

SECONDA QUANTIZZAZIONE (BOSONI)

1. L'operatore di distruzione di un bosone al punto \vec{r} è dato, in rappresentazione di Schrödinger, da

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} A_{\vec{p}},$$

calcolare, per $t > 0$ la funzione di correlazione

$$\left(\Psi_0, \Phi(\vec{r}, t) \Phi^\dagger(\vec{r}', 0) \Psi_0 \right)$$

supponendo i bosoni liberi e di massa m e identificando lo stato Ψ_0 con lo stato di vuoto. Si ponga $\int d\vec{p} e^{-iap^2} = \left(\frac{\pi}{i a}\right)^{\frac{3}{2}}$ e si proceda completando i quadrati.

(Sol: $\left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m\vec{r}\cdot\vec{r}'}{2\hbar t}}$)

2. Dato uno stato rappresentato dal vettore Ψ_s e l'operatore densità di particella $\rho(\vec{R}) = \Phi^\dagger(\vec{R})\Phi(\vec{R})$, si chiama funzione di correlazione della densità relativa allo stato s l'espressione

$$G(\vec{R}) = \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \Psi_s \rangle \langle \Psi_s, \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle .$$

Calcolare il valore della funzione G nel caso in cui lo stato s è quello di due bosoni identici con numeri d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 rispettivamente, quantizzati in una scatola di lato L con condizioni al bordo periodiche.

(Sol: $G(\vec{R}) = \frac{2\delta(\vec{R})}{L^3} + \frac{2}{L^6} (\cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{R}) - 1) .$)

3. Per un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di cui A_i con $i = x, y, z$ sono gli operatori di distruzione relativi alle eccitazioni lungo i tre assi, calcolate l'operatore corrispondente alla componente z del momento angolare. Calcolare anche le componenti y e x del momento angolare verificandone le regole di commutazione.

(Sol: $L_z = i\hbar[A_y^\dagger A_x - A_x^\dagger A_y]$)

4. Gli stati di singola particella di un sistema di bosoni identici sono ordinati secondo gli interi positivi, Ψ_0 è lo stato di vuoto. Calcolare l'elemento di matrice fra lo stato

$$(a_3^\dagger)^3 (a_2^\dagger)^2 \Psi_0$$

e lo stato

$$(a_3^\dagger)^2 (a_2^\dagger)^3 \Psi_0$$

dell'operatore

$$g \sum_{n>1} a_{n-1}^\dagger a_n .$$

(Sol: 36g)

5. Per un sistema di bosoni identici in una dimensione i cui stati sono distinti da un unico numero quantico intero ed a_n ($-\infty < n < +\infty$) sono gli operatori di distruzione, è data una successione di operatori non hermitiani:

$$J_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (n + 2i) a_{n+i}^\dagger a_i$$

con:

$$J_n^\dagger = J_{-n} .$$

Mostrare che gli operatori dati verificano un sistema di relazioni di commutazione del tipo:

$$[J_n, J_m] = C_{n,m} J_{n+m}$$

e calcolare $C_{n,m}$.

(Sol: $C(n, m) = 2(m - n)$)

6. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda (a_0^\dagger - a_1^\dagger)^2 (a_0 - a_1)^2 .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\Delta E = \lambda N(N - 1) \left[1 - \frac{\lambda(4N-3)}{\omega} \right]$)

7. Si consideri un sistema di bosoni in una dimensione di cui all'esercizio precedente, si calcoli la correzione all'energia dello stato $|N_0 = N, N_1 = 1\rangle$ fino al secondo ordine perturbativo e la si confronti con quella relativa allo stato fondamentale di N particelle.

(Sol: $\Delta E = \lambda N(N + 3) - \frac{\lambda^2(4N^3 - N^2 - 3N)}{\omega}$ quindi lo spostamento dell'energia dello stato di singola particella con $n = 1$ è $\Delta E_1 = 2\lambda N + \frac{\lambda^2 N(6N+4)}{\omega}$)

8. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega n^2 a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda/2 \sum_{m,n,q=-\infty}^{\infty} |q| e^{-\xi q} a_{m+q}^\dagger a_{n-q}^\dagger a_n a_m .$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\Delta E = -(2\lambda^2 N(N-1)/\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2\xi n) = -(2\lambda^2 N(N-1)/\omega)(1/(1 - \exp(-2\xi)))$)

9. L'hamiltoniana di un sistema di N bosoni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} a_n^\dagger a_n + \frac{\lambda}{2L} \sum_{p,r,q=-\infty}^{\infty} a_{p+q}^\dagger a_{r-q}^\dagger a_r a_p .$$

Calcolare il contributo del secondo ordine in λ all'energia dello stato fondamentale .

(Sol: $E_F = N(N-1) \left(\frac{\lambda}{2L} - \frac{m\lambda^2}{24\hbar^2} \right) + O(\lambda^3)$.)

10. Per un sistema di bosoni quantizzati nel volume Ω , di cui $a_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione, scrivere l'operatore d'interazione V corrispondente in seconda quantizzazione al potenziale d'interazione a due corpi:

$$V(r) = vR \delta(r - R)$$

(Sol: $V = \frac{2\pi v R^2}{\Omega} \sum_{\vec{q}, \vec{p}, \vec{k}} \frac{\sin qR}{q} a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{p}}$.)

11. Per un sistema di N bosoni identici di massa m e interagenti tramite l'interazione V di cui all'esercizio precedente calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in v e al limite $\Omega \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ con $\frac{N}{\Omega} = \rho$ costante. Si noti in proposito che l'energia dello stato fondamentale E_F , essendo l'energia di un sistema una grandezza estensiva, risulta proporzionale al volume Ω . Si tratta dunque di calcolare fino al secondo ordine in λ il valore del rapporto $\frac{E_F}{\Omega}$.

(Sol: $\frac{E}{\Omega} = 2\pi v R^3 \rho^2 \left(1 - \frac{mvR^2}{\hbar^2} + O(v^2) \right)$.)

12. Per un sistema di N bosoni identici di massa m e interagenti tramite l'interazione V corrispondente in seconda quantizzazione al potenziale d'interazione a due corpi:

$$V(r) = \lambda e^{-\frac{r}{R}}$$

calcolare l'interazione V e la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ e al limite $\Omega \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ con $\frac{N}{\Omega} = \rho$ costante. Si noti in proposito che l'energia dello stato fondamentale E_F , essendo l'energia di un sistema una grandezza estensiva, risulta proporzionale al volume Ω . Si tratta dunque di calcolare fino al secondo ordine in λ il valore del rapporto $\frac{E_F}{\Omega}$.

