



A.A. 2007 - 2008



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA IN FISICA

**Serie divergenti e osservabili fisiche:
le sezioni d'urto risommate
nel limite di emissione soffice in QCD**

Candidato: Marco Bonvini
Relatore: Giovanni Ridolfi
Co-Relatore: Nicodemo Magnoli

Data di laurea: 24 settembre 2008

Sommario

L'oggetto di studio della tesi è il calcolo di sezioni d'urto in cromodinamica quantistica (QCD) nel limite di emissione soffice; in questo limite i coefficienti dello sviluppo perturbativo, che contengono potenze del logaritmo dell'energia dei gluoni emessi, diventano abbastanza grandi da rendere inaffidabile qualunque approssimazione a ordine fisso. In questo regime, usando il modello a partoni e il teorema di fattorizzazione, si possono ottenere delle espressioni per le sezioni d'urto risommate a tutti gli ordini perturbativi. Tali sezioni d'urto risommate sono generalmente ottenute in spazi di variabili non fisiche, tipicamente variabili coniugate a quelle fisiche secondo una trasformata integrale (la trasformata di Mellin per la sezione d'urto totale, quella di Fourier per la sezione d'urto differenziale in impulso trasverso). Si trova che, a causa della presenza della singolarità di Landau nella costante di accoppiamento *running* della QCD, queste trasformate integrali non sono invertibili. Si mostra che la non invertibilità delle trasformate integrali è legata alla divergenza delle serie perturbative in questione. Occorre pertanto fornire opportune prescrizioni per ottenere espressioni risommate per le sezioni d'urto osservabili. In letteratura sono presenti diversi esempi di prescrizioni di questo tipo.

Si propone un approccio basato sul metodo di Borel per trattare le serie divergenti. Tale approccio è stato introdotto in tempi recenti nel caso della sezione d'urto totale per la produzione di sistemi pesanti vicino alla soglia di produzione. In questa tesi, l'applicazione del metodo di Borel al caso della sezione d'urto totale viene rivista e migliorata rispetto alla sua formulazione originale.

Il risultato originale della tesi consiste nell'estensione del metodo di Borel al caso, più interessante, della distribuzione in impulso trasverso. Vengono ricavate le formule esplicite di inversione della trasformata di Fourier per tutti i termini della serie perturbativa, che viene poi trattata secondo il criterio di Borel, analogamente al caso della sezione d'urto totale. Si mostra che tale approccio permette di rimuovere la divergenza tramite l'inclusione di termini (anch'essi divergenti) formalmente soppressi da potenze inverse della scala di energia dura tipica del processo (higher twist).

Si conclude mostrando un confronto di questo approccio con altre prescrizioni presenti in letteratura, tramite esempi numerici nel caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso per coppie di Drell-Yan o bosoni vettoriali deboli; questa classe di processi riveste una notevole importanza per gli sviluppi futuri della fisica delle alte energie, e le corrispondenti sezioni d'urto ricevono contributi importanti dalla risommazione. Vengono illustrati i vantaggi concettuali e pratici della nostra tecnica rispetto ai metodi utilizzati in precedenza. Tra questi, va sottolineata la possibilità di una implementazione numerica relativamente semplice.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La divergenza degli sviluppi perturbativi	5
2	Rinormalizzazione e gruppo di rinormalizzazione	7
2.1	Rinormalizzazione	7
2.2	Gruppo di rinormalizzazione	13
3	Interazioni forti	19
3.1	Cromodinamica quantistica	19
3.2	L'equazione di gruppo di rinormalizzazione	21
3.2.1	Il problema delle soglie	24
3.3	La divergenza degli sviluppi perturbativi in QCD	26
3.4	Modello a partoni	31
3.4.1	Correzioni di QCD al modello a partoni	34
3.4.2	Violazione dello scaling	36
4	Processo di Drell-Yan	39
4.1	Introduzione al processo di Drell-Yan	39
4.2	Leading order	42
4.2.1	Sezione d'urto	44
4.3	Correzioni di QCD	44
4.3.1	Correzione al vertice	45
4.3.2	Correzione al propagatore	51
4.3.3	Contributo di emissione reale	52
4.3.4	Risultato finale	56
5	Risommazione	61
5.1	La sezione d'urto totale	62
5.1.1	Risommazione soffice e gruppo di rinormalizzazione	65
5.2	La sezione d'urto differenziale in impulso trasverso	70
5.2.1	Approssimazioni	72
5.2.2	Calcolo dei coefficienti nella sezione d'urto risommata	75

6	Borel prescription	77
6.1	Sezione d'urto totale	78
6.1.1	Inversione termine a termine	78
6.1.2	Divergenza della serie per la trasformata inversa	80
6.1.3	Trasformazione di Borel	81
6.1.4	Inversione della trasformata di Borel	82
6.2	Sezione d'urto differenziale in impulso trasverso	85
6.2.1	Inversione termine a termine	86
6.2.2	Divergenza della serie per la trasformata inversa	88
6.2.3	Trasformazione di Borel	89
6.2.4	Inversione della trasformata di Borel	92
7	Risultati	95
7.1	Altre prescrizioni	95
7.1.1	b_* prescription	96
7.1.2	Minimal prescription	96
7.1.3	Approssimazione leading log	97
7.1.4	Approssimazione next-to-leading log	98
7.2	Risultati analitici	100
7.2.1	Inversione di $\log \frac{b_0^2}{\tilde{b}^2}$	100
7.2.2	Dimensione anomala al LL	102
7.3	Risultati numerici	103
7.3.1	Il running di α_s e il problema delle soglie	107
8	Conclusioni	109
A	Formule utili in regolarizzazione dimensionale	111
A.1	L'algebra di Dirac	111
A.2	Integrali di loop	112
A.3	Spazio delle fasi	113
A.3.1	Spazio delle fasi a due corpi	113
A.3.2	Spazio delle fasi a un corpo	115
B	Alcune nozioni matematiche	117
B.1	Serie divergenti	117
B.1.1	Il metodo di Borel	118
B.2	La distribuzione $[\cdots]_+$	120
	Bibliografia	123

Capitolo 1

Introduzione

La fisica delle alte energie sta per entrare in una fase nuova. Nell'autunno del 2008 infatti inizierà la fase di presa dati degli esperimenti che utilizzano il Large Hadron Collider (LHC) del CERN di Ginevra, una macchina acceleratrice in grado di far collidere due fasci di protoni ad altissima intensità con una energia totale nel sistema del centro di massa di 1.4×10^{13} elettron-Volt, o 14 TeV, circa un ordine di grandezza più elevata rispetto alle più alte energie raggiunte fino ad oggi in esperimenti di collisione (per i dettagli sulle caratteristiche dell'LHC si veda ad esempio [8]).

Lo scopo dell'esperimento, a parte la generica motivazione di esplorare scale di energia, e quindi di lunghezza, mai studiate fino ad ora, è principalmente quello di chiarire il meccanismo di rottura spontanea della simmetria elettrodebole: questo potrà avvenire tramite l'osservazione diretta di un bosone scalare di Higgs, come previsto dalla versione più semplice della teoria delle interazioni elettromagnetiche e deboli (il cosiddetto Modello Standard), oppure in realizzazioni più complicate, che coinvolgano una fisica nuova rispetto a quella osservata fino a oggi. Negli anni recenti sono state proposte numerose teorie che superano il modello standard delle interazioni fondamentali, con diverse motivazioni. Ognuna di queste teorie prevede il verificarsi di fenomeni nuovi (tipicamente, l'apparire di nuove particelle, non osservate finora in quanto cinematicamente inaccessibili da parte degli acceleratori fin qui costruiti) e sarà necessario uno sforzo di interpretazione dei dati per stabilire quale di queste proposte è effettivamente realizzata in natura.

Allo scopo di estrarre segnali di fisica nuova dai dati, è indispensabile disporre di un controllo il più accurato possibile sulla fisica standard, e soprattutto sulla fisica delle interazioni forti, trattandosi di una macchina con adroni nello stato iniziale. Fenomeni quali la produzione di *jet* adronici, o la creazione di bosoni vettoriali deboli, oppure ancora di coppie di quark pesanti, hanno luogo con elevatissime probabilità nelle condizioni sperimentali dell'LHC, e i segnali di nuova fisica, molto più rari, dovranno essere estratti da questo fondo di fenomeni standard. È per questa ragione che in tempi recenti si è moltiplicata l'attenzione dei fisici teorici nei confronti delle tecniche di calcolo di sezioni d'urto per processi adronici ad elevata precisione.

Lo strumento principale (anche se non l'unico) per questo tipo di calcoli è la teoria delle perturbazioni. Le interazioni forti sono descritte da una teoria di campo, la cromodinamica quantistica (QCD), che possiede la proprietà di essere asintoticamente libera: la costante di

interazione tende a zero al crescere dell'energia caratteristica del processo che viene studiato (questo fenomeno è simile a quello dello screening in elettrodinamica, ma di segno opposto). In considerazione di questa proprietà, il regime di energia dell'esperimento LHC è tale per cui la teoria delle perturbazioni, troncata ad un certo ordine finito, è usualmente abbastanza precisa (in pratica, a causa della complicazione dei calcoli, non si riesce normalmente ad andare oltre il secondo o terzo termine dello sviluppo perturbativo).

Esistono tuttavia eccezioni a questa regola. Questo accade, in generale, quando il processo considerato coinvolge più scale di energia, potenzialmente molto diverse fra loro. In queste condizioni i coefficienti dello sviluppo perturbativo contengono potenze del logaritmo del rapporto tra le scale di energia, e possono dunque crescere al punto da distruggere l'accuratezza dello sviluppo troncato ai primi termini. In altre parole, per certe regioni dello spazio delle fasi il parametro di sviluppo perturbativo non è la costante di accoppiamento α_s , ragionevolmente piccola ad alte energie, ma piuttosto la combinazione $\alpha_s \log^2 \frac{E_1}{E_2}$, dove E_1, E_2 sono due scale di energia che caratterizzano un dato processo. È evidente che, quando E_1 ed E_2 sono sufficientemente diverse tra loro, il parametro di sviluppo si avvicina a 1, e tutti i termini della serie diventano ugualmente rilevanti: un calcolo ad ordine fisso non è in questi casi di alcuna utilità. In questi casi è necessario sviluppare tecniche che consentano di risommare l'intera serie perturbativa, almeno nella regione cinematica in questione. Queste tecniche di risommazione sono l'oggetto di questa tesi.

Sono presenti in letteratura risultati risommati che si riferiscono a diversi casi di interesse. In questa tesi ci interesseremo di una particolare classe di grandi logaritmi: quelli che compaiono nel cosiddetto regime di emissione soffice. È questo il caso, per esempio, della produzione di sistemi pesanti vicino alla soglia di produzione; in questo caso, il rapporto E_1/E_2 è dato dalla quantità $1 - \frac{m}{E}$, essendo E l'energia totale disponibile e m la massa del sistema pesante; $1 - \frac{m}{E}$ tende a 0 quando $E \sim m$, da cui il nome di produzione di soglia. In queste condizioni, lo spazio delle fasi a disposizione dell'emissione di radiazione è limitato, e come vedremo esplicitamente questo implica l'apparire di logaritmi di $1 - \frac{m}{E}$ nei coefficienti dello sviluppo perturbativo. Un altro caso interessante è quello in cui si considera la distribuzione in impulso trasverso q_T di sistemi massivi. Quando la radiazione emessa è soffice, q_T tende a zero, e i coefficienti perturbativi contengono potenze del logaritmo di q_T . In Figura 1.1 riportiamo come esempio la distribuzione in impulso trasverso q_T per la produzione di un bosone di Higgs a LHC, calcolata in [9]. Il grafico di sinistra mostra il confronto tra il risultato ottenuto includendo solo il primo termine dello sviluppo perturbativo (LO) e il risultato ottenuto risommando l'intera serie, ad un livello di approssimazione NLL (il significato di questa sigla sarà illustrato nel Capitolo 5). Si può osservare che i due risultati sono sostanzialmente diversi per $q_T \lesssim 100$ GeV, mostrando chiaramente che la risommazione è necessaria al fine di fare predizioni per questa regione cinematica.

Questi risultati risommati hanno una caratteristica comune: per ragioni che saranno illustrate nel Capitolo 5, essi sono ottenuti non per la sezione d'urto, ma per una sua trasformata integrale rispetto alla variabile i cui logaritmi devono essere risommati. Per ottenere un risultato confrontabile con l'esperimento, è necessario invertire la trasformata integrale, e accade che l'integrale di inversione è normalmente mal definito. I risultati presenti in letteratura sono ottenuti impiegando opportune prescrizioni per aggirare questo

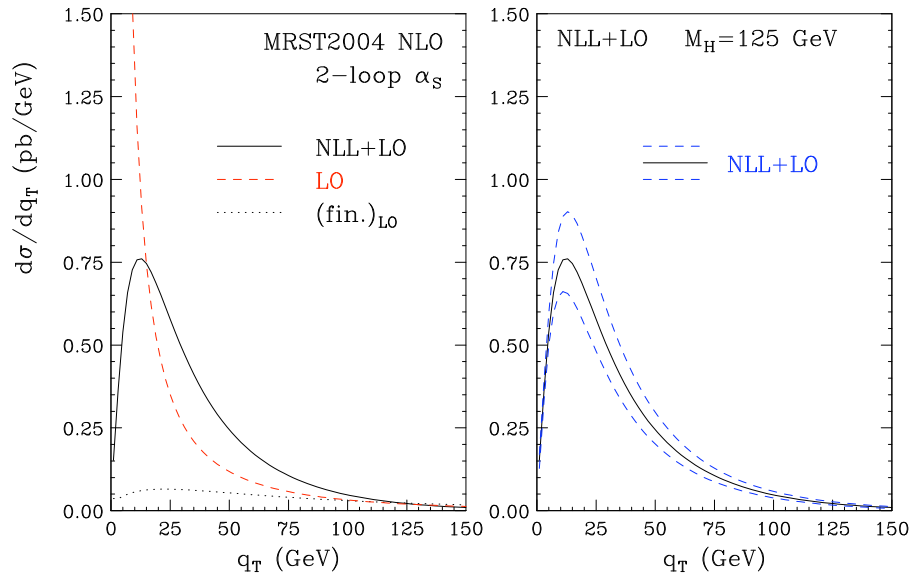


Figura 1.1: Distribuzione in impulso trasverso per la produzione di Higgs a LHC [9]. A sinistra confronto tra risultato al primo ordine perturbativo (LO) e il risultato risommato (NLL+LO). A destra le bande di incertezza dovute alla scelta del punto di rinormalizzazione e fattorizzazione.

ostacolo; ne segue che i risultati risommati sono affetti da una ambiguità, legata alla scelta della prescrizione utilizzata per invertire le trasformate integrali. È dunque importante disporre di più prescrizioni, allo scopo di stimare queste ambiguità.

Il risultato principale di questa tesi è la proposta di una nuova prescrizione nel caso della distribuzione in impulso trasverso di un generico sistema con massa (sia esso una coppia di leptoni a massa invariante fissata, un bosone vettoriale debole, un bosone di Higgs o una coppia di quark pesanti). Questa prescrizione si basa sull'osservazione che la non invertibilità della trasformata integrale (in questo caso, una trasformata di Fourier) è di fatto legata alla non-convergenza della serie perturbativa risommata: tale serie divergente viene trattata con il metodo di somma di Borel.

La tesi è organizzata nel modo seguente:

- Nei Capitoli 2 e 3 verranno introdotti alcuni concetti ben noti, che saranno utili per comprendere il resto della tesi. In primo luogo parleremo del processo di rinormalizzazione e dell'introduzione del gruppo di rinormalizzazione, che porta alla definizione di una costante di accoppiamento che dipende dalla scala di energia tipica del processo che si sta considerando (la cosiddetta costante di accoppiamento *running*). Nel caso delle interazioni forti tale dipendenza ha due importanti conseguenze: la libertà asintotica (la costante di accoppiamento $\alpha_s \rightarrow 0$ a grandi energie) e la presenza del polo di Landau a una scala di basse energie. In seguito, dopo una breve descrizione della QCD, la teoria di campo oggi riconosciuta come la teoria che descrive le interazioni forti, si mostrerà un argomento che dimostra che gli sviluppi perturbativi in QCD sono divergenti. Questo fatto è il punto centrale attorno a cui ruota tutta la tesi.

Infine, si illustreranno le caratteristiche principali del modello a partoni, per mezzo del quale è possibile descrivere le interazioni degli adroni tramite le interazioni dei loro costituenti, governate dalla QCD.

- Nel Capitolo 4 si illustrerà a titolo esemplificativo un calcolo esplicito all'ordine α_s in teoria delle perturbazioni, per il processo di produzione di una coppia di leptoni a grande massa invariante (processo di Drell-Yan), in seguito all'annichilazione di due quark appartenenti ad adroni di stato iniziale. A quest'ordine contribuiscono una correzione virtuale e l'emissione di un gluone reale; entrambi questi termini presentano una divergenza infrarossa, che si cancella nella somma, lasciando però traccia della sua esistenza in contributi logaritmici alla sezione d'urto, del tipo di quelli già descritti qui sopra.
- Nel Capitolo successivo, mostreremo come, nella regione cinematica in cui tali logaritmi sono grandi, si possa risommare l'intera serie perturbativa. Verranno trattati sia il caso della sezione d'urto totale, sia quello della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. La risommazione avviene in termini di variabili coniugate (tramite una trasformata integrale) alle variabili fisiche da cui dipendono i logaritmi; questo comporta che la sezione d'urto risommata deve essere invertita, al fine di essere espressa in termini della variabile fisica. Tuttavia tale inversione non è possibile, a causa di una singolarità legata al polo di Landau per la costante di accoppiamento α_s .
- Per ottenere una sezione d'urto nello spazio fisico, quindi, sarà necessaria una prescrizione per calcolare l'integrale di inversione mal definito. Nel Capitolo 6 verrà illustrata in dettaglio una tale prescrizione, detta Borel prescription. Tale prescrizione è stata proposta in tempi recenti per il caso della sezione d'urto totale. In questo Capitolo la dimostrazione viene migliorata e semplificata, e successivamente estesa e riadattata al caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. Questa estensione è in linea di principio abbastanza semplice, ma è tecnicamente non banale da effettuare. Questo Capitolo contiene i risultati originali di questa tesi.
- Nel Capitolo 7 verranno illustrate altre prescrizioni presenti in letteratura per il caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. Tramite risultati analitici e numerici, verranno messe a confronto le diverse prescrizioni. Questo è utile perché, attraverso l'ambiguità legata alla scelta di una prescrizione piuttosto che di un'altra, è possibile stimare la bontà della risommazione. Le prescrizioni note mostrano un buon accordo tra loro fino a valori molto bassi di impulso trasverso. I vantaggi della Borel prescription sono la relativamente facile implementazione numerica, la discreta velocità del calcolo numerico, e la sua versatilità.

Per completezza, ricordiamo che la risommazione dei logaritmi dovuti all'emissione soffice (qualche volta chiamati logaritmi di Sudakov) non è l'unico esempio di risommazione di sviluppi perturbativi. Un esempio ben noto è quello dei logaritmi del rapporto tra una scala di energia caratteristica del processo e la scala di rinormalizzazione, la cui presenza è indotta dal processo di rinormalizzazione delle costanti della teoria. È compito del gruppo

di rinormalizzazione risommare tali contributi logaritmici. Un'altra classe di grandi logaritmi intensamente studiata in letteratura è quella dei cosiddetti logaritmi di piccolo x : in processi come il deep-inelastic scattering i coefficienti perturbativi contengono in generale termini proporzionali al logaritmo della variabile x di Bjorken, che diventano dominanti nel limite $x \rightarrow 0$. Il caso dei logaritmi nel gruppo di rinormalizzazione sarà brevemente ricordato nel Capitolo 2, mentre non ci occuperemo affatto del problema dei piccoli x .

1.1 La divergenza degli sviluppi perturbativi

Prima di cominciare con il programma di lavoro illustrato qui sopra, vogliamo mostrare in dettaglio una questione che gioca un ruolo centrale in questa tesi, ovvero che gli sviluppi perturbativi sono divergenti.

Il punto di partenza è la teoria dei campi. Sebbene ci siano sforzi teorici in direzione di teorie di stringa (più promettente per includere la gravità in una teoria quantistica), la teoria delle particelle elementari è oggi descritta con sorprendente successo da teorie di campo locali. Per poter fare predizioni (ovvero, ottenere grandezze fisiche a partire dalla teoria) è necessario uno strumento che permetta di calcolare le grandezze fisiche. Lo strumento maggiormente usato è la *teoria delle perturbazioni*. Tale strumento si basa sull'ipotesi, che chiameremo d'ora innanzi *ipotesi perturbativa*, che una generica grandezza fisica F sia una funzione analitica della costante di accoppiamento α , e cioè che essa abbia uno sviluppo in serie di Taylor intorno a $\alpha = 0$:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \alpha^n, \quad (1.1)$$

dove α è la costante di accoppiamento della teoria. L'ipotesi (1.1) è chiaramente limitata: essa non prende in considerazione la possibilità che F possa dipendere in maniera non analitica da α .

Tuttavia, se l'ipotesi perturbativa fosse valida, essa sarebbe uno strumento molto utile per calcolare le grandezze fisiche. Infatti, nel caso in cui α sia molto piccola, tenere solo i primi termini dello sviluppo (1.1) dà una buona approssimazione di F . Questo fatto si verifica in pratica con grandissima precisione nel caso dell'elettrodinamica quantistica. I coefficienti F_n si sanno calcolare, almeno in linea di principio, a ogni ordine perturbativo in qualsiasi teoria di campo rinormalizzabile (vedremo nel prossimo Capitolo il significato di questo termine) tramite il potente metodo dei diagrammi di Feynman (il calcolo diventa via via più complesso al crescere di n , perciò in realtà il metodo in sé è utile solo nel caso $\alpha \ll 1$). Esistono strumenti alternativi alla teoria delle perturbazioni¹, ma non sono ancora così sviluppati da poter essere utilizzati per ottenere risultati utili alla fenomenologia.

In pratica, la maggior parte dei risultati che si ottengono in fisica delle particelle sono ottenuti tramite la teoria delle perturbazioni. Nel 1951 Dyson [10] dimostrò che lo sviluppo

¹Il metodo più diffuso è la teoria di campo su reticolo, che si basa sulla discretizzazione dello spazio tempo. Un altro metodo, più recente, è l'utilizzo della dualità AdS/CFT, che permette di mappare una teoria fortemente accoppiata in una debolmente accoppiata, così da poter indagare (sempre tramite la teoria delle perturbazioni) regioni in cui α è grande. Entrambi questi metodi, però, ad oggi non sono in grado di dare risultati altamente predittivi, come dà invece la teoria delle perturbazioni.

in serie perturbativa per una grandezza fisica generica in elettrodinamica quantistica (QED) non può che avere raggio di convergenza nullo. L'argomento è il seguente. Supponiamo che esista una grandezza fisica *reale* misurabile, dipendente in generale dalla costante di accoppiamento α della teoria, che denotiamo con

$$\hat{F}(\alpha) . \quad (1.2)$$

Nel caso dell'elettrodinamica, $\alpha = \alpha_{em} \equiv \frac{e^2}{4\pi}$, essendo e la carica dell'elettrone. Se l'ipotesi perturbativa (1.1) è valida, dovrebbe verificarsi

$$\hat{F}(\alpha) = F(\alpha) . \quad (1.3)$$

Poiché la serie (1.1) è una serie di potenze, essa ha un raggio di convergenza α_0 tale per cui la serie converge per ogni α tale che

$$|\alpha| < \alpha_0 . \quad (1.4)$$

Se $\alpha_0 \neq 0$, allora esistono valori negativi di α per i quali la serie è convergente. Tuttavia, per $\alpha < 0$ la funzione F rappresenta la grandezza fisica in questione nell'ambito di una teoria in cui cariche uguali si attraggono e cariche opposte si respingono (perché cambia segno il potenziale di Coulomb, che è proporzionale ad α). Si vede facilmente che in questa teoria non esiste un vuoto stabile: infatti, per oscillazioni quantistiche è possibile produrre coppie elettrone positrone che, respingendosi, possono raggiungere zone con addensamenti di carica del loro stesso tipo, aumentando indefinitamente l'energia potenziale negativa della forza di Coulomb. Questo mostra che il raggio di convergenza della serie deve essere nullo.

Questo argomento molto semplice è strettamente valido per la QED; vedremo nella Sezione 3.3 che la conclusione, cioè che gli sviluppi perturbativi sono divergenti, è valida anche per la QCD.

Questo quadro pone un problema concettuale, perché:

- da un lato si sa che lo sviluppo perturbativo è divergente, e quindi $F(\alpha)$ è mal definita;
- dall'altro, i primi termini di tale sviluppo sono fisicamente importanti, perciò sembra che l'ipotesi perturbativa non sia così insensata.

La teoria così come descritta ora ovviamente è insoddisfacente, e deve essere superata in qualche modo. Nel resto della tesi non ci si porrà il problema di dare una risposta a questa importante questione, ma ci scontreremo direttamente con il problema della divergenza degli sviluppi perturbativi e vedremo come sarà possibile ricavare informazioni fisiche da tali sviluppi.

Capitolo 2

Rinormalizzazione e gruppo di rinormalizzazione

In questo Capitolo saranno illustrati in maniera sintetica i concetti di rinormalizzazione e di gruppo di rinormalizzazione nell'ambito della teoria dei campi perturbativa, essenziali per comprendere i risultati originali della tesi, esposti nei Capitoli 6 e 7. Per una trattazione completa, che esula dagli scopi della tesi, si veda ad esempio [2, 3]. Qui vogliamo semplicemente ricordare i punti essenziali, che per semplicità saranno illustrati nell'ambito di una teoria di campo scalare reale.

Nel seguito vedremo come la presenza di infiniti nel calcolo di ampiezze di scattering possa essere trattata per mezzo della *rinormalizzazione*. Al fine che le grandezze fisiche misurabili non dipendano dagli artifici necessari alla rinormalizzazione, si deve introdurre il *gruppo di rinormalizzazione*, che porta ad equazioni per il *running* della costante di accoppiamento e delle masse, che risultano dipendere quindi dalla scala di energia.

2.1 Rinormalizzazione

Finché ci si ferma al leading order, ovvero ai diagrammi ad albero, il calcolo di funzioni di Green dà risultati finiti. Non appena si va oltre e si includono diagrammi a loop, compaiono integrali divergenti nella regione ultravioletta.¹ Le divergenze ultraviolette si trattano con la tecnica della *rinormalizzazione*. Questa tecnica consiste nel riassorbire gli infiniti nelle costanti (e nei campi) che appaiono nella lagrangiana della teoria, che non sono direttamente misurabili, in modo da ottenere funzioni di Green finite, che sono invece legate a grandezze misurabili.

Consideriamo per fissare le idee una teoria di campo scalare reale definita dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{3!} \phi^3, \quad (2.1)$$

in d dimensioni spazio-temporali; tale teoria viene usualmente chiamata teoria ϕ^3 . La condizione che \mathcal{L} abbia dimensione d implica che ϕ ha dimensione $d_\phi = \frac{d-2}{2}$ e g ha dimensione

¹Gli integrali di loop possono essere divergenti anche nella regione infrarossa; di tali divergenze, che non si possono trattare con la rinormalizzazione, parleremo diffusamente nel resto della tesi.

$d_g = \frac{6-d}{2}$. Poiché, come vedremo, le teorie in cui le costanti di accoppiamento sono adimensionate hanno un ruolo privilegiato in teoria dei campi, considereremo nel seguito il caso $d = 6$.

Nel limite $g = 0$ la teoria descrive particelle non interagenti (libere) di massa m . Si può dimostrare che le ampiezze di transizione da uno stato iniziale $|i\rangle$, composto di n particelle con impulsi k_i , a uno stato finale $|f\rangle$ composto di n' particelle con impulsi k'_j sono date dalla relazione

$$\langle f | i \rangle = i^{n+n'} \left[\prod_{i=1}^n \int d^d x_i e^{-ik_i x_i} (\partial_i^2 + m^2) \right] \left[\prod_{j=1}^{n'} \int d^d x'_j e^{+ik'_j x'_j} (\partial_j^2 + m^2) \right] \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(x'_1) \dots \phi(x'_{n'}) | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

dove $|0\rangle$ è lo stato di vuoto e T è il simbolo di ordinamento temporale. La (2.2) si chiama *formula di riduzione di LSZ*, e connette le ampiezze di transizione con le funzioni di Green della teoria, che sono calcolabili perturbativamente con il metodo dei diagrammi di Feynman. La (2.2) vale nell'ipotesi che sia

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0 \quad (2.3a)$$

$$\langle k | \phi(x) | 0 \rangle = e^{ikx}, \quad (2.3b)$$

dove $|k\rangle$ è lo stato di singola particella (con normalizzazione invariante) con impulso k . Queste relazioni sono verificate nella teoria libera, $g = 0$. In generale la presenza di interazioni modificherà le relazioni (2.3), ma sarà sufficiente operare una opportuna ridefinizione del campo ϕ per ripristinarne la validità:

$$\phi' \equiv \frac{\phi - \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle}{|\langle k | \phi(x) | 0 \rangle|}. \quad (2.4)$$

Operata tale ridefinizione, la densità lagrangiana assumerà in generale la forma (per semplicità chiamiamo di nuovo ϕ il campo ϕ' appena definito)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \phi^2 + \frac{g}{3!} Z_g \phi^3 + Y \phi, \quad (2.5)$$

dove evidentemente

$$Z_i = 1 + \mathcal{O}(g^2), \quad Y = \mathcal{O}(g). \quad (2.6)$$

Le quattro quantità Z_i, Y saranno fissate, ordine per ordine in teoria delle perturbazioni, dalle quattro condizioni seguenti: le equazioni (2.3), la condizione che m sia la massa fisica delle particelle, e una definizione di g in termini di qualche ampiezza di scattering a un valore definito degli impulsi esterni (per esempio, in QED il valore della costante di accoppiamento, la carica dell'elettrone e , è fissato dalla richiesta che la sezione d'urto a bassa energia per lo scattering di Coulomb sia proporzionale a e^4 , con una certa costante di proporzionalità ben definita, e nessun'altra correzione). Questo procedimento si chiama *rinormalizzazione* della teoria.

Vediamo schematicamente come funziona la rinormalizzazione al livello delle prime correzioni perturbative. Per fare ciò è utile riscrivere la lagrangiana nel modo seguente:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (2.7)$$

con

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{3!} Z_g \phi^3 + Y \phi + \frac{1}{2} (Z_\phi - 1) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \phi^2 . \quad (2.9)$$

Si noti che la lagrangiana di interazione \mathcal{L}_{int} contiene ora, oltre al termine di interazione vero e proprio proporzionale a g , anche altri termini dovuti alla rinormalizzazione: essi definiscono nuovi “vertici” a una e due linee esterne, da inserire nell’elenco delle regole di Feynman della teoria. Questi ultimi termini sono talvolta detti *contrattermini*.

Consideriamo ora le correzioni al propagatore della teoria, che scriviamo nella forma

$$\Delta(k^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\eta - \Pi(k^2)} . \quad (2.10)$$

Poiché è possibile dimostrare che, se valgono le equazioni (2.3), il propagatore esatto ha un polo in $k^2 = m^2$ con residuo 1, la correzione $\Pi(k^2)$ dovrà soddisfare le condizioni

$$\Pi(m^2) = 0; \quad \Pi'(m^2) = 0 . \quad (2.11)$$

Useremo queste condizioni per fissare i valori di Z_ϕ e Z_m , fino all’ordine g^2 .

