad (\text{D.0.14})$$

Quindi l'Eq. (D.0.13), per quel che riguarda la parte a frequenza negativa (in $e^{-ip \cdot x}$), equivale a:

$$\begin{aligned} \int d\vec{p} w_{\vec{p}}^{(+)} e^{i\Phi(\Lambda, \vec{p})} \sqrt{\frac{|\vec{p}_{\Lambda^{-1}}|}{|\vec{p}|}} a(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}) e^{-ip \cdot x} &= \int d\vec{q} w_{\vec{q}_\Lambda}^{(+)} e^{i\Phi(\Lambda, \vec{q}_\Lambda)} \sqrt{\frac{|\vec{q}_\Lambda|}{|\vec{q}|}} a(\vec{q}) e^{-i\Lambda q \cdot x} \\ &= \int d\vec{p} e^{i\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda)} \sqrt{\frac{|\vec{p}_\Lambda|}{|\vec{p}|}} w_{\vec{p}_\Lambda}^{(+)} a(\vec{p}) e^{-ip \cdot \Lambda^{-1} x} = \int d\vec{p} L_+(\Lambda) w_{\vec{p}}^{(+)} a(\vec{p}) e^{-ip \cdot \Lambda^{-1} x} \end{aligned} \quad (\text{D.0.15})$$

che è equivalente a

$$L_+(\Lambda) w_{\vec{p}}^{(+)} = L_+(\Lambda) \mathcal{R}(\vec{p}) w_0^{(+)} = e^{i\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda)} \sqrt{\frac{|\vec{p}_\Lambda|}{|\vec{p}|}} \mathcal{R}(\vec{p}_\Lambda) w_0^{(+)} . \quad (\text{D.0.16})$$

A causa della proprietà di gruppo nel caso in esame si ha evidentemente

$$\mathcal{R}^{-1}(\vec{p}_\Lambda) L_+(\Lambda) \mathcal{R}(\vec{p}) w_0^{(+)} = e^{i\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda)} \sqrt{\frac{|\vec{p}_\Lambda|}{|\vec{p}|}} w_0^{(+)} . \quad (\text{D.0.17})$$

Quindi la trasformazione di Lorentz $\mathcal{R}^{-1}(\vec{p}_\Lambda) L_+(\Lambda) \mathcal{R}(\vec{p})$ si riduce al prodotto del boost $B(\ln(\frac{|\vec{p}_\Lambda|}{|\vec{p}|}))$ per una rotazione dell'angolo $\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda)$ intorno all'asse z . Tenendo conto della decomponibilità di una trasformazione di Lorentz transformation nel prodotto in Eq. (D.0.3) è sufficiente verificare Eq. (D.0.17) nel caso in cui $L_+(\Lambda)$ è una rotazione e in quello in cui si tratta di un boost. A loro volta le rotazioni si fattorizzano intorno all'asse z e all'asse y . Se $L_+(\Lambda) = e^{-i\tau\sigma_z/2}$ è evidente che Eq. (D.0.17) è soddisfatta con $\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda) = \tau$. Anche nel caso in cui $L_+(\Lambda) = e^{-i\tau\sigma_y/2}$ si ha una rotazione intorno all'asse z , infatti il prodotto di rotazioni è una rotazione e nel caso

in considerazione l'asse z viene lasciato invariato. Resta da calcolare l'angolo che vale

$$\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda) = \arctan\left(\frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tau}{2} \sin \varphi}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tau}{2} \cos \varphi}\right). \quad (\text{D.0.18})$$

Finalmente se $L_+(\Lambda) = B(\chi)$ si ha

$$\Lambda p = \left(|\vec{p}| \left(e^\chi \frac{1 + \cos \theta}{2} + e^{-\chi} \frac{1 - \cos \theta}{2} \right), \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \right. \\ \left. e^\chi \frac{1 + \cos \theta}{2} - e^{-\chi} \frac{1 - \cos \theta}{2} \right),$$

e quindi

$$\cos \theta_{\vec{p}_\Lambda} = \frac{e^\chi \frac{1 + \cos \theta}{2} - e^{-\chi} \frac{1 - \cos \theta}{2}}{e^\chi \frac{1 + \cos \theta}{2} + e^{-\chi} \frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (\text{D.0.19})$$

mentre $\varphi_{\vec{p}_\Lambda} = \varphi$. Con questi dati si ottiene

$$\mathcal{R}^{-1}(\vec{p}_\Lambda) B(\chi) \mathcal{R}(\vec{p}) w_0^{(+)} = \sqrt{e^\chi \frac{1 + \cos \theta}{2} - e^{-\chi} \frac{1 - \cos \theta}{2}} w_0^{(+)} = \sqrt{\frac{|\vec{p}_\Lambda|}{|\vec{p}|}} w_0^{(+)}, \quad (\text{D.0.20})$$

che è equivalente all'Eq. (D.0.17) con $\Phi(\Lambda, \vec{p}_\Lambda) = 0$.