(Sol: $V = \frac{4\pi\lambda R^3}{\Omega} \sum_{\vec{p}\vec{k}\vec{q}} \frac{1}{(1+R^2k^2)^2} a_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{p}}$.
 $E_F = E_1\lambda + E_2\lambda^2 + O(\lambda^3)$, $E_1 = \frac{4\pi R^3 N(N-1)}{\Omega} \rightarrow 4\pi R^3 \rho^2 \Omega$,
 $E_2 = -2N(N-1)m(\frac{4\pi R^3}{\hbar\Omega})^2 \sum_{\vec{k}\neq 0} \frac{1}{k^2(1+R^2k^2)^4} \rightarrow -\frac{5\pi\rho^2\Omega m R^5}{2\hbar^2}$)

13. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda(a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0)^2.$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $\lambda N \left[1 - \frac{(N-1)\lambda}{\omega}\right]$)

14. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda \left[(a_0^\dagger)^2 a_2^2 + (a_2^\dagger)^2 a_0^2 \right].$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo.

(Sol: $-\frac{\lambda^2 N(N-1)}{2\omega}$)

15. Per un sistema di bosoni identici in una buca unidimensionale a pareti riflettenti si ha l'hamiltoniana:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon(n) a_n^\dagger a_n + \sum_{n,m=0}^{\infty} v(n)v(m) a_n^\dagger a_m^\dagger a_m a_n$$

dove $\epsilon(n)$ e $v(n)$ sono due successioni reali e positive. Calcolare lo spettro di H in funzione di queste due successioni.

(Sol: Le autofunzioni sono caratterizzate dai numeri di occupazione $a_n^\dagger a_n = N(n)$. I corrispondenti autovalori sono:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(n)(\epsilon(n) - v^2(n)) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} N(n)v(n) \right)^2 .)$$

16. Calcolare fino al secondo ordine perturbativo nell'interazione

$$V = \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} v(|\vec{p} - \vec{k}|) v(|\vec{p} - \vec{k} + 2\vec{q}|) A_{\vec{p}+\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}} A_{\vec{p}} ,$$

dove \vec{p} , \vec{q} e \vec{k} sono impulsi, l'energia dello stato fondamentale di un sistema di N bosoni di massa M quantizzati in una scatola cubica periodica di spigolo L .

(Sol: $E = v_0^2 N(N-1) \left(1 - \sum_{\vec{q} \neq 0} \frac{2Mv(2q)}{q^2} \right)$)

17. Si calcoli la correzione perturbativa al secondo ordine all'energia dello stato fondamentale di N bosoni identici con hamiltoniana imperturbata

$$H_0 = \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

soggetta alla perturbazione

$$H_I = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}} V(q) a_{\vec{p}_1+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_2-\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} .$$

Ω è il volume di quantizzazione e $V(0) = 0$.

(Sol: $-\frac{N(N-1)m}{2\Omega^2} \sum_{\vec{k}} \frac{V^2(k)}{k^2}$)

18. Due bosoni di massa m e impulso opposto $\pm \hbar \vec{p}$ nel volume di quantizzazione Ω interagiscono tramite

$$V = \frac{\lambda}{2\Omega} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq 0} A_{\vec{k}_1+\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2-\vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1} ,$$

calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ la sezione d'urto integrata sugli angoli di scattering.

(Sol: Si noti che, dato che le particelle sono identiche, l'integrale sull'impulso di ciascuna particella finale ($\hbar \vec{k}_i$, $i = 1, 2$) va limitato a metà dell'angolo solido. L'elemento di matrice di V vale $2\lambda/\Omega \delta_{\vec{k}_1, -\vec{k}_2}$ il cui modulo al quadrato nel limite di grande volume è $4\lambda^2(2\pi)^3/\Omega^3 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ il flusso è $\phi = v_{rel}/\Omega = 2\hbar p/(m\Omega)$, la sezione d'urto è il rapporto fra la probabilità di transizione per tempo unitario e il flusso e vale: $\sigma = m^2 \lambda^2 / (2\pi \hbar^4)$)

19. Un bosone di massa m e impulso $\hbar\vec{p}$ si trova in presenza di un condensato di N bosoni dello stesso tipo nello stato con impulso nullo nel volume di quantizzazione Ω .

Se i bosoni interagiscono fra loro tramite

$$V = \frac{\lambda}{2\Omega} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq 0} A_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger A_{\vec{k}_2} A_{\vec{k}_1}$$

, calcolate nel limite $\Omega \rightarrow \infty$ e in funzione della densità $\rho = N/\Omega$, la probabilità per unità di tempo di un urto il cui stato finale contenga due bosoni fuori dal condensato.

(Sol: Si noti che, dato che le particelle sono identiche, l'integrale sull'impulso di ciascuna particella finale fuori dal condensato ($\hbar\vec{k}_i$, $i = 1, 2$) va limitato a metà dell'angolo solido. L'elemento di matrice di V vale $2\sqrt{N}\lambda/\Omega\delta_{\vec{k}_1, -\vec{k}_2}$ il cui modulo al quadrato nel limite di grande volume è $4\lambda^2\rho(2\pi)^3/\Omega^2\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, la probabilità di transizione per unità di tempo vale: $\dot{P} = m\lambda^2\rho\rho/(2\pi\hbar^3)$. Confrontando con l'esercizio precedente si ha: $\dot{P} = \sigma\rho\hbar p/m$)

20. Calcolare, nel limite di volume di quantizzazione $\Omega \rightarrow \infty$, il commutatore:

$$[A_i(\vec{r}, 0), E_j(\vec{0}, 0)]$$

dove $\vec{A}(\vec{r}, t)$ è il potenziale vettore del campo elettromagnetico (Eq.(145), pg. 35 degli appunti) e \vec{E} è il campo elettrico. (Si tenga conto che per i vettori di polarizzazione vale la formula: $\sum_\alpha \epsilon_{\alpha,i}^*(\vec{k})\epsilon_{\alpha,j}(\vec{k}) = \delta_{i,j} - \frac{k_i k_j}{k^2}$ e inoltre $\sum_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})/(k^2\Omega) \rightarrow 1/(4\pi r)$.)

(Sol: $[A_i(\vec{r}, 0), E_j(\vec{0}, 0)] = -i\hbar/\epsilon_0[\delta(\vec{r})\delta_{i,j} + \nabla_i \nabla_j (1/(4\pi r))]$. Si noti che la condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ è rispettata dal risultato.)

21. Si consideri lo spazio degli stati fotonici in una cavità a pareti riflettenti. Questo spazio è lo spazio di Fock dei fotoni con frequenza (e quindi energia) inferiore a un certo valore detto frequenza di plasma delle pareti che nel caso in studio è $\nu_P = 10^{16}$ Hertz.