Non rivediamo qui il formalismo dei diagrammi di Feynman e la tecnologia normalmente impiegata per il loro calcolo (riduzione dei denominatori, rotazione di Wick); essi saranno ripresi nel Capitolo 4 e in Appendice A.2 (per il caso quadridimensionale). Qui ci limitiamo a riportare il risultato al livello delle correzioni a un loop, che ha la forma seguente:

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} g^2 I(k^2) + Ak^2 - Bm^2 + \mathcal{O}(g^4) , \quad (2.12)$$

dove

$$I(k^2) = \int_0^1 dx \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D)^2} , \quad (2.13)$$

essendo \bar{q} un quadri-impulso euclideo, $A = Z_\phi - 1$, $B = Z_m - 1$ e

$$D = m^2 - x(1-x)k^2 . \quad (2.14)$$

È evidente che l’integrale in \bar{q} in eq. (2.13) è divergente nella regione ultravioletta $|\bar{q}| \rightarrow \infty$ per $d \geq 4$, e quindi in particolare per $d = 6$, che è il caso che ci interessa. Per procedere sarà dunque indispensabile operare una *regolarizzazione*, ovvero modificare in qualche modo l’integrale in modo da renderlo convergente. Ci riserviamo di tornare alla teoria originaria (cioè rimuovere la regolarizzazione) alla fine del calcolo. La tecnica di regolarizzazione più utilizzata, per ragioni connesse con lo studio delle simmetrie, è la *regolarizzazione dimensionale*, che consiste nel calcolare gli integrali in un numero di dimensioni d in cui essi sono

convergenti, e poi continuare analiticamente il risultato come funzione di d . Definiamo pertanto

$$d = 6 - 2\epsilon, \quad (2.15)$$

assumiamo che $\epsilon > 0$ sia sufficientemente grande da rendere l'integrale convergente, e calcoliamo l'integrale. Si trova

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(-1 + \epsilon)}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \left(\frac{4\pi}{D} \right)^\epsilon, \quad (2.16)$$

che ha poli semplici in ϵ quando $\epsilon - 1$ è un intero negativo o nullo. Prima di sostituire questo risultato nell'espressione di $\Pi(k^2)$ occorre ricordare che nella teoria regolarizzata la costante g ha le dimensioni di una massa alla potenza $d_g = \frac{6-d}{2} = \epsilon$. Per continuare a lavorare con una costante g adimensionata introduciamo un parametro arbitrario $\tilde{\mu}$, con le dimensioni di una massa, e ridefiniamo

$$g \rightarrow g\tilde{\mu}^\epsilon. \quad (2.17)$$

Definiamo inoltre

$$\alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \quad (2.18)$$

(che chiameremo ancora costante di accoppiamento). Otteniamo così

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2}\alpha\Gamma(-1 + \epsilon) \int_0^1 dx D \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right)^\epsilon + Ak^2 - Bm^2 + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.19)$$

Siccome siamo interessati a questa espressione in un intorno di $\epsilon = 0$, ne prendiamo lo sviluppo in serie di Laurent in $\epsilon = 0$, trascurando sistematicamente i termini che si annullano per $\epsilon = 0$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{2}\alpha \left[\left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \left(\frac{k^2}{6} - m^2 \right) - \int_0^1 dx D \log \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^{\gamma_E} D} \right] + Ak^2 - Bm^2 + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D \log \frac{D}{m^2} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{12}\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right] + A \right\} k^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right] + B \right\} m^2 + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove abbiamo definito

$$\mu^2 \equiv 4\pi e^{-\gamma_E} \tilde{\mu}^2, \quad (2.21)$$

essendo γ_E la costante di Eulero-Mascheroni. È ora chiaro che possiamo fissare le costanti A e B in modo da cancellare il termine divergente proporzionale a $1/\epsilon$, rendendo così l'intera espressione ben definita nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. La parte finita di A e B può essere fissata arbitrariamente: ciascuna scelta corrisponde ad una diversa scelta dello *schema di rinormalizzazione*. Lo schema definito dalle condizioni (2.11) viene usualmente chiamato schema *on-shell* (OS), e conduce al risultato

$$\Pi_{\text{OS}}(k^2) = \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D \log \frac{D}{D_0} + \frac{1}{12}\alpha(k^2 - m^2) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.22)$$

dove $D_0 = m^2[1 - x(1 - x)]$. L'integrale in x può essere calcolato elementarmente, ma la sua espressione non è particolarmente istruttiva.

Per proseguire nel programma di rinormalizzazione dobbiamo ora considerare la rinormalizzazione della costante di accoppiamento g , ovvero il calcolo del termine Z_g . A tale scopo, calcoliamo la correzione di ordine g^2 al vertice a tre punti. Procedendo in modo analogo al caso del propagatore, si trova anche in questo caso che l'unico grafico che contribuisce a un loop a questo calcolo presenta un integrale divergente nella regione ultravioletta; occorre quindi impiegare ancora la regolarizzazione dimensionale. Troviamo

$$V_3(k_1, k_2, k_3) = gZ_g + \frac{1}{2}\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \int dF_3 \log \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^{\gamma_E} D_3} + \mathcal{O}(\alpha) \right], \quad (2.23)$$

dove gli impulsi esterni k_i sono tutti entranti e soddisfano $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, e abbiamo definito

$$dF_3 = 2 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) \quad (2.24)$$

$$D_3 = m^2 - x_3 x_2 k_1^2 - x_3 x_1 k_2^2 - x_1 x_2 k_3^2. \quad (2.25)$$

Le variabili x_i variano tra 0 e 1. Ponendo ora $Z_g = 1 + C$, con C di ordine α , otteniamo

$$V_3(k_1, k_2, k_3) = g \left\{ 1 + \frac{1}{2}\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{\mu^2}{m^2} \right] + C - \frac{1}{2}\alpha \int dF_3 \log \frac{D_3}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right\}, \quad (2.26)$$

dove abbiamo usato la definizione (2.21). Anche in questo caso possiamo scegliere C tale da cancellare il polo in ϵ ; la residua libertà nel fissare la parte finita di C può essere fissata in diversi modi, ognuno dei quali corrisponde ad un diverso schema di rinormalizzazione. Una possibile scelta è quella di imporre la condizione

$$V_3(0, 0, 0) = g, \quad (2.27)$$

il che fornisce una particolare (fra le infinite possibili) definizione della costante di accoppiamento g . Con questa condizione abbiamo

$$V_{3,\text{OS}}(k_1, k_2, k_3) = g \left[1 - \frac{1}{2}\alpha \int dF_3 \log \frac{D_3}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \quad (2.28)$$

Per concludere, dobbiamo fissare la costante Y . Per definizione, essa deve essere scelta in modo da rendere nulla la funzione a un punto $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$. Questo può essere fatto, all'ordine g , in modo molto semplice, calcolando il grafico a un loop che contribuisce a questa funzione di Green. Non riportiamo qui questo calcolo, che non influenza il seguito della nostra discussione.

Ci domandiamo ora: esistono altre funzioni di Green che richiedono il calcolo di integrali divergenti? La risposta, nel caso della teoria che stiamo considerando, è negativa. Consideriamo infatti un generico grafico che contribuisca al calcolo della funzione di Green a E punti (ovvero con E linee esterne). Assumiamo poi che abbia V vertici di interazione, I linee interne e L loop. Ogni propagatore associato a una linea interna porterà una potenza -2 di un impulso di loop, mentre a ogni loop corrisponderà una integrazione d -dimensionale

in uno degli impulsi di loop. Possiamo aspettarci quindi che l'integrale sia divergente se ci sono più potenze degli impulsi di loop al numeratore che al denominatore, cioè se il *grado di divergenza superficiale del grafico*

$$D \equiv dL - 2I \quad (2.29)$$

è positivo o nullo. Ora, è facile vedere che il numero di impulsi di loop indipendenti L è pari al numero di linee interne, diminuito del numero di relazioni di conservazione che intercorrono tra gli I impulsi delle linee interne; tale numero è uguale al numero di vertici meno 1, a causa di una relazione di conservazione che coinvolge solo impulsi esterni. Dunque

$$L = I - V + 1 . \quad (2.30)$$

Inoltre, il numero totale di linee uscenti dai vertici, che è $3V$, è dato dal numero di linee esterne, più quello di linee interne contato due volte:

$$E + 2I = 3V . \quad (2.31)$$

Tenendo conto di queste relazioni, si ha

$$D = d + V \frac{d-6}{2} - E \frac{d-2}{2} . \quad (2.32)$$

Vediamo subito che per $d = 6$ questo numero è indipendente da V , cioè dall'ordine perturbativo del diagramma. Inoltre, D è positivo o nullo solo per $E = 2, 3$ (la funzione di Green a un punto, che ha $E = 1$, è nulla per costruzione). Questi sono i casi che abbiamo già considerato. Naturalmente è possibile il caso di grafici con $E > 3$ che abbiano sottodiagrammi divergenti. Tuttavia i sottodiagrammi divergenti possono avere soltanto 2 o 3 linee esterne, e abbiamo già visto come rimuovere queste divergenze. Dunque nella teoria ϕ^3 in 6 dimensioni è sufficiente operare la rinormalizzazione delle funzioni a 2 e 3 punti per rendere finita la teoria. In altre parole, è sufficiente misurare un numero finito di grandezze fisiche (nel nostro caso la massa della particella e una ampiezza di scattering) per rinormalizzare la teoria. Il procedimento si può ripetere ordine per ordine in teoria delle perturbazioni.

Una teoria di questo tipo si dice *rinormalizzabile*. Si osservi che la (2.32) si può riscrivere nel modo seguente:

$$D = d - Vd_g - Ed_\phi , \quad (2.33)$$

dove d_g e d_ϕ sono le dimensioni rispettivamente della costante di accoppiamento g e del campo ϕ (questo è vero in qualunque teoria, con le opportune modifiche). Ne segue che il numero di funzioni di Green con contributi divergenti è finito purché $d_g \geq 0$; in caso contrario, una funzione di Green con E qualunque avrebbe contributi divergenti pur di andare ad un ordine abbastanza alto in teoria delle perturbazioni. Le teorie con $d_g = 0$ (come la teoria ϕ^3 in 6 dimensioni, o la teoria $\lambda\phi^4$ o l'elettrodinamica in 4 dimensioni) si dicono rinormalizzabili, quelle con $d_g > 0$ si dicono super-rinormalizzabili (come la teoria ϕ^3 in 4 dimensioni), quelle con $d_g < 0$ non rinormalizzabili (come la teoria di Fermi delle interazioni deboli). La condizione $d_g \geq 0$ è sufficiente per la rinormalizzabilità di teorie che contengono solo campi di spin 0 e $\frac{1}{2}$; nel caso di teorie con campi di spin 1 questa condizione non è sufficiente: occorre anche assumere che la teoria possieda una simmetria di gauge. Teorie con campi di spin superiore non sono rinormalizzabili.

2.2 Gruppo di rinormalizzazione

Vediamo cosa succede alla funzione a 3 punti (2.28) nel limite in cui uno degli invarianti quadratici che si possono formare con gli impulsi esterni tende a diventare molto più grande di m^2 . Per esempio, nel limite $|k_1^2| \gg m^2$ si trova

$$V_{3,\text{OS}}(k_1, k_2, k_3) \simeq g \left[1 - \frac{1}{2} \alpha \log \frac{k_1^2}{m^2} \right]. \quad (2.34)$$

Questo comportamento è preoccupante: quando $|k_1^2| \rightarrow \infty$, o equivalentemente quando $m^2 \rightarrow 0$, la quantità $\alpha \log \frac{k_1^2}{m^2}$ tende a diventare di ordine 1; in queste condizioni il termine di correzione è dello stesso ordine di grandezza del termine leading, e lo sviluppo perturbativo perde significato (perché anche i termini di ordine superiore contengono analoghi logaritmi, alla stessa potenza della costante di accoppiamento α). Questo comportamento si trasferisce nel calcolo di grandezze osservabili, come ad esempio la sezione d'urto per lo scattering elastico di due particelle, come si può vedere con il calcolo esplicito. Dunque la teoria delle perturbazioni che abbiamo sviluppato nella Sezione precedente ha una notevole limitazione: non è applicabile a processi in cui siano coinvolte scale di energia molto più grandi della massa m .

Questo problema ha un'origine fisica, che ha la sua radice nel fatto che le condizioni di rinormalizzazione che definiscono lo schema on-shell, (2.11), non sono utilizzabili nel caso in cui $m = 0$. Questo si può vedere esaminando la correzione al propagatore (2.22): quando $m^2 = 0$, $\Pi(0)$ è automaticamente zero, mentre $\Pi'(0)$ non è definito. Ciò corrisponde al fatto che per $m = 0$ l'energia dello stato di singola particella e l'estremo inferiore dello spettro continuo degli stati a due o più particelle non sono più separati da un intervallo finito. In termini più semplici, nella teoria con $m = 0$ non è possibile distinguere sperimentalmente uno stato di singola particella da uno in cui la singola particella è accompagnata da un certo numero di altre particelle che hanno energia molto piccola (particelle soffici) oppure impulso parallelo a quello della particella stessa (particelle collineari).

Esiste un modo di aggirare questo problema, e cioè di costruire una teoria delle perturbazioni che sia valida purché $\alpha \ll 1$ senza ulteriori limitazioni sull'energia dei processi che si considerano: esso consiste nel cambiare schema di rinormalizzazione. Riscriviamo le espressioni di $\Pi(k^2)$ e $V_3(k_1, k_2, k_3)$ prima della scelta dello schema, date in (2.20) e (2.26):

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \log \frac{D}{m^2} + \left\{ \frac{1}{12} \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right] + A \right\} k^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right] + B \right\} m^2 + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ V_3(k_1, k_2, k_3) &= g \left\{ 1 + \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{\mu^2}{m^2} \right] + C - \frac{1}{2} \alpha \int dF_3 \log \frac{D_3}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right\} \end{aligned}$$

e operiamo una diversa scelta delle parti finite di A , B e C , ovvero

$$A = -\frac{\alpha}{12} \frac{1}{\epsilon}, \quad B = -\frac{\alpha}{2} \frac{1}{\epsilon}, \quad C = -\frac{\alpha}{2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.35)$$

Chiameremo questo schema lo schema $\overline{\text{MS}}$, o *modified minimal subtraction*. Questo schema è *minimale*, nel senso che le costanti di rinormalizzazione sono scelte in modo da cancellare

le divergenze, e non contengono parti finite. Chiariamo subito che con questa scelta le condizioni (2.11) non sono verificate, e quindi il parametro m non coincide con la massa fisica delle particelle, cioè con il polo del propagatore, e il residuo al polo non è 1, e quindi le formule di LSZ dovranno essere corrette di conseguenza.

Nello schema $\overline{\text{MS}}$ la correzione al propagatore e la funzione a tre punti diventano

$$\Pi_{\overline{\text{MS}}}(k^2) = \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D \log \frac{D}{\mu^2} + \frac{1}{12}\alpha (k^2 - 6m^2) \quad (2.36)$$

$$V_{3,\overline{\text{MS}}}(k_1, k_2, k_3) = g \left[1 - \frac{1}{2}\alpha \int dF_3 \log \frac{D_3}{\mu^2} \right]. \quad (2.37)$$

Contrariamente a ciò che accade nello schema OS, queste funzioni hanno un limite ben definito per $m \rightarrow 0$. Il prezzo che abbiamo pagato per questo risultato è la dipendenza esplicita dal parametro arbitrario μ . Vedremo tra poco come volgere a nostro vantaggio anche questa dipendenza.

Cominciamo col domandarci quale relazione intercorre tra la massa fisica delle particelle m_{phys} e il parametro m . Per definizione, si ha

$$[m^2 - k^2 - \Pi_{\overline{\text{MS}}}(k^2)]_{k^2=m_{\text{phys}}^2} = 0. \quad (2.38)$$

Quindi

$$m_{\text{phys}}^2 = m^2 - \Pi_{\overline{\text{MS}}}(m_{\text{phys}}^2) = m^2 - \Pi_{\overline{\text{MS}}}(m) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.39)$$

e il secondo membro si calcola facilmente usando la (2.36). Si trova

$$m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \frac{5}{12}\alpha m^2 - \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D_0 \log \frac{D_0}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.40)$$

dove $D_0 = m^2[1 - x(1-x)]$. Cambiando il valore di μ cambieranno in generale anche i valori dei parametri m e α , e dovranno farlo in modo che la massa fisica rimanga indipendente da μ . Derivando rispetto a $\log \mu^2$ la (2.40) troviamo

$$0 = \frac{dm^2}{d \log \mu^2} + \frac{m^2}{2}\alpha \int_0^1 dx [1 - x(1-x)] + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.41)$$

(dove abbiamo assunto che la dipendenza di α da $\log \mu^2$ sia di ordine α^2 , cosa che verificheremo tra poco) da cui

$$\frac{dm^2}{d \log \mu^2} = -\frac{5m^2}{12}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.42)$$

Il residuo del propagatore al polo $k^2 = m_{\text{phys}}^2$ è dato da

$$R = \lim_{k^2 \rightarrow m_{\text{phys}}^2} \frac{k^2 - m_{\text{phys}}^2}{m^2 - k^2 - \Pi_{\overline{\text{MS}}}(k^2)} = -\frac{1}{1 + \Pi'_{\overline{\text{MS}}}(m_{\text{phys}}^2)}, \quad (2.43)$$

ed è anch'esso calcolabile a partire dalla (2.36).

È possibile ricavare la dipendenza di g (o di α) dalla scala μ usando la stessa procedura usata per m , cioè imporre l'indipendenza da μ di qualche grandezza fisica, come ad esempio

una sezione d'urto. Tuttavia esiste un metodo più semplice e più generale, che illustriamo qui di seguito. Riscriviamo la lagrangiana per la nostra teoria in $6 - 2\epsilon$ dimensioni,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \phi^2 + \frac{g}{3!} \tilde{\mu}^\epsilon Z_g \phi^3 + Y \phi \quad (2.44)$$

nel modo seguente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{g_0}{3!} \phi_0^3 + Y_0 \phi_0 . \quad (2.45)$$

Le quantità con il pedice $_0$ si dicono quantità *bare*; per confronto si trova

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi \quad (2.46a)$$

$$m_0^2 = Z_m Z_\phi^{-1} m^2 \quad (2.46b)$$

$$g_0 = \tilde{\mu}^\epsilon Z_g Z_\phi^{-3/2} g \quad (2.46c)$$

$$Y_0 = Z_\phi^{-1/2} Y . \quad (2.46d)$$

Nello schema $\overline{\text{MS}}$, gli Z_i avranno uno sviluppo di Laurent

$$Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{in}(\alpha)}{\epsilon^n} \quad (2.47)$$

e abbiamo calcolato, tramite le correzioni ad un loop,

$$Z_\phi = 1 - \frac{\alpha}{12\epsilon} \quad (2.48a)$$

$$Z_m = 1 - \frac{\alpha}{2\epsilon} \quad (2.48b)$$

$$Z_g = 1 - \frac{\alpha}{2\epsilon} . \quad (2.48c)$$

L'osservazione che ci permetterà di calcolare in modo semplice la dipendenza dei parametri rinormalizzati dalla scala di rinormalizzazione μ è la seguente: le quantità bare devono essere indipendenti da μ , come conseguenza del fatto che le osservabili fisiche sono indipendenti da μ . Consideriamo per esempio la (2.46c), che riscriviamo come

$$\alpha_0 = \alpha \tilde{\mu}^{2\epsilon} \exp G(\alpha, \epsilon) , \quad (2.49)$$

dove $\alpha_0 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^3}$ e

$$G(\alpha, \epsilon) = \log(Z_g^2 Z_\phi^{-3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{\epsilon^n} . \quad (2.50)$$

La condizione che α_0 sia indipendente da μ fornisce

$$0 = \frac{d \log \alpha_0}{d \log \mu^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d \log \mu^2} + \epsilon + \frac{\partial G(\alpha, \epsilon)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d \log \mu^2} , \quad (2.51)$$

ovvero

$$\frac{d\alpha}{d \log \mu^2} \left[1 + \frac{\alpha G'_1(\alpha)}{\epsilon} + \frac{\alpha G'_2(\alpha)}{\epsilon^2} + \dots \right] = -\epsilon \alpha . \quad (2.52)$$

La condizione che $\frac{d\alpha}{d\log\mu^2}$ sia finita per $\epsilon = 0$ implica che deve essere

$$\boxed{\frac{d\alpha}{d\log\mu^2} = -\epsilon\alpha + \beta(\alpha)}, \quad (2.53)$$

in cui $\beta(\alpha)$ viene detta la *beta function*, ed è data da

$$\boxed{\beta(\alpha) = \alpha^2 G'_1(\alpha)}. \quad (2.54)$$

I poli di ordine più alto in ϵ devono cancellarsi, e questo implica una serie di relazioni tra le funzioni $G'_n(\alpha)$; per esempio si avrà $G'_2 = \alpha G'_1{}^2$. La validità di queste relazioni può essere controllata ordine per ordine in teoria delle perturbazioni.

Il nostro calcolo esplicito all'ordine α dà

$$G_1(\alpha) = -\frac{3}{4}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.55)$$

e quindi, per $\epsilon = 0$,

$$\frac{d\alpha}{d\log\mu^2} = -\frac{3}{4}\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (2.56)$$

L'assunzione che la dipendenza di α da $\log\mu^2$ sia di ordine α^2 risulta così provata.

Consideriamo ora l'equazione (2.46b). Imponendo che m_0^2 sia indipendente da μ possiamo calcolare $\frac{dm^2}{d\log\mu^2}$:

$$0 = \frac{d\log m_0^2}{d\log\mu^2} = \frac{\partial M(\alpha, \epsilon)}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{d\log\mu^2} + \frac{d\log m^2}{d\log\mu^2}, \quad (2.57)$$

dove abbiamo definito

$$M(\alpha, \epsilon) = \log(Z_m Z_\phi^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(\alpha)}{\epsilon^n}. \quad (2.58)$$

Quindi

$$\frac{d\log m^2}{d\log\mu^2} = - \left[\frac{M'_1(\alpha)}{\epsilon} + \frac{M'_2(\alpha)}{\epsilon^2} + \dots \right] \frac{d\alpha}{d\log\mu^2}. \quad (2.59)$$

L'ipotesi che questa quantità sia finita per $\epsilon = 0$, unitamente al risultato (2.53), fornisce

$$\frac{d\log m^2}{d\log\mu^2} = \gamma_m(\alpha), \quad \gamma_m(\alpha) = \alpha M'_1(\alpha), \quad (2.60)$$

più una serie di condizioni sulle funzioni $M'_n(\alpha)$ che implementano la cancellazione dei poli in ϵ . La funzione $\gamma_m(\alpha)$ prende il nome di *dimensione anomala* della massa. Usando le equazioni (2.48a) e (2.48b) troviamo, all'ordine α ,

$$M_1(\alpha) = -\frac{5}{12}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.61)$$

e quindi

$$\gamma_m(\alpha) = -\frac{5}{12}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.62)$$

in accordo con il risultato già ottenuto (2.42).

A patto che $\alpha(\mu^2)$ e $m^2(\mu^2)$ soddisfino le equazioni (2.60) e (2.53), potremo scegliere per μ qualunque valore: all'ordine perturbativo n -esimo, la dipendenza esplicita da μ delle osservabili fisiche sarà compensata dalla dipendenza implicita dei parametri, a meno di termini di ordine α^{n+1} . È evidente che questo risolve il problema dei grandi logaritmi nei coefficienti perturbativi: scegliendo μ dell'ordine della scala di energia caratteristica del processo, i coefficienti perturbativi si manterranno di ordine 1, e l'approssimazione perturbativa sarà giustificata dalla sola condizione $\alpha(\mu^2) \ll 1$.

Risolviamo ora l'equazione (2.56), usando come condizione iniziale il valore di $\alpha(\mu^2)$ ad una scala di riferimento Q^2 . Trascurando i termini di ordine α^3 e successivi nella funzione β troviamo

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(Q^2)}{1 + \frac{3}{4}\alpha(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}}. \quad (2.63)$$

Questa espressione merita alcuni commenti.

1. Si prenda ad esempio $Q = m$; la costante di accoppiamento $\alpha(\mu^2)$ è pari ad $\alpha(m^2)$ moltiplicata per una serie di potenze di $\alpha(m^2) \log(\mu^2/m^2)$. Può dunque essere interpretata come una risommazione dei logaritmi potenzialmente grandi che appaiono nello sviluppo perturbativo nello schema on-shell.
2. La teoria è asintoticamente libera, cioè la costante $\alpha(\mu^2)$ tende a zero per grandi valori di μ^2 . Questo fatto, riconducibile al segno del primo coefficiente della funzione β , è strettamente collegato con la dimensione 6 che abbiamo scelto per lo spazio tempo. La stessa teoria in 4 dimensioni non avrebbe questa proprietà. In 4 dimensioni, le uniche teorie asintoticamente libere sono le teorie di gauge non abeliane.
3. La $\alpha(\mu^2)$ ha un polo (detto *polo di Landau*) per $\mu = \mu_L$, con

$$1 + \frac{3}{4}\alpha(Q^2) \log \frac{\mu_L^2}{Q^2} = 0, \quad (2.64)$$

cioè

$$\mu_L = Q \exp\left(-\frac{2}{3\alpha(Q^2)}\right), \quad (2.65)$$

un valore tanto più piccolo rispetto a Q quanto più piccola è $\alpha(Q^2)$. Questo implica che la teoria delle perturbazioni perde significato per scale di energia dell'ordine o poco più grandi di μ_L .

Il gruppo di trasformazioni che, a seguito di un cambiamento del valore della scala μ , modifica i parametri della teoria secondo le equazioni

$$\frac{d\alpha}{d \log \mu^2} = \beta(\alpha), \quad \frac{d \log m^2}{d \log \mu^2} = \gamma_m(\alpha), \quad (2.66)$$

si dice *gruppo di rinormalizzazione*, e le equazioni (2.66) sono dette *equazioni del gruppo di rinormalizzazione*.

Capitolo 3

Interazioni forti

Il presente Capitolo è dedicato ad una descrizione della cromodinamica quantistica (brevemente, QCD), oggi concordemente riconosciuta come la teoria di campo che descrive le interazioni forti. Si tratta di una teoria di gauge non abeliana, basata sulla simmetria rispetto a trasformazioni del gruppo $SU(3)$. La carica che governa l'interazione prende il nome di colore, e si dicono “colorati” i campi che si trasformano in modo non banale rispetto al gruppo $SU(3)$. La teoria è formulata in termini dei campi di certi fermioni fondamentali, detti *quark*, che si trasformano secondo la rappresentazione fondamentale di $SU(3)$, e degli otto bosoni vettoriali richiesti dall'invarianza di gauge, i *gluoni*.

Il calcolo di quantità fisiche in QCD è reso particolarmente complesso a causa della circostanza (ben verificata sperimentalmente) che la carica di colore non è direttamente osservabile: gli stati fisici sono formati da particelle (gli *adroni*) che portano carica di colore nulla (sono cioè singoletti del gruppo di colore $SU(3)$). Quark e gluoni non esistono come stati asintotici della teoria. Tale fenomeno prende il nome di *confinamento* del colore. Inoltre, la dinamica della formazione degli adroni in termini dei campi fondamentali, i quark e i gluoni, è caratterizzata da scale di energia dell'ordine della massa degli adroni stessi; in questa regione, è possibile mostrare che la QCD non si presta ad una trattazione perturbativa. Si rende pertanto necessario l'impiego di modelli, quale il *modello a partoni*, originariamente introdotto per spiegare il fenomeno dello scaling nello scattering elettrone-nucleone nella regione altamente inelastica. In questo Capitolo descriveremo brevemente il modello a partoni, nella sua formulazione originaria e in quella in cui si tiene conto delle correzioni dovute alla QCD.

Per una trattazione completa si veda ad esempio [4, 5].

3.1 Cromodinamica quantistica

La QCD è una teoria di campo, molto simile all'elettrodinamica, ma con una sostanziale differenza: essa è basata su una assunzione di invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni non commutativo (o non abeliano, come si dice usualmente), il gruppo $SU(3)$ (la QED è invece costruita sull'invarianza rispetto al gruppo abeliano $U(1)$). Indichiamo con $q^{(f)}$ i campi spinoriali dei quark, e assumiamo che essi appartengano alla rappresentazione fondamentale di $SU(3)$. L'indice f rappresenta i diversi flavour (up, down, ecc.). La densità

lagrangiana per la QCD si scrive¹

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_i^{(f)} (i\not{D}_{ij} - m_f \delta_{ij}) q_j^{(f)} - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (3.1)$$

con

$$D_{ij}^\mu = \partial^\mu \delta_{ij} - i g_s A_a^\mu t_{ij}^a, \quad (3.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.3)$$

dove A_μ^a sono i campi vettoriali (chiamati gluoni) introdotti per rispettare l'invarianza di gauge locale, e g_s è la costante di accoppiamento forte. Gli indici i, j assumono i valori $1, \dots, N$ per il gruppo $SU(N)$ ($N = 3$ nel caso della QCD). Gli indici a, b, c invece sono legati alla rappresentazione aggiunta del gruppo; essi assumono valori $1, \dots, N^2 - 1$, essendo $N^2 - 1$ la dimensione del gruppo $SU(N)$. Le matrici t_{ij}^a sono gli otto generatori del gruppo nella rappresentazione fondamentale (cioè una base dell'algebra del gruppo). Essi soddisfano l'algebra di Lie

$$[t^a, t^b] = i f_{abc}^c t^c, \quad (3.4)$$

dove le f_{abc} sono dette costanti di struttura, e possono essere scelte completamente antisimmetriche nei tre indici. Le matrici t^a sono normalizzate secondo la relazione

$$\text{Tr}(t^a t^b) = T_F \delta^{ab}, \quad (3.5)$$

in cui si sceglie convenzionalmente $T_F = \frac{1}{2}$. Definendo C_F tramite

$$(t^a t^b)_{ij} \delta_{ab} = C_F \delta_{ij}, \quad (3.6)$$

si trova, per confronto con la (3.5),

$$C_F N = T_F (N^2 - 1), \quad (3.7)$$

da cui

$$C_F = T_F \frac{N^2 - 1}{N} = \frac{4}{3}. \quad (3.8)$$

La quantizzazione della teoria richiede l'introduzione di un termine di gauge fixing, accanto al quale, nel caso delle teorie di gauge non-abeliane, occorre introdurre un termine che descrive l'interazione dei campi di ghost con i gluoni. Non intendiamo entrare nel dettaglio dello studio della quantizzazione delle teorie di gauge non abeliane, per il quale rimandiamo il lettore ad un qualunque libro di testo sulla teoria dei campi quantistici (ad esempio [2, 3]).

La struttura della lagrangiana (3.1) è relativamente semplice. Essa contiene un termine cinetico dei quark, diagonale a livello di colore; un vertice di interazione quark-antiquark-gluone (simile al vertice di interazione elettromagnetico), con accoppiamento $g_s t_{ij}^a \gamma^\mu$, un termine cinetico per i gluoni e due tipi di vertice tra gluoni, a 3 e 4 gluoni, caratteristici delle teorie di gauge non abeliane. Si noti che, rispetto alle interazioni forti, i diversi flavour di quark sono trattati tutti allo stesso modo.

¹Si è introdotta la notazione di Feynman $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$, essendo γ^μ le matrici di Dirac (si veda l'Appendice A.1).

3.2 L'equazione di gruppo di rinormalizzazione

Come si è visto nel Capitolo precedente, la costante di accoppiamento g_s , o equivalentemente la quantità

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad (3.9)$$

è sottoposta al procedimento di rinormalizzazione, a seguito del quale le quantità fisiche acquistano una dipendenza da un parametro di scala μ . I logaritmi dei rapporti E^2/μ^2 , essendo E^2 un qualunque invariante cinematico caratteristico del processo che si sta studiando, possono essere riassorbiti definendo una costante di accoppiamento running (cioè dipendente da μ) che soddisfa una equazione differenziale del tipo

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \alpha_s(\mu^2) = \beta(\alpha_s(\mu^2)), \quad (3.10)$$

in cui $\beta(\alpha_s)$, la cosiddetta beta function, può essere calcolata perturbativamente:

$$\beta(\alpha_s) = -\beta_0 \alpha_s^2 (1 + \beta_1 \alpha_s + \beta_2 \alpha_s^2 + \dots). \quad (3.11)$$

Nel caso della QCD i coefficienti β_i sono noti per $i = 0, 1, 2, 3$; per la maggior parte delle applicazioni pratiche, tuttavia, è sufficiente l'approssimazione a due loop, definita dai primi due termini nello sviluppo perturbativo della funzione $\beta(\alpha_s)$. Si trova

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}, \quad (3.12a)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{153 - 19n_f}{33 - 2n_f}, \quad (3.12b)$$

in cui n_f è il numero di flavour; discuteremo più avanti quale deve essere tale valore. Come si vede, il coefficiente β_0 è positivo per valori sufficientemente piccoli di n_f ($n_f \leq 16$; i flavour a oggi conosciuti sono 6). Ne segue che la costante running decresce al crescere di μ , almeno nella regione in cui l'approssimazione perturbativa si mantiene affidabile. Poiché nei calcoli ad ordine finito la scala di rinormalizzazione deve essere presa dello stesso ordine delle energie tipiche coinvolte nel processo, lo sviluppo perturbativo sarà tanto più affidabile quanto più tali energie sono grandi. Questa importante proprietà delle teorie di gauge non abeliane è detta libertà asintotica; come vedremo più avanti, essa ha giocato un ruolo fondamentale nel processo che ha portato a identificare la QCD come la corretta teoria di campo per le interazioni forti.