Naturalmente la stessa analisi va sviluppata per la parte a frequenza positiva di ξ_R , questo però non comporta alcun nuovo calcolo dato che la parte a frequenza positiva del campo altro non è che l'immagine per riflessione CP di quella a frequenza negativa (si veda l'esercizio (1) nel gruppo (4.5)).

Per chiudere questa appendice resta da discutere il caso del campo di Dirac in Eq. (D.0.2). Nel caso di Dirac la Eq. (D.0.11) diventa

$$U(\Lambda)^\dagger \psi(x) U(\Lambda) = L_D(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x), \quad (\text{D.0.21})$$

dove nel caso di una rotazione di un angolo θ intorno all'asse \vec{n} si ha la decomposizione a blocchi

$$L_D(\Lambda) \equiv \mathcal{R}_D(\theta, \vec{n}) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.22})$$

invece per un boost con rapidità χ si ha

$$L_D(\Lambda) \equiv B_D(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & \sinh \frac{\chi}{2} \sigma_z \\ \sinh \frac{\chi}{2} \sigma_z & \cosh \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.0.23})$$

Nuovamente ci limitiamo a considerare la parte a frequenza negativa in cui, al posto del bi-spinore $w_{\vec{p}}^{(+)}$ appare il tetra-spinore

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sqrt{E(\vec{p}) + mc^2} \\ \lambda \sqrt{E(\vec{p}) - mc^2} \end{pmatrix} w_{\vec{p}}^{(\lambda)} = \mathcal{R}_D(\vec{p}) B(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{mc}) \begin{pmatrix} \sqrt{mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} w_0^{(\lambda)} \\ &\equiv \mathcal{R}_D(\vec{p}) B(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{mc}) u(\vec{0}, \lambda) , \end{aligned} \quad (\text{D.0.24})$$

dove

$$\mathcal{R}_D(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\vec{p}) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (\text{D.0.25})$$

Mentre, al posto dell'Eq. (D.0.14), si ha

$$\sqrt{E(\vec{p})} U(\Lambda)^\dagger a(\vec{p}, \lambda) U(\Lambda) = \sum_{\lambda'} D_{\lambda, \lambda'}(\Lambda, \vec{p}) \sqrt{E(\vec{p}_{\Lambda^{-1}})} a(\vec{p}_{\Lambda^{-1}}, \lambda') . \quad (\text{D.0.26})$$

dove la matrice D è unitaria. Utilizzando le Eq. (D.0.24) e (D.0.26), l'Eq. (D.0.16) nel caso di Dirac diventa

$$\begin{aligned} L_D(\Lambda) u(\vec{p}, \lambda) &= L_D(\Lambda) \mathcal{R}_D(\vec{p}) B(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{mc}) u(\vec{0}, \lambda) \\ &= \mathcal{R}_D(\vec{p}_\Lambda) B(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{mc}) \sum_{\lambda'} D_{\lambda, \lambda'}(\Lambda, \vec{p}) u(\vec{0}, \lambda') , \end{aligned} \quad (\text{D.0.27})$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} &B^{-1}(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{mc}) \mathcal{R}_D^{-1}(\vec{p}_\Lambda) L_D(\Lambda) \mathcal{R}_D(\vec{p}) B(\sinh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{mc}) u(\vec{0}, \lambda) \\ &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda, \lambda'}(\Lambda, \vec{p}_\Lambda) u(\vec{0}, \lambda') . \end{aligned} \quad (\text{D.0.28})$$

Esaminando la sequenza delle trasformazioni che appaiono al primo membro risulta chiaro che, qualunque sia Λ , il prodotto delle trasformazioni si riduce a una rotazione $\mathcal{R}_D(\tau(\vec{p}, \Lambda), \vec{n})$ che ha la forma a blocchi data in Eq. (D.0.22) ed è una matrice unitaria. Quindi si trova che

$$D_{\lambda, \lambda'}(\Lambda, \vec{p}_\Lambda) = \langle w_0^{(\lambda')} | e^{-i \frac{\tau(\vec{p}, \Lambda)}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}} | w_0^{(\lambda)} \rangle , \quad (\text{D.0.29})$$

che è una matrice unitaria come si voleva mostrare. Si lascia al lettore il calcolo esplicito della matrice D nei tre casi in cui Λ è un boost, una rotazione intorno all'asse z o intorno all'asse y .