Assumendo che lo stato quantistico della cavità sia il vuoto di Fock calcolate, partendo dall'espressione del potenziale vettore in seconda quantizzazione con la somma sui numeri d'onda tagliata alla frequenza di plasma, il valore medio del quadrato del campo elettrico nel centro della cavità. (Si sostituisca la somma sui numeri d'onda con un integrale).

(Sol: Dagli appunti (pg.31) risulta

$$\vec{E}(\vec{0}, 0) = -i\sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\alpha \neq 3} \sum_{\vec{k}, k < \frac{2\pi\nu_P}{c}} \sqrt{\frac{ck}{2}} \vec{\epsilon}_{\alpha, \vec{k}} [A_{\alpha, \vec{k}} - A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger],$$

d'altra parte il valor medio nel vuoto: $\langle \Psi_0 [A_{\alpha, \vec{k}} - A_{\alpha, \vec{k}}^\dagger] [A_{\beta, \vec{q}} - A_{\beta, \vec{q}}^\dagger] \Psi_0 \rangle = -\delta_{\vec{k}, \vec{q}} \delta_{\alpha, \beta}$ per cui si ha $\langle \Psi_0 E^2 \Psi_0 \rangle = \frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3} \sum_{\alpha \neq 3, \vec{k}, k < \frac{2\pi\nu_P}{c}} \frac{ck}{2} \simeq \frac{\hbar c}{\epsilon_0 2\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi\nu_P}{c}} k^3 dk = \frac{2\pi^2 \hbar \nu_P^4}{\epsilon_0 c^3}$)

22. Le particelle relativistiche sono quantizzate, analogamente ai fotoni, come i modi normali di un campo. Nel caso di bosoni di spin zero e privi di massa si tratta di un campo scalare ϕ e la densità d'energia è $(\dot{\phi})^2/2 + c^2(\nabla\phi)^2/2$. Non considerando il modo zero alcolate l'espressione quantistica del campo $\phi(\vec{r}, 0)$ nel volume Ω in termini degli operatori di creazione e distruzione $a_{\vec{k}}$ sugli stati di dato numero d'onda e quella dell'operatore $H' = \int d\vec{r}(c/\lambda)^2\phi^2 * (\vec{r}, 0)/2$ dove $\lambda = m\hbar c$.

$$(\text{Sol: } \phi(\vec{r}, 0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2c\Omega}} \sum_{\vec{p} \neq 0} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r})/p(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger), H' = \hbar c \sum_{\vec{p} \neq 0} 1/(4p\lambda^2)(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger)(a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger))$$

23. Calcolare, in funzione dell'energia $\hbar\omega$ del fotone, la probabilità di decadimento di un atomo con un singolo elettrone da un livello eccitato I (corrispondente al ket $|I, 1, M \rangle$) con momento angolare unitario e terza componente M allo stato fondamentale F (corrispondente al ket $|F, 0, 0 \rangle$) di momento angolare orbitale nullo. Si applichi l'approssimazione di dipolo elettrico in cui si trascura lo spin, si considera il nucleo infinitamente pesante e l'hamiltoniana di transizione è:

$$H_I = \frac{e}{mc} \vec{A}(0) \cdot \vec{p},$$

dove p è l'impulso dell'elettrone e $A(0)$ il potenziale vettore calcolato sul nucleo. Si ponga inoltre

$$\langle F, 0, 0 | z | I, 1, 0 \rangle = \gamma,$$

dove z è la terza coordinata dell'elettrone.

$$(\text{Sol: } \frac{dP}{dt} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \gamma^2 \frac{\omega^3}{c^2})$$

24. Si consideri un sistema di N bosoni in 1 dimensione con hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n a_n^\dagger a_n$$

soggetto alla perturbazione:

$$V = \lambda [a_0^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_0].$$

Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine perturbativo e, se possibile, confrontare il risultato approssimato ottenuto con quello esatto.

$$(\text{Sol: } E_F = N(\omega - \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}) \simeq -\frac{N\lambda^2}{2\omega})$$

25. Dato un sistema di bosoni in tre dimensioni quantizzati in una scatola periodica di lato L i cui operatori di distruzione siano $a_{\vec{k}}$, funzioni del numero d'onda, valutare il valore medio dell'operatore

$$a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}},$$

nello stato

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) a_{\vec{k}}^\dagger \right)^N \Psi_0$$

dove Ψ_0 è lo stato di vuoto e $\sum_{\vec{k}} |\psi(\vec{k})|^2 = 1$. Interpretare il risultato alla luce delle trasformazioni canoniche lineari.

(Sol: $\sum_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) a_{\vec{k}}^\dagger \equiv A_\psi^\dagger$ è l'operatore di creazione sullo stato con funzione d'onda $\psi(\vec{k})$ e si ha $[a_{\vec{k}}, A_\psi^\dagger] = \psi(\vec{k})$. Si trova quindi subito per il valor medio: $N\psi^*(\vec{k})\psi(\vec{k}')$.)

26. Un oscillatore armonico di massa m e costante elastica k in una dimensione si trova all'istante iniziale ($t = 0$) nello stato coerente di ampiezza a reale.

Calcolare l'evoluzione temporale del valor medio della posizione dell'oscillatore.

(Sol: $\langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} a \cos(\omega t)$)

27. Sia $|a\rangle$ lo stato coerente di ampiezza a di un oscillatore armonico di cui A e A^\dagger sono gli operatori di distruzione e creazione. Si calcoli il valor medio dell'operatore $A + A^\dagger$ nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}[|a\rangle + |-a\rangle]$ per a reale.

(Sol: il valor medio è nullo)

28. Per un sistema di bosoni identici in una dimensione con Hamiltoniana imperturbata:

$$H = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger a_n$$

e soggetto alla perturbazione:

$$H_I = \lambda(a_1^\dagger + a_1),$$

calcolare la correzione al secondo ordine dell'energia dello stato vuoto. (a^\dagger e a sono gli operatori di creazione e distruzione) Confrontare il risultato con quello del calcolo esatto.

(Sol: i due risultati coincidono e danno $-\frac{\lambda^2}{\omega}$)

29. Calcolare il valore medio dell'operatore :

$$W = g[a^2 + (a^\dagger)^2]$$

su uno stato coerente di ampiezza α di un oscillatore armonico.

(Sol: $2g \operatorname{Re}(\alpha^2)$)

30. Il campo elettromagnetico quantizzato in volume Ω interagisce con una particella puntiforme di gran massa posta nell'origine tramite l'Hamiltoniana (in ordine normale):

$$H_I = \frac{e^2}{M^2} : |A(\vec{0})|^2 : .$$

Calcolatene l'elemento di matrice fra uno stato coerente di ampiezza: $a(\vec{k}, \alpha) = a \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} \delta_{\alpha, 1}$ dove \vec{k}_1 ha componenti $(k, 0, 0)$ e lo stato di polarizzazione 1 è parallelo all'asse z e lo stato coerente di ampiezza $b(\vec{k}, \alpha) = b \delta_{\vec{k}, \vec{k}_2} \delta_{\alpha, 1}$ dove \vec{k}_2 ha componenti $(k \cos \theta, k \sin \theta, 0)$ assumendo θ non nullo.