L'equazione di gruppo di rinormalizzazione per α_s , eq. (3.10), può essere risolta iterativamente ordine per ordine in α_s . A tale scopo risulta conveniente scriverla nella forma

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = \beta_0 [1 + \beta_1 \alpha_s(\mu^2) + \dots]. \quad (3.13)$$

Nell'approssimazione ad un loop, i termini β_1 e successivi vengono trascurati, e la soluzione è data da

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \quad (3.14)$$

avendo usato la condizione iniziale $\alpha_s(Q^2)$. Si osservi che $\alpha_s(\mu^2)$ è uguale $\alpha_s(Q^2)$ moltiplicato per una funzione del prodotto $\alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}$: in questo senso il gruppo di rinormalizzazione riassorbe tutte le potenze di $\log \frac{\mu^2}{Q^2}$. La soluzione dell'equazione di gruppo di rinormalizzazione per $\alpha_s(\mu^2)$ ha in generale la forma di uno sviluppo in potenze di $\alpha_s(Q^2)$ a $\alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}$ fissato:

$$\alpha_s(\mu^2) = \alpha_0 [1 + f_1(\alpha_0 \ell) + \alpha_0 f_2(\alpha_0 \ell) + \dots] , \quad (3.15)$$

dove abbiamo posto per semplicità di notazione $\alpha_0 = \alpha_s(Q^2)$ e $\ell = \log \frac{\mu^2}{Q^2}$. Questo sviluppo è valido alla sola condizione che $\alpha_s(Q^2) \ll 1$, indipendentemente dal valore del logaritmo. Il calcolo a un loop visto sopra fornisce

$$f_1(\alpha_0 \ell) = \frac{-\beta_0 \alpha_0 \ell}{1 + \beta_0 \alpha_0 \ell} . \quad (3.16)$$

Per ragioni storiche si usa talvolta scrivere la soluzione in termini di un parametro Λ , con le dimensioni di una energia, nel modo seguente:

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}} . \quad (3.17)$$

In questo caso, invece di specificare la soluzione mediante il valore di α_s ad una scala di riferimento Q^2 , la si esprime in termini del valore della scala $\mu = \mu_L$ in corrispondenza del quale $\alpha_s \rightarrow +\infty$. Questa singolarità, detta *polo di Landau*, è ovviamente presente anche nella soluzione scritta nella forma (3.14); si ha

$$\mu_L^2 = \Lambda^2 = Q^2 \exp\left(-\frac{1}{\beta_0 \alpha_s(Q^2)}\right) . \quad (3.18)$$

Questa discussione mostra l'esistenza del polo di Landau all'ordine leading in teoria delle perturbazioni. È possibile mostrare (e lo vedremo esplicitamente nel seguito nel caso a due loop) che la singolarità è presente a ogni ordine in teoria delle perturbazioni. È chiaro che al crescere del valore di α_s , cioè al decrescere della scala di energia, la teoria delle perturbazioni diventa via via meno affidabile, e dunque non è possibile trarre conclusioni sul comportamento della teoria alle bassissime energie sulla base di argomenti perturbativi. Tuttavia, l'indicazione che il valore di α_s tende a crescere al decrescere dell'energia è consistente col fenomeno del confinamento del colore cui si è accennato sopra.

Consideriamo ora l'approssimazione a due loop, che si ottiene includendo il coefficiente β_1 nella (3.10). In questo caso è ancora possibile ottenere una soluzione esatta, scritta in forma implicita. Usando l'integrale elementare

$$-\int \frac{dt}{t^2 + at^3} = \frac{1}{t} - a \log\left(\frac{1}{t} + a\right) + \text{cost.} \quad (3.19)$$

si trova

$$\frac{1}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \log\left(\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + \beta_1\right) = \log \mu^2 + \text{cost.} , \quad (3.20)$$

dove la costante di integrazione può essere fissata con una opportuna condizione iniziale, ad esempio il valore di $\alpha_s(\mu^2)$ per $\mu^2 = Q^2$. Una soluzione esplicita dell'equazione a due loop può essere trovata riscrivendo la (3.20) nel modo seguente:

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \beta_0 \alpha_0 \ell + \beta_1 \alpha_0 \log \frac{1 + \beta_1 \alpha(\mu^2)}{1 + \beta_1 \alpha_0} - \beta_1 \alpha_0 \log \frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha_0}}, \quad (3.21)$$

e sviluppando in potenze di α_0 a $\alpha_0 \ell$ fissato, come in eq. (3.15), fino ad includere il termine proporzionale a f_2 . È facile mostrare che il terzo termine del denominatore può essere trascurato: infatti

$$\alpha_0 \log \frac{1 + \beta_1 \alpha(\mu^2)}{1 + \beta_1 \alpha_0} = \alpha_0^2 F(\alpha_0 \ell) + \dots \quad (3.22)$$

Inoltre, nell'ultimo termine del denominatore si può sostituire ad $\alpha_s(\mu^2)$ la sua espressione a un loop. Infatti

$$\alpha_0 \log \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_0} = \alpha_0 \log [1 + f_1(\alpha_0 \ell) + \alpha_0 f_2(\alpha_0 \ell)] = \alpha_0 \log [1 + f_1(\alpha_0 \ell)] + \alpha_0^2 G(\alpha_0 \ell) + \dots \quad (3.23)$$

Sviluppando ulteriormente, si ottiene infine

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \left[1 - \frac{\beta_1 \alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \log \left(1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Questa procedura è consistente con l'aver trascurato i termini in $\beta_2 \alpha_s^4$ e seguenti nella funzione β .

Alternativamente, si può fissare la costante di integrazione richiedendo che

$$\alpha_s(\mu^2) \rightarrow +\infty \quad \text{per} \quad \mu^2 \rightarrow \mu_L^2. \quad (3.25)$$

In questo caso la (3.20) diventa

$$\log \frac{\mu^2}{\mu_L^2} = \frac{1}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \log \frac{1 + \beta_1 \alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \log \beta_1. \quad (3.26)$$

Sviluppando come nel caso precedente, questa equazione diventa

$$\log \frac{\mu^2}{\mu_L^2} = \frac{1}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \log \left(\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\mu_L^2} \right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \log \beta_1. \quad (3.27)$$

Usualmente, si definisce

$$\Lambda^2 = \mu_L^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_0} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_0}} \quad (3.28)$$

in modo tale che

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \log \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right]. \quad (3.29)$$

È necessario osservare che le due soluzioni (3.24) e (3.29), contrariamente al caso ad un loop, sono *diverse*, cioè essendo approximate differiscono tra loro per termini subleading.

Per convincersi di questo fatto, fissiamo le costanti in modo tale che coincidano ad una determinata energia. Perciò scegliamo come valore di riferimento [6]

$$\alpha_s(M_{Z^0}^2) \equiv \alpha_{Z^0} = 0.1176 \pm 0.0020, \quad M_{Z^0} = 91.18 \text{ GeV} \quad (3.30)$$

da cui si ricava numericamente $\Lambda = 226 \text{ MeV}$. Questo valore coincide con la posizione del polo di Landau per la soluzione nella forma (3.29). La singolarità della soluzione (3.24) si trova invece per

$$\mu = M_{Z^0} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0\alpha_{Z^0}}\right) = 87.8 \text{ MeV}, \quad (3.31)$$

un valore decisamente differente. Questo non è preoccupante: i termini subleading sono trascurabili nella regione perturbativa, ma è naturale aspettarsi che essi inducano differenze consistenti a scale di energia dell'ordine del centinaio di MeV, dove α_s tende ad assumere valori ben più grandi di 1.

3.2.1 Il problema delle soglie

Nella sezione precedente abbiamo tenuto fissato il numero di flavour n_f (in particolare, i valori numerici mostrati sono stati ottenuti con $n_f = 5$). Nella pratica si preferisce usualmente impiegare uno schema di rinormalizzazione in cui il numero di flavour è una funzione della scala μ . Precisamente, per ogni valore di μ si prende n_f pari al numero di flavour la cui massa è minore di μ . Questo corrisponde a considerare infinita la massa dei quark quando questa è maggiore della scala di rinormalizzazione, affermazione che è rigorosamente vera solo lontano dalle soglie.

I coefficienti della funzione β saranno perciò costanti a tratti, e avranno una discontinuità a salto in corrispondenza delle soglie delle masse dei quark. La soluzione dell'equazione di gruppo di rinormalizzazione viene calcolata all'interno di questi intervalli come nella sezione precedente, e viene poi imposta la condizione di continuità alle soglie $\mu = m_f$. Così facendo la derivata risulterà discontinua, e quindi α_s sarà analitica solo a tratti. Per chiarezza, introduciamo alcune notazioni più esplicite. Dal momento che abbiamo visto che ci sono due modi di esprimere una soluzione dell'equazione di gruppo di rinormalizzazione (una con la condizione iniziale e una con Λ), abbiamo necessità di due notazioni distinte:

$$\alpha_\alpha(\mu^2, \alpha_0, Q, n_f) \quad \text{nel caso di condizione iniziale } \alpha_s(Q^2) = \alpha_0, \quad (3.32a)$$

$$\alpha_\Lambda(\mu^2, \Lambda, n_f) \quad \text{nel caso di costante di integrazione } \Lambda. \quad (3.32b)$$

In entrambi i casi è necessario fissare la costante di accoppiamento ad un valore noto: tale valore è normalmente quello alla massa dello Z^0 (3.30), che è stato misurato con grande precisione negli esperimenti di collisioni elettrone-positrone al polo dello Z^0 . Poiché

$$m_b < M_{Z^0} < m_t \quad (3.33)$$

nell'intorno di M_{Z^0} si deve usare $n_f = 5$ (come abbiamo fatto prima). Nel caso della prima

notazione, la richiesta di continuità alle soglie può essere realizzata nella forma seguente:

$$\alpha_s(\mu^2) = \begin{cases} \alpha_\alpha \left(\mu^2, \alpha_s(m_t^2), m_t, 6 \right) & m_t < \mu \\ \alpha_\alpha \left(\mu^2, \alpha_{z^0}, M_{Z^0}, 5 \right) & m_b \leq \mu \leq m_t \\ \alpha_\alpha \left(\mu^2, \alpha_s(m_b^2), m_b, 4 \right) & m_c \leq \mu < m_b \\ \alpha_\alpha \left(\mu^2, \alpha_s(m_c^2), m_c, 3 \right) & \mu < m_c \end{cases} \quad (3.34)$$

che è una funzione che si autorichiama (facilmente implementabile in un linguaggio di programmazione evoluto). Nel caso della seconda notazione si ha invece

$$\alpha_s(\mu^2) = \begin{cases} \alpha_\Lambda (\mu^2, \Lambda_6, 6) & m_t < \mu \\ \alpha_\Lambda (\mu^2, \Lambda_5, 5) & m_b \leq \mu \leq m_t \\ \alpha_\Lambda (\mu^2, \Lambda_4, 4) & m_c \leq \mu < m_b \\ \alpha_\Lambda (\mu^2, \Lambda_3, 3) & \mu < m_c \end{cases} \quad (3.35)$$

dove questa volta le Λ_{n_f} vanno determinate dalle condizioni di continuità alle soglie (ad un loop si può fare analiticamente, oltre il primo loop si deve ricorrere a una ricerca numerica). Si osservi che non siamo andati al di sotto di $n_f = 3$: in fisica delle alte energie l'approssimazione $m_u = m_d = m_s = 0$ è usualmente adeguata.

Usando i valori $\alpha_{z^0} = 0.118$ e

$$m_t = 172 \text{ GeV}, \quad m_b = 4.75 \text{ GeV}, \quad m_c = 1.4 \text{ GeV}. \quad (3.36)$$

si trova, nell'approssimazione a due loop,

$$\Lambda_6 = 91.6 \text{ MeV}, \quad \Lambda_5 = 226 \text{ MeV}, \quad \Lambda_4 = 328 \text{ MeV}, \quad \Lambda_3 = 378 \text{ MeV}. \quad (3.37)$$

Le curve corrispondenti alle diverse soluzioni per $\alpha_s(\mu^2)$ sono mostrate in Figura 3.1, dove sono state inserite la soluzione ad un loop (3.14), o equivalentemente (3.17), (curva puntata) e le due soluzioni a due loop (3.24) (curva solida) e (3.29) (curva tratteggiata). Le linee verticali rappresentano la posizione dei poli di Landau per le curve con lo stesso stile; le linee verticali corte rappresentano, da destra verso sinistra, la massa del top, dello Z^0 (più spessa) del bottom e del charm.

Si vede chiaramente l'andamento decrescente tipico delle teorie con libertà asintotica. Inoltre, notiamo che le due soluzioni a due loop tendono a coincidere nella regione delle alte energie, mentre differiscono sensibilmente per $\mu \lesssim 1 \text{ GeV}$. Questo mostra la scarsa affidabilità dell'approssimazione nella regione di basse energie. Si nota anche che il matching alle soglie non cambia in modo particolarmente sensibile la pendenza delle curve.

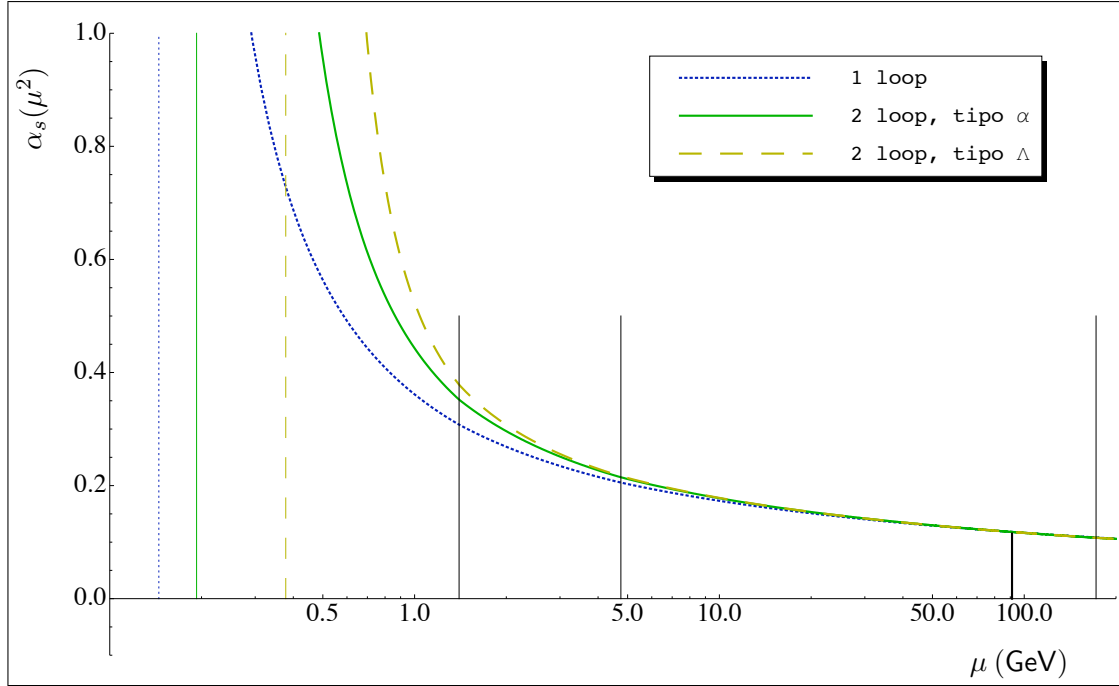


Figura 3.1: Running coupling con le soglie delle masse dei quark.

3.3 La divergenza degli sviluppi perturbativi in QCD

Nell'introduzione abbiamo riportato l'argomento di Dyson [10], che mostra che gli sviluppi perturbativi dell'elettrodinamica quantistica sono in generale divergenti. È naturale aspettarsi che ciò sia vero anche in QCD. Uno studio della struttura analitica delle osservabili in QCD, considerate come funzioni della costante di accoppiamento α_s , è stato fatto da 't Hooft in [11]: in questo lavoro egli mostra che la situazione è ancora peggiore che in QED, nel senso che il raggio di convergenza di uno sviluppo perturbativo è rigorosamente nullo, senza possibilità di continuazioni analitiche, ma propone anche un modo per superare queste difficoltà. In questa Sezione illustreremo il contenuto di questo lavoro, allo scopo di familiarizzarci con sviluppi perturbativi divergenti, con i quali avremo lungamente a che fare nei Capitoli successivi.

La conoscenza della struttura analitica delle osservabili intese come funzione di α_s , ora pensata come parametro complesso, è importante ai fini dell'utilizzo della teoria delle perturbazioni. Supponiamo ad esempio che una certa grandezza fisica $F(\alpha_s)$ abbia delle singolarità nel piano complesso α_s nella regione

$$-\infty < \Re(\alpha_s) < -a, \quad \Im(\alpha_s) = 0, \quad a > 0 \quad (3.38)$$

(sfortunatamente la situazione reale in QCD è assai meno fortunata!). La serie perturbativa, in tal caso, ha raggio di convergenza $\rho_c = a$; tuttavia, è ragionevole pensare che, se $F(\alpha_s)$ è ben definita dappertutto tranne che nel taglio, per valori di α_s che stanno lontani dal taglio anche eventualmente al di fuori del raggio di convergenza ρ_c la somma della serie sia

ben definita. Il modo formale per vedere questo è costruire una mappa tra la costante di accoppiamento α_s e una nuova variabile u tale che tutto il piano complesso di α_s finisca in un cerchio, e il taglio si manifesti come una singolarità sul bordo del cerchio. La mappa che propone 't Hooft è

$$u = 1 + 2 \frac{a}{\alpha_s} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha_s}{a}} \right), \quad (3.39)$$

la cui inversa è

$$\alpha_s = \frac{4au}{(1-u)^2}; \quad (3.40)$$

in questo modo il taglio diventa una singolarità nel punto $u = -1$. Allora riscrivendo

$$F(\alpha_s) = \bar{F}(u) \quad (3.41)$$

si ha che $\bar{F}(u)$ converge ovunque dentro al cerchio unitario, e conseguentemente $F(\alpha_s)$ è ben definita per valori di α_s non troppo vicini al taglio.

Disgraziatamente, la struttura delle singolarità in QCD non è così semplice. Tuttavia, mostreremo come la conoscenza della struttura complessa possa essere usata per ottenere qualche miglioramento negli sviluppi perturbativi, ricorrendo alla tecnica di somma alla Borel delle serie divergenti.

Partiamo riscrivendo l'equazione di gruppo di rinormalizzazione (3.10)

$$\frac{d\alpha_s}{d \log \mu^2} = \beta(\alpha_s) = -\beta_0 \alpha_s^2 (1 + \beta_1 \alpha_s + \beta_2 \alpha_s^2 + \dots). \quad (3.42)$$

Dato che ci aspettiamo che la serie perturbativa sia divergente, la costante α_s definita da questa equazione non è probabilmente uno strumento adeguato per studiare la teoria al di là dello sviluppo perturbativo. Al più, questa equazione può essere intesa in senso asintotico, e quindi valida unicamente per α_s infinitesimo (o equivalentemente per valori asintoticamente grandi degli impulsi esterni, per via della libertà asintotica). Questo fatto ci suggerisce che α_s così definita non può essere utilizzata per studiare la struttura analitica delle serie perturbative su tutto il piano complesso. Un modo per superare questo ostacolo è introdurre una nuova quantità $\hat{\alpha}_s$ definita in modo tale che

$$\hat{\alpha}_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^3(\mu^2)) \quad \text{per } \mu \rightarrow \infty \quad (3.43a)$$

$$\frac{d\hat{\alpha}_s}{d \log \mu^2} = \hat{\beta}(\hat{\alpha}_s) \equiv -\beta_0 \hat{\alpha}_s^2 - \beta_0 \beta_1 \hat{\alpha}_s^3 \quad (3.43b)$$

dove la nuova funzione $\hat{\beta}(\hat{\alpha}_s)$ è troncata al secondo termine. Chiaramente questa nuova funzione $\hat{\alpha}_s$ è definita meglio di α_s , poiché non risente della non convergenza della serie che definisce la funzione β . L'equazione (3.43b) ha la soluzione implicita (3.20)

$$\frac{1}{\beta_0 \hat{\alpha}_s(\mu^2)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \log \left(\frac{1}{\hat{\alpha}_s(\mu^2)} + \beta_1 \right) = \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \quad (3.44)$$

dove Λ è una costante d'integrazione. È importante sottolineare che quando μ è molto grande questa definizione alternativa $\hat{\alpha}_s$ coincide con la solita α_s , come richiesto dalla (3.43a).

Consideriamo ora una grandezza fisica; in particolare, scegliamo per semplicità una funzione di Green a due punti, che si scrive come sviluppo in serie

$$G(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s) = a_0(k^2) + \hat{\alpha}_s(\mu^2) a_1(k^2, \mu^2) + \dots \quad (3.45)$$

e soddisfa l'equazione di gruppo di rinormalizzazione

$$\left[\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} + \hat{\beta}(\hat{\alpha}_s) \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_s} + \gamma(\hat{\alpha}_s) \right] G(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s) = 0. \quad (3.46)$$

La funzione $\hat{\beta}$ è un polinomio nel suo argomento, ma la $\gamma(\hat{\alpha}_s)$ è ancora una serie infinita, e rende mal definita la funzione G . Notiamo che $G(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s)$ dipende in maniera indipendente da $\hat{\alpha}_s$ e da μ^2 ; tuttavia sappiamo che esse sono legate dall'equazione (3.43b), le cui soluzioni rappresentano curve nel piano $(\hat{\alpha}_s, \mu^2)$, parametrizzate dalla costante di integrazione Λ . Lungo una di tali curve si ha

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}_s(\mu^2)} = \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_s} + \frac{1}{\hat{\beta}(\hat{\alpha}_s)} \frac{\partial}{\partial \log \mu^2} \quad (3.47)$$

e quindi si ottiene, per la (3.46),

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}_s(\mu^2)} \log G(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s(\mu^2)) = -\frac{\gamma(\hat{\alpha}_s)}{\hat{\beta}(\hat{\alpha}_s)} = \frac{z_0}{\hat{\alpha}_s^2} + \frac{z_1}{\hat{\alpha}_s} + z_2 + \dots, \quad (3.48)$$

che è facilmente integrabile. La soluzione è

$$G(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s(\mu^2)) = Z(\hat{\alpha}_s) G_0\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.49a)$$

$$Z(\hat{\alpha}_s) = \exp\left(-\frac{z_0}{\hat{\alpha}_s} + z_1 \log \hat{\alpha}_s + z_2 \hat{\alpha}_s + \dots\right) \quad (3.49b)$$

dove si è tenuto conto che la funzione G_0 può dipendere solo dal rapporto tra k^2 e Λ^2 per questioni dimensionali. Siamo ora in grado di definire una nuova funzione \hat{G} che non abbia le patologie dovute al fatto che $\gamma(\alpha_s)$ è una serie infinita. Infatti, si può osservare che per $\hat{\alpha}_s \rightarrow 0$ i termini importanti in $Z(\hat{\alpha}_s)$ sono solo i primi due, mentre gli altri possono essere riassorbiti in una ridefinizione dei coefficienti a_1, \dots dello sviluppo (3.45). Otteniamo quindi

$$\hat{G}(k^2, \mu^2, \hat{\alpha}_s(\mu^2)) = \hat{\alpha}_s^{z_1} \exp\left(-\frac{z_0}{\hat{\alpha}_s}\right) G_0\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right). \quad (3.50)$$

In ciò che segue, poniamo per semplicità $\beta_1 = 0$ (tenere β_1 non cambia le conclusioni ma rende più complicata la discussione). Dalla (3.50), si vede che, oltre al branch-cut

$$-\infty < \Re(\hat{\alpha}_s) < 0, \quad \Im(\hat{\alpha}_s) = 0 \quad (3.51)$$

dovuto alla funzione $\hat{\alpha}_s^{z_1} \exp\left(-\frac{z_0}{\hat{\alpha}_s}\right)$, le eventuali altre singolarità di \hat{G} possono derivare solo dalla funzione $G_0\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)$. Per capirlo, riscriviamo l'argomento di tale funzione per mezzo della (3.44)

$$\log \frac{k^2}{\Lambda^2} = \log \frac{k^2}{\mu^2} + \frac{1}{\beta_0 \hat{\alpha}_s(\mu^2)}, \quad (3.52)$$

da cui otteniamo

$$G_0\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) = \tilde{G}_0\left(\frac{1}{\hat{\alpha}_s(\mu^2)} + \beta_0 \log \frac{k^2}{\mu^2}\right), \quad (3.53)$$

in cui \tilde{G}_0 dipende da un unico parametro

$$x \equiv \frac{1}{\hat{\alpha}_s(\mu^2)} + \beta_0 \log \frac{k^2}{\mu^2}. \quad (3.54)$$

Ci interessa la struttura analitica della funzione \tilde{G}_0 nel piano complesso di $\hat{\alpha}_s$. Per ottenerla, procediamo nel seguente modo: prima di tutto cerchiamo le singolarità che si presentano quando $\hat{\alpha}_s$ è reale ma k^2 è complesso; fatto ciò, vediamo a quali punti dell'argomento x di \tilde{G}_0 corrispondono tali singolarità; infine, tenendo k^2 reale vediamo a quali valori di $\hat{\alpha}_s$ corrispondono tali singolarità. Come funzione di k^2 complesso, le singolarità si presentano nel semiasse reale positivo, a partire da un punto corrispondente alla massa delle particelle descritte dalla funzione di Green. Queste singolarità corrispondono a valori della variabile x dati dalla forma

$$x = c + \beta_0 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.55)$$

A questo punto possiamo effettuare l'ultimo passo, ossia riconoscere a quali valori di $\hat{\alpha}_s$ corrispondono tali singolarità, e cioè dalla (3.54)

$$\hat{\alpha}_s = \frac{1}{c' + \beta_0 2n\pi i}, \quad c' \in \mathbb{R}. \quad (3.56)$$

Tali singolarità si accumulano proprio verso l'origine (Figura 3.2). Questo implica che la

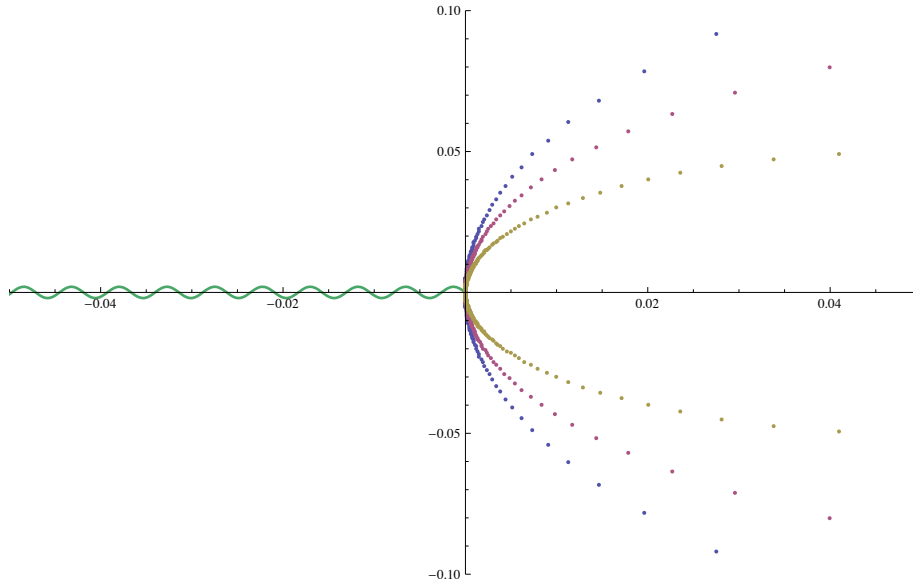


Figura 3.2: Struttura analitica di una funzione di Green \hat{G} nel piano complesso $\hat{\alpha}_s$. La curva ondulata è il taglio dovuto al termine $\hat{\alpha}_s^{z_1} \exp\left(-\frac{z_0}{\hat{\alpha}_s}\right)$, mentre le file di punti corrispondono alle singolarità di \tilde{G}_0 per diversi valori di c' .

serie perturbativa ha raggio di convergenza nullo, e nessun prolungamento analitico come descritto all'inizio della Sezione può essere adottato.

Dal momento che questo risultato è stato ottenuto con le definizioni migliorate delle grandezze in gioco, la conclusione è che la divergenza degli sviluppi perturbativi è un fatto intrinseco, non legato alla cattiva definizione (per serie) di grandezze della teoria. Questo riporta, come accennato nell'introduzione, al problema del significato, se non della validità stessa, di una teoria che si basa sulla teoria delle perturbazioni.

Una tecnica che consente di superare queste difficoltà consiste nel trattare gli sviluppi perturbativi col metodo della trasformata di Borel. Se la funzione \hat{G} si può scrivere come in (3.45)

$$\hat{G}(\hat{\alpha}_s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{\alpha}_s^k, \quad (3.57)$$

allora è possibile calcolarne la trasformata di Borel F come²

$$F(w) = a_0 \delta(w) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} w^k. \quad (3.58)$$

Tale serie, come è evidente dalla presenza di $k!$ al denominatore, ha migliori proprietà di convergenza: tipicamente, essa ha un raggio di convergenza più grande della serie originale oppure, se la serie di partenza diverge, è possibile che la sua trasformata converga. Per calcolare la sua inversa (e tornare a \hat{G}) è necessario calcolare l'integrale di inversione

$$\hat{G}_B(\hat{\alpha}_s) = \int_0^{+\infty} dw e^{-\frac{w}{\hat{\alpha}_s}} F(w); \quad (3.59)$$

se la serie (3.57) converge, la dimostrazione di questo integrale di inversione è banale (si verifica immediatamente ordine per ordine), e si ha banalmente $\hat{G}_B = \hat{G}$. Nel caso, che come mostrato precedentemente corrisponde alla realtà, in cui la serie (3.57) diverge, è possibile che la funzione \hat{G}_B sia invece definita. Questo può accadere se la serie (3.58) ha raggio di convergenza non nullo, e quindi, calcolata la somma della serie $F(w)$, sia successivamente prolungabile per continuità su tutto l'asse reale. In questo modo, se anche l'integrale (3.59) converge, la serie (3.57) è detta *Borel-sommabile* e la funzione \hat{G}_B è detta la somma alla Borel della serie; allora si può assumere che la funzione di Green legata alle grandezze fisiche misurabili sia di fatto \hat{G}_B .

Tuttavia, in [11] viene mostrato che nel percorso di integrazione la funzione $F(w)$ presenta almeno due tipi di singolarità, dette rinormaloni e istantoni. Queste singolarità rendono l'integrale di inversione (3.59) non definito. È possibile aggirare tali singolarità, tramite qualche prescrizione, ma ciò porta ad ambiguità nel valore di \hat{G}_B , sebbene tali ambiguità siano soppresse da potenze di Λ^2/k^2 . Quindi il metodo di Borel, sebbene promettente, non è ancora sufficiente a dare un significato univoco agli sviluppi perturbativi.

²Per approfondimenti a riguardo, si veda [7] o più semplicemente l'Appendice B.1.

3.4 Modello a partoni

La QCD descrive le interazioni tra quark e gluoni; tuttavia, a causa del confinamento, le particelle asintotiche sono sempre adroni, cioè stati legati di quark e gluoni con carica totale di colore nulla. La scala di energia caratteristica della formazione degli adroni è dell'ordine delle masse adroniche, e si trova quindi in una regione in cui la teoria delle perturbazioni non è applicabile. Non siamo quindi in grado di dedurre i dettagli della formazione degli adroni direttamente dalla teoria con tecniche perturbative.

È possibile ottenere qualche risultato utilizzando tecniche numeriche, tipicamente implementate discretizzando lo spazio-tempo (tecnica cosiddetta del reticolo) e calcolando le funzioni di Green della teoria completa come integrali su un numero finito di variabili, invece che infinito come nella teoria di campo nel continuo. Sebbene interessante sotto molti aspetti, tale tecnica non è attualmente utilizzabile per il calcolo di sezioni d'urto ad alta energia.