(Sol: Essendo H_I in ordine normale nella decomposizione del potenziale vettore (Eq.(145) degli appunti) la parte di distruzione va sostituita con $b(\vec{k}, \alpha)$ e quella di creazione con $a^*(\vec{k}, \alpha)$. Segue che l'elemento di matrice vale $\frac{e^2}{M^2} \frac{\hbar}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \frac{1}{2ck} (a^* + b)^2 \langle a(\vec{k}, \alpha), b(\vec{k}, \alpha) \rangle = \frac{e^2}{M^2} \frac{\hbar}{\epsilon_0 \Omega} \frac{1}{2ck} (a^* + b)^2 e^{-\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}}$)

31. L'Hamiltoniana di una corda elastica orizzontale, tenuta fissa ai suoi estremi e soggetta alla sua forza peso può essere molto rozzamente schematizzata tramite:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} [\omega n a_n^\dagger a_n + A n^{-\frac{3}{2}} (a_n^\dagger + a_n)].$$

Determinare lo stato fondamentale del sistema ricavando la trasformazione unitaria che lo lega al stato di vuoto.

(Sol: Stato coerente con ampiezza $\alpha = -\frac{A}{\omega n^{\frac{5}{2}}}$ ed energia $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^4 \omega}$)

32. Un oscillatore armonico è perturbato da un campo di forza costante, la sua hamiltoniana si scrive:

$$H = \omega a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a .$$

Se il sistema si trova nell'istante iniziale ($t = 0$) nello stato di vuoto Ψ_0 rispetto all'operatore di distruzione a , quale sarà la sua evoluzione successiva?

(Sol: $\Psi(t) = e^{\left[\frac{|\alpha|^2}{\omega^2} \left(e^{-i\frac{\omega t}{\hbar}} - 1 + i\frac{\omega t}{\hbar} \right) + \frac{\alpha}{\omega} a^\dagger \left(e^{-i\frac{\omega t}{\hbar}} - 1 \right) \right]} \Psi_0$)

33. L'Hamiltoniana di una corda elastica di lunghezza L , densità ρ e tensione $v^2 \rho$ quantizzata con condizioni al contorno periodiche è:

$$H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar \omega_k A_k^\dagger A_k ,$$

dove $k = \frac{2\pi n}{L}$ è il numero d'onda. Il sistema è perturbato da una forza esterna elastica corrispondente all'energia:

$$E_P = \frac{M}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dr \chi^2(r)$$

dove $\chi(r)$ è la deformazione della corda ed è data, omettendo il modo zero, da:

$$\chi(r) = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\omega_k}} (A_k + A_{-k}^\dagger) .$$

Sempre dimenticando il modo zero e non considerando l'energia dello stato fondamentale, individuare la trasformazione canonica lineare che riduce l'Hamiltoniana perturbata in forma canonica e calcolare l'energia cinetica delle quasi-particelle.

(Sol: $\tanh \chi(k) = -\frac{M}{\sqrt{\rho^2 \omega_k^4 + 2M\rho\omega_k^2}}$, $E_k = \hbar\sqrt{\omega_k^2 + 2\frac{M}{\rho}}$)

34. Un oscillatore armonico di massa m e costante elastica $2k$ in una dimensione si trova all'istante iniziale ($t = 0$) nello stato fondamentale. Bruscamente la costante elastica diventa k . Calcolare l'evoluzione temporale del valor medio del quadrato della posizione e dell'impulso dell'oscillatore.

(Sol: $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4\sqrt{2m\omega}}(3 - \cos(2\omega t))$, $\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{4\sqrt{2}}(3 + \cos(2\omega t))$)

35. Facendo riferimento all'esercizio sul campo scalare ϕ (N.) è interessante verificare l'effetto dell'inserimento del termine H' sullo spettro e sulla densità di energia dello stato fondamentale. Per un'analisi quantitativa è però necessario introdurre un tagli sui grandi numeri d'onda.

Consideriamo quindi l'Hamiltoniano di un sistema di bosoni quantizzati in una scatola cubica di volume Ω è:

$$H = \hbar c \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \Theta(P - p) [p a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}} + \frac{1}{4p\lambda^2} (2a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}} + a_{-\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + 1)]$$

dove Θ è la funzione a gradino e $e\vec{p} \equiv 2\pi\vec{n}/\Omega^{1/3}$ è il numero d'onda. Utilizzando il metodo della trasformazione canonica determiniamo, per grandi valori di $P\lambda \gg 1$ e nel limite $\Omega \rightarrow \infty$, la densità di energia (E/Ω) dello stato fondamentale e l'energia degli stati di singola quasi-particella. (Si noti che per grandi $X: \int_0^X x^2(\sqrt{x^2+1} - x)dx \rightarrow X^2/4 - \ln(2X)/8 + 1/32$)

(Sol:

$$\begin{aligned} H &= \hbar c \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \Theta(P - p) [\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A_{\vec{p}}^\dagger A_{\vec{p}} + 1/2(\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} - p)] \\ &\rightarrow \hbar c \int d\vec{p} \sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A^\dagger(\vec{p}) A(\vec{p}) + \hbar c \Omega / (2\pi)^2 \int_0^P p^2 dp (\sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} - p) \\ &\rightarrow \hbar c \int d\vec{p} \sqrt{p^2 + \lambda^{-2}} A^\dagger(\vec{p}) A(\vec{p}) + \hbar c \Omega / (16\pi^2) (P^2 / (\lambda^2) - \ln(2P\lambda)) / (2\lambda^4) + 1 / (8\lambda^4) \end{aligned}$$

36. Lo stato *squeezed* $|\chi\rangle$ di un oscillatore armonico è annichilato dalla combinazione $\cosh \chi a - \sinh \chi a^\dagger$, si ha cioè: $(\cosh \chi a - \sinh \chi a^\dagger)|\chi\rangle = 0$. Calcolate lo sviluppo dello stato nella base degli stati stazionari $|n\rangle$ e la probabilità P_n che lo stato si trovi nel n -mo livello energetico .