Una tecnica largamente adottata è costituita dall'impiego del cosiddetto *modello a partoni*. Alla base di questo modello stanno i risultati degli esperimenti di scattering elettrone-nucleone:

$$e^-(k) + N(p) \rightarrow e^-(k') + X, \quad (3.60)$$

inclusivo rispetto allo stato finale adronico X , nella regione altamente inelastica (quella cioè in cui l'elettrone viene diffuso con elevato momento trasferito q , e il sistema adronico di stato finale è molto diverso dal singolo nucleone dello stato iniziale). Tale processo è universalmente chiamato *deep inelastic scattering* (brevemente DIS). La sezione d'urto per questo processo può essere espressa in termini di opportune funzioni adimensionate $F_1(x_{\text{Bj}}, Q^2)$ e $F_2(x_{\text{Bj}}, Q^2)$, dette funzioni di struttura, dove

$$Q^2 = -(k - k')^2 = -q^2; \quad x_{\text{Bj}} = \frac{Q^2}{2pq}. \quad (3.61)$$

Essendo $F_{1,2}$ adimensionali, esse possono dipendere da Q^2 soltanto se è presente un'altra scala Q_0^2 , legata in qualche modo alla struttura interna del protone, in modo che esse dipendano di fatto dal rapporto

$$\frac{Q^2}{Q_0^2}. \quad (3.62)$$

Ciò che si osserva sperimentalmente è che, per Q^2 abbastanza grande, le funzioni di struttura sono invece *indipendenti* da Q^2 , fenomeno che prende il nome di *scaling*. Questa osservazione suggerisce che la struttura del protone a piccolissime distanze (cioè ad alti valori di Q^2) non presenta scale di energia (e quindi scale di lunghezza) tipiche. È naturale supporre quindi che il protone sia costituito di componenti *puntiformi*, che essenzialmente possono essere considerati liberi nel limite $Q^2 \rightarrow \infty$, e che quando esso interagisce con altre particelle lo faccia tramite uno dei suoi costituenti.

Il modello a partoni è formulato sulla base delle seguenti assunzioni:

- Gli adroni sono costituiti da oggetti puntiformi, etichettati da un indice i e denominati genericamente *partoni*; il partone i -esimo porta un quadri-impulso

$$p_i = z_i P \quad (3.63)$$

dove P è il quadri-impulso dell'adrone a cui appartiene. Questo equivale ad assumere che ciascun partone si muova esattamente nella stessa direzione dell'adrone, cioè che non abbia componenti trasverse (se così non fosse, l'impulso trasverso del partone dovrebbe avere un certo valore, dell'ordine dell'inverso della dimensione trasversa dell'adrone, e la condizione di scaling sarebbe violata). Si noti inoltre che questa assunzione è consistente soltanto se è lecito trascurare sia la massa del partone, sia quella dell'adrone. Infatti, prendendo il quadrato di entrambi i membri della (3.63) si ottiene

$$m_i^2 = z_i^2 M^2, \quad (3.64)$$

il che implicherebbe che la massa dei partoni dipende dalla frazione di impulso che portano. Questo, chiaramente è insensato. In pratica il modello vale in quei sistemi di riferimento in cui le energie degli adroni sono abbastanza grandi da poter trascurare la massa delle particelle.³

- All'interno dell'adrone, i partoni hanno un impulso pari a una frazione z_i dell'impulso dell'adrone cui appartengono, distribuita secondo una densità di probabilità, detta *funzione di densità partonica*, o pdf in breve, e denotata con

$$f_i^{(H)}(z_i) \quad (3.65)$$

(si è messo ad apice un (H) perché, oltre al partone, esse dipendono anche dall'adrone che descrivono). Ad esempio,

$$f_u^{(p)}(z) dz \quad (3.66)$$

rappresenta la probabilità di trovare un quark up con frazione d'impulso compresa tra z e $z + dz$ in un protone.

L'importanza di queste distribuzioni è dovuta al fatto che esse sono *universali*, cioè non dipendono dal particolare processo che si sta considerando ma solo dall'adrone H e dal partone i . Perciò esse, sebbene non calcolabili perturbativamente, possono essere misurate usando un particolare processo fisico, e utilizzate per fare predizioni su altri processi fisici.

Una serie di vincoli su queste pdf può essere dedotta dalla conservazione dell'impulso e dalla conoscenza dei costituenti dell'adrone. Ad esempio la conservazione dell'impulso implica

$$\int_0^1 dz \sum_i z f_i^{(H)}(z) = 1, \quad (3.67)$$

mentre dalla conoscenza che il protone ha due quark up costituenti si ha

$$\int_0^1 dz \left(f_u^{(p)}(z) - f_{\bar{u}}^{(p)}(z) \right) = 2. \quad (3.68)$$

³Questo non è così insensato: infatti, a energie molto più grandi della sua massa, l'adrone avrà un tempo molto dilatato, per cui i processi di interazioni tra i partoni saranno rallentati e la supposizione che essi siano collineari e non interagenti parzialmente giustificata.

- I partoni non interagiscono tra loro, e la sezione d'urto $\sigma(P)$ per un generico processo adronico è la somma delle sezioni d'urto per i sottoprocessi partonici rilevanti, $\hat{\sigma}_i(p_i)$, pesate dalle funzioni di distribuzione partoniche. Nel caso in cui vi è un solo adrone nello stato iniziale, come nel deep-inelastic scattering, si ha

$$\sigma(P) = \sum_i \int_0^1 dz f_i(z) \hat{\sigma}_i(zP) . \quad (3.69)$$

Per un processo con due adroni nello stato iniziale (ad esempio il processo di Drell-Yan, di cui parleremo diffusamente al Capitolo 4) la formula si generalizza come

$$\sigma(P_1, P_2) = \sum_{i,j} \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 f_i^{(1)}(z_1) f_j^{(2)}(z_2) \hat{\sigma}_i(z_1 P_1, z_2 P_2) , \quad (3.70)$$

dove i numeri 1 e 2 si riferiscono agli adroni incidenti.

- I partoni sono fermioni carichi (per poter interagire con il fotone virtuale) di spin $\frac{1}{2}$, e vengono identificati con i quark. Questa assunzione è ben verificata sperimentalmente.

Concentriamoci sul caso del deep-inelastic scattering.⁴ Si introducono le *funzioni di struttura* adimensionate

$$F(Q^2, x_{Bj}) \equiv Q^2 \frac{\sigma(Q^2, x_{Bj})}{x_{Bj}} , \quad \hat{F}_i(Q^2, x) \equiv Q^2 \frac{\hat{\sigma}_i(Q^2, x)}{x} \quad (3.71)$$

dove $x = Q^2/(2p_i q)$. In termini delle funzioni di struttura, la formula del modello a partoni per la sezione d'urto prende la forma

$$F(Q^2, x_{Bj}) = \sum_i \int_{x_{Bj}}^1 \frac{dz}{z} f_i(z) \hat{F}_i \left(Q^2, \frac{x_{Bj}}{z} \right) . \quad (3.72)$$

Si noti che l'estremo inferiore dell'integrale è x_{Bj} , e non 0, perché $x = x_{Bj}/z$ deve essere minore di 1. Questa forma è più versatile perché è scritta tramite un *prodotto di convoluzione*:

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(x) &\equiv \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right) \\ &= \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 f(z_1) g(z_2) \delta(x - z_1 z_2) . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Scritto nell'ultima forma, si vede chiaramente che esso è commutativo, ed è anche facile estenderlo a più funzioni:

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x) = \int_0^1 dz_1 \cdots \int_0^1 dz_n f_1(z_1) \cdots f_n(z_n) \delta(x - z_1 \cdots z_n) . \quad (3.74)$$

⁴La trattazione qui presentata è notevolmente semplificata, in quanto non tiene conto della natura vettoriale del fotone virtuale scambiato. In realtà, la sezione d'urto si scrive in termini di un tensore doppio, $W^{\mu\nu}(p, q)$, il quale a sua volta è parametrizzato da due funzioni di struttura indipendenti. Questi dettagli sono tuttavia irrilevanti ai fini della comprensione delle caratteristiche essenziali del modello.

Vedremo nel Capitolo 5 che questo prodotto di convoluzione sarà molto utile.

Siamo ora in grado di mostrare che il modello a partoni riproduce correttamente il fenomeno dello scaling osservato negli esperimenti di deep-inelastic scattering. Al leading order nelle interazioni elettromagnetiche, l'unico sottoprocesso partonico rilevante è il seguente:

$$\gamma^*(q) + q(p_i) \rightarrow q(p') . \quad (3.75)$$

Il processo è schematizzato in Figura 3.3. La sezione d'urto per questo processo partonico è

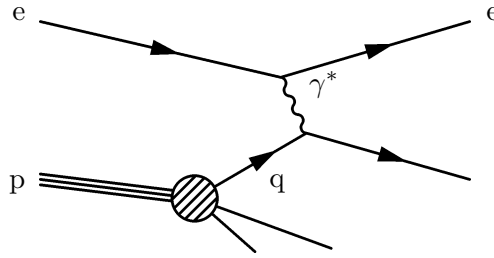


Figura 3.3: Schema del DIS nel modello a partoni.

proporzionale allo spazio delle fasi a un corpo: si ha quindi, a parte costanti moltiplicative irrilevanti,

$$\hat{\sigma}_i = e_i^2 \int d^4 p' \delta^{(4)}(q + p_i - p') \delta(p'^2) = e_i^2 \delta((p_i - q)^2) \quad (3.76)$$

dove e_i è la carica del partone i -esimo. Ora, poiché $p_i = zP$, si ha immediatamente

$$\delta((p_i - q)^2) = \frac{1}{Q^2} \delta\left(1 - \frac{x_{Bj}}{z}\right) \quad (3.77)$$

e dalla condizione $0 < z \leq 1$ si trova che $z \geq x_{Bj}$, per cui possiamo riscrivere la (3.72) come

$$F(Q^2, x_{Bj}) = \frac{1}{x_{Bj}} \sum_i e_i^2 f_i(x_{Bj}) . \quad (3.78)$$

Questa formula mostra tutta la potenza del modello a partoni: essa infatti rende conto dello scaling, cioè è indipendente da Q^2 . Inoltre, la frazione di impulso portata dal partone viene identificata con la variabile cinematica x_{Bj} .

3.4.1 Correzioni di QCD al modello a partoni

Una delle ipotesi del modello a partoni è che i partoni non interagiscano fra loro. Questa è la motivazione principale a considerare la QCD come la teoria di campo che descrive l'interazione fra quark: infatti, come si è visto, la QCD è una teoria asintoticamente libera, cioè la sua costante di accoppiamento tende ad annullarsi a scale di energia molto grandi.

È naturale a questo punto domandarsi come viene modificato il modello a partoni quando si tenga conto del fatto che i partoni non sono esattamente liberi, ma interagiscono tra

loro secondo la QCD. Questo viola ovviamente una delle ipotesi del modello a partoni nella sua formulazione originaria, nell'ambito del quale i partoni sono oggetti non interagenti. È facile poi vedere che anche l'ipotesi di collinearità del partone con l'adrone cade: infatti un partone potrà emettere gluoni prima di interagire con il fotone virtuale, e acquistare così un certo impulso trasverso rispetto alla direzione dei fasci incidenti. Infine, è possibile mostrare che la sezione d'urto per l'emissione di gluoni è singolare nella regione in avanti, cioè quando il gluone è emesso nella stessa direzione del quark incidente. Questo richiederà una procedura di regolarizzazione che, come nel caso della rinormalizzazione ultravioletta, distrugge l'invarianza di scala della teoria e induce violazioni del fenomeno di scaling. Nonostante tutte queste difficoltà, è possibile formulare una versione del modello a partoni che tenga conto delle correzioni di QCD, e i dati sperimentali oggi disponibili mostrano una notevole consistenza con questo quadro.

Per capire che cosa accade, consideriamo il primo ordine perturbativo in α_s . A quest'ordine bisognerà includere le correzioni al processo (3.75) dovute allo scambio di un gluone virtuale; inoltre, bisognerà includere il contributo del sottoprocesso in cui viene emesso un gluone reale,

$$\gamma^*(q) + q(p_i) \rightarrow q(p') + g(k) , \quad (3.79)$$

al tree level. Si trova che la sezione d'urto per l'emissione di un gluone reale è divergente in due regioni dello spazio delle fasi:

- quando l'impulso del gluone emesso tende a zero (divergenza soffice);
- quando l'impulso del gluone è circa parallelo a quello del quark che lo emette (divergenza collineare).

Il termine di divergenza soffice ha la stessa struttura cinematica del contributo virtuale, ed è cancellata da un analogo termine divergente nell'integrale di loop, come conseguenza di un teorema generale di cancellazione delle divergenze soffice. Il termine di divergenza collineare viceversa non viene cancellato, e si presenta nella forma

$$\int_0^{K^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} , \quad (3.80)$$

essendo k_T la componente trasversa (rispetto all'impulso del quark) dell'impulso del gluone, e K il suo limite superiore imposto dalla cinematica. Osserviamo d'altro canto che l'emissione di un gluone collineare da parte di un quark ha l'effetto di ridurre la frazione di impulso portata dal quark incidente, senza modificare la direzione del suo impulso, e quindi in ultima analisi ha l'effetto di modificare la funzione di distribuzione partonica. Possiamo quindi sperare di poter riassorbire la divergenza collineare mediante una opportuna ridefinizione delle pdf, che dovranno comunque essere estratte dai dati, in modo simile a quanto accade con la rinormalizzazione delle costanti di accoppiamento. Questa osservazione ci incoraggia a proseguire sulla strada dell'inclusione delle correzioni di QCD. Per farlo, occorre regolarizzare la divergenza collineare, per esempio imponendo un limite inferiore λ ai valori che l'impulso trasverso k_T può assumere. Si trova che il termine divergente ha la forma

$$\hat{F}_i = \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{Q^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \hat{F}_i^{(0)} , \quad (3.81)$$

dove si è definita $\mathbb{I}(z) = \delta(1 - z)$, e $\hat{F}_i^{(0)}(z)$ è la funzione di struttura partonica al tree level. La funzione $P_{ii}^{(0)}(z)$ è detta *splitting function*. Il punto importante è che la splitting function è *universale*, ovvero non dipende dal particolare processo che si sta considerando, ma solo dal partone che sta emettendo il gluone. Il fattore tra parentesi può quindi essere assorbito in una ridefinizione della funzione di densità partonica, che dovrà comunque essere misurata; la procedura ricorda quella di rinormalizzazione delle costanti di accoppiamento. Procediamo dunque come segue. A meno di termini di ordine α_s^2 possiamo riscrivere

$$\hat{F}_i = \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \hat{F}_i^{(0)}, \quad (3.82)$$

dove abbiamo introdotto una nuova scala di energia μ , detta *scala di fattorizzazione*. Ora, la funzione di struttura adronica è data da

$$\begin{aligned} F &= \sum_i f_i^0 \otimes \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \hat{F}_i^{(0)} \\ &= \sum_i f_i(\mu^2) \otimes \hat{F}_i(\mu^2) \end{aligned} \quad (3.83)$$

dove si è definito

$$f_i(\mu^2) = f_i^0 \otimes \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \quad (3.84a)$$

$$\hat{F}_i(\mu^2) = \left(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ii}^{(0)} \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \otimes \hat{F}_i^{(0)} \quad (3.84b)$$

(si è aggiunto un apice ⁰ per denotare le vecchie pdf indipendenti da μ^2). In questo modo, la divergenza collineare viene riassorbita nelle nuove pdf. Inoltre la quantità

$$\hat{\sigma}_i(x, \mu^2) = x \hat{F}_i(x, \mu^2) \quad (3.85)$$

non è più la sezione d'urto partonica originale (che conteneva la divergenza), ma è un nuovo oggetto, detto *sezione d'urto a corte distanze*, che non dipende dai dettagli di piccola scala, e perciò è finita e calcolabile con la QCD perturbativa. Il prezzo pagato è l'introduzione della scala μ^2 , che, come si osserva dalla (3.84b), è conveniente scegliere dell'ordine di Q^2 in modo da non avere grandi logaritmi nelle correzioni di ordine successivo.

La chiave di questo risultato è nell'equazione (3.81), che dice che la divergenza collineare è *fattorizzata* in un termine divergente universale, moltiplicato per la funzione di struttura all'ordine leading. Questo fatto prende il nome di *teorema di fattorizzazione*. La sua dimostrazione a tutti gli ordini è altamente non banale; nei calcoli espliciti presenti in letteratura non si conoscono violazioni di questo teorema.

3.4.2 Violazione dello scaling

A seguito del procedimento di fattorizzazione delle divergenze collineari, le pdf non sono più rigorosamente indipendenti da Q^2 : esse acquistano una dipendenza logaritmica dalla scala, che è calcolabile perturbativamente (mentre le pdf $f_i(z, \mu^2)$ non lo sono). Per vederlo,

si osservi che il primo membro della (3.83) non dipende dalla scala μ^2 , e perciò la conoscenza della dipendenza da μ^2 di $f_i(z, \mu^2)$ poggia sulla conoscenza della stessa dipendenza di $\hat{F}_i(z, \mu^2)$. E quest'ultima, stante la natura di corte distanze di $\hat{F}_i(z, \mu^2)$, è calcolabile perturbativamente.

Vediamo concretamente di calcolare tale dipendenza al primo ordine in α_s . Derivando ambo i membri di (3.83) rispetto a $\log \mu^2$ si ottiene

$$0 = \frac{d}{d \log \mu^2} f_i(\mu^2) \otimes \hat{F}_i(\mu^2) + f_i(\mu^2) \otimes \frac{d}{d \log \mu^2} \hat{F}_i(\mu^2), \quad (3.86)$$

da cui, usando la definizione (3.84b), si trova

$$\frac{d}{d \log \mu^2} f_i(\mu^2) \otimes \hat{F}_i^{(0)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} f_i(\mu^2) \otimes P_{ii}^{(0)} \otimes \hat{F}_i^{(0)}. \quad (3.87)$$

Il termine comune $\hat{F}_i^{(0)}$ si può elidere e otteniamo, infine,

$$\frac{d}{d \log \mu^2} f_i(\mu^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} f_i(\mu^2) \otimes P_{ii}^{(0)}, \quad (3.88)$$

nota con il nome di *equazione di evoluzione di Altarelli e Parisi* [12]. Nel caso generale, occorrerà considerare non soltanto lo splitting di un quark in un quark e un gluone, con il quark che dà luogo al processo di scattering, ma anche il caso in cui il processo di scattering è iniziato dal gluone; questo fornirà una funzione di splitting $P_{ig}^{(0)}$. Inoltre, si dovrà assumere che gli adroni abbiano anche un certo contenuto di gluoni, distribuiti secondo una opportuna pdf. In generale, quindi, l'equazione assume una forma matriciale:

$$\boxed{\frac{d}{d \log \mu^2} f_i(\mu^2) = \sum_j P_{ij} \otimes f_j(\mu^2)}, \quad (3.89)$$

dove gli indici i, j corrono su tutti i partoni (quark, antiquark e gluoni). Le splitting function hanno uno sviluppo

$$P_{ij} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 P_{ij}^{(1)} + \dots, \quad (3.90)$$

in cui le funzioni coefficienti sono note fino all'ordine α_s^3 .

Capitolo 4

Processo di Drell-Yan

Nella tesi ci occuperemo della risommazione degli sviluppi perturbativi in QCD nel limite di emissione soffice. In tale limite i termini dominanti, che vengono risommati, hanno la forma di logaritmi di certi rapporti adimensionati di invarianti cinematici. Tali logaritmi nascono già al primo ordine delle correzioni di QCD, come conseguenza del meccanismo di cancellazione delle divergenze infrarosse. In questo Capitolo effettueremo il calcolo esplicito della correzione all'ordine α_s in QCD per un processo, noto col nome di processo di Drell-Yan, allo scopo di mostrare esplicitamente la nascita di tali termini logaritmici.

4.1 Introduzione al processo di Drell-Yan

Un esempio tipico di produzione di sistemi pesanti in collisioni adroniche è il cosiddetto processo di Drell-Yan. Esso consiste nella creazione, in seguito all'urto dei due adroni H_1 e H_2 , di una coppia leptone-antileptone $\ell\bar{\ell}$ con grande massa invariante, oltre a un sistema di adroni X :

$$H_1 + H_2 \rightarrow \ell + \bar{\ell} + X . \quad (4.1)$$

È importante anticipare che vogliamo essere inclusivi rispetto ad X , ovvero integrare su tutti i possibili stati finali X . Il processo è schematizzato in Figura 4.1. Il processo avviene

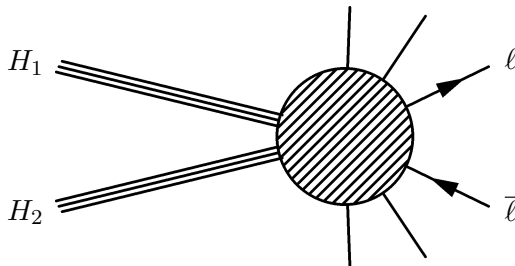


Figura 4.1: Processo di Drell-Yan.

mediante il sottoprocesso partonico

$$q(p) + \bar{q}(p') \rightarrow \ell(k) + \bar{\ell}(k') \quad (4.2)$$

(tra parentesi sono indicati i quadri-impulsi delle particelle). Il calcolo sarà effettuato al primo ordine perturbativo nelle interazioni elettrodeboli; in questa approssimazione, il processo ha luogo mediante lo scambio di un fotone virtuale o di un bosone vettore, come mostrato in Figura 4.2).

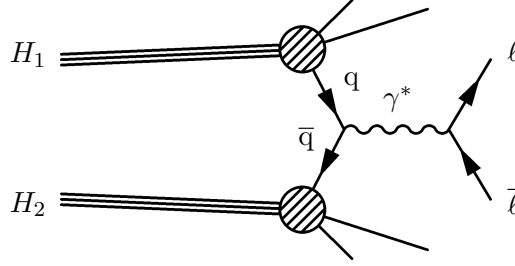


Figura 4.2: Processo di Drell-Yan nel modello a partoni.

L'ampiezza per il processo di Drell-Yan si può scrivere

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^\mu(p, p') \epsilon_\mu(k, k'), \quad (4.3)$$

dove

$$\epsilon_\mu(k, k') = \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - M^2 - i\Gamma M} \bar{u}(k) \gamma^\nu (g_v + g_a \gamma_5) v(k'). \quad (4.4)$$

essendo $q = k + k'$, M la massa del bosone vettoriale scambiato e Γ la sua larghezza di decadimento. Le costanti di accoppiamento g_v e g_a dipendono dal bosone e dai leptoni (ad esempio nel caso del fotone $g_v = e$, $g_a = 0$). Il termine $-iM\Gamma$ nel propagatore del vettore tiene conto degli effetti dovuti alla larghezza finita dei bosoni vettoriali deboli W^\pm e Z^0 . Tale termine è ovviamente assente nel contributo dovuto allo scambio di un fotone virtuale, per il quale $M = 0$. Termini proporzionali a $q_\mu q_\nu$ nel propagatore del bosone vettore danno contributo esattamente nullo nel caso in cui il bosone è un fotone virtuale, a causa della conservazione della corrente elettromagnetica. Tale contributo si annulla anche nel caso in cui il bosone sia un W^\pm o Z^0 , nel limite in cui i leptoni della coppia di Drell-Yan abbiano massa nulla.

La sezione d'urto partonica per la produzione della coppia di Drell-Yan più n gluoni di impulsi k_1, \dots, k_n (vedremo in seguito che vorremo includere anche questa possibilità) si scrive

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2s} \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{\text{in}} \sum_{\text{fin}} \int d\phi_{n+2}(p, p'; k, k', k_1, \dots, k_n) |\mathcal{M}|^2 \quad (4.5)$$

dove $\frac{1}{2s}$ è il fattore di flusso (valido per quark massless), $s = (p + p')^2$ è il quadrato dell'energia nel centro di massa, N_{in} è il numero di stati iniziali e $d\phi_{n+2}$ è la misura dello spazio

delle fasi a $n + 2$ corpi. Facendo uso della formula (A.12), possiamo riscrivere

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2s} \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{\text{in}} \int \frac{dq^2}{2\pi} d\phi_{n+1}(p, p'; q, k_1, \dots, k_n) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} Q_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

avendo definito

$$Q_{\mu\nu}(q) \equiv \sum_{\text{fin}} \int d\phi_2(q; k, k') \epsilon_\mu(k, k') \epsilon_\nu^*(k, k'). \quad (4.7)$$

Si ha

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= \frac{1}{(q^2 - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \int d\phi_2(k, k') \text{Tr} [k\gamma_\mu (g_v + g_a \gamma_5) k' \gamma_\nu (g_v + g_a \gamma_5)] \\ &= \frac{1}{(q^2 - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} (A\eta_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove all'ultimo passaggio si è data la forma più generale che può avere il risultato, dal momento che $Q_{\mu\nu}$ è un tensore che dipende dal solo impulso q . La condizione $q^\mu Q_{\mu\nu} = 0$ dà subito la relazione $B = -\frac{A}{q^2}$; saturando ambo i membri con $\eta^{\mu\nu}$, otteniamo

$$\begin{aligned} A(4 - 1) &= \int d\phi_2(k, k') \text{Tr} [k\gamma_\mu k' \gamma^\mu (g_v^2 + g_a^2 + 2g_v g_a \gamma_5)] \\ &= -(g_v^2 + g_a^2) 4q^2 \int d\phi_2(k, k'), \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove si è tenuto conto che un termine assiale è nullo dopo l'integrazione nello spazio delle fasi e si sono usate la relazione $q^2 = 2kk'$, che discende dalla conservazione dell'impulso, e la formula (A.2b). Usando anche la (A.23), abbiamo quindi

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= \frac{(g_v^2 + g_a^2) 4q^2}{(q^2 - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \frac{1}{3} \frac{1}{8\pi} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \\ &= K(q^2) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

La forma esplicita del fattore K dipende dal bosone in questione; nel caso in cui esso sia un fotone virtuale, diventa

$$K(q^2) = \frac{e^2}{6\pi q^2} = \frac{2\alpha_{em}}{3q^2} \quad (4.11)$$

avendo definito $\alpha_{em} \equiv \frac{e^2}{4\pi}$. Nel caso in cui il bosone sia massivo, la questione è un po' più complessa; infatti un W^\pm o uno Z^0 possono essere essi stessi di stato finale, e la produzione di una coppia leptonica può essere pensata come effetto del loro decadimento. La larghezza di decadimento $\Gamma_{\ell\bar{\ell}}$ di un vettore nella coppia leptonica è data da

$$\Gamma_{\ell\bar{\ell}} = \frac{1}{2M} \frac{1}{3} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right) \int d\phi_2(k, k') \text{Tr} [k\gamma^\mu (g_v + g_a \gamma_5) k' \gamma^\nu (g_v + g_a \gamma_5)] , \quad (4.12)$$

e quindi, per confronto con le (4.8), (4.10), si ha

$$Q_{\mu\nu} = \frac{2M\Gamma_{\ell\bar{\ell}}}{(q^2 - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (4.13)$$

Ora, nel limite $\Gamma \ll M$, si può fare l'approssimazione

$$\frac{2M}{(q^2 - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \simeq \frac{2\pi}{\Gamma} \delta(q^2 - M^2); \quad (4.14)$$

quindi si ottiene

$$Q_{\mu\nu} = 2\pi \frac{\Gamma_{\ell\bar{\ell}}}{\Gamma} \delta(q^2 - M^2) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right) \quad \Rightarrow \quad K(q^2) = 2\pi \frac{\Gamma_{\ell\bar{\ell}}}{\Gamma} \delta(q^2 - M^2). \quad (4.15)$$

Per contro, la sezione d'urto σ_V per la produzione del vettore è data da

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_V &= \frac{1}{2s} \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{\text{in}} \int d\phi_{n+1}(p, p'; q, k_1, \dots, k_n) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2s} \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{\text{in}} \int dq^2 \delta(q^2 - M^2) d\phi_{n+1}(p, p'; q, k_1, \dots, k_n) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

e dal confronto di questa espressione con la (4.15) si ottiene, infine,

$$\hat{\sigma} = \frac{\Gamma_{\ell\bar{\ell}}}{\Gamma} \hat{\sigma}_V, \quad (4.17)$$

ovvero la sezione d'urto per la produzione della coppia di Drell-Yan tramite un bosone vettore è uguale alla sezione d'urto di produzione del vettore stesso per il branching ratio $\frac{\Gamma_{\ell\bar{\ell}}}{\Gamma}$. Nel seguito ci restringeremo per semplicità al caso del fotone virtuale.

4.2 Leading order

Per cominciare calcoliamo l'ampiezza per il diagramma tree-level; si noti che in questo caso il processo è completamente descritto dalla teoria elettrodebole. Il diagramma cui siamo interessati è disegnato in Figura 4.3; il corrispondente fattore di vertice è

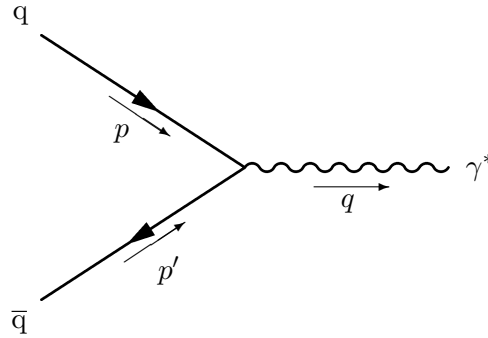


Figura 4.3: Processo partonico al tree-level.

$$e_q e \gamma^\mu \quad (4.18)$$

dove e è la costante di accoppiamento elettromagnetica (carica dell'elettrone) ed e_q è la carica del quark ($\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$).

L'ampiezza \mathcal{M}_{00} per questo diagramma si calcola molto semplicemente con le regole di Feynman (il subscript 00 significa, rispettivamente, 0 loops e 0 gluoni reali emessi). Essendo $u(p)$ e $v(p')$ gli spinori di polarizzazione di quark e antiquark, si ha

$$\mathcal{M}_{00} = \mathcal{M}_{00}^\mu \epsilon_\mu(q) \quad , \quad \mathcal{M}_{00}^\mu = e_q e \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \quad (4.19)$$

e quindi

$$\mathcal{M}_{00}^\mu \mathcal{M}_{00}^{*\nu} = e_q^2 e^2 \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu v(p') \quad (4.20)$$

Allora, mediando sugli stati iniziali e moltiplicando per $\overline{Q_{\mu\nu}}$ in (4.10) (operazione che indicheremo simbolicamente con una sommatoria barrata $\overline{\sum}$) si ottiene (in $d = 4 - 2\epsilon$ dimensioni)¹

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |\mathcal{M}_{00}|^2 &= \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{\text{in}} \mathcal{M}_{00}^\mu \mathcal{M}_{00}^{*\nu} Q_{\mu\nu} \\ &= \frac{e_q^2 e^2}{4} K(q^2) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu] \\ &= \frac{e_q^2 e^2}{4} K(q^2) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) 4 [p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - \eta^{\mu\nu} pp'] \\ &= e_q^2 e^2 K(q^2) \left[(1 - 2\epsilon) pp' + 2 \frac{qp qp'}{q^2} \right] \quad (4.21) \end{aligned}$$

Per riscrivere la (4.21) in maniera più semplice usiamo la conservazione dell'impulso

$$p + p' = q \quad , \quad (4.22)$$

da cui si ricava (tenendo conto che per i quark abbiamo posto $m^2 = p^2 = p'^2 = 0$)

$$qp = (p + p')p = pp' \quad , \quad qp' = (p + p')p' = pp' \quad (4.23)$$

Introducendo le variabili

$$s \equiv (p + p')^2 \quad , \quad Q^2 \equiv q^2 \quad , \quad x \equiv \frac{Q^2}{s} \quad (4.24)$$

si ha

$$s = 2pp' = Q^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad ; \quad (4.25)$$

il significato di queste variabili sarà più chiaro nel caso di emissione reale, dove la variabile adimensionata x assume valori tra 0 a 1. Ora possiamo riscrivere la (4.21) nella forma

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{00}|^2 = e_q^2 e^2 K(Q^2) \frac{s}{2} \left[(1 - 2\epsilon) + \frac{1}{x} \right] = e_q^2 e^2 K(s) s (1 - \epsilon) \quad (4.26)$$

¹In realtà $K(q^2)$ è stato calcolato in 4 dimensioni; tuttavia, esso moltiplica tutti i contributi ai vari ordini perturbativi, dopo che le divergenze si sono cancellate, e quindi non è importante avere la sua forma esplicita in $d = 4 - 2\epsilon$.