(Sol: Posto $|\chi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ si ha: $c_1 = 0$ e $c_{n+2} = \sqrt{(2n-1)!/(2n)!} (\tanh \chi)^n c_0$. La condizione di normalizzazione è allora (usando $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!/(n!)^2 x^n = 1/\sqrt{1-4x}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((2n)!/(n!)^2) (\tanh \chi/2)^{2n} c_0^2 = c_0^2 / \sqrt{1 - \tanh^2 \chi} = 1$$

e quindi $c_{2n} = (\sqrt{(2n)!}/n!) (\tanh \chi/2)^n (1 - \tanh^2 \chi)^{1/4}$ e:

$$P_n = ((2n)!/(n!)^2) (\tanh \chi/2)^{2n} \sqrt{1 - \tanh^2 \chi}$$

37. L'hamiltoniana di un sistema di bosoni in uno spazio unidimensionale è:

$$H = \hbar\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n^\dagger a_n .$$

All'istante $t = 0$ si accende bruscamente una perturbazione esterna corrispondente all'operatore

$$V = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{n+1}^\dagger + a_{n-1}^\dagger) a_n .$$

Lo stato iniziale del sistema (Ψ_I) coincide con quello fondamentale di N particelle in assenza della perturbazione. La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo descrive in rappresentazioni di interazione (in cui $\Psi^{(i)}(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \Psi(t)$), lo stato evoluto al tempo t e al primo ordine in V tramite:

$$\Psi^{(i)}(t) = \Psi_I - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau e^{\frac{iH\tau}{\hbar}} V e^{-\frac{iH\tau}{\hbar}} \Psi_I .$$

Calcolare esplicitamente tale stato nel formalismo della seconda quantizzazione.

(Sol: $\Psi^{(i)}(t) = \frac{(a_0^\dagger)^N}{\sqrt{N}} \Psi_0 - \frac{\lambda\sqrt{N}}{\hbar\omega} (e^{i\omega t} - 1) (a_1^\dagger + a_{-1}^\dagger) \frac{(a_0^\dagger)^{N-1}}{\sqrt{N-1}} \Psi_0 .$)

38. L'hamiltoniana di un sistema di bosoni in uno spazio unidimensionale è:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon(n) a_n^\dagger a_n .$$

Si consideri l'operatore:

$$V = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{n+1}^\dagger + a_{n-1}^\dagger) a_n .$$

e si calcoli il commutatore:

$$[V(t), V(0)] ,$$

dove $V(t)$ è l'evoluto di V in rappresentazione di Heisenberg.

$$\begin{aligned} (\text{Sol: } & \lambda^2 \sum_n \left[a_{n+2}^\dagger a_n \left(e^{i(\epsilon(n+2) - \epsilon(n+1)) \frac{t}{\hbar}} - e^{i(\epsilon(n+1) - \epsilon(n)) \frac{t}{\hbar}} \right) \right. \\ & + a_{n-2}^\dagger a_n \left(e^{i(\epsilon(n-2) - \epsilon(n-1)) \frac{t}{\hbar}} - e^{i(\epsilon(n-1) - \epsilon(n)) \frac{t}{\hbar}} \right) \\ & \left. + 2i a_n^\dagger a_n \left(\sin \left((\epsilon(n) - \epsilon(n-1)) \frac{t}{\hbar} \right) - \sin \left((\epsilon(n+1) - \epsilon(n)) \frac{t}{\hbar} \right) \right) \right] .) \end{aligned}$$

39. Con riferimento ai due esercizi precedenti calcolare fino al secondo ordine in λ e in funzione del tempo il valor medio $(\Psi^{(i)}(t), V(t)\Psi^{(i)}(t))$ verificando che, se lo stato iniziale Ψ_I è autostato di H , si ha:

$$(\Psi^{(i)}(t), V(t)\Psi^{(i)}(t)) = (\Psi_I, V\Psi_I) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau (\Psi_I, [V(t), V(0)] \Psi_I) .$$

$$(\text{Sol: } \frac{4\lambda^2 N}{\hbar\omega} (\cos(\omega t) - 1) .)$$

40. Si consideri un sistema di N bosoni in una buca unidimensionale a pareti riflettenti il cui spazio di Fock è generato dall'azione degli operatori di creazione a_n^\dagger (con n intero positivo) sul vuoto Ψ_0 . L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega n a_n^\dagger a_n .$$

Dato, in rappresentazione di Heisenberg, l'operatore

$$V(t) = \lambda(a_2^\dagger a_1 e^{i\omega t} + a_1^\dagger a_2 e^{-i\omega t})$$

si calcoli, con riferimento allo stato fondamentale Ψ_{FN} , il valor medio del commutatore

$$C(t) = i \langle \Psi_{FN}, [V(t), V(0)] \Psi_{FN} \rangle .$$

$$(\text{Sol: } 2\lambda^2 N \sin(\omega t) .)$$

SECONDA QUANTIZZAZIONE (FERMIONI)

1. Per gli elettroni nell'orbita K di un atomo indichiamo con a_+ e a_- gli operatori di distruzione sugli stati con terza componente dello spin eguale a $+$ e $-\frac{1}{2}$ rispettivamente. Calcolare il commutatore degli operatori:

$$X_1 = \frac{a_+^\dagger a_- + a_-^\dagger a_+}{2}$$

e

$$X_2 = \frac{a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+}{2i}$$

Qual'è il significato fisico dell'operatore così ottenuto?

(Sol: $[X_1, X_2] = i X_3 \equiv i \frac{a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-}{2}$, $\hbar X_i$ componenti dello spin)

2. Calcolare il valor medio dell'operatore:

$$V = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}; \sigma_1, \sigma_2 = \pm} v(k) a_{\vec{p}+\vec{k}, \sigma_1}^\dagger a_{\vec{q}-\vec{k}, \sigma_2}^\dagger a_{\vec{q}, \sigma_2} a_{\vec{p}, \sigma_1} ,$$

nello stato di due elettroni quantizzati in una scatola cubica di lato L con condizioni al contorno periodiche:

$$a_{\vec{p}_1, +}^\dagger a_{\vec{p}_2, +}^\dagger \Psi_0 .$$

(Sol: $\frac{1}{L^3} [v(0) - v(|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|)]$.)

3. Per un sistema di elettroni quantizzato in una buca tridimensionale con condizioni al contorno periodiche, calcolare in seconda quantizzazione, nella rappresentazione del numero di occupazione rispetto al momento ed allo spin, l'operatore di interazione a due corpi corrispondente al potenziale

$$v(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Discutere in particolare la dipendenza dell'interazione dallo spin degli elettroni.

(Sol: $V = \lambda \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} a_{\vec{p}+\vec{q}, +}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}, -}^\dagger a_{\vec{k}, -} a_{\vec{p}, +}$.)

4. Dato uno stato rappresentato dal vettore Ψ_s e l'operatore densità di particella $\rho(\vec{R}) = \sum_{\sigma} \Phi^\dagger(\vec{R}, \sigma) \Phi(\vec{R}, \sigma)$, si chiama funzione di correlazione della densità relativa allo stato s l'espressione

$$G(\vec{R}) = \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s, \rho(\vec{R}) \Psi_s \rangle \langle \Psi_s, \rho(\vec{0}) \Psi_s \rangle .$$

Calcolare il valore della funzione G nel caso in cui lo stato s è quello di due fermioni identici entrambi con spin $+\frac{1}{2}$ e con numeri d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 rispettivamente, quantizzati in una scatola di lato L con condizioni al bordo periodiche.

(Sol: $G(\vec{R}) = \frac{2\delta(\vec{R})}{L^3} - \frac{2}{L^6} (\cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{R}) + 1)$.)

5. Sia $A_{n,\sigma}$ l'operatore di distruzione relativo allo stato con numero d'onda $\frac{2\pi n}{L}$ e spin $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ di un sistema di fermioni non interagenti e liberi di muoversi su un anello di lunghezza L . Si calcoli il valor medio dell'operatore:

$$\sum_{\sigma} \left(\sum_{n=-N}^N A_{n,\sigma}^{\dagger} \right) \left(\sum_{m=-N}^N A_{m,\sigma} \right),$$

nello stato fondamentale di $4N + 2$ fermioni.

(Sol: $4N + 2$.)

6. Rappresentiamo in seconda quantizzazione lo stato fondamentale di un atomo di elio tramite il vettore:

$$a_{1+}^{\dagger} a_{1-}^{\dagger} \Psi_0$$

dove Ψ_0 é il vuoto, 1 il numero quantico principale, +,- le componenti z dello spin. Come cambia l'energia dello stato fondamentale se si introduce l'interazione:

$$V = \sum_{n,m=1}^{\infty} g(n,m) a_{n+}^{\dagger} a_{m-}^{\dagger} a_{m-} a_{n+}$$

(Sol: $\Delta E = g(1,1)$)

7. Per un sistema di fermioni identici col solo grado di libert  di spin (che assume i valori $\pm\frac{1}{2}$) ed i cui operatori di distruzione sono indicati con a_{\pm} l'hamiltoniana  :

$$H = \mathcal{H} \frac{a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-}}{2}.$$

Calcolare la legge di evoluzione temporale in rappresentazione di Heisenberg dell'operatore che al tempo iniziale ($t = 0$)  :

$$S(0) = \frac{a_{+}^{\dagger} a_{-} + a_{-}^{\dagger} a_{+}}{2}.$$

(Sol: $S(t) = \frac{a_{+}^{\dagger} a_{-} e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} + a_{-}^{\dagger} a_{+} e^{-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}}}{2}$.)

8. L'Hamiltoniano del modello di BCS in forma semplificata   dato da

$$H = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{\alpha}{N} n N_n - \frac{g}{N} \sum_{n=-N, n \neq 0}^N b_n^{\dagger} \sum_{m=-N, m \neq 0}^N b_m$$

dove $N_n = \sum_{\sigma} a_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma}$, $b_n = a_{m,-} a_{m,+}$ e gli operatori di creazione e distruzione soddisfano le relazioni di anti-commutazione $[a_{\sigma,n}, a_{\sigma',m}^{\dagger}]_{+} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,m}$. Calcolate i commutatori $[N_n, b_m]$ e $[b_n, b_m^{\dagger}]$.

Utilizzando le regole di commutazione di cui sopra cercate gli autostati di H corrispondenti ai vettori della forma: $|\gamma\rangle \equiv \sum_{n=-N, n \neq 0}^N c_n b_n^{\dagger} |0\rangle$.

(Sol: Le regole di commutazione sono: $[b_n, b_m^{\dagger}] = \delta_{n,m}(1 - N_n)$, $[N_n, b_m] = -2\delta_{n,m} b_m$. L'equazione agli autovalori è:

$$H|\gamma\rangle = \left[\sum_{n=-N, n \neq 0} \frac{\alpha}{N} n c_n - \frac{g}{N} \sum_{p=-N, p \neq 0} c_p \sum_{n=-N, n \neq 0} \right] b_n^{\dagger} |0\rangle = E \sum_{n=-N, n \neq 0}^N c_n b_n^{\dagger} |0\rangle$$

da cui si trova $1 = \frac{g}{N} \sum_{n=-N, n \neq 0} \frac{1}{E - \frac{\alpha}{N} n}$ che ammette $2N$ soluzioni)

9. Facendo riferimento al sistema descritto nell'esercizio precedente, assumendo che l'energia di Fermi sia data da $n = 0$ calcolate la correzione fino al secondo ordine in g all'energia dello stato fondamentale.

(Sol: Lo stato fondamentale imperturbato è: $|\Omega\rangle = \prod_{n=-N}^{-1} b_n^{\dagger} |0\rangle$,

$$V|\Omega\rangle = \frac{g}{N} [|\Omega\rangle - \sum_{m=1}^N b_m^{\dagger} \sum_{p=-N}^{-1} \prod_{n=-N, n \neq p}^{-1} b_n^{\dagger} |0\rangle]$$

Quindi la correzione all'energia è data da: $\Delta E = -g - \frac{1}{2} \frac{g^2}{N\alpha} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{n+m} \rightarrow -g - \frac{g^2}{2\alpha} (2 \ln 2 - 1)$. al limite $N \rightarrow \infty$)

10. Si tratti col metodo della trasformazione canonica un sistema di fermioni in una dimensione i cui operatori di distruzione sono a_n (con n intero $-\infty < n < \infty$) e la cui hamiltoniana è

$$H = \sum_n \left[n^2 a_n^{\dagger} a_n + \lambda c_n (a_{-n}^{\dagger} a_n^{\dagger} + a_n a_{-n}) \right].$$

con $c_n = n$ per $|n| < N$ e $c_n = 0$ per $|n| > N$.

(Sol: $H = \sum_{|n| < N} \left(\frac{n^2 - \sqrt{n^4 + 4\lambda^2 n^2}}{2} + \sqrt{n^4 + 4\lambda^2 n^2} A_n^{\dagger} A_n \right) + \sum_{|n| > N} n^2 A_n^{\dagger} A_n$, dove A_n sono i nuovi operatori di distruzione)

11. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma} + \lambda \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} \left[a_{p+2,+}^{\dagger} a_{r-2,-}^{\dagger} a_{r,-} a_{p,+} + a_{p-2,+}^{\dagger} a_{r+2,-}^{\dagger} a_{r,-} a_{p,+} \right].$$

Calcolare la correzione all'energia della stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

(Sol: $-2 \frac{\lambda^2}{\alpha}$.)

12. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + g \sum_{p,r=-\infty,\sigma}^{\infty} a_{p+1,\sigma}^\dagger a_{r-1,-\sigma}^\dagger a_{r,-\sigma} a_{p,\sigma} .$$

Calcolare al primo ordine in λ la correzione all'energia dei primi stati eccitati del sistema con spin totale nullo.

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_{n,+}^\dagger a_{n,+} - a_{n,-}^\dagger a_{n,-}] |S\rangle = 0).$$

(Sol: I primi stati eccitati del sistema sono gli stati: $a_{\tau(N+1),\sigma}^\dagger a_{\lambda N,-\sigma} |F\rangle$ dove $|F\rangle$ è lo stato fondamentale e le variabili τ, σ, λ valgono \pm . Tali stati sono degeneri e quindi si applica la corrispondente teoria delle perturbazioni al primo ordine. I termini dell'interazione che agiscono fra stati degeneri sono quelli con p e r dello stesso segno, essi hanno elementi di matrice non nulli solo fra stati con $\tau = \lambda$. Quindi le energie degli stati con $\tau = -\lambda$ non hanno correzioni al primo ordine, mentre si ha un elemento di matrice pari a g fra gli stati con $\tau = \lambda$ e σ opposti. La somma di questi stati ha una correzione pari a g mentre la differenza ha $-g$.)

13. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + \frac{\lambda}{L} \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-1}^1 a_{p+q,+}^\dagger a_{r-q,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} .$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

$$(\text{Si ricordi che } \sum_{n=0}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} .)$$

$$(\text{Sol: } E = \frac{\hbar^2}{mL^2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{3} + \frac{\lambda(2N+1)^2}{L} - \frac{2\lambda^2 m}{\hbar^2(2N+1)} .)$$

14. L'hamiltoniana di un sistema di $4N + 2$ elettroni vincolati a muoversi su un anello di lunghezza L è schematizzata come segue:

$$H = \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha |n| a_{n,\sigma}^\dagger a_{n,\sigma} + \lambda \sum_{p,r,s=-\infty}^{\infty} e^{-\mu|s|} a_{p+s,+}^\dagger a_{r-s,-}^\dagger a_{r,-} a_{p,+} .$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ assumendo che $\mu N \gg 1$.

$$(\text{Sol: } E = 2\alpha(4N+2)(4N+3) + \lambda(2N+1)^2 - \frac{2\lambda^2 e^{2\mu}}{\alpha(e^{2\mu}-1)^2} + O(\lambda^3) .)$$

15. Gli elettroni in un solido con impulso di Fermi P_F interagiscono tramite l'operatore energia potenziale:

$$V = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} e^{-\mu k} a_{\vec{p}+\vec{k},+}^\dagger a_{\vec{q}-\vec{k},-}^\dagger a_{\vec{q},-} a_{\vec{p},+} .$$

Gli elettroni quantizzati in un scatola cubica di volume V con condizioni al contorno periodiche e gli indici \pm indicano lo stato di spin. L'energia cinetica degli elettroni $\epsilon(p)$ è funzione del modulo dell'impulso e, nelle vicinanze del livello di Fermi ($p \sim P_F$), si ha: $\epsilon(p) \simeq \epsilon_F + v(p - P_F)$. Assumendo $\mu P_F \gg 1$ si calcolino le correzioni al primo e secondo ordine in λ all'energia dello stato fondamentale del sistema e si valuti il limite delle correzioni alla densità di energia dello stato fondamentale al limite di volume infinito. (Essendo $\mu P_F \gg 1$, e quindi il raggio di variabilità di \vec{k} piccolissimo rispetto a quello del mare di Fermi mentre p e q non si discostano molto da P_F , si osservi che è possibile approssimare sistematicamente nei calcoli $|\vec{p} + \vec{k}|$ con $p + k \cos \theta$ e $|\vec{q} - \vec{k}|$ con $q + k \cos \theta'$, dove θ e θ' sono rispettivamente l'angolo fra \vec{p} e \vec{k} e \vec{q} e $-\vec{k}$)

$$\begin{aligned} (\text{Sol: } E_1 &\rightarrow \frac{\lambda V P_F^6}{72\pi^4 \hbar^6} \\ E_2 &\simeq -\frac{\lambda^2}{4V^2} \sum_{\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}} \frac{e^{-2\mu k}}{vk(\cos \theta + \cos \theta')} \Theta(p + k \cos \theta - P_F) \Theta(q - k \cos \theta' - P_F) \Theta(P_F - p) \Theta(P_F - q) \\ &\rightarrow -\frac{\lambda^2 V}{2^7 \pi^6 \hbar^9 v} \int_0^\infty dk k e^{-2\mu k} \int_0^1 \frac{d \cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta'} \int_{P_F - k \cos \theta}^{P_F} dp \int_{P_F - k \cos \theta'}^{P_F} dq \\ &\simeq -\frac{\lambda^2 V P_F^4}{2^9 \pi^6 \hbar^9 \mu^4 v} (1 - \log 2) \end{aligned}$$

16. Un sistema isotropo di elettroni in tre dimensioni, quantizzati in un volume Ω , interagisce con il campo fononico longitudinale tramite:

$$H_I = \frac{-i\lambda}{\sqrt{2v\rho\Omega}} \sum_{\vec{k}=\vec{n} \frac{\hbar\pi}{\Omega^{1/3}}, \vec{p}=\vec{m} \frac{\hbar\pi}{\Omega^{1/3}}, \sigma} \sqrt{k} e^{-\frac{kD}{\hbar}} a_{\vec{p}+\vec{k},\sigma}^\dagger a_{\vec{p},\sigma} (A_{\vec{k}} - A_{-\vec{k}}^\dagger) .$$

dove $a_{\vec{p},\sigma}$ è l'operatore di distruzione di elettroni con impulso \vec{p} e spin σ e $A_{\vec{k}}$ quello di fononi longitudinali con impulso \vec{k} . $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, v_3 , la velocità dei fononi longitudinali, vale 10^4 m/s , $D = 10^{-8} \text{ m}$, l'impulso di Fermi $p_F = 6 \cdot 10^{-25} \text{ Newton} \cdot \text{m}$, per cui $Dp_F \gg \hbar$. Calcolare la correzione fino al secondo ordine in λ alla densità di energia dello stato fondamentale. (Essendo $Dp_F \gg \hbar$, e quindi il raggio di variabilità di \vec{k} piccolissimo rispetto a quello del mare di Fermi mentre p non si discosta molto da p_F , si osservi che è possibile approssimare sistematicamente nei calcoli $E(p)$ con $v_F p$ dove v_F è la velocità degli elettroni alla superficie di Fermi, e $|\vec{p} + \vec{k}|$ con $p + k \cos \theta$, dove θ è l'angolo fra \vec{p} e \vec{k} .)