Colore dei quark

Nella scrittura del vertice (4.18) si è trascurato il fatto che i quark incidenti portano una carica di colore, ovvero ciascuno porterà un indice aggiuntivo, i e j rispettivamente, e il vertice ha la forma

$$e\gamma^\mu \delta_{ij}. \quad (4.27)$$

Quando mediamo sugli stati iniziali, occorre sommare su i e j e dividere per gli stati possibili, che sono $3 \cdot 3 = 9$, ottenendo globalmente

$$\frac{1}{9} \sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ji} = \frac{1}{9} 3 = \frac{1}{3}. \quad (4.28)$$

Ne consegue che la formula (4.26) va corretta includendo un fattore $1/3$:

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{00}|^2 = e_q^2 e^2 K(s) \frac{s}{3} (1 - \epsilon). \quad (4.29)$$

4.2.1 Sezione d'urto

La sezione d'urto² $\hat{\sigma}_0$ si ottiene dalla (4.6), facendo uso della misura dello spazio delle fasi ad un corpo $d\phi_1$ (A.25), calcolata in Appendice A.3:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0(s) &= \frac{1}{2s} \int \frac{dQ^2}{2\pi} e_q^2 e^2 K(s) \frac{s}{3} (1 - \epsilon) 2\pi \delta(s - Q^2) \\ &= \frac{2\pi\alpha_{em}}{3} e_q^2 K(s) (1 - \epsilon) \end{aligned} \quad (4.30)$$

e, per $\epsilon = 0$, essa diviene, richiamando la (4.11),

$$\hat{\sigma}_0(s) = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{9s} e_q^2. \quad (4.31)$$

Per calcolare la sezione d'urto differenziale in q_T si deve usare il risultato (A.24); è conveniente, per utilizzo futuro, considerare la sezione d'urto doppiamente differenziale

$$\frac{d\hat{\sigma}_0}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \delta(s - Q^2) \delta(q_T^2). \quad (4.32)$$

A causa della conservazione dell'impulso, l'impulso trasverso del fotone non può che essere nullo, da cui la $\delta(q_T^2)$ in (4.32). Appare chiaro che finché l'unico oggetto prodotto è il fotone non ha molto senso interrogarsi sulla distribuzione in q_T ; ciò diventerà interessante invece includendo l'emissione di gluoni reali.

4.3 Correzioni di QCD

In teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto (totale o differenziale) si presenta come uno sviluppo perturbativo nella costante di accoppiamento forte α_s

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\sigma}_k \alpha_s^k. \quad (4.33)$$

²Il cappuccio sulla sezione d'urto $\hat{\sigma}_0$ ricorda che essa è calcolata al livello partonico, mentre il subscript 0 ricorda che il calcolo è stato svolto all'ordine 0 in α_s .

Nel seguito di questo Capitolo vogliamo calcolare il coefficiente $\hat{\sigma}_1$. I contributi ad esso derivano dai diagrammi di Figura 4.4. Infatti il diagramma (b) contiene due vertici

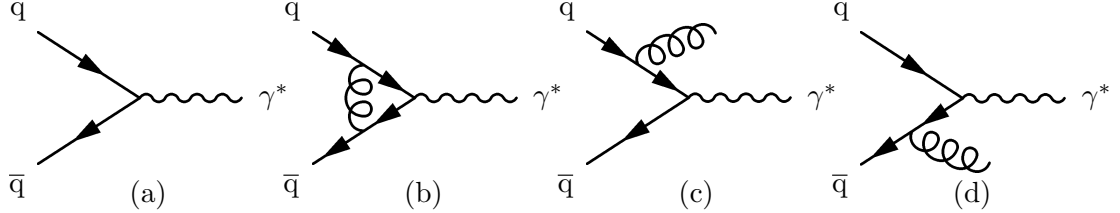


Figura 4.4: Contributi fino all'ordine α_s al processo partonico.

quark-quark-gluone, e quindi è di ordine α_s ; esso contribuirà quindi in interferenza con il diagramma tree level (a), già studiato. I diagrammi (c) e (d) hanno un solo vertice e quindi un solo fattore g_s , ma essendo lo stato finale diverso dal tree level e dal precedente, essi non possono che interferire tra loro, dando complessivamente un contributo di ordine α_s .

Un'altra correzione dello stesso ordine deriva dalla correzione al propagatore del quark. Infatti, essa porta ad una rinormalizzazione dei campi data da un fattore

$$Z_q = 1 + \alpha_s Z_q^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (4.34)$$

e nella formula LSZ (che lega le funzioni di Green alle ampiezze di scattering) ai campi asintotici va associato il fattore

$$\sqrt{Z_q} = 1 + \frac{1}{2} \alpha_s Z_q^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) . \quad (4.35)$$

Vedremo tuttavia che $Z_q^{(1)} = 0$, cioè che la correzione al propagatore del quark (supposto massless) è nulla all'ordine α_s .

4.3.1 Correzione al vertice

La correzione dovuta al diagramma virtuale contribuisce, all'ordine α_s , tramite l'interferenza col diagramma tree-level. Un modo per ottenere questo risultato è calcolare la correzione al vertice (nel senso di una skeleton expansion, si veda ad esempio [2]) e prendere il modulo quadro del diagramma con il vertice corretto, sviluppato all'ordine α_s . Definiamo quindi il vertice corretto (a meno della carica elettrica)

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \alpha_s \Gamma_1^\mu + \mathcal{O}(\alpha_s^2) , \quad (4.36)$$

dove Γ_1^μ , che è la correzione ad un loop che calcoleremo, può dipendere in generale dagli impulsi delle particelle.

Il diagramma in questione è il diagramma (b) di Figura 4.4, che ridisegniamo qui (Figura 4.5). L'ampiezza per tale diagramma (indicata, con le notazioni introdotte la Sezione precedente, \mathcal{M}_{10}) è ottenuta facendo un integrale di loop

$$\mathcal{M}_{10}^\mu = -i e_q e \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \bar{v}(p') g_s \gamma^\rho \frac{-(\not{p}' + \not{l})}{(p' + l)^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{l}}{(p - l)^2} g_s \gamma^\sigma u(p) \frac{P_{\rho\sigma}(l)}{l^2} \quad (4.37)$$

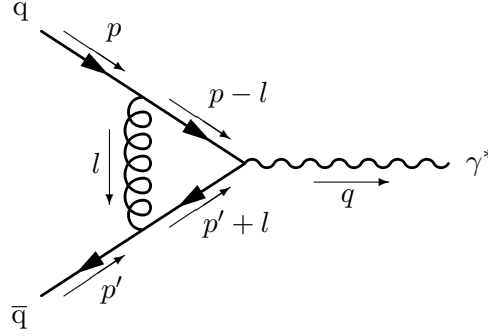


Figura 4.5: Diagramma virtuale

dove $P_{\rho\sigma}$ è il numeratore del propagatore del gluone, la cui forma dipende dalla scelta del gauge. La sua forma nel gauge di Feynman generalizzato (o R_ξ gauge) è

$$P_{\rho\sigma}(l, \xi) = \eta_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{l_\rho l_\sigma}{l^2}, \quad (4.38)$$

dove è comparsa la dipendenza da un parametro ξ , che parametrizza diverse scelte di gauge. Siccome il metodo della regolarizzazione dimensionale rispetta l'invarianza di gauge, siamo liberi di scegliere un valore qualsiasi per ξ . Di fatto scopriremo che a quest'ordine, in regolarizzazione dimensionale, un termine del tipo $\frac{l_\rho l_\sigma}{l^2}$ dà contributo nullo, coerentemente col fatto che il calcolo deve essere indipendente dal gauge, e perciò opereremo nel gauge più semplice, quello per cui $\xi = 1$, detto gauge di Feynman.

Con la notazione introdotta in (4.36) l'ampiezza \mathcal{M}_{10}^μ si scrive anche

$$\mathcal{M}_{10}^\mu = e_q e \alpha_s \bar{v}(p') \Gamma_1^\mu u(p). \quad (4.39)$$

Per confronto con la (4.37), e ricordando che $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$, otteniamo per Γ_1^μ l'espressione

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= -4\pi i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \gamma^\rho \frac{-(\not{p}' + \not{l})}{(p' + l)^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{l}}{(p - l)^2} \gamma^\sigma \frac{\eta_{\rho\sigma}}{l^2} \\ &= 4\pi i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 (p - l)^2 (p' + l)^2} \gamma^\rho (\not{p}' + \not{l}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{l}) \gamma_\rho \end{aligned} \quad (4.40)$$

In realtà, lavorando in $d = 4 - 2\epsilon$ dimensioni, la costante g_s , e quindi α_s , non sono adimensionali: infatti, la dimensione dei campi è fissata dal termine cinetico (imponendo che la densità lagrangiana \mathcal{L} abbia dimensione d), per cui il campo fermionico ha dimensione $\frac{d-1}{2} = \frac{3}{2} - \epsilon$ e il campo del fotone ha dimensione $\frac{d-2}{2} = 1 - \epsilon$. Per il vertice fermione-fermione-fotone si deve avere $2(\frac{3}{2} - \epsilon) + (1 - \epsilon) + d_{g_s} = d$, da cui

$$d_{g_s} = \epsilon, \quad d_{\alpha_s} = 2\epsilon. \quad (4.41)$$

Essendo preferibile lavorare con costanti di accoppiamento adimensionali, introduciamo una scala di energia arbitraria μ , detta *scala di rinormalizzazione*, e sostituiamo

$$g_s \rightarrow g_s \mu^\epsilon, \quad \alpha_s \rightarrow \alpha_s \mu^{2\epsilon}. \quad (4.42)$$

Evidentemente, la dipendenza da μ scompare nel limite $d \rightarrow 4$. Usando la formula (A.2d) e isolando la dipendenza dalle matrici γ si può riscrivere

$$\gamma^\rho(\not{p}' + \not{l})\gamma^\mu(\not{p} - \not{l})\gamma_\rho = 2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma \left[(1-\epsilon)l_\nu l_\sigma + l_\nu(\epsilon p_\sigma + p'_\sigma) - (p_\nu + \epsilon p'_\nu)l_\sigma - (p_\nu p'_\sigma - \epsilon p'_\nu p_\sigma) \right]. \quad (4.43)$$

Al fine di calcolare l'integrale di loop riscriviamo il denominatore con la formula di Feynman:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int dF_n [A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n]^{-n}, \quad (4.44)$$

essendo la misura dF_n definita da

$$dF_n \equiv (n-1)! dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n), \quad (4.45)$$

e tutti gli integrali sono estesi tra 0 e 1, da cui segue anche

$$\int dF_n = 1. \quad (4.46)$$

Allora nel nostro caso si ha, con semplici passaggi e facendo già uso della $\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)$,

$$\frac{1}{l^2(p-l)^2(p'+l)^2} = \int dF_3 \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \quad (4.47)$$

dove si è definito

$$k = l - x_1 p + x_2 p' \quad (4.48a)$$

$$M^2 = -2x_1 x_2 p p' - x_1(1-x_1)p^2 - x_2(1-x_2)p'^2. \quad (4.48b)$$

A questo punto dobbiamo sostituire (4.43) e (4.47) in (4.40), ed è conveniente cambiare variabile di integrazione da l a k . A questo punto ci si ritrova con un integrale del tipo

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{f(k)}{(k^2 - M^2)^3} \quad (4.49)$$

dove $f(k)$ è un polinomio di grado 2 in k ; essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio, se l'integrando è dispari l'integrale si annulla. Quindi i termini che al numeratore sono lineari in k danno contributo nullo e il rimanente è

$$\Gamma_1^\mu = 8\pi i \mu^{2\epsilon} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \int dF_3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-\epsilon)k_\nu k_\sigma + A_{\nu\sigma}}{(k^2 - M^2)^3} \quad (4.50)$$

dove si è definito

$$\begin{aligned} A_{\nu\sigma} = & [(1-\epsilon)x_1^2 - (1-\epsilon)x_1]p_\nu p_\sigma \\ & + [(1-\epsilon)x_2^2 - (1-\epsilon)x_2]p'_\nu p'_\sigma \\ & - [1 - x_1 - x_2 + (1-\epsilon)x_1 x_2]p_\nu p'_\sigma \\ & - [-\epsilon(1 - x_1 - x_2) + (1-\epsilon)x_1 x_2]p'_\nu p_\sigma. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Usando il risultato dell'Appendice A.2 l'integrale in $d^d k$ dà

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\mu &= -8\pi\mu^{2\epsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma \int dF_3 \left[(1-\epsilon)\eta_{\nu\sigma} \frac{(4\pi)^\epsilon}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(3)} (M^2)^{-\epsilon} - A_{\nu\sigma} \frac{(4\pi)^\epsilon}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(3)} (M^2)^{-1-\epsilon} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma \int dF_3 \left[(1-\epsilon)\frac{\eta_{\nu\sigma}}{2}\Gamma(\epsilon) - \frac{A_{\nu\sigma}}{M^2}\Gamma(1+\epsilon) \right] \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon\end{aligned}\quad (4.52)$$

Il calcolo del vertice nel caso generale è possibile ma noioso, e non porta a nessun risultato utile nel nostro caso. Più interessante per noi è il caso in cui le linee esterne corrispondono a particelle asintotiche, quindi on-shell³. In questo caso sopprime nulla la massa dei quark ci aiuta molto: infatti le equazioni di Dirac per gli spinori diventano in questo caso

$$\not{p}u(p) = 0, \quad (4.53a)$$

$$\bar{v}(p')\not{p}' = 0, \quad (4.53b)$$

e si ha anche, ovviamente, $p^2 = p'^2 = 0$. Nell'ampiezza \mathcal{M}_{10}^μ in (4.39) i termini in Γ_1^μ con \not{p}' a sinistra e quelli con \not{p} a destra sono nulli per le (4.53); concentrandosi sulla parte matriciale dell'espressione (4.52) la precedente affermazione si converte nel fatto che i termini in $A_{\nu\sigma}$ che contengono un p'_ν o un p_σ sono nulli. Inoltre l'espressione della grandezza M^2 definita in (4.48b) si semplifica notevolmente per quark on-shell. In conclusione quindi, in questa situazione semplificata abbiamo

$$A_{\nu\sigma} = -[1 - x_1 - x_2 + (1 - \epsilon)x_1x_2]p_\nu p'_\sigma \quad (4.54)$$

$$M^2 = -2x_1x_2pp' = -x_1x_2q^2 \quad (4.55)$$

(nell'ultima uguaglianza si è usata anche la conservazione dell'impulso). Quindi, esplicitando la dipendenza dalle variabili x_i nella versione semplificata della (4.52), otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\mu &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma \int dF_3 (x_1x_2)^{-\epsilon} \\ &\quad \left[(1-\epsilon)\frac{\eta_{\nu\sigma}}{2}\Gamma(\epsilon) - \frac{1-x_1-x_2+(1-\epsilon)x_1x_2}{x_1x_2q^2} p_\nu p'_\sigma \Gamma(1+\epsilon) \right].\end{aligned}\quad (4.56)$$

La forma matriciale del secondo termine in parentesi è $\not{p}\gamma^\mu\not{p}'$ che si può manipolare come segue

$$\begin{aligned}\not{p}\gamma^\mu\not{p}' &= 2p^\mu\not{p}' - \gamma^\mu\not{p}\not{p}' \\ &= 2p^\mu\not{p}' - 2pp'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}'\not{p};\end{aligned}\quad (4.57)$$

per confronto con le (4.53) il primo e l'ultimo termine si annullano e rimane solo $-2pp'\gamma^\mu = -q^2\gamma^\mu$. Usando anche la (A.2b) possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\mu &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \gamma^\mu \int dF_3 (x_1x_2)^{-\epsilon} \\ &\quad \left[-(1-\epsilon)^2\Gamma(\epsilon) + \frac{1-x_1-x_2+(1-\epsilon)x_1x_2}{x_1x_2}\Gamma(1+\epsilon) \right].\end{aligned}\quad (4.58)$$

³Abbiamo già argomentato il fatto che il fotone, pur non essendo di stato finale, si comporta come tale.

Per effettuare l'integrale in dF_3 osserviamo anzitutto che possiamo spezzare l'integrale in una somma di termini la cui forma generale è

$$\int dF_3 x_1^a x_2^b; \quad (4.59)$$

osservando che

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2, \quad (4.60)$$

(essendo ciò dovuto al fatto che $0 \leq x_3 \leq 1$ implica $0 \leq 1 - x_1 - x_2 \leq 1$ che a sua volta impone $x_2 \leq 1 - x_1$) e facendo uso della relazione⁴

$$\int_0^1 dx x^a (1-x)^b = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(2+a+b)}, \quad (4.61)$$

otteniamo infine

$$\begin{aligned} \int dF_3 x_1^a x_2^b &= \frac{2}{1+b} \int_0^1 dx_1 x_1^a (1-x_1)^{1+b} \\ &= \frac{2}{1+b} \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(2+b)}{\Gamma(3+a+b)}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Con questo risultato è immediato calcolare l'integrale in (4.58). Si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \gamma^\mu \left[(\Gamma(1+\epsilon) - (1-\epsilon)\Gamma(\epsilon)) \frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(3-2\epsilon)} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon\Gamma(1-2\epsilon)} - \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\epsilon\Gamma(2-2\epsilon)} + \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \right) \Gamma(1+\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Questa formula presenta alcune importanti caratteristiche. Ad esempio è presente un termine $\Gamma(-\epsilon)/\epsilon$, che ha un polo doppio in $\epsilon = 0$, manifestazione della divergenza infrarossa dell'integrale di loop. Ciò nonostante, la forma dell'espressione (4.63) non è particolarmente significativa, nè di facile lettura. Per ottenere una forma più espressiva possiamo ricordare che il caso reale si ottiene per $\epsilon \rightarrow 0$, perciò termini che *globalmente* sono di ordine $\mathcal{O}(\epsilon)$ possono essere trascurati. Allora, facendo uso della proprietà

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \quad (4.64)$$

possiamo raccogliere un fattore $\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}$ e ottenere

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \gamma^\mu \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{1}{2(1-2\epsilon)} - \frac{1-\epsilon}{2\epsilon(1-2\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon(1-2\epsilon)} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \gamma^\mu \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (4.65)$$

e quindi, dalla (4.36),

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \left\{ 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \right\} \quad (4.66)$$

⁴In letteratura tale funzione è nota come funzione Beta, e si scrive $B(1+a, 1+b)$.

Questo risultato coincide con quello presentato in [13].

Si noti che abbiamo aggiunto un fattore numerico C_F a moltiplicare il termine di ordine α_s ; questo termine deriva dalla dinamica del colore, che abbiamo tralasciato per non appesantire la discussione. Tenendo conto dei fattori di colore di vertici e propagatori, si trova infatti che Γ_1^μ deve essere moltiplicata per

$$t_{ik}^a t_{lj}^b \delta^{kl} \delta_{ab} = C_F \delta_{ij} \quad (4.67)$$

dove si è fatto uso della relazione (3.6) ed essendo

$$C_F = \frac{4}{3}. \quad (4.68)$$

Il vertice corretto ha, dal punto di vista degli indici di colore, la stessa struttura δ_{ij} del vertice al leading order. Quindi, nel mediare sugli stati iniziali, si procede esattamente come al leading order, ovvero occorre moltiplicare per lo stesso fattore $1/3$ trovato in (4.28).

Per rendere più facile il confronto con il risultato che troveremo nel caso dell'emissione reale, effettuiamo ancora due manipolazioni: per prima cosa riscriviamo

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^3(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} (1 + \mathcal{O}(\epsilon^3)), \end{aligned} \quad (4.69)$$

dove si è fatto uso dello sviluppo

$$\Gamma(1+x) = 1 - \gamma_E x + \left(\frac{1}{2} \gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{12} \right) x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (4.70)$$

in cui γ_E è la costante di Eulero-Mascheroni (lo sviluppo è fatto fino al second'ordine perché i termini vanno a moltiplicare un polo doppio). In secondo luogo, eliminiamo il $-$ innaturale da

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon = \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\epsilon (-1)^\epsilon; \quad (4.71)$$

la potenza generica ha un branch cut proprio nel semiasse negativo, ma tale branch cut è la manifestazione di una discontinuità nella parte immaginaria, mentre a noi interessa la parte reale, che è la stessa ai due bordi del taglio:

$$\Re(-1)^\epsilon = \Re(e^{\pm i\pi})^\epsilon = \Re(e^{\pm i\pi\epsilon}) = \cos(\pi\epsilon) = 1 - \frac{\pi^2}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.72)$$

Allora possiamo riscrivere la (4.66) come

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \left\{ 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 - \pi^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \right\}. \quad (4.73)$$

È ora immediato, per confronto con la Sezione 4.2, calcolare il modulo quadro mediato dell'ampiezza del diagramma all'ordine α_s ; la (4.29) diventa, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |\mathcal{M}_{00} + \mathcal{M}_{10}|^2 &= \\ e_q^2 e^2 K(s) \frac{s}{3} (1-\epsilon) &\left\{ 1 - \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 - \pi^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ancora, possiamo ottenere il contributo del diagramma virtuale alle sezioni d'urto totale e differenziale; procedendo come in 4.2.1 si ottiene, in termini della sezione d'urto all'ordine zero (4.31),

$$\hat{\sigma}_1^{\text{virt}} = \hat{\sigma}_0(s) \left\{ -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 - \pi^2 \right] \right\} \quad (4.75a)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{virt}}}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \left\{ -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 - \pi^2 \right] \right\} \delta(s - Q^2) \delta(q_T^2). \quad (4.75b)$$

La scelta del gauge

Ritorniamo all'affermazione, fatta in precedenza, che una scelta diversa del gauge non cambia il risultato trovato in regolarizzazione dimensionale. Il conto fatto finora è stato eseguito scegliendo $\xi = 1$ in (4.38), rendendo nullo il secondo termine. In generale quindi dobbiamo ammettere che esista un termine la cui struttura matriciale è

$$\begin{aligned} \not{l}(\not{p}' + \not{l})\gamma^\mu(\not{p} - \not{l})\not{l} &= (-\not{p}'\not{l} + 2p'l + l^2)\gamma^\mu(2pl - \not{l}\not{p} - l^2) \\ &= -(p' + l)^2(p - l)^2\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (4.76)$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che $p^2 = p'^2 = 0$ e delle equazioni (4.53). Allora l'integrale di loop si semplifica notevolmente, e, a meno di costanti, esso rimane

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^4} = 0. \quad (4.77)$$

Che questo integrale sia nullo deriva da un'operazione di prolungamento analitico: infatti la soluzione, secondo la formula (A.6a), deve essere proporzionale a $(M^2)^{-\epsilon}$, dove però in questo caso $M^2 = 0$; allora il risultato è sicuramente nullo per $\epsilon < 0$, e quindi prolungando analiticamente è nullo per ogni valore di ϵ .

4.3.2 Correzione al propagatore

Un'altra correzione di ordine α_s al processo di Drell-Yan verrebbe dalla correzione al propagatore dei quark. Il propagatore corretto si può scrivere nella forma

$$\tilde{\Delta}(\not{p}) = \frac{\not{p}}{p^2 - i\Pi(\not{p})} \quad (4.78)$$

dove $\Pi(\not{p})$ è la correzione al propagatore (si veda, ad esempio, [2]). Essa è legata al coefficiente di rinormalizzazione del campo del quark Z_q ; notando che

$$\tilde{\Delta}(\not{p}) = \frac{\not{p}}{Z_q p^2 - i\Pi_{\text{LOOP}}(\not{p})}, \quad (4.79)$$

in cui $\Pi_{\text{LOOP}}(\not{p})$ è la correzione dovuta solo agli integrali di loop, e non ai contrattermini (contenuti in Z_q), e usando l'ulteriore condizione che il propagatore deve avere un polo di residuo 1 in $\not{p} = 0$ (si veda ad esempio [2, 3]), si ottiene

$$\left. \frac{d}{d\not{p}} i\Pi(\not{p}) \right|_{\not{p}=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_q = 1 + \left. \frac{d}{d\not{p}} i\Pi_{\text{LOOP}}(\not{p}) \right|_{\not{p}=0}. \quad (4.80)$$

Partendo dal diagramma di Figura 4.6 calcoliamo $\Pi_{\text{LOOP}}^{(1)}(\not{p})$ (all'ordine α_s), nel gauge di

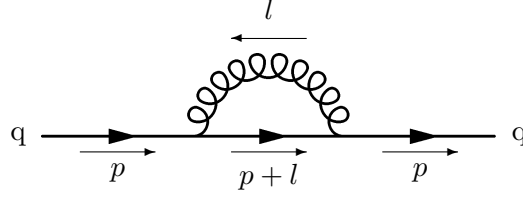


Figura 4.6: Correzione ad un loop al propagatore del quark.

Feynman:

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{LOOP}}^{(1)}(\not{p}) &= -i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^2} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{l}}{(p+l)^2} \gamma^\sigma \frac{\eta_{\rho\sigma}}{l^2} \\ &= i2(1-\epsilon)\gamma^\nu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^2} \frac{p_\nu + l_\nu}{l^2(p+l)^2} \\ &= i2(1-\epsilon)\gamma^\nu \int dF_2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^2} \frac{p_\nu + l_\nu}{[(l+x_1p)^2 + x_1(1-x_1)p^2]^2} .\end{aligned}\quad (4.81)$$

A questo punto possiamo usare la formula (A.6) per ottenere un risultato; tuttavia, ciò che appare chiaro, è che il risultato è proporzionale a $(p^2)^{-\epsilon}$ e quindi, nel caso di quark massless on shell, tramite il processo di estensione analitica descritto prima, possiamo asserire che

$$\Pi_{\text{LOOP}}^{(1)}(\not{p}) = 0 \quad (4.82)$$

e quindi, tenendo conto che la (4.80) vale ordine per ordine, troviamo che $Z_q^{(1)} = 0$, come preannunciato nella Sezione 4.3.

4.3.3 Contributo di emissione reale

Trattiamo adesso il caso dell'emissione di un gluone reale. Il motivo per cui consideriamo anche questo contributo alla sezione d'urto è che, come abbiamo anticipato all'inizio del Capitolo, vogliamo includere nel nostro calcolo tutti i possibili stati finali adronici, ordine per ordine in teoria delle perturbazioni. All'ordine α_s , occorre includere la produzione di un gluone reale nello stato finale.

I due diagrammi che contribuiscono all'ordine α_s sono riportati in Figura 4.7. Chiamiamo \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B le ampiezze per i due diagrammi, rispettivamente. Allora

$$\mathcal{M}_{01} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B \quad (4.83)$$

e dalle regole di Feynman si ha

$$\mathcal{M}_A = e_q e g_s \epsilon_\mu(q) \epsilon_\rho(k) \bar{v}(p') \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} \gamma^\rho u(p) \quad (4.84a)$$

$$\mathcal{M}_B = e_q e g_s \epsilon_\mu(q) \epsilon_\rho(k) \bar{v}(p') \gamma^\rho \frac{-(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2} \gamma^\mu u(p) . \quad (4.84b)$$

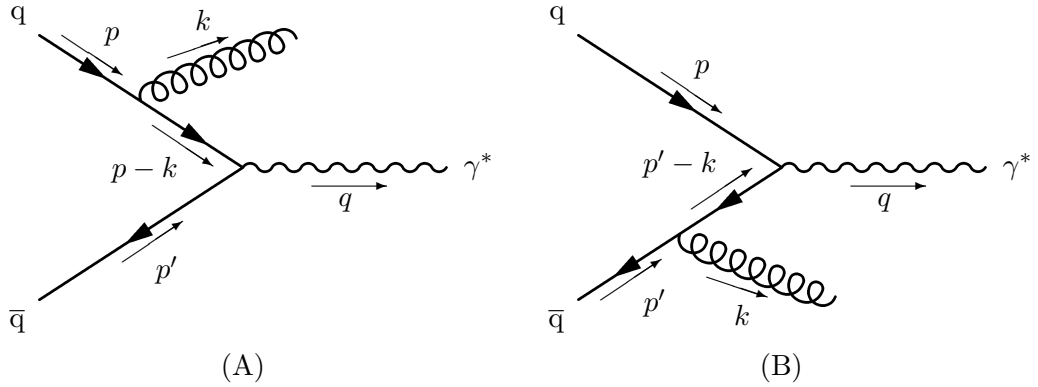


Figura 4.7: Diagrammi di emissione reale.

Prendendo il modulo quadro di \mathcal{M}_{01} si ottiene

$$|\mathcal{M}_{01}|^2 = \mathcal{M}_A \mathcal{M}_A^* + \mathcal{M}_B \mathcal{M}_B^* + 2 \Re(\mathcal{M}_A \mathcal{M}_B^*) ; \quad (4.85)$$

mediando sugli stati iniziali e sommando su quelli finali, otteniamo

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{01}|^2 = e_q^2 e^2 g_s^2 [F_{AA} + F_{BB} + 2 \Re(F_{AB})] , \quad (4.86)$$

dove si sono definite le grandezze

$$F_{ij} = \frac{1}{e_q^2 e^2 g_s^2} \overline{\sum} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^* . \quad (4.87)$$

A quest'ordine perturbativo, in cui la natura non abeliana della QCD non gioca alcun ruolo, la somma sulle polarizzazioni del gluone può essere presa come in QED:

$$\sum_{\text{pol}} \epsilon_\rho(k) \epsilon_\sigma^*(k) = -\eta_{\rho\sigma} , \quad (4.88)$$

e si ha, per calcolo diretto,

$$F_{AA} = -\frac{1}{4} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{(p-k)^4} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma^\rho \not{p} \gamma_\rho (\not{p} - \not{k}) \gamma^\nu] \quad (4.89a)$$

$$F_{BB} = -\frac{1}{4} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{(p'-k)^4} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho (\not{p}' - \not{k}) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\rho] \quad (4.89b)$$

$$F_{AB} = \frac{1}{4} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{(p-k)^2 (p'-k)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\rho] . \quad (4.89c)$$

Calcolare queste tracce è una semplice, ma lunga e noiosa, operazione algebrica. A titolo

di esempio calcoleremo la prima, che (come la seconda) è un po' più semplice dell'ultima:

$$\begin{aligned}
F_{AA} &= \frac{1-\epsilon}{2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{(p-k)^4} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}) \not{p} (\not{p} - \not{k}) \gamma^\nu] \\
&= \frac{1-\epsilon}{2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{(2pk)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \not{p} \not{k} \gamma^\nu] \\
&= \frac{1-\epsilon}{2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{2pk}{(2pk)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu] \\
&= \frac{1-\epsilon}{4pk} \left(2(1-\epsilon) \text{Tr} [\not{p}' \not{k}] + \frac{1}{q^2} \text{Tr} [\not{p}' \not{q} \not{k} \not{q}] \right) \\
&= \frac{1-\epsilon}{4pk} \left(8(1-\epsilon) p'k + \frac{1}{q^2} \text{Tr} [\not{p}' \not{p} \not{k} \not{p}] \right) \\
&= \frac{2(1-\epsilon)}{pk} \left((1-\epsilon) p'k + \frac{1}{q^2} (pp')(pk) \right). \tag{4.90a}
\end{aligned}$$

Nei vari passaggi si è usato: la formula (A.2b), il fatto che i quark e il gluone sono massless, la regola di anticommutazione (A.1) delle matrici di Dirac, la conservazione dell'impulso $p + p' = q + k$ e le formule di traccia (A.3). Per le altre si trova, con passaggi analoghi,

$$F_{BB} = \frac{2(1-\epsilon)}{p'k} \left((1-\epsilon)pk + \frac{1}{q^2} (pp')(p'k) \right) \tag{4.90b}$$

$$F_{AB} = \frac{2(1-\epsilon)}{(pk)(p'k)} \left((pp')^2 - (pp')(pk + p'k) - \epsilon(pk)(p'k) - \frac{(pp')(pk)(p'k)}{q^2} \right). \tag{4.90c}$$

Ricordando la (4.86), il risultato complessivo è perciò

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{01}|^2 = 8\pi K(q^2) (1-\epsilon) e_q^2 e_s^2 \alpha_s \mu^{2\epsilon} \left[(1-\epsilon) \left(\frac{p'k}{pk} + \frac{pk}{p'k} \right) + \frac{2(pp')^2}{(pk)(p'k)} - \frac{2pp'}{pk} - \frac{2pp'}{p'k} - 2\epsilon \right], \tag{4.91}$$

dove si è inserito anche qui il fattore $\mu^{2\epsilon}$ definito in (4.42) e si è ricordato che $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$.

Anche in questo caso, questo risultato non tiene conto dell'algebra del colore, che si manifesta come un fattore numerico che moltiplica la (4.91). Per ottenerlo, ricordando le regole di Feynman, occorre calcolare

$$\frac{1}{9} \sum_{ij} \sum_{ab} t_{ik}^a \delta_j^k t_{ri}^b \delta_r^j = \frac{1}{9} \sum_{ab} \text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{9} T_F \sum_{ab} \delta^{ab} = \frac{1}{9} \frac{8}{2} = \frac{1}{3} C_F \tag{4.92}$$

in cui si è usata la (3.5); quindi si ha infine

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{01}|^2 = \frac{8\pi C_F e_q^2 e_s^2 \alpha_s}{3} K(q^2) (1-\epsilon) \mu^{2\epsilon} \left[(1-\epsilon) \left(\frac{p'k}{pk} + \frac{pk}{p'k} \right) + \frac{2(pp')^2}{(pk)(p'k)} - \frac{2pp'}{pk} - \frac{2pp'}{p'k} - 2\epsilon \right]. \tag{4.93}$$

Cinematica dell'emissione reale

Per prima cosa introduciamo le variabili

$$s = (p + p')^2 = 2pp' \quad (4.94a)$$

$$t = (p' - k)^2 = -2p'k \quad (4.94b)$$

$$u = (p - k)^2 = -2pk \quad (4.94c)$$

per mezzo delle quali possiamo riscrivere la (4.93) come

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{01}|^2 = \frac{8\pi C_F e_q^2 e^2 \alpha_s K(q^2) (1 - \epsilon) \mu^{2\epsilon}}{3tu} \left[(1 - \epsilon) (t + u)^2 - 2tu + 2s(s + t + u) \right]. \quad (4.95)$$

Dalla conservazione dell'impulso

$$p + p' = q + k \quad (4.96)$$

si trova subito la relazione

$$s + t + u = Q^2. \quad (4.97)$$

Introduciamo adesso la variabile \vec{q}_T (impulso trasverso), definita da

$$q = (q^0, \vec{q}_T, q^3). \quad (4.98)$$

Nel c.m.s., possiamo introdurre una coordinata angolare θ , che è l'angolo che \vec{q} forma con l'impulso p ; si trova

$$|\vec{q}_T| = \frac{\sqrt{s}}{2} (1 - x) \sin \theta, \quad x = \frac{Q^2}{s}, \quad (4.99)$$

e anche

$$t = -\frac{s}{2} (1 - x) (1 - \cos \theta), \quad u = -\frac{s}{2} (1 - x) (1 + \cos \theta), \quad (4.100)$$

da cui segue la utile relazione

$$sq_T^2 = tu. \quad (4.101)$$

Usando le (4.97) e (4.101), possiamo riscrivere la (4.95) come

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}_{01}|^2 = \frac{8\pi C_F e_q^2 e^2 \alpha_s K(q^2) (1 - \epsilon) \mu^{2\epsilon}}{3q_T^2} \left[(1 - \epsilon) s (1 - x)^2 + 2(Q^2 - q_T^2) \right]. \quad (4.102)$$

Sezione d'urto

La sezione d'urto per questo processo si ottiene sempre dalla (4.6) con $n = 1$; usando quindi la (A.21), si trova

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2 dy} = \hat{\sigma}_0(Q^2) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{1 - x}{\Gamma(1 - \epsilon) q_T^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left[(1 - \epsilon) (1 - x)^2 + 2x (1 - \hat{q}_T^2) \right] \left[\frac{(1 - x)^2}{x} \right]^{-\epsilon} y^{-\epsilon} (1 - y)^{-\epsilon}, \quad (4.103)$$

dove si è definito

$$\hat{q}_T \equiv \frac{q_T}{Q}. \quad (4.104)$$

In realtà questa scrittura è ibrida, perché q_T e y non sono variabili indipendenti. Come mostrato in Appendice A.3, la variabile y è legata all'angolo θ tra q e p dalla relazione

$$y = \frac{1 + \cos \theta}{2}. \quad (4.105)$$

Per quanto riguarda \hat{q}_T , dalla (4.99) si ha

$$\hat{q}_T^2 = \frac{(1-x)^2}{4x} \sin^2 \theta = \frac{(1-x)^2}{x} y(1-y). \quad (4.106)$$

A questo punto possiamo riscrivere q_T^2 in termini di y nella (4.103) ottenendo

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2 dy} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon) Q^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{(1+x^2) - (1-x)^2 [\epsilon + 2y(1-y)]}{1-x} \left[\frac{(1-x)^2}{x} \right]^{-\epsilon} y^{-1-\epsilon} (1-y)^{-1-\epsilon}, \quad (4.107)$$

in cui si è anche tenuto conto che $\hat{\sigma}_0(s) = x \hat{\sigma}_0(Q^2)$.

Viceversa, per ottenere la distribuzione in q_T , occorre sostituire a y la variabile q_T . Effettuando questo cambio di variabile, si ottiene

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon) Q^4} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{(1-\epsilon)(1-x)^2 + 2x(1-\hat{q}_T^2)}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}} \frac{1}{(\hat{q}_T^2)^{1+\epsilon}}. \quad (4.108)$$

4.3.4 Risultato finale

Per calcolare la sezione d'urto totale, occorre innanzitutto integrare il contributo di emissione reale. È conveniente partire dalla forma (4.107), ed effettuare l'integrazione in y tra 0 e 1. Il risultato è

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon) Q^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left\{ \frac{(1+x^2) - \epsilon(1-x)^2}{2(1-x)^{1+2\epsilon}} x^\epsilon \frac{\Gamma^2(-\epsilon)}{\Gamma(-2\epsilon)} - (1-x)^{1-2\epsilon} x^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \right\}. \quad (4.109)$$

Sviluppando in ϵ e trascurando termini di $\mathcal{O}(\epsilon)$, si trova (per il solo termine dentro le parentesi graffe)

$$\delta(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{6} \right] - \frac{1}{\epsilon} \frac{1+x^2}{[1-x]_+} + (1+x^2) \left(2 \left[\frac{\log(1-x)}{1-x} \right]_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) \quad (4.110)$$

dove si è usato lo sviluppo

$$\frac{1}{(1-x)^{1+2\epsilon}} = -\frac{1}{2\epsilon} \delta(1-x) + \left[\frac{1}{1-x} \right]_+ - 2\epsilon \left[\frac{\log(1-x)}{1-x} \right]_+ + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.111)$$

Sommando ora il termine $-\left[\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{2\epsilon} + 4 - \frac{\pi^2}{2}\right]$, proveniente dalla banale integrazione in q_T^2 del contributo virtuale (4.121), si ottiene

$$-\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ + \delta(1-x) \left(\frac{\pi^2}{3} - 4 \right) + (1+x^2) \left(2 \left[\frac{\log(1-x)}{1-x} \right]_+ - \frac{\log x}{1-x} \right), \quad (4.112)$$

dove si è usato anche

$$\left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ = \frac{1+x^2}{[1-x]_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x). \quad (4.113)$$

Si trova quindi, per la sezione d'urto totale all'ordine α_s , l'espressione finale

$$\boxed{\frac{d\hat{\sigma}_1}{dQ^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^2} \left\{ 4(1+x^2) \left[\frac{\log(1-x)}{1-x} \right]_+ - 2(1+x^2) \frac{\log x}{1-x} + \delta(1-x) \left(\frac{2\pi^2}{3} - 8 \right) - \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \right\}} \quad (4.114)$$

in cui i termini finiti per $\epsilon \rightarrow 0$ sono stati calcolati a $\epsilon = 0$.

Passiamo ora al calcolo della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. L'espressione (4.108) è singolare per $\hat{q}_T \rightarrow 0$; siccome vogliamo confrontare queste singolarità con quelle presenti nel contributo virtuale (4.75b), che sono espresse in termini di poli in ϵ , occorre riscriverla in maniera tale che anche qui le singolarità abbiano la forma di poli in ϵ . La singolarità è presente nel termine $(\hat{q}_T^2)^{-1-\epsilon}$ e anche nella radice, quando $x = 1$ (che è il limite che ci interessa). Per rendere esplicita questa singolarità, si può riscrivere, facendo uso della (B.18),

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}} \right]_+ + A \delta(a-x) \quad (4.115)$$

dove

$$a = x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}, \quad x_0 = 1 + 2\hat{q}_T^2, \quad (4.116)$$

è il massimo valore consentito ad x , e facendo uso della (B.23) si trova

$$A = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2 - 4\hat{q}_T^2 x}} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2}. \quad (4.117)$$

Allora

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon) Q^4} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{(\hat{q}_T^2)^{1+\epsilon}} \left\{ \frac{(1-\epsilon)(1-x)^2 + 2x(1-\hat{q}_T^2)}{\left[\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2} \right]_+} + a \left[(1-\epsilon)2\hat{q}_T^2 + 1 - \hat{q}_T^2 \right] \log \frac{1 + \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \delta(a-x) \right\}. \quad (4.118)$$

Ora, sempre usando (B.18) e (B.23), si può riscrivere

$$\frac{1}{(\hat{q}_T^2)^{1+\epsilon}} = \left[\frac{1}{\hat{q}_T^2} \right]_+ - \frac{1}{\epsilon} \delta(\hat{q}_T^2) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.119a)$$

$$\frac{\log \hat{q}_T^2}{(\hat{q}_T^2)^{1+\epsilon}} = \left[\frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \right]_+ - \frac{1}{\epsilon^2} \delta(\hat{q}_T^2) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.119b)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{real}}}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^4} & \left\{ \frac{1+x^2-2x\hat{q}_T^2}{\left[\sqrt{(1-x)^2-4x\hat{q}_T^2} \right]_+} \frac{2}{[\hat{q}_T^2]_+} \right. \\ & + 2a(1+\hat{q}_T^2) \delta(a-x) \left(\frac{\log(1+\hat{q}_T^2)}{[\hat{q}_T^2]_+} - \left[\frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \right]_+ \right) \\ & + 2(1-x) \delta(\hat{q}_T^2) \\ & \left. + \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left(-\frac{1+x^2}{[1-x]_+} \frac{1}{\epsilon} + \delta(1-x) \frac{1}{\epsilon^2} \right) \delta(\hat{q}_T^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.120)$$

in cui i termini finiti per $\epsilon \rightarrow 0$ sono presi a $\epsilon = 0$. Ricordando il contributo virtuale (4.75b)

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^{\text{virt}}}{dQ^2 dq_T^2} = -\hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^4} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 - \pi^2 \right] \delta(1-x) \delta(\hat{q}_T^2), \quad (4.121)$$

la somma di esso col contributo reale (4.120) dà

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_1}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^4} & \left\{ \frac{1+x^2-2x\hat{q}_T^2}{\left[\sqrt{(1-x)^2-4x\hat{q}_T^2} \right]_+} \frac{2}{[\hat{q}_T^2]_+} \right. \\ & + 2a(1+\hat{q}_T^2) \delta(a-x) \left(\frac{\log(1+\hat{q}_T^2)}{[\hat{q}_T^2]_+} - \left[\frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \right]_+ \right) \\ & + [2(1-x) + (\pi^2 - 8) \delta(1-x)] \delta(\hat{q}_T^2) \\ & \left. - \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left(\frac{1+x^2}{[1-x]_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right) \delta(\hat{q}_T^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

dove il polo doppio si è cancellato, ovvero nella somma le divergenze infrarosse sono sparite (lasciando in realtà traccia della loro presenza nei logaritmi). Ancora è possibile isolare il contributo proporzionale alla $\delta(a-x)$ scrivendo

$$\frac{1+x^2-2x\hat{q}_T^2}{\left[\sqrt{(1-x)^2-4x\hat{q}_T^2} \right]_+} = \left[\frac{1+x^2-2x\hat{q}_T^2}{\sqrt{(1-x)^2-4x\hat{q}_T^2}} \right]_+ + B \delta(a-x), \quad (4.123)$$

in cui B si ottiene ancora una volta come

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^a dx \frac{1 + x^2 - 2x\hat{q}_T^2}{\left[\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}\right]_+} \\
&= \int_0^a dx \frac{x^2 - 2x\hat{q}_T^2 - a^2 + 2a\hat{q}_T^2}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}} \\
&= \frac{(a-1)(a+1)^2(3a+1)}{8a^2} \log \frac{(1-a)^2}{1-a^2} - \frac{a^2 + 4a + 1}{4a} \\
&= -\frac{3}{2} - \hat{q}_T^2 + (1 + \hat{q}_T^2) \left[2\sqrt{\hat{q}_T^2(1 + \hat{q}_T^2)} - \hat{q}_T^2 \right] \log \frac{1 + \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2}. \tag{4.124}
\end{aligned}$$

A questo punto la (4.122) diventa

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}_1}{dQ^2 dq_T^2} &= \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^4} \left\{ \left[\frac{1 + x^2 - 2x\hat{q}_T^2}{\sqrt{(1-x)^2 - 4x\hat{q}_T^2}} \right]_+ \frac{2}{[\hat{q}_T^2]_+} \right. \\
&\quad + 2a(1 + \hat{q}_T^2) \delta(a-x) \left(\frac{\log(1 + \hat{q}_T^2)}{[\hat{q}_T^2]_+} - \left[\frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \right]_+ \right) \\
&\quad + B \delta(a-x) \frac{2}{[\hat{q}_T^2]_+} \\
&\quad + [2(1-x) + (\pi^2 - 8) \delta(1-x)] \delta(\hat{q}_T^2) \\
&\quad \left. - \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \delta(\hat{q}_T^2) \right\}, \tag{4.125}
\end{aligned}$$

dove si è usata di nuovo la (4.113).

Tenendo solo termini singolari in \hat{q}_T^2 e omettendo termini proporzionali a $\delta(\hat{q}_T^2)$, troviamo infine nel limite $\hat{q}_T \rightarrow 0$

$$\frac{d\hat{\sigma}_1}{dQ^2 dq_T^2} = \hat{\sigma}_0(s) \frac{\alpha_s C_F}{2\pi Q^4} \left(\left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \frac{2}{[\hat{q}_T^2]_+} - \delta(1-x) \left[2 \frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} + \frac{3}{\hat{q}_T^2} \right]_+ \right). \tag{4.126}$$

Capitolo 5

Risommazione

Nel Capitolo precedente abbiamo mostrato in un esempio esplicito (la sezione d'urto per il processo di creazione di coppie di Drell-Yan) che il meccanismo di cancellazione delle divergenze infrarosse genera un residuo finito, che all'ordine α_s contiene termini proporzionali a $\frac{\log(1-x)}{(1-x)}$, $\frac{1}{(1-x)}$ nel caso della sezione d'urto totale, e a $\frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2}$, $\frac{1}{\hat{q}_T^2}$ nel caso della distribuzione in impulso trasverso. È facile mostrare che questo meccanismo si riproduce agli ordini successivi. In particolare, il coefficiente del termine di ordine α_s^n nei due sviluppi perturbativi contiene termini del tipo

$$\frac{\log^k(1-x)}{1-x}, \quad \frac{\log^k \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} \quad (5.1)$$

rispettivamente, con k compreso tra 0 e $2n - 1$. Nei limiti $x \rightarrow 1$, $\hat{q}_T^2 \rightarrow 0$, in cui la produzione della coppia di Drell-Yan è accompagnata da radiazione soffice, tali termini diventano dominanti, e per valori di x sufficientemente vicini a 1 (o di \hat{q}_T^2 sufficientemente vicini a 0) tutti i termini dello sviluppo perturbativo sono egualmente importanti: un calcolo ad ordine fisso finito è per forza di cose un'approssimazione inaffidabile. In questa regione cinematica diventa necessario sviluppare tecniche che consentano di *risommare* l'intera serie perturbativa.

Come spiegato nel Capitolo 3, una generica osservabile fisica $F(x)$ si ottiene mediante convoluzione della corrispondente quantità partonica con le funzioni di distribuzione partonica:

$$F(x) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} f_i(z) \hat{F}_i\left(\frac{x}{z}\right). \quad (5.2)$$

È chiaro da questa espressione che, quando x è vicino a 1, anche l'argomento $\frac{x}{z}$ della sezione d'urto partonica sarà vicino a 1, e sarà necessario risommare la serie perturbativa a tutti gli ordini. Tuttavia, è importante notare che la risommazione è in alcuni casi necessaria anche quando la variabile fisica x è lontana dal valore di soglia $x = 1$. Questo accade quando la funzione di distribuzione partonica $f_i(z)$ è sensibilmente diversa da zero solo per valori piccoli di z . In questo caso, il contributo dominante all'integrale in (5.2) proviene dalla regione $z \sim x$, dove l'argomento della sezione d'urto partonica, $\frac{x}{z}$, è prossimo a 1. Anche in questo caso è necessario risommare i contributi dei grandi logaritmi presenti nei coefficienti dello sviluppo perturbativo delle \hat{F}_i . Un esempio particolarmente importante di

questa situazione è la produzione di bosoni di Higgs in collisioni adroniche; alle energie di LHC questo processo ha luogo soprattutto mediante il sottoprocesso partonico di fusione gluone-gluone, e la funzione di distribuzione partonica dei gluoni è concentrata a piccoli valori della frazione di impulso z .

In questo Capitolo vedremo come giungere a delle formule risommate senza che sia necessario calcolare gli infiniti diagrammi di Feynman che contribuiscono agli infiniti termini dello sviluppo perturbativo.

5.1 La sezione d'urto totale

Cominciamo con un argomento molto semplificato [14], che ha però il vantaggio di mostrare in modo semplice l'idea fondamentale che conduce a ricavare espressioni risommate per le quantità fisiche di interesse. Consideriamo un processo fisico generico, in cui un sistema di massa invariante Q^2 viene prodotto in collisioni tra partoni con energia nel centro di massa \sqrt{s} . All'ordine minimo in teoria delle perturbazioni, la sezione d'urto partonica sarà proporzionale a $\delta(1-z)$, con $z = \frac{Q^2}{s}$. All'ordine α_s , come si è visto nel Capitolo 4, si hanno correzioni di due tipi: quelle dovute allo scambio di un gluone virtuale, e quelle originate dalla produzione di un gluone reale. A quest'ordine, la QCD non differisce dall'elettrodinamica quantistica, in quanto i vertici non abeliani a tre e quattro gluoni non giocano alcun ruolo. Le corrispondenti probabilità di emissione sono date da

$$\frac{dw_v(z)}{dz} = -a \delta(1-z) \int_0^{1-\eta} \frac{dz'}{1-z'} \log(1-z') \quad (5.3a)$$

$$\frac{dw_r(z)}{dz} = a \frac{1}{1-z} \log(1-z) \theta(1-z-\eta), \quad (5.3b)$$

in cui a è una costante proporzionale alla costante di accoppiamento α_s con un fattore di proporzionalità che dipende dal processo. Abbiamo introdotto un cut-off η per regolarizzare le divergenze infrarosse presenti nei due contributi. Si riconosce, nella struttura del contributo di emissione reale, il doppio logaritmo originato dallo spettro di bremsstrahlung che presenta una singolarità soffice $\frac{d\omega}{\omega}$, dove ω è l'energia della particella emessa, e una singolarità collineare $\frac{d\theta^2}{\theta^2}$, essendo θ l'angolo di emissione. Si osservi (come si era già osservato al Capitolo 4) che il contributo virtuale diverge ma è concentrato a $z = 1$; ha cioè la stessa cinematica del contributo di ordine 0. Il contributo di emissione reale è invece distribuito in $z \in [0, 1]$. La somma dei due contributi ha un limite finito per $\eta \rightarrow 0$:

$$\frac{dw^{(1)}(z)}{dz} = a \left[\frac{1}{1-z} \log(1-z) \right]_+ . \quad (5.4)$$

Questo termine ha la struttura di un doppio logaritmo associato a una potenza singola della costante di accoppiamento, come si può vedere integrando in dz a partire dal limite inferiore $x = \frac{Q^2}{S}$, essendo S il quadrato dell'energia nel centro di massa degli adroni di stato iniziale. Si ottiene

$$\int_x^1 dz \frac{dw^{(1)}(z)}{dz} = \frac{a}{2} \log^2(1-x). \quad (5.5)$$

Questo termine è il residuo finito del meccanismo di cancellazione delle divergenze infrarosse. La struttura del termine di ordine n conterrà termini del tipo

$$\alpha_s^n \log^m(1-x), \quad m \leq 2n. \quad (5.6)$$

Nel limite di emissione soffice, tale termine fattorizza:

$$\frac{dw^{(n)}(z_1, \dots, z_n)}{dz_1 \cdots dz_n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{dw^{(1)}(z_i)}{dz_i}. \quad (5.7)$$

Questo risultato si dimostra in maniera relativamente semplice in QED (si veda ad esempio [3]); la dimostrazione è basata essenzialmente sull'approssimazione iconale per l'emissione soffice. Nel caso della QCD la dimostrazione è più complicata, a causa della presenza dei vertici a tre e quattro gluoni.

La sezione d'urto adronica nell'ambito del modello a partoni ha l'espressione seguente:

$$\sigma(Q^2) = C\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) \otimes f(\mu), \quad (5.8)$$

dove μ è la scala di fattorizzazione, $f(\mu)$ è una pdf o una convoluzione di pdf a seconda del processo¹, si sottintende una somma sui partoni, e

$$C\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = z \hat{\sigma}\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) \quad (5.9)$$

è detta coefficient function, ed è calcolabile perturbativamente. La risommazione avviene a livello della coefficient function; essa si può scrivere come

$$C\left(z, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = \sigma_0(Q^2) \left[\delta(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \int dz_1 \cdots dz_n \frac{dw^{(n)}(z_1, \dots, z_n)}{dz_1 \cdots dz_n} \delta(z - z_1 \cdots z_n) \right], \quad (5.10)$$

dove $\sigma_0(Q^2)$ è la sezione d'urto all'ordine zero in teoria delle perturbazioni. Il contributo di emissione multipla avrebbe una forma completamente fattorizzata, se non fosse per la presenza della funzione $\delta(z - z_1 \cdots z_n)$ di conservazione dell'energia. Una forma completamente fattorizzata può essere ottenuta introducendo la *trasformata di Mellin* di una funzione $g(x)$ come la funzione $g(N)^2$ definita da

$$g(N) = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^N g(x). \quad (5.11)$$

Essa è di fatto una trasformata di Laplace, in cui è stato effettuato il cambio di variabile $x = e^{-t}$; in analogia con la trasformata di Laplace, se $g(x)$ è singolare in $x = 0$ al più

¹In questo caso (Drell-Yan) è la convoluzione delle due pdf per i due adroni di stato iniziale.

²Usiamo lo stesso simbolo per una funzione e la sua trasformata di Mellin, evidenziando sempre nel secondo caso la dipendenza esplicita dalla variabile N .

come $1/x^{c_0}$, la trasformata di Mellin esiste ed è analitica in tutto il semipiano complesso $\Re(N) > c_0$, ed è possibile costruire la trasformata inversa,

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} g(N)}, \quad (5.12)$$

per qualunque valore $c > c_0$. Si trova che, sotto trasformazione di Mellin, la $\delta(z - z_1 \cdots z_n)$ fattorizza:

$$\int_0^1 \frac{dz}{z} z^N \delta(z - z_1 \cdots z_n) = z_1^{N-1} \cdots z_n^{N-1}. \quad (5.13)$$

Inoltre, osserviamo che in trasformata di Mellin il prodotto di convoluzione si trasforma in un prodotto ordinario: infatti, se $h = f \otimes g$, si ha

$$\begin{aligned} h(N) &= \int_0^1 \frac{dx}{x} x^N \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y) g\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^1 \frac{dy}{y} f(y) \int_0^y \frac{dx}{x} x^N g\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y} f(y) \int_0^1 \frac{dx'}{x'} (x'y)^N g(x') = f(N) g(N). \end{aligned} \quad (5.14)$$

La (5.8) si riscrive quindi in termini di trasformate di Mellin come

$$\begin{aligned} \sigma(N, Q^2) &= C\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) f(N, \mu) \\ &= C(N, 1, \alpha_s(Q^2)) f(N, Q), \end{aligned} \quad (5.15)$$

in cui all'ultimo passaggio si è scelto $\mu^2 = Q^2$. A questo punto la coefficient function è completamente fattorizzata, ed è possibile calcolare la somma della serie. Si ottiene

$$C\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = \sigma_0(Q^2) \exp\left[\int_0^1 \frac{dz}{z} z^N \frac{dw^{(1)}(z)}{dz}\right]. \quad (5.16)$$

Questo è il risultato finale, la cui struttura è molto importante: dal momento che la probabilità di emissione di n gluoni si fattorizza nel prodotto di quella di un solo gluone, questo risultato dipende *solo* dall'emissione di un singolo gluone, ed è quindi semplice da ottenere. Usando la (5.4), si ottiene per l'esponentiale in (5.16) l'espressione

$$\exp\left[a \int_0^1 dz \frac{z^{N-1} - 1}{1-z} \log(1-z)\right] = \exp\left[\frac{a}{2} (\log^2 N + \mathcal{O}(\log N))\right] \quad (5.17)$$

(questo risultato si ottiene invertendo la (6.12) che ricaveremo nel Capitolo 6).

La differenza principale che si incontra passando al caso della QCD è che occorre tenere conto del running della costante di accoppiamento; si può mostrare che il calcolo della probabilità di emissione singola deve essere effettuato prendendo α_s ad una scala dell'ordine dell'impulso trasverso del gluone emesso. In altre parole, il fattore

$$\alpha_s \int \frac{dk_T^2}{k_T^2} \quad (5.18)$$

va sostituito con

$$\int \frac{dk_T^2}{k_T^2} \alpha_s(k_T^2). \quad (5.19)$$

Usando la soluzione dell'equazione di gruppo di rinormalizzazione per α_s si può esprimere $\alpha_s(k_T^2)$ in termini di $\alpha_s(Q^2)$, e calcolare l'integrale. Il risultato ha la forma

$$\exp \left[\frac{1}{\alpha_s} g_1(\alpha_s \log N) + O(\alpha_s \log N) \right] . \quad (5.20)$$

Questa è la sezione d'urto risommata nella cosiddetta approssimazione di logaritmo leading, o leading log (LL nel seguito). Le approssimazioni successive si ottengono calcolando la probabilità di emissione singola con accuratezza via via crescente; in generale il risultato ha la forma

$$\exp \left[\frac{1}{\alpha_s} g_1(\alpha_s \log N) + g_2(\alpha_s \log N) + \alpha_s g_3(\alpha_s \log N) + \dots \right] , \quad (5.21)$$

dove l'accuratezza NLL si ottiene includendo il termine g_2 oltre a g_1 , quella NNLL includendo anche il termine g_3 , e così via.

Dunque in generale è possibile calcolare i contributi dominanti ai coefficienti perturbativi a tutti gli ordini, a partire da un calcolo ad ordine finito. Formule risommate a diversi livelli di accuratezza logaritmica sono presenti in letteratura per diversi processi. Nel caso della sezione d'urto totale, formule risommate al NLL sono state ottenute indipendentemente usando l'approssimazione eiconale [17] o tecniche di fattorizzazione [18], e poi estese a tutti gli ordini in [20, 15]. Per il caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso, di cui parleremo nella prossima Sezione, dopo una formulazione originale [26], rivista e corretta in [27, 28], è stata data una formula risommata a tutti gli ordini in [29].

5.1.1 Risommazione soffice e gruppo di rinormalizzazione

Una rassegna delle dimostrazioni delle formule risommate nei diversi approcci va oltre lo scopo di questa tesi. A titolo di esempio, in questa Sezione ripercorreremo l'argomento presentato in [15] per il calcolo della sezione d'urto risommata nel limite di emissione soffice, nel caso del deep-inelastic scattering. Tale approccio è basato esclusivamente su argomenti di tipo cinematico e sull'idea del gruppo di rinormalizzazione, ed è pertanto relativamente semplice da esporre.

Sia $\sigma(x, Q^2)$ la quantità da risommare nel limite $x \rightarrow 1$, e $\sigma(N, Q^2)$ la sua trasformata di Mellin rispetto a x . Poiché la risommazione ha la forma di un'esponenziazione, risulta utile introdurre la cosiddetta dimensione anomala fisica, definita nel modo seguente:

$$\gamma(N, \alpha_s(Q^2)) \equiv \frac{\partial}{\partial \log Q^2} \log \sigma(N, Q^2) ; \quad (5.22)$$

per confronto con la (5.15) si vede che

$$\gamma(N, \alpha_s(Q^2)) = \frac{\partial}{\partial \log Q^2} \log C \left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) , \quad (5.23)$$

che la lega alla coefficient function. Una volta ottenuta una espressione risommata per γ , la sezione d'urto si trova semplicemente integrando la (5.22):

$$\sigma(N, Q^2) = \exp [E(N, Q^2, Q_0^2)] \sigma(N, Q_0^2) , \quad (5.24a)$$

$$E(N, Q^2, Q_0^2) = \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \gamma(N, \alpha_s(k^2)) . \quad (5.24b)$$

Il punto di partenza consiste nell'assumere la validità del teorema di fattorizzazione, secondo il quale le singolarità nella coefficient function regolarizzata dimensionalmente (la cosiddetta *bare coefficient function*) sono interamente contenute in un fattore indipendente dal processo:

$$C\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = Z_C(N, \alpha_s(\mu^2), \epsilon) C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon), \quad (5.25)$$

in cui Z_C assorbe gli infiniti di $C^{(0)}$ rendendo C finita nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. Il fattore divergente Z_C può sempre essere preso indipendente da Q^2 , con una opportuna scelta dello schema di fattorizzazione (per esempio, lo schema $\overline{\text{MS}}$, largamente utilizzato in questo contesto, gode di questa proprietà). Ricordando la (5.23), si trova che la dimensione anomala fisica può essere calcolata in termini della coefficient function regolarizzata³:

$$\begin{aligned} \gamma(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \log Q^2} \log C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon) \\ &= -\epsilon \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \log C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon), \end{aligned} \quad (5.26)$$

in cui si è tenuto conto che, per ragioni dimensionali, $C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon)$ può dipendere da Q^2 solo tramite la combinazione $\alpha_0 Q^{-2\epsilon}$.

Il passo successivo consiste nel dimostrare che nel limite $N \rightarrow \infty$ (cioè trascurando i contributi che si annullano nel limite $N \rightarrow \infty$) $C^{(0)}$ ha la seguente struttura:

$$C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n C_n^{(0)}(N, Q^2, \epsilon), \quad (5.27a)$$

$$C_n^{(0)}(N, Q^2, \epsilon) = \sum_{m=0}^n C_{nm}^{(0)}(\epsilon) (Q^2)^{-(n-m)\epsilon} \left(\frac{Q^2}{N^a}\right)^{-m\epsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (5.27b)$$

dove $a = 1, 2$ rispettivamente per processi del tipo DIS (in cui la scala dura Q è data dalla virtualità di un bosone) e per processi tipo Drell-Yan o produzione di Higgs (in cui la scala dura Q è data dalla massa invariante dello stato finale), e α_0 è la costante di accoppiamento bare definita nella Sottosezione 2.2, cioè

$$\alpha_0(\mu^2, \alpha_s(\mu^2), \epsilon) = \alpha_s(\mu^2) e^{G(\alpha_s(\mu^2), \epsilon)} \mu^{2\epsilon}. \quad (5.28)$$

La (5.27) si dimostra separatamente per le due categorie di processi, e segue da considerazioni sulla cinematica dell'emissione multipla di gluoni reali al tree-level, seguita dall'osservazione che le correzioni virtuali non ne cambiano la forma. Inoltre si può vedere che i coefficienti $C_{nm}^{(0)}(\epsilon)$ hanno la forma di uno sviluppo in serie di Laurent in ϵ , in cui il termine più singolare è un polo di ordine $2n$ in ϵ . Ciò è dovuto alla presenza di divergenze infrarosse e collineari; quelle infrarosse si cancellano, mentre quelle collineari si raccolgono nel fattore Z_C definito in (5.25). La presenza di questi poli in ϵ dà origine, tramite l'interferenza con le potenze di ϵ nello sviluppo dei fattori $N^{-\epsilon}$, alle potenze di $\log N$ presenti nella sezione

³Sebbene si sia scritta γ come funzione di Q^2 e di α_0 , essa è la stessa di prima, ed esprimendo $\alpha_0 = \alpha_0(\mu^2, \alpha_s(\mu^2), \epsilon)$ nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene esattamente la γ di partenza.

d'urto (legate tramite trasformazione di Mellin alle potenze di $\log(1-x)$, come spiegato nella Sottosezione 6.1.1). In questo senso, la presenza di questi logaritmi, detti soffici, può essere vista come il residuo finito della cancellazione delle divergenze tra contributi reale e virtuali. La dimostrazione dei fatti appena citati è presente in [15] e non verrà qui ripetuta.