$$(\text{Sol: } \frac{\Delta E}{\Omega} = -\frac{3\lambda^2 p_F^2}{64\pi^4 \hbar^2 v_F v_3 \rho D^4} (1 - \frac{v_3}{v_F} \ln(1 + \frac{v_F}{v_3}))$$

17. Si consideri un sistema di N bosoni e $4N + 2$ fermioni su un segmento con condizioni al contorno periodiche. Se $a_{n,\sigma}$ è l'operatore di distruzione fermionico sullo stato con numero

d'onda n e spin σ e A_n quello bosonico lo stato con numero d'onda n , l'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \left(\alpha \sum_{\sigma} a_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma} + \beta A_n^{\dagger} A_n \right) + \lambda \sum_{n,m=-\infty, \sigma}^{+\infty} \left(a_{n+1,\sigma}^{\dagger} A_{m-1}^{\dagger} + a_{n-1,\sigma}^{\dagger} A_{m+1}^{\dagger} \right) A_m a_{n,\sigma} ,$$

Calcolare l'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in λ .

(Sol: $E = 2N \left(\alpha(N+1) - 2 \frac{\lambda^2}{\alpha+\beta} \right)$.)

18. L'hamiltoniana di un sistema di fermioni in uno spazio unidimensionale è:

$$H = \hbar\omega \sum_{n=-\infty, \sigma}^{+\infty} |n| a_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma} .$$

All'istante $t = 0$ si accende bruscamente una perturbazione esterna corrispondente all'operatore

$$V = \lambda \sum_{n=-\infty, \sigma}^{+\infty} (a_{n+1,\sigma}^{\dagger} + a_{n-1,\sigma}^{\dagger}) a_{n,\sigma} .$$

Lo stato iniziale del sistema (Ψ_I) coincide con quello fondamentale di $4N + 2$ particelle in assenza della perturbazione. La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo descrive in rappresentazioni di interazione (in cui $\Psi^{(i)}(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \Psi(t)$), lo stato evoluto al tempo t e al primo ordine in V tramite:

$$\Psi^{(i)}(t) = \Psi_I - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau e^{\frac{iH\tau}{\hbar}} V e^{-\frac{iH\tau}{\hbar}} \Psi_I .$$

Calcolare esplicitamente tale stato nel formalismo della seconda quantizzazione.

(Sol: $\Psi^{(i)}(t) = \Psi_I + \frac{\lambda}{\hbar\omega} (e^{i\omega t} - 1) \left[(a_{N+1,\sigma}^{\dagger} b_{-N,-\sigma}^{\dagger} + (a_{-N-1,\sigma}^{\dagger}) b_{N,-\sigma}^{\dagger} \right] \Psi_I$ dove $b_{N,\sigma}^{\dagger}$ è l'operatore di creazione di una buca.)

19. Con riferimento all'esercizio precedente calcolare, fino al secondo ordine in λ e in funzione del tempo il valor medio:

$$\left(\Psi^{(i)}(t), V(t) \Psi^{(i)}(t) \right)$$

(Sol: $\frac{8\lambda^2}{\hbar\omega} (\cos(\omega t) - 1)$.)

20. In un solido isolante tutti gli stati della banda di valenza sono completamente occupati da elettroni mentre le bande superiori sono vuote. Consideriamo le due bande vuote di energia inferiore, nella prima l'energia dell'elettrone sia data da $E_1 = \alpha k^2$ nella seconda

$E_2 = \alpha k^2 + \beta$ dove k è il numero d'onda. Se gli elettroni nelle due bande interagiscono con i fononi longitudinali tramite:

$$H_I = \frac{i\lambda}{\sqrt{v_s\Omega}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} q [a_{1, \vec{p}+\vec{q}, \sigma}^\dagger a_{2, \vec{p}, \sigma} + a_{2, \vec{p}+\vec{q}, \sigma}^\dagger a_{1, \vec{p}, \sigma}] (A_{\vec{k}} - A_{-\vec{k}}^\dagger)$$

dove $A_{\vec{k}}$ è l'operatore di distruzione del fonone longitudinale, $a_{i, \vec{p}, \sigma}$ quello dell'elettrone nella banda $i = 1, 2$ e v_s è la velocità dei fononi, calcolate la probabilità per unità di tempo perché un elettrone con energia minima nella banda 2 transisca emettendo un fonone nella banda 1 assumendo che $v_s \gg 2\sqrt{\alpha\beta}$ e che $\beta/v_s \gg \pi/a$ essendo a il passo del reticolo. (Si calcoli il quadrato dell'elemento di matrice rilevante a volume finito e si passi poi a volume infinito applicando la regola d'oro.)

(Sol: $\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda^2}{\pi\hbar v_s} \int_0^\infty q^4 \delta(\beta - \alpha q^2 - v_s q) \simeq \frac{\lambda^2 \beta^4 v_s^6}{\pi \hbar^6}$)

21. Un atomo, schematizzato come un sistema a due livelli con differenza di energia $E_2 - E_1 = \Delta > 0$ e massa praticamente infinita, sistema schematizzato a sua volta come un fermione a due stati con operatori di creazione e distruzione A_i e A_j^\dagger con $i, j = 1, 2$, interagisce con un sistema degenere di fermioni (elettroni) con spin 1/2 e massa $m = 10^{-30} kg$ e energia di Fermi E_F , tramite l'operatore

$$V = \frac{\lambda\hbar c}{\Omega} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} [A_1^\dagger A_2 + A_2^\dagger A_1] (a_{\vec{p}, \sigma})^\dagger a_{\vec{q}, \sigma}$$

dove $(a_{\vec{p}, \sigma})^\dagger$ è l'operatore di creazione di una particella con impulso \vec{p} e spin σ quantizzata nel volume Ω . Ponendo $\lambda = 10^{-23} m^2$, $\Delta = 1 eV$ e $E_F = 10^{-2} eV$ calcolare il tempo medio di decadimento dell'atomo dal livello 2 al livello 1. Trascurate correzioni al risultato di ordine E_F/Δ .

Se la vita media dell'atomo per decadimento radiativo è $\tau = 10^{-8} s$ con quale probabilità l'atomo decade emettendo un fotone?

(Sol: applicando la regola d'oro e sommando sugli spin finali si ha: $\frac{dP}{dt} = \frac{m\lambda^2 c^2}{\pi^3 \hbar^5} \int_0^{E_F} q^2 \sqrt{q^2 + 2m\Delta} dq \simeq \frac{m\lambda^2 c^2 E_F^3}{3\pi^3 \hbar^5} \sqrt{2m\Delta} \simeq 10^9 s^{-1}$)