Unendo (5.27) e (5.26), si ottiene per γ un'espansione analoga a quella per $C^{(0)}$, cioè

$$\gamma(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{nm}(\epsilon) [Q^{-2\epsilon} \alpha_0]^{n-m} \left[\left(\frac{Q^2}{N^a} \right)^{-\epsilon} \alpha_0 \right]^m + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5.29)$$

Introduciamo la funzione

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) &\equiv Q^{-2\epsilon} \alpha_0(\mu^2, \alpha_s(\mu^2), \epsilon) \\ &= \left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \alpha_s(\mu^2) e^{G(\alpha_s(\mu^2), \epsilon)}; \end{aligned} \quad (5.30)$$

essa è ovviamente invariante sotto l'azione del gruppo di rinormalizzazione, vale a dire

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \bar{\alpha}_0\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = 0, \quad (5.31)$$

e perciò può essere calcolata per un qualsiasi valore di μ^2 . In particolare, per $\mu^2 = Q^2$ si ha

$$\bar{\alpha}_0\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = \bar{\alpha}_0(1, \alpha_s(Q^2), \epsilon) = \alpha_s(Q^2) e^{G(\alpha_s(Q^2), \epsilon)}. \quad (5.32)$$

La funzione γ , riscritta in termini dei parametri rinormalizzati, diventa

$$\begin{aligned} \gamma\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{nm}(\epsilon) [\bar{\alpha}_0(1, \alpha_s(Q^2), \epsilon)]^{n-m} \left[\bar{\alpha}_0\left(1, \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) \right]^m + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{nm}^R(\epsilon) \alpha_s^{n-m}(Q^2) \alpha_s^m\left(\frac{Q^2}{N^a}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove al secondo passaggio si è riscritto lo sviluppo in termini della costante di accoppiamento rinormalizzata α_s , e si è usato il fatto che la costante di rinormalizzazione di α_s , $\exp G$, è anch'essa sviluppabile in potenze di α_s .

La funzione γ ha certamente un limite finito per $\epsilon \rightarrow 0$, ma non è a priori detto che i coefficienti $\gamma_{nm}^R(\epsilon)$ siano individualmente finiti nello stesso limite. Per ottenere una formula scritta in termini di sole quantità finite nel limite quadridimensionale procediamo come segue. Separiamo in γ la parte che non dipende da N ($m = 0$ nella somma) da quella che vi dipende ($m > 0$):

$$\gamma\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = \hat{\gamma}^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) + \hat{\gamma}^{(c)}(\alpha_s(Q^2), \epsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (5.34)$$

dove si sono definite

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \gamma_{nm}^R(\epsilon) \alpha_s^{n-m}(Q^2) \alpha_s^m\left(\frac{Q^2}{N^a}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{(n+m)m}^R(\epsilon) \alpha_s^n(Q^2) \alpha_s^m\left(\frac{Q^2}{N^a}\right),\end{aligned}\quad (5.35a)$$

$$\hat{\gamma}^{(c)}(\alpha_s(Q^2), \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n0}^R(\epsilon) \alpha_s^n(Q^2). \quad (5.35b)$$

Non è detto che $\hat{\gamma}^{(l)}$ e $\hat{\gamma}^{(c)}$ siano separatamente finite per $\epsilon \rightarrow 0$, ma poiché lo è la loro somma possiamo aggiungere ad uno e sottrarre all'altro un opportuno contrattermine che li renda finiti:

$$\gamma^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) = \hat{\gamma}^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) - Z_\gamma(\alpha_s(Q^2), \epsilon), \quad (5.36a)$$

$$\gamma^{(c)}(\alpha_s(Q^2), \epsilon) = \hat{\gamma}^{(c)}(\alpha_s(Q^2), \epsilon) + Z_\gamma(\alpha_s(Q^2), \epsilon). \quad (5.36b)$$

Una scelta conveniente è

$$Z_\gamma(\alpha_s(Q^2), \epsilon) = \gamma^{(l)}(\alpha_s(Q^2), \alpha_s(Q^2), \epsilon). \quad (5.37)$$

In questo modo, $\gamma^{(l)}$ si annulla (quindi è finito) per $N = 1$, ma visto che il contrattermine è indipendente da N ciò garantisce che $\gamma^{(l)}$ è finito per ogni N . In questo modo, tutti i logaritmi di N sono contenuti in $\gamma^{(l)}$, che si annulla quando $\log N = 0$ ($N = 1$). Nel limite che stiamo considerando, siamo perciò autorizzati a trascurare $\gamma^{(c)}$. Pertanto

$$\gamma\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = \gamma^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) + \mathcal{O}(N^0), \quad (5.38)$$

e il limite $\epsilon \rightarrow 0$ può essere preso senza problemi. Si osservi che la scelta (5.37) del contrattermine permette di scrivere

$$\gamma^{(l)}\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right), \epsilon\right) = \int_1^{N^a} \frac{dn}{n} g\left(\alpha_s(Q^2), \alpha_s\left(\frac{Q^2}{n}\right), \epsilon\right), \quad (5.39)$$

dove si è definita la funzione

$$\begin{aligned}g(\alpha_s(Q^2), \alpha_s(\mu^2), \epsilon) &\equiv -\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} \hat{\gamma}^{(l)}(\alpha_s(Q^2), \alpha_s(\mu^2), \epsilon) \\ &= -\beta^{(d)}(\alpha_s(\mu^2), \epsilon) \frac{\partial}{\partial \alpha_s(\mu^2)} \hat{\gamma}^{(l)}(\alpha_s(Q^2), \alpha_s(\mu^2), \epsilon),\end{aligned}\quad (5.40)$$

in cui $\beta^{(d)}(\alpha_s, \epsilon) = -\epsilon \alpha_s + \beta(\alpha_s)$ è la beta function d -dimensionale, come definita nella Sottosezione 2.2. Ricordando la (5.35a), si ottiene per g lo sviluppo

$$g(\alpha_s(Q^2), \alpha_s(\mu^2), \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm}(\epsilon) \alpha_s^n(Q^2) \alpha_s^m(\mu^2). \quad (5.41)$$

Questo è il risultato cercato. In conclusione, si può dire che la dimensione anomala fisica risommata si scrive

$$\boxed{\gamma^{\text{res}}(N, \alpha_s(k^2)) = \int_1^{N^a} \frac{dn}{n} g\left(\alpha_s(k^2), \alpha_s\left(\frac{k^2}{n}\right), \epsilon\right) + \mathcal{O}(N^0)} \quad (5.42a)$$

$$\boxed{g\left(\alpha_s(k^2), \alpha_s\left(\frac{k^2}{n}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm} \alpha_s^n(k^2) \alpha_s^m\left(\frac{k^2}{n}\right)} . \quad (5.42b)$$

I coefficienti g_{nm} si possono ottenere confrontando il risultato risommato con il calcolo ad ordine fisso. È facile vedere che l'approssimazione $N^{k-1}\text{LL}$ richiede la conoscenza di tutti i $\frac{k(k+1)}{2}$ coefficienti g_{nm} con $n+m \leq k$; in [16] è mostrato che questi coefficienti non sono tutti indipendenti, e per trovarli è sufficiente confrontare con un risultato ottenuto dal calcolo al $N^{2k-1}\text{LO}$.

Questo risultato coincide con la risommazione al NLL trovata in [17, 18, 19] a condizione che $g_{11} = 0$, cosa che si può facilmente verificare dal calcolo della sezione d'urto all'ordine α_s . La formula risommata ottenuta in [20] è analoga alla (5.42), ma più potente in quanto solo i termini con $n = 0$ sono presenti. Questo è dovuto al fatto che viene ipotizzata la validità di una struttura fattorizzata più forte di quella assunta in [15]; si suppone cioè che si possa scrivere

$$C\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = C^{(l)}\left(\frac{Q^2}{\mu^2 N^a}, \alpha_s(\mu^2)\right) C^{(c)}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right), \quad (5.43)$$

che a livello della bare coefficient function diventa

$$C^{(0)}(N, Q^2, \alpha_0, \epsilon) = C^{(0,l)}\left(\frac{Q^2}{N^a}, \alpha_0, \epsilon\right) C^{(0,c)}(Q^2, \alpha_0, \epsilon). \quad (5.44)$$

Dalla (5.26), si vede immediatamente che γ si spezza in

$$\gamma\left(N, \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = \gamma^{(l)}\left(\frac{Q^2}{\mu^2 N^a}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) + \gamma^{(c)}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right), \quad (5.45)$$

cioè $\gamma^{(l)}$ dipende solo da $\alpha_s\left(\frac{Q^2}{N^a}\right)$. Ripercorrendo la dimostrazione illustrata in questa Sottosezione, si trova in questo caso che $g = g(\alpha_s(\mu^2), \epsilon)$, cioè solo il termine $n = 0$ contribuisce, come in [20]. In questo caso quindi, al fine di ottenere l'approssimazione $N^{k-1}\text{LL}$, è sufficiente conoscere k coefficienti, per cui è sufficiente eseguire un calcolo ad ordine fisso fino al $N^k\text{LO}$. In [21] questa fattorizzazione è stata verificata per un certo numero di processi per diversi ordini perturbativi. Più recentemente, in [22] la validità della assunzione 5.43 è stata verificata fino all'ordine NNLL. Questo suggerisce la sua validità anche agli ordini successivi, sebbene una dimostrazione inattaccabile di questo fatto manchi ancora in letteratura.

Il problema del polo di Landau

È evidente che il risultato risommato (5.42a) non è ben definito per tutti i valori di N : per N sufficientemente grande, la costante di accoppiamento α_s è calcolata per valori di $\frac{k^2}{n}$ che

raggiungono il polo di Landau. Detto N_L il valore corrispondente al polo, per $N > N_L$ $\gamma^{\text{res}}(N, \alpha_s(k^2))$ non è definita, e di conseguenza $\sigma(N, Q^2)$, come funzione della variabile complessa N , ha un taglio lungo l'asse reale per $N > N_L$.

Questo contrasta con la tacita assunzione che $\sigma(N, Q^2)$ sia la trasformata di Mellin di una funzione $\sigma(x, Q^2)$ rispetto alla variabile x : infatti le trasformate di Mellin (come le trasformate di Laplace) hanno una ascissa di convergenza, cioè sono funzioni analitiche in tutto un semipiano $\Re(N) > c$, dove c è una costante reale opportuna. In altre parole, la sezione d'urto nella variabile fisica x , $\sigma(x, Q^2)$, dovrebbe essere calcolata mediante l'integrale di inversione della trasformata di Mellin (5.12)

$$\sigma(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \sigma(N, Q^2) \quad (5.46)$$

in cui $c \in \mathbb{R}$ è l'ascissa di convergenza di $\sigma(N, Q^2)$; Visto che, a causa del taglio, un tale valore non esiste, ne segue che $\sigma(N, Q^2)$ non può essere la trasformata di Mellin di alcunché, e perciò occorre una prescrizione per calcolare $\sigma(x, Q^2)$.

Questo problema è stato affrontato in letteratura in modi diversi; nelle applicazioni più recenti la tecnica più comunemente utilizzata è la cosiddetta *minimal prescription*, introdotta per la prima volta in [23].

5.2 La sezione d'urto differenziale in impulso trasverso

Come accennato nei capitoli precedenti, il limite di emissione soffice è rilevante nello studio delle distribuzioni in impulso trasverso q_T nella regione $q_T \ll Q$. Anche in questo caso, potenze di $\log \frac{q_T}{Q}$ appaiono nei coefficienti perturbativi, e rendono necessario ricorrere a versioni risommate dello sviluppo stesso. Nel caso del processo di Drell-Yan, questo argomento è stato diffusamente studiato in letteratura.

Dokshitzer, D'yakonov e Troyan [26] hanno identificato i grafici di Feynman che danno luogo ai logaritmi leading, cioè quelli che corrispondono alla potenza $2n - 1$ all'ordine α_s^n , e hanno mostrato come risommarli. Il risultato fu poi riveduto e corretto indipendentemente in [27] e in [28]. L'importanza di questi lavori va però oltre l'aver corretto il risultato originario di ref. [26]: infatti, in questi ultimi lavori viene per la prima volta riconosciuta la necessità di formulare la risommazione in termini del parametro di impatto \vec{b} , che è la variabile coniugata a \vec{q}_T tramite trasformata di Fourier. Questo porta alla possibilità di implementare la conservazione dell'impulso nel piano trasverso alla direzione dei fasci incidenti per l'emissione di n gluoni in una forma completamente fattorizzata. Infatti lo spazio delle fasi contiene una $\delta^{(2)}(\vec{q}_T - \vec{k}_{T1} - \dots - \vec{k}_{Tn})$, che sotto l'effetto della trasformata di Fourier diventa

$$\int d^2 q_T e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \delta^{(2)}(\vec{q}_T - \vec{k}_{T1} - \dots - \vec{k}_{Tn}) = \prod_{j=1}^n e^{i\vec{k}_{Tj} \vec{b}}, \quad (5.47)$$

dove \vec{k}_{Tj} sono gli impulsi trasversi degli n gluoni. In questo contesto la trasformata di Fourier svolge il ruolo che nel caso della sezione d'urto totale è svolto dalla trasformata di Mellin.

La forma normalmente utilizzata per la risommissione in impulso trasverso per il processo di Drell-Yan è contenuta in [29]; la riproponiamo qui con le notazioni di [30, 31] (per il caso di un fotone virtuale):

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dq_T^2} = \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{4\pi Q^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \delta(z_1 z_2 - x) \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \left[f_q^{(1)}\left(z_1, \frac{b_0^2}{b^2}\right) f_{\bar{q}}^{(2)}\left(z_2, \frac{b_0^2}{b^2}\right) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right] \exp \mathcal{S}\left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2}\right), \quad (5.48)$$

dove

- $x = \frac{Q^2}{S}$, e $S = (P_1 + P_2)^2$ è il quadrato dell'energia nel centro di massa degli adroni incidenti;
- la sommatoria si estende a tutte le specie di quark;
- $\hat{\sigma}_0(Q^2) = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{9Q^2}$ è la sezione d'urto al tree level per il processo $q + \bar{q} \rightarrow \ell + \bar{\ell}$ a meno delle cariche dei quark, contenute in e_q^2 nella sommatoria;
- 1 e 2 si riferiscono agli adroni che iniziano il processo;
- $f_i^{(j)}(z, \mu^2)$ è la funzione di densità partonica per il partone i nell'adrone j calcolata alla scala di fattorizzazione μ ;
- $\mathcal{S}\left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2}\right)$ è detto esponente di Sudakov ed ha la forma

$$\mathcal{S}\left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2}\right) = - \int_{\frac{b_0^2}{b^2}}^{Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} A(\alpha_s(\mu^2)) + B(\alpha_s(\mu^2)) \right], \quad (5.49)$$

in cui

$$A(\alpha_s) = A_1 \alpha_s + A_2 \alpha_s^2 + \dots \quad (5.50a)$$

$$B(\alpha_s) = B_1 \alpha_s + B_2 \alpha_s^2 + \dots \quad (5.50b)$$

sono serie di potenze nella costante di accoppiamento, i cui coefficienti si ottengono dal confronto con i calcoli ad ordine fisso;

- b_0 è una costante, legata all'arbitrarietà della scelta della scala di fattorizzazione, che deve essere scelta dell'ordine di 1;
- il risultato (5.49) è valido a meno di termini che non divergono nel limite $q_T \rightarrow 0$.

È evidente che, anche in questo caso, il calcolo dell'inversione della trasformata di Fourier è reso impossibile dalla presenza del polo di Landau. Infatti, per valori di b sufficientemente grandi, l'integrale (5.49) si estenderà fino al valore di μ corrispondente al polo di Landau. Detto b_L il valore limite, \mathcal{S} avrà un taglio nell'asse reale per $b > b_L$, rendendo impossibile l'integrale di inversione di Fourier (5.48) e quindi richiedendo l'utilizzo di una prescrizione per calcolare la sezione d'urto.

L'espressione (5.48) si semplifica notevolmente passando ai momenti di Mellin rispetto a x :

$$\tilde{\sigma}(N) = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^N \frac{Q^2}{\hat{\sigma}_0(Q^2)} \frac{d\sigma}{dQ^2 dq_T^2} \quad (5.51)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} C \left(N, \frac{b_0^2}{b^2} \right) \exp \mathcal{S} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right), \quad (5.52)$$

dove si è definito

$$C(N, \mu^2) = \sum_{\mathbf{q}} e_{\mathbf{q}}^2 \left[f_{\mathbf{q}}^{(1)}(N, \mu^2) f_{\bar{\mathbf{q}}}^{(2)}(N, \mu^2) + (\mathbf{q} \leftrightarrow \bar{\mathbf{q}}) \right]. \quad (5.53)$$

Come abbiamo mostrato nella Sottosezione 3.4.2, le pdf soddisfano l'equazione di evoluzione di Altarelli-Parisi, che sotto trasformazione di Mellin assumono la forma⁴

$$\frac{d}{d \log \mu^2} \log f_i^{(j)}(N, \mu^2) = \gamma^{\text{AP}}(N, \alpha_s(\mu^2)), \quad (5.54)$$

dove $\gamma^{\text{AP}}(N, \alpha_s(\mu^2))$ è detta dimensione anomala standard; essa non è altro che la trasformata di Mellin della splitting function, e in quanto tale ha uno sviluppo in serie di potenze di α_s analogo ad A e B :

$$\gamma^{\text{AP}}(N, \alpha_s) = \gamma_1(N) \alpha_s + \gamma_2(N) \alpha_s^2 + \dots \quad (5.55)$$

Dalla soluzione di (5.54) si può valutare

$$C \left(N, \frac{b_0^2}{b^2} \right) = C(N, Q^2) \exp \mathcal{G} \left(N, Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right), \quad (5.56)$$

avendo definito

$$\mathcal{G} \left(N, Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) = -2 \int_{\frac{b_0^2}{b^2}}^{Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \gamma^{\text{AP}}(N, \alpha_s(\mu^2)), \quad (5.57)$$

e quindi

$$\tilde{\sigma}(N) = \frac{1}{2Q^2} C(N, Q^2) F(N, Q^2, q_T^2) \quad (5.58)$$

con

$$F(N, Q^2, q_T^2) = \frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \exp \mathcal{S} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) \exp \mathcal{G} \left(N, Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right). \quad (5.59)$$

5.2.1 Approssimazioni

Vediamo ora di ottenere, per utilizzo futuro (Capitolo 7), le approssimazioni LL e NLL per la sezione d'urto differenziale. Queste approssimazioni vanno fatte a livello dell'esponente

$$\begin{aligned} & \mathcal{S} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) + \mathcal{G} \left(N, Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) \\ &= - \int_{\frac{b_0^2}{b^2}}^{Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} A(\alpha_s(\mu^2)) + B(\alpha_s(\mu^2)) + 2 \gamma^{\text{AP}}(N, \alpha_s(\mu^2)) \right]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

⁴Strettamente parlando, questa espressione vale soltanto per quelle combinazioni di pdf, dette di *non-singoleto*, come ad esempio $f_{\mathbf{q}} - f_{\bar{\mathbf{q}}}$, che non hanno mescolamento con la pdf del gluone. Nel caso generale, l'equazione differenziale assume una forma matriciale. Si tratta di un dettaglio che non influenza la discussione che segue.

Come appare chiaro dalla presenza del $\log \frac{Q^2}{\mu^2}$ a moltiplicare il termine $A(\alpha_s(\mu^2))$, all'approssimazione LL contribuisce solo il termine A_1 , mentre al livello NLL occorrerà includere anche i termini A_2 , B_1 e $\gamma_1(N)$. La presenza di un termine dipendente da N è un po' fastidiosa, e vedremo che è possibile liberarsene anche all'approssimazione NLL (oltre che al LL in cui non è presente). Per il momento, trascuriamo la presenza del termine \mathcal{G} e ci concentriamo su \mathcal{S} . Coerentemente con quanto detto ad inizio Capitolo, sarà possibile scrivere

$$\mathcal{S} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\alpha}^{i-1} f_i(\bar{\alpha}L), \quad (5.61)$$

in cui l'approssimazione N^{LL} consiste nel tenere i primi n termini nella somma, e si sono definiti

$$L \equiv \log \frac{b_0^2}{b^2 Q^2}, \quad \bar{\alpha} \equiv \beta_0 \alpha_s(Q^2), \quad (5.62)$$

essendo β_0 il primo coefficiente della beta function (3.11).

Approssimazione LL

Per cominciare, calcoliamo $f_0(\bar{\alpha}L)$, ovvero l'approssimazione al LL per \mathcal{S} . Per farlo è necessaria la forma esplicita (3.14) della costante di accoppiamento running

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}},$$

accurata al LL. Con il cambiamento di variabile $t = \bar{\alpha} \log \frac{\mu^2}{Q^2}$, l'integrale (5.49) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{LL}} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) &= -A_1 \int_{\frac{b_0^2}{b^2}}^{Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \\ &= \frac{A_1}{\beta_0 \bar{\alpha}} \int_{\bar{\alpha}L}^0 dt \frac{t}{1+t} \\ &= \frac{A_1}{\beta_0 \bar{\alpha}} [\log(1 + \bar{\alpha}L) - \bar{\alpha}L], \end{aligned} \quad (5.63)$$

da cui riconosciamo subito

$$f_0(y) = \frac{A_1}{\beta_0} [\log(1 + y) - y]. \quad (5.64)$$

Approssimazione NLL

Per calcolare l'approssimazione NLL di \mathcal{S} dobbiamo includere anche A_2 e B_1 ; inoltre, per consistenza, occorre usare la forma di $\alpha_s(\mu^2)$ accurata al NLL (3.24)

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \left[1 - \frac{\beta_1 \alpha_s(Q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2}} \log \left(1 + \beta_0 \alpha_s(Q^2) \log \frac{\mu^2}{Q^2} \right) \right].$$

I termini che contribuiscono a f_1 , sono di due tipi: il primo deriva dalla parte NLL della running coupling che moltiplica il coefficiente A_1 , il secondo deriva dai coefficienti A_2 e B_1 , per i quali è sufficiente utilizzare l'espressione di α_s al LL. Il primo contributo è dato da

$$-\frac{A_1\beta_1}{\beta_0^2} \int_{\bar{\alpha}L}^0 dt \frac{t}{(1+t)^2} \log(1+t) = \frac{A_1\beta_1}{\beta_0^2} \left[\frac{1}{2} \log(1+\bar{\alpha}L) - \frac{\bar{\alpha}L}{1+\bar{\alpha}L} + \frac{\log(1+\bar{\alpha}L)}{1+\bar{\alpha}L} \right]. \quad (5.65)$$

Il secondo consta dei contributi di A_2

$$\frac{A_2}{\beta_0^2} \int_{\bar{\alpha}L}^0 dt \frac{t}{(1+t)^2} = -\frac{A_2}{\beta_0^2} \left[\log(1+\bar{\alpha}L) - \frac{\bar{\alpha}L}{1+\bar{\alpha}L} \right] \quad (5.66)$$

e di B_1

$$-\frac{B_1}{\beta_0} \int_{\bar{\alpha}L}^0 dt \frac{1}{(1+t)} = \frac{B_1}{\beta_0} \log(1+\bar{\alpha}L), \quad (5.67)$$

da cui otteniamo infine

$$f_1(y) = \frac{A_1\beta_1}{\beta_0^2} \left[\frac{1}{2} \log^2(1+y) - \frac{y}{1+y} + \frac{\log(1+y)}{1+y} \right] - \frac{A_2}{\beta_0^2} \left[\log(1+y) - \frac{y}{1+y} \right] + \frac{B_1}{\beta_0} \log(1+y). \quad (5.68)$$

Abbiamo quindi

$$\mathcal{S}_{\text{NLL}} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right) = \frac{1}{\bar{\alpha}} f_0(\bar{\alpha}L) + f_1(\bar{\alpha}L). \quad (5.69)$$

Il termine dipendente da N

Come annunciato, vediamo come è possibile liberarsi, al NLL, del termine \mathcal{G} nell'integrale di inversione di Fourier. Per fare questo, useremo un risultato della Sottosezione 7.1.4, e cioè che, nel calcolare l'inversione di Fourier accurata al NLL, la funzione che viene invertita compare al suo massimo livello di approssimazione (in questo caso, NLL) calcolata in $\frac{b_0^2}{b^2} \rightarrow q_T^2$, e il resto dell'inversione avviene sui termini al livello di approssimazione immediatamente precedente (in questo caso, LL). Dal momento che il termine \mathcal{G} è puramente NLL (nel senso che al LL è assente), secondo questa procedura esso comparirà solo nella forma

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(N, Q^2, q_T^2), \quad (5.70)$$

che essendo indipendente da b non contribuisce all'integrale di inversione di Fourier. Si osservi che questa semplificazione non è direttamente legata all'approssimazione NLL nel calcolo di $\tilde{\sigma}(N)$, ma contiene anche delle assunzioni sull'approssimazione dell'inversione di Fourier. Tuttavia, questo non forza necessariamente l'uso della prescrizione NLL della Sottosezione 7.1.4, ma permette di usare le altre prescrizioni per l'inversione dell'esponente di Sudakov; in un certo senso, questa semplificazione è ottenuta con una prescrizione mista (che si potrebbe scegliere di non fare, tenendo \mathcal{G} e invertendolo).

Operando nel senso proposto, la forma per $\tilde{\sigma}(N)$ è dunque

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(N) &\simeq \frac{1}{2Q^2} C(N, Q^2) \exp \mathcal{G}(N, Q^2, q_T^2) \hat{F}(Q^2, q_T^2) \\ &= \frac{1}{2Q^2} C(N, q_T^2) \hat{F}(Q^2, q_T^2), \end{aligned} \quad (5.71)$$

dove si è usata ancora la (5.56) e si è ridefinito

$$\hat{F}(Q^2, q_T^2) = \frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \exp \mathcal{S} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right). \quad (5.72)$$

Questa è la quantità di cui ci occuperemo nei prossimi Capitoli. A questo punto si può effettuare l'inversione della trasformata di Mellin e tornare alla sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dq_T^2} = \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{2Q^4} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \delta(z_1 z_2 - x) \left[f_q^{(1)}(z_1, q_T^2) f_{\bar{q}}^{(2)}(z_2, q_T^2) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right] \hat{F}(Q^2, q_T^2). \quad (5.73)$$

5.2.2 Calcolo dei coefficienti nella sezione d'urto risommata

Vediamo ora come si trovano i coefficienti A_i e B_i . Per farlo occorre confrontare la formula risommata con il calcolo ad ordine fisso. Quindi è necessario sviluppare l'esponenziale $\exp \mathcal{S}$ in potenze di α_s , e far corrispondere i singoli termini con il risultato perturbativo.

Per prima cosa verifichiamo la coerenza del risultato risommato confrontando l'ordine 0 in α_s : l'esponenziale diventa, a quest'ordine,

$$\exp \mathcal{S} = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s). \quad (5.74)$$

Usando la (5.73), possiamo isolare la parte di sezione d'urto partonica (escludendo le pdf e la sommatoria su q), ovvero

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2 dq_T^2} = \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{2Q^4} \delta(1-x) \hat{F}(Q^2, q_T^2) \quad (5.75)$$

(in questa formula $\hat{\sigma}_0$ include i fattori e_q^2 , così da essere identica alla (4.31), trovata al Capitolo 4). Allora, all'ordine α_s^0 si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_0}{dQ^2 dq_T^2} &= \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{2Q^4} \delta(1-x) \frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \\ &= \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{Q^4} \delta(1-x) \delta(\hat{q}_T^2), \end{aligned} \quad (5.76)$$

dove si è usata la (6.54) con $k = 0$ per calcolare la trasformata inversa di Fourier di L^k . È immediato verificare che questa espressione coincide esattamente con la (4.32), come dev'essere.

Più interessante è il confronto con l'ordine α_s . L'esponenziale di Sudakov, contiene, a quest'ordine, solo i termini proporzionali a A_1 e B_1 , come è semplice verificare sviluppando in serie di potenze di $\bar{\alpha}L$ le funzioni f_0 e f_1 e tenendo solo i termini di ordine α_s . Si trova, quindi

$$\exp \mathcal{S} = 1 + \alpha_s \left[-\frac{A_1}{2} L^2 + B_1 L \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (5.77)$$

Procedendo come sopra, la sezione d'urto partonica all'ordine α_s è

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_1}{dQ^2 dq_T^2} &= \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{2Q^4} \delta(1-x) \frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}_T \vec{b}} \alpha_s \left[-\frac{A_1}{2} L^2 + B_1 L \right] \\ &= \frac{\hat{\sigma}_0(Q^2)}{Q^4} \delta(1-x) \alpha_s \left[-A_1 \frac{\log \hat{q}_T^2}{\hat{q}_T^2} + B_1 \frac{1}{\hat{q}_T^2} \right], \end{aligned} \quad (5.78)$$

dove si è usata la (6.55) con $k = 1, 2$. Dal confronto con la (4.126) si deduce

$$A_1 = \frac{C_F}{\pi} \quad (5.79a)$$

$$B_1 = -\frac{3C_F}{2\pi}. \quad (5.79b)$$

Procedendo con lo stesso calcolo all'ordine α_s^2 , si possono trovare i coefficienti A_2 e B_2 . Si osservi che il calcolo illustrato qui sopra è stato effettuato con la scelta $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$; le motivazioni a favore di questa scelta saranno discusse nel prossimo Capitolo. In generale, i coefficienti A_i, B_i dipendono da b_0 . Si trova [33, 34]

$$A_1 = \frac{C_F}{\pi} \quad (5.80a)$$

$$A_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27} n_f + \frac{8\pi}{3} \beta_0 \log \frac{b_0 e^{\gamma_E}}{2} \right) \quad (5.80b)$$

$$B_1 = -\frac{2C_F}{\pi} \left(\log \frac{b_0 e^{\gamma_E}}{2} - \frac{3}{4} \right) \quad (5.80c)$$

$$\begin{aligned} B_2 = \frac{1}{\pi^2} \left[2 \left(\frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27} n_f \right) \left(\log \frac{b_0 e^{\gamma_E}}{2} - \frac{3}{4} \right) + \frac{8\pi}{3} \beta_0 \left(\log^2 \frac{b_0 e^{\gamma_E}}{2} - \frac{9}{16} \right) \right. \\ \left. - \frac{9}{8} + \frac{7\pi^2}{6} + \frac{2\zeta(3)}{3} + \left(\frac{5}{36} - \frac{2\pi^2}{27} \right) n_f \right]. \end{aligned} \quad (5.80d)$$

I coefficienti A_3 e B_3 sono stati calcolati recentemente in [22].

Capitolo 6

Borel prescription

Le formule risommate del Capitolo precedente sono espresse in uno spazio di variabili coniugate alle variabili fisiche tramite trasformate integrali: N è la variabile coniugata di Mellin di x nel caso della sezione d'urto totale e \vec{b} è la variabile coniugata di Fourier di \vec{q}_T nel caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. Per ottenere le sezioni d'urto espresse nelle variabili fisiche occorre invertire le formule risommate, ma in entrambi i casi l'inversione non è possibile a causa della struttura analitica delle espressioni da invertire (di fatto sono presenti dei tagli nel percorso di integrazione). Quindi è necessario stabilire una prescrizione con cui effettuare l'inversione.

Questo Capitolo contiene il risultato originale di questa tesi, che consiste essenzialmente nella introduzione di una nuova prescrizione per l'inversione delle trasformate integrali, basata sul criterio di somma alla Borel delle serie divergenti. Il metodo che descriveremo è già stato proposto per il caso della sezione d'urto totale [24, 25]; questo metodo è illustrato nella prima parte del Capitolo, utilizzando una tecnica più semplice rispetto alla sua formulazione originale. Nella seconda parte del Capitolo il metodo viene esteso al caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso; questo risultato è completamente nuovo.

Il metodo si basa sull'osservazione seguente. Si trova che la sezione d'urto risommata nello spazio della variabile coniugata non è invertibile; tuttavia essa può essere sviluppata in serie di potenze del logaritmo della variabile coniugata, e i termini della serie sono invertibili individualmente: il taglio nel piano complesso della variabile coniugata compare solo nella somma. Il metodo è descritto dalla seguente procedura:

1. si prende l'inversione termine a termine della sezione d'urto risommata nello spazio coniugato, e sviluppata in potenze del logaritmo;
2. si dimostra che la serie così ottenuta è divergente: se così non fosse, lo scopo di ottenere una espressione risommata nello spazio della variabile fisica sarebbe raggiunto;
3. si dimostra che la trasformata di Borel della serie divergente ha invece raggio di convergenza non nullo, e se ne calcola la somma;
4. si mostra che la trasformata di Borel inversa è invece divergente, e si propone un criterio per regolarizzare la divergenza.

Il risultato che si ottiene è la prescrizione proposta.

6.1 Sezione d'urto totale

In questa Sezione descriveremo l'utilizzo del metodo di Borel nel caso della sezione d'urto totale, seguendo essenzialmente la procedura illustrata in [25], con alcune differenze che rendono più semplice la trattazione. La trattazione sarà presentata in termini piuttosto generali, ma per fissare le idee si pensi ad esempio al processo di Drell-Yan nel limite $x \rightarrow 1$, con $x = Q^2/s$, dove Q^2 è la massa invariante della coppia di Drell-Yan e s il quadrato dell'energia nel centro di massa. Il limite $x \rightarrow 1$ corrisponde al limite $N \rightarrow \infty$, essendo N la variabile coniugata a x secondo la trasformata di Mellin. La generica quantità risommata si può scrivere come

$$\Sigma(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\bar{\alpha}) (\bar{\alpha}L)^k, \quad (6.1)$$

dove abbiamo definito

$$L \equiv \log \frac{1}{N} \quad (6.2)$$

e $\bar{\alpha} \equiv \beta_0 \alpha_s(Q^2)$. Per semplicità non indichiamo più, nel seguito, la dipendenza da $\bar{\alpha}$ in Σ e in h_k .

Per tornare allo spazio fisico occorre effettuare la trasformata di Mellin inversa

$$\bar{\Sigma}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \Sigma(\bar{\alpha}L), \quad (6.3)$$

dove $c \in \mathbb{R}^+$ è scelto in modo tale che nel semipiano $\Re(N) > c$ la funzione $\Sigma(\bar{\alpha}L)$ sia regolare. Sfortunatamente, come si è visto nel Capitolo 5, la funzione Σ ha in generale un taglio lungo il semiasse reale positivo del piano complesso N a partire da un certo valore N_L , che corrisponde alla posizione del polo di Landau della costante di accoppiamento $\alpha_s(Q^2/N)$. Non esiste perciò alcun valore reale c a destra del quale la funzione Σ sia analitica in N . In altre parole, $\Sigma(N)$ non è la trasformata di Mellin di alcuna funzione di x . Si noti che, sempre a causa del polo di Landau, la serie (6.1) ha raggio di convergenza finito.

6.1.1 Inversione termine a termine

Sebbene Σ non sia invertibile, i singoli termini dello sviluppo (6.1) in potenze di L sono analitici per $\Re(N) > 0$. La loro antitrasformata di Mellin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} L^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \log^k \frac{1}{N} \quad (6.4)$$

è perciò ben definita, e anzi può essere calcolata analiticamente. A tale scopo, notiamo che possiamo ottenere le varie potenze del logaritmo per derivazione di una funzione generatrice:

$$L^k = \left. \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} N^{-\eta} \right|_{\eta=0}. \quad (6.5)$$

Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \log^k \frac{1}{N} = \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} N^{-\eta} \right]_{\eta=0}. \quad (6.6)$$

Osserviamo poi che

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^{N-1} \left[\log^{\eta-1} \frac{1}{x} \right]_+ &= \int_0^1 dx (x^{N-1} - 1) \log^{\eta-1} \frac{1}{x} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt t^{\eta-1} (e^{-(N-1)t} - 1) = \\ &= N^{-\eta} \int_0^{+\infty} d(Nt) e^{-(Nt)} (Nt)^{\eta-1} - \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{\eta-1} = \\ &= \Gamma(\eta) (N^{-\eta} - 1) \end{aligned} \quad (6.7)$$

in cui si è fatto uso della rappresentazione integrale della Gamma di Eulero. Il significato del simbolo $[\cdot \cdot \cdot]_+$ è discusso in dettaglio in Appendice B.2. Dal momento che

$$1 = \int_0^1 dx x^{N-1} \delta(1-x) \quad (6.8)$$

si ottiene infine il risultato cercato:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} N^{-\eta} = \delta(1-x) + \Delta(\eta) \left[\log^{\eta-1} \frac{1}{x} \right]_+ \quad (6.9)$$

dove $\Delta(\eta) = \frac{1}{\Gamma(\eta)}$. A questo punto, seguendo la (6.6) possiamo ottenere il risultato desiderato derivando k volte rispetto ad η , e ponendo $\eta = 0$; si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \log^k \frac{1}{N} = \delta_{k0} \delta(1-x) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \Delta^{(j)}(0) \left[\frac{\log^{k-j} \log \frac{1}{x}}{\log \frac{1}{x}} \right]_+. \quad (6.10)$$

Si noti che il termine $j = 0$ non è stato incluso nella somma perché $\Delta(0) = 0$.

Siamo interessati a calcolare questa espressione nel limite $x \rightarrow 1$; in questo limite

$$\log \frac{1}{x} \simeq (1-x) + \mathcal{O}((1-x)^2); \quad (6.11)$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dN x^{-N} \log^k \frac{1}{N} \simeq \delta_{k0} \delta(1-x) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \Delta^{(j)}(0) \left[\frac{\log^{k-j}(1-x)}{1-x} \right]_+ \quad (6.12)$$

a meno di termini non singolari per $x \rightarrow 1$. Vediamo quindi che la potenza k ($k > 0$) di $\log \frac{1}{N}$ ha come antitrasformata un polinomio di grado $k-1$ nel logaritmo della variabile fisica $(1-x)$, moltiplicata per $\frac{1}{1-x}$.

Consideriamo ora la ridotta K -esima della serie (6.1):

$$\Sigma_K(\bar{\alpha}L) = \sum_{k=1}^K h_k (\bar{\alpha}L)^k. \quad (6.13)$$

Utilizzando la (6.12) otteniamo

$$\bar{\Sigma}_K(\bar{L}) = \left[\frac{R_K(\bar{L})}{1-x} \right]_+ \quad (6.14)$$

$$R_K(\bar{L}) \equiv \sum_{k=1}^K h_k \bar{\alpha}^k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \Delta^{(j)}(0) \bar{L}^{k-j} + \mathcal{O}((1-x)^0), \quad (6.15)$$

in cui abbiamo definito

$$\bar{L} \equiv \log(1-x). \quad (6.16)$$

6.1.2 Divergenza della serie per la trasformata inversa

Mostriamo ora che il limite $K \rightarrow \infty$ della (6.15) è divergente. A tale scopo è opportuno effettuare alcune manipolazioni che permettono di fattorizzare la (6.15) in due somme indipendenti; saremo in grado di calcolare la somma della prima, e mostrare che la seconda ha invece raggio di convergenza nullo. Per prima cosa scambiamo l'ordine di somma, scrivendo per esteso il binomiale:

$$R_K(\bar{L}) = \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \bar{L}^{-j} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k (\bar{\alpha} \bar{L})^k. \quad (6.17)$$

In questa forma il legame tra le due sommatorie è presente in due punti:

- nel termine $(k-j)!$;
- nel valore iniziale dell'indice della seconda somma, $k=j$.

Per rimuovere il primo, riscriviamo il termine $(k-j)!$ tramite la ovvia identità

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\xi e^{\xi} \xi^{-k-1} \quad (6.18)$$

in cui \mathcal{C} è un *qualsiasi* cammino chiuso che circonda l'origine (questo punto è affrontato in [25] in un modo lievemente diverso; il risultato che si ottiene è lo stesso, ma qui è ottenuto in modo più semplice). Otteniamo quindi

$$R_K(\bar{L}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\xi} \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}} \right)^j \sum_{k=j}^K k! h_k \left(\frac{\bar{\alpha} \bar{L}}{\xi} \right)^k. \quad (6.19)$$

In questa forma è già possibile mostrare la divergenza di R_K : infatti, la serie più interna ha raggio di convergenza ρ_c dato dal criterio del rapporto:

$$\frac{1}{\rho_c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! h_{k+1}}{k! h_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) \left| \frac{h_{k+1}}{h_k} \right|, \quad (6.20)$$

ma poiché la serie (6.1) ha raggio di convergenza ρ_0 *finito* (a causa del polo di Landau), si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{k+1}}{h_k} \right| = \frac{1}{\rho_0} \neq 0; \quad (6.21)$$

quindi, il limite (6.20) è dato dal limite di $(k+1)/\rho_0$ per $k \rightarrow \infty$, che chiaramente è infinito: allora $\rho_c = 0$, cioè la serie diverge.¹ Questa dimostrazione generale della divergenza della serie non è presente negli articoli in cui il metodo di Borel è stato proposto per la prima volta, [24, 25].

L'aver introdotto l'integrale di cammino in ξ ci permette di separare completamente le due sommatorie; infatti i termini mancanti alla seconda somma, $k = 1, \dots, j-1$, danno contributo nullo all'integrale, perché corrispondono ad una funzione di ξ priva di poli. Possiamo quindi scrivere

$$R_K(\bar{L}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\xi} \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}}\right)^j \sum_{k=1}^K k! h_k \left(\frac{\bar{\alpha}\bar{L}}{\xi}\right)^k. \quad (6.22)$$

6.1.3 Trasformazione di Borel

Per trattare la serie divergente, ne prendiamo la trasformata di Borel² $\hat{R}_K(w, \bar{L})$ rispetto ad $\bar{\alpha}$, ovvero effettuiamo la sostituzione

$$\bar{\alpha}^k \rightarrow \frac{w^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (6.23)$$

Per via del fattoriale al denominatore, la trasformata di Borel, che indichiamo con \hat{R}_K , ha migliori proprietà di convergenza. Infatti vediamo che \hat{R}_K converge per $K \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \hat{R}_K(w, \bar{L}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2} \bar{L} e^{\xi} \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}}\right)^j \sum_{k=1}^K k h_k \left(\frac{w\bar{L}}{\xi}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2} e^{\bar{L}\xi} \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \xi^j \sum_{k=1}^K k h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^{k-1}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

dove al secondo passaggio si è riscalata la variabile di integrazione $\xi \rightarrow \bar{L}\xi$. È semplice adesso riconoscere, nel limite $K \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^{k-1} = \xi \frac{d}{dw} \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right) \quad \text{per } \left|\frac{w}{\xi}\right| < \rho_0 \quad (6.25)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \xi^j = \Delta(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}, \quad (6.26)$$

essendo la prima condizione data dal fatto che la derivata termine a termine di Σ ha lo stesso raggio di convergenza ρ_0 di Σ . Quindi, definendo \hat{R} come il limite per $K \rightarrow \infty$ di \hat{R}_K , si ha

$$\hat{R}(w, \bar{L}) = \lim_{K \rightarrow \infty} \hat{R}_K(w, \bar{L}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} \Delta(\xi) \frac{d}{dw} \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right) \quad (6.27)$$

¹Si noti che, affinché la serie converga, non è sufficiente che la serie originale abbia raggio di convergenza $\rho_0 = \infty$: infatti in quel caso il limite (6.20) è indeterminato, quindi potrebbe dare origine ad un raggio di convergenza ρ_c finito, infinito, ma anche nullo. Vedremo nella prossima Sezione un esempio esplicito.

²Si veda l'Appendice B.1.

in cui il cammino di integrazione \mathcal{C} deve essere scelto in modo da soddisfare, a causa della relazione in (6.25),

$$|\xi| > \frac{w}{\rho_0}. \quad (6.28)$$

In realtà, scelto un cammino soddisfacente questo vincolo, esso può essere deformato a piacere, purché non si attraversi il taglio che si estende da $-\frac{w}{\rho_0}$ a 0.

6.1.4 Inversione della trasformata di Borel

L'integrale di inversione della trasformata di Borel è dato da

$$R(\bar{L}) = \int_0^\infty dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \hat{R}(w, \bar{L}). \quad (6.29)$$

Nel caso in cui Σ abbia un taglio (come accade) l'integrale (6.29) diverge: questo perché, via via che w si avvicina all'infinito, il cammino \mathcal{C} deve estendersi a valori di ξ con parte reale tendente a $-\infty$; in questa regione, la funzione $\Delta(\xi)$ oscilla con ampiezza che cresce fattorialmente. Per questo motivo l'integrale in w , soppresso solo da un esponenziale $e^{-\frac{w}{\alpha}}$, non può convergere.

Stabiliamo quindi di regolarizzare l'integrale di inversione limitando l'intervallo di integrazione con un cut-off arbitrario C . Definiamo cioè

$$R^{\text{BP}}(\bar{L}, C) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} \Delta(\xi) \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \frac{d}{dw} \Sigma\left(\frac{w}{\xi}\right) \quad (6.30)$$

dove si è scambiato l'ordine di integrazione, il che è lecito dal momento che ora entrambi gli integrali sono ben definiti, purché il cammino di integrazione in ξ sia scelto in modo che passi a sinistra di $-\frac{C}{\rho_0}$, cioè l'estremo corrispondente al massimo valore di w . Questa formula definisce la *Borel prescription* per la sezione d'urto totale.

Notiamo che si può riscrivere la (6.30), tramite un'integrazione per parti, come

$$R^{\text{BP}}(\bar{L}, C) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} \Delta(\xi) \left[e^{-\frac{C}{\alpha}} \Sigma\left(\frac{C}{\xi}\right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \Sigma\left(\frac{w}{\xi}\right) \right], \quad (6.31)$$

la cui implementazione numerica è più semplice perché non contiene la derivata di Σ .

Per valutare la qualità della prescrizione appena descritta, occorre capire quanto importante è e che natura ha ciò che stiamo trascurando, ovvero la parte di integrale che si estende da C ad ∞ . La risposta numerica a questa domanda è: stiamo trascurando una quantità infinita. Questo è necessario per ottenere un risultato finito a partire da una serie divergente. È tuttavia possibile in linea di principio che il termine divergente che viene trascurato con la scelta del cut-off C corrisponda a qualche contributo all'osservabile di cui la teoria delle perturbazioni non tiene conto.

La differenza tra il risultato esatto (infinito) R e il risultato della Borel prescription R^{BP} è data da

$$R^{\text{ht}}(\bar{L}, C) \equiv R(\bar{L}) - R^{\text{BP}}(\bar{L}, C) \quad (6.32)$$

(il significato dell'apice ^{ht} sarà spiegato più avanti). È chiaro che il termine R^{ht} è anch'esso infinito; per studiarlo tronchiamo le serie al termine K -esimo. Dall'espressione (6.17) per

R_K troviamo

$$\begin{aligned}
R_K^{\text{BP}}(\bar{L}, C) &\equiv \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\bar{\alpha}}} \hat{R}_K(w, \bar{L}) \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \frac{1}{(k-1)!} \bar{L}^{k-j} \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\bar{\alpha}}} w^{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \frac{\gamma(k, \frac{C}{\bar{\alpha}})}{(k-1)!} \bar{\alpha}^k \bar{L}^{k-j}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

dove si è fatto uso della definizione della funzione Gamma troncata

$$\gamma(k, z) = \int_0^z dt e^{-t} t^{k-1} = (k-1)! \left(1 - e^{-z} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{z^n}{n!} \right). \tag{6.34}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
R_K^{\text{ht}}(\bar{L}, C) &= R_K(\bar{L}) - R_K^{\text{BP}}(\bar{L}, C) \\
&= e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} \sum_{j=1}^K \frac{\Delta^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \bar{\alpha}^k \bar{L}^{k-j} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{C}{\bar{\alpha}} \right)^n.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Quindi, nel limite $\bar{\alpha} \rightarrow 0$,

$$R_K^{\text{ht}}(\bar{L}, C) \underset{\bar{\alpha} \rightarrow 0}{\sim} e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}}, \tag{6.36}$$

che si annulla più velocemente di ogni potenza di $\bar{\alpha}$ quando $\bar{\alpha} \rightarrow 0$. Ne segue che la differenza tra R^{BP} (come definita in (6.30), cioè nel limite $K \rightarrow \infty$) e lo sviluppo della quantità originaria troncato all'ordine K , R_K , è dell'ordine di $\bar{\alpha}^{K+1}$ (cioè il primo termine trascurato nello sviluppo in serie di R), il che equivale a dire che la serie (6.17) per R , ancorché divergente, è *asintotica* a R^{BP} .

Inoltre, usando la forma all'ordine leading per $\alpha_s(Q^2)$ data in (3.17), si può riscrivere il termine

$$e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} = \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^C [1 + \mathcal{O}(\alpha_s(Q^2))], \tag{6.37}$$

da cui è evidente che il termine R_K^{ht} è soppresso per grandi valori di Q^2 come una potenza inversa di Q^2 . Un termine di questo tipo non è incluso, per sua natura, in uno sviluppo perturbativo della costante di accoppiamento, in quanto non è una funzione analitica di α_s . Quindi escludere in R^{BP} il contributo di R^{ht} significa includere nel risultato dei termini che erano stati esclusi a priori, ma che in linea di principio possono essere presenti. In questo senso la Borel prescription assume maggiore legittimità di altre prescrizioni presenti in letteratura.

La sigla ^{ht} sta per *higher twist*, e deriva dalla terminologia utilizzata nel trattamento del deep-inelastic scattering con il formalismo dello sviluppo di prodotti di operatori sul cono di luce. In quel contesto si trova che il tensore adronico $W^{\mu\nu}$ si può scrivere, nel limite di Bjorken $Q^2 \rightarrow \infty$, x_{Bj} fissato, in termini di una somma infinita di elementi di matrice di opportuni operatori locali, ordinati secondo il valore del loro twist, definito come la

differenza tra la dimensione dell'operatore e il suo spin. Si trova che gli operatori dominanti hanno twist 2; i coefficienti degli operatori con twist più alto (higher twist) sono soppressi da potenze inverse di Q^2 , come accade nel nostro caso. La scelta $C = 1$ per il deep-inelastic scattering, o $C = 2$ per il processo di Drell-Yan, corrispondono ad includere termini di twist 4.

6.2 Sezione d'urto differenziale in impulso trasverso

Questa Sezione contiene il risultato principale di questa tesi: l'estensione della Borel prescription al caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso. Vedremo che la procedura è concettualmente molto simile al caso della sezione d'urto totale, ma sotto l'aspetto tecnico l'estensione comporta diversi passaggi non banali. Ci riferiremo, per chiarezza, al caso della produzione di coppie di Drell-Yan con massa invariante Q^2 e impulso trasverso q_T , ma la trattazione si applica alla produzione di qualunque sistema massivo. Come abbiamo visto nel Capitolo precedente, la risommazione dei termini logaritmici in q_T si effettua nello spazio della variabile coniugata di Fourier \vec{b} . La generica quantità risommata Σ è una serie di potenze nella variabile

$$L \equiv \log \frac{b_0^2}{b^2 Q^2}, \quad (6.38)$$

dove b_0 è una costante arbitraria di ordine 1:

$$\Sigma(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\bar{\alpha}) (\bar{\alpha}L)^k, \quad (6.39)$$

dove abbiamo anche definito per convenienza notazionale

$$\bar{\alpha} \equiv \beta_0 \alpha_s(Q^2), \quad (6.40)$$

essendo β_0 il primo coefficiente della beta function per α_s . Per semplicità, nel seguito ometteremo l'argomento $\bar{\alpha}$ sia in Σ sia nei coefficienti h_k . Conveniamo fin d'ora di indicare con $\hat{}$ una variabile resa adimensionale dalla moltiplicazione per un'opportuna potenza di Q ; in particolare

$$\hat{q}_T \equiv \frac{q_T}{Q}, \quad \hat{b} = Qb. \quad (6.41)$$

La grandezza Σ è espressa in termini della variabile \vec{b} , che non è una variabile fisica. Per ottenere la grandezza fisica corrispondente $\bar{\Sigma}$ occorre calcolare l'integrale di inversione di Fourier

$$\bar{\Sigma}(\hat{q}_T^2) = \frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q}_T \cdot \vec{b}} \Sigma(\bar{\alpha}L) \quad (6.42)$$

(il fattore Q^2 è stato aggiunto per rendere il risultato equidimensionato a Σ); dato che $\Sigma(\bar{\alpha}L)$ dipende solo dal modulo di \vec{b} , possiamo calcolare l'integrale in coordinate polari

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}(\hat{q}_T^2) &= \frac{Q^2}{2\pi} \int_0^{\infty} db b \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\hat{q}_T \hat{b} \cos \theta} \Sigma(\bar{\alpha}L) \\ &= \int_0^{\infty} d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \Sigma(\bar{\alpha}L) \end{aligned} \quad (6.43)$$

dove abbiamo usato la rappresentazione integrale della funzione di Bessel di ordine 0

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iz \cos \theta}. \quad (6.44)$$

Essendo Σ una sezione d'urto differenziale in impulso trasverso, essa ha un taglio lungo il cammino dell'integrale di inversione (6.43) dovuto alla presenza del polo di Landau, perciò non è possibile calcolarlo. Procediamo allora secondo lo schema della Sezione precedente.

6.2.1 Inversione termine a termine

Come anticipato ad inizio Capitolo, il taglio nella Σ è presente solo quando la serie è sommata; viceversa, i singoli termini dello sviluppo (6.39) non hanno patologie nel range $0 \leq \hat{b} < \infty$, e perciò è possibile antitrasformarli. Lo scopo di questa Sottosezione è quindi trovare una forma per

$$\frac{Q^2}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q}_T \cdot \vec{b}} L^k = \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2}. \quad (6.45)$$

Al fine di calcolare tale integrale, cominciamo col notare che, definita una funzione generatrice

$$\chi(\hat{b}, \eta) = \left(\frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right)^\eta, \quad (6.46)$$

possiamo scrivere

$$L^k = \ln^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} = \left. \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \chi(\hat{b}, \eta) \right|_{\eta=0}, \quad (6.47)$$

da cui otteniamo

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} = \left. \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \chi(\hat{b}, \eta) \right|_{\eta=0}. \quad (6.48)$$

Facendo uso dell'identità

$$\int_0^\infty dx x^\mu J_\nu(ax) = 2^\mu a^{-\mu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2}\right)}, \quad a > 0, \quad -\Re(\nu) - 1 < \Re(\mu) < \frac{1}{2}, \quad (6.49)$$

possiamo calcolare

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \chi(\hat{b}, \eta) = 2\eta M(\eta) (\hat{q}_T^2)^{\eta-1}, \quad (6.50)$$

dove abbiamo definito la funzione

$$M(\eta) = \left(\frac{b_0^2}{4} \right)^\eta \frac{\Gamma(1-\eta)}{\Gamma(1+\eta)}. \quad (6.51)$$

Il termine $(\hat{q}_T^2)^{\eta-1}$ e le sue derivate rispetto ad η sono, per $\eta = 0$, singolari in $\hat{q}_T^2 = 0$; per isolare questa singolarità facciamo uso della formula (B.25), tramite la quale possiamo riscrivere

$$(\hat{q}_T^2)^{\eta-1} = \left[(\hat{q}_T^2)^{\eta-1} \right]_+ + \frac{1}{\eta} \delta(\hat{q}_T^2), \quad (6.52)$$

dove si è usata la definizione della distribuzione $[\dots]_+$ data in Appendice B.2; otteniamo quindi

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \chi(\hat{b}, \eta) = 2M(\eta) \left(\delta(\hat{q}_T^2) + \left[\frac{d}{d\hat{q}_T^2} (\hat{q}_T^2)^\eta \right]_+ \right), \quad (6.53)$$

in cui si è anche usata l'ovvia relazione $\frac{d}{d\hat{q}_T^2} (\hat{q}_T^2)^\eta = \eta (\hat{q}_T^2)^{\eta-1}$. Per ottenere l'antitrasformata di L^k non resta che calcolare le derivate rispetto ad η , secondo la (6.47):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} &= \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \left[2 M(\eta) \left(\delta(\hat{q}_T^2) + \left[\frac{d}{d\hat{q}_T^2} (\hat{q}_T^2)^\eta \right]_+ \right) \right]_{\eta=0} \\ &= 2 M^{(k)}(0) \delta(\hat{q}_T^2) + 2 \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \left(M(\eta) \left[\frac{d}{d\hat{q}_T^2} (\hat{q}_T^2)^\eta \right]_+ \right)_{\eta=0} \\ &= 2 M^{(k)}(0) \delta(\hat{q}_T^2) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} M^{(j)}(0) \left[\frac{d}{d\hat{q}_T^2} \log^{k-j} \hat{q}_T^2 \right]_+ . \end{aligned} \quad (6.54)$$

Nell'ultimo termine la somma è stata interrotta al valore $k-1$ invece che k perché quest'ultimo dà contributo nullo a causa della derivata che agisce, in quel caso, su una costante.

La formula (6.54) è il risultato cercato. Essa ci sarà utile non solo per il metodo di Borel, ma anche per effettuare diverse approssimazioni. In particolare, si noti la struttura di tale formula: supponendo che \hat{q}_T sia strettamente maggiore di 0, la $\delta(\hat{q}_T^2)$ non conta più e la distribuzione $[\cdot \cdot]_+$ può essere dimenticata:

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} M^{(j)}(0) \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \log^{k-j} \hat{q}_T^2 \quad \text{per } \hat{q}_T > 0 . \quad (6.55)$$

Si vede bene che l'inversa di Fourier di $\log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2}$ è un polinomio di grado $k-1$ in $\log \hat{q}_T^2$ moltiplicato per $1/\hat{q}_T^2$; in questo senso, un'approssimazione LL (leading log) consiste nel tenere in tale inversione solo il termine con $j=0$, un'approssimazione NLL solo i termini $j=0, 1$, e così via.

A questo punto, avendo ottenuto l'inverso per ogni termine della serie (6.39), è possibile scrivere la serie per l'inversa $\bar{\Sigma}$. In realtà, per poterlo fare lecitamente, occorrerebbe che entrambe le serie convergessero uniformemente; visto che in generale non siamo così fortunati, al fine di non scrivere cose sbagliate, tronchiamo la serie originale ad un ordine K fissato:

$$\Sigma_K(\bar{\alpha}L) = \sum_{k=1}^K h_k (\bar{\alpha}L)^k . \quad (6.56)$$

Questa è una somma finita, ed è perciò lecito invertire termine a termine, usando la (6.55). Nel caso $\hat{q}_T > 0$ si ottiene

$$\bar{\Sigma}_K(\bar{L}) = \frac{d}{d\hat{q}_T^2} R_K(\bar{L}) \quad (6.57)$$

$$R_K(\bar{L}) \equiv 2 \sum_{k=1}^K h_k \bar{\alpha}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M^{(j)}(0) \bar{L}^{k-j} \quad (6.58)$$

dove abbiamo definito, per convenienza notazionale futura,

$$\bar{L} \equiv \log \hat{q}_T^2 . \quad (6.59)$$

Si noti che nella definizione di R_K abbiamo incluso il termine $j=k$ che, come spiegato precedentemente, dà un contributo nullo a $\bar{\Sigma}_K$; tuttavia si rivelerà utile in futuro averlo mantenuto.

6.2.2 Divergenza della serie per la trasformata inversa

Dimostriamo ora che il limite per $K \rightarrow \infty$ di (6.58) è divergente. Per vederlo, effettuiamo alcune manipolazioni, che saranno utili anche in seguito. Innanzi tutto invertiamo l'ordine delle due sommatorie, scrivendo esplicitamente il coefficiente binomiale:³

$$R_K(\bar{L}) = 2 \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \bar{L}^{-j} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k (\bar{\alpha} \bar{L})^k . \quad (6.60)$$

La prima sommatoria assomiglia ad uno sviluppo di Taylor di M , e la seconda sembra in qualche modo legata alla Σ originale; purtroppo non possiamo dire molto di più in questa forma, perché le due somme sono legate in due punti:

- nel termine $(k-j)!$;
- nel punto di partenza della seconda somma, $k=j$.

Se riuscissimo a liberarci di questi legami, avremmo in mano due somme indipendenti, su cui possiamo sperare di poterci esprimere. Vediamo che questo si può fare. Usiamo ancora la relazione

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\xi e^{\xi} \xi^{-k-1} , \quad (6.61)$$

in cui \mathcal{C} è un *qualsiasi* cammino chiuso che circonda l'origine, per riscrivere $(k-j)!$. Otteniamo

$$R_K(\bar{L}) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\xi} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}}\right)^j \sum_{k=j}^K k! h_k \left(\frac{\bar{\alpha} \bar{L}}{\xi}\right)^k . \quad (6.62)$$

Abbiamo così effettuato il primo passo, che già ci permette di esprimerci sulla divergenza di R_K ; infatti, nel limite $K \rightarrow \infty$, la serie più interna ha raggio di convergenza ρ_c dato dal criterio del rapporto

$$\frac{1}{\rho_c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! h_{k+1}}{k! h_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) \left| \frac{h_{k+1}}{h_k} \right| , \quad (6.63)$$

ma visto che la serie (6.39) ha raggio di convergenza ρ_0 finito (a causa del taglio che sappiamo essere presente), si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{k+1}}{h_k} \right| = \frac{1}{\rho_0} \neq 0 , \quad (6.64)$$

da cui si vede subito che il limite (6.63) è infinito, cioè che $\rho_c = 0$, ovvero la serie diverge.

Per completezza, separiamo completamente le due sommatorie. Ciò è possibile grazie alla presenza dell'integrale in ξ ; infatti i termini mancanti alla seconda somma sono quelli corrispondenti a $k = 1, \dots, j-1$, ma tali termini danno contributo nullo all'integrale in ξ perché corrispondono ad una funzione integranda la cui dipendenza da ξ è

$$\xi^p e^{\xi} , \quad p = 0, \dots, j-2 , \quad (6.65)$$

³Poiché la somma sull'indice k comincia con il termine $k=1$, mentre in questa espressione k parte da j , che può assumere il valore 0, conveniamo di definire $h_k = 0$ per $k=0$.

che chiaramente non ha poli. Quindi otteniamo una formula completamente separata

$$R_K(\bar{L}) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\xi} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}}\right)^j \sum_{k=1}^K k! h_k \left(\frac{\bar{\alpha}\bar{L}}{\xi}\right)^k. \quad (6.66)$$

Osservazione

Come anticipato nella Sezione precedente, se Σ avesse raggio di convergenza $\rho_0 = \infty$, non è affatto garantito che la serie $\bar{\Sigma}$ converga, perché il limite (6.63) sarebbe in tal caso indeterminato. Vediamo un esempio esplicito di una funzione il cui raggio di convergenza è infinito ma la cui inversa diverge.

Prendiamo la funzione

$$\Sigma(\bar{\alpha}L) = e^{A\bar{\alpha}L^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{A}{\bar{\alpha}}\right)^n (\bar{\alpha}L)^{2n}; \quad (6.67)$$

è immediato identificare i coefficienti h_k : infatti possiamo separare le potenze pari e dispari di L

$$\Sigma(\bar{\alpha}L) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k (\bar{\alpha}L)^k = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} (\bar{\alpha}L)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n+1} (\bar{\alpha}L)^{2n+1}, \quad (6.68)$$

e ottenere per confronto

$$h_{2n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{A}{\bar{\alpha}}\right)^n, \quad h_{2n+1} = 0. \quad (6.69)$$

La serie più interna della (6.62) diventa quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! h_k \left(\frac{\bar{\alpha}L}{\xi}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)! h_{2n} \left(\frac{\bar{\alpha}L}{\xi}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{A}{\bar{\alpha}}\right)^n \left(\frac{\bar{\alpha}L}{\xi}\right)^{2n}, \quad (6.70)$$

da cui, col criterio del rapporto, otteniamo

$$\frac{1}{\rho_c} = \left(\frac{A}{\bar{\alpha}}\right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \frac{n!}{(2n)!} = \infty, \quad (6.71)$$

cioè $\rho_c = 0$. Quindi anche questa serie, pur non avendo il taglio, diverge.

Una funzione Σ così fatta non è nemmeno così strana: essa corrisponde, per un opportuno valore di A , al contributo LL alla sezione d'urto partonica differenziale in impulso trasverso nel caso in cui si sia trascurato il running di α_s . Questa approssimazione è buona per esempio in elettrodinamica. Questo esempio spiega che la divergenza degli sviluppi perturbativi non ha origine solo dalla presenza del polo di Landau, ma è qualcosa di più profondo, radicato nell'ipotesi perturbativa.

6.2.3 Trasformazione di Borel

Per trattare la serie divergente che ha per somme parziali le (6.66) usiamo il metodo di Borel⁴: calcoliamo la trasformata rispetto alla variabile $\bar{\alpha}$, il che in pratica consiste nel fare

⁴Si veda l'Appendice B.1.

la sostituzione

$$\bar{\alpha}^k \rightarrow \frac{w^{k-1}}{(k-1)!}; \quad (6.72)$$

è chiaro che, per via del fattoriale, la trasformata di Borel ha migliori possibilità di convergenza. Chiamando \hat{R}_K la trasformata di R_K abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{R}_K(w, \bar{L}) &= \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2} \bar{L} e^{\xi} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{\xi}{\bar{L}}\right)^j \sum_{k=1}^K k h_k \left(\frac{w\bar{L}}{\xi}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2} e^{\bar{L}\xi} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \xi^j \sum_{k=1}^K k h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^{k-1}, \end{aligned} \quad (6.73)$$

dove al secondo passaggio abbiamo riscaldato la variabile di integrazione $\xi \rightarrow \bar{L}\xi$. Queste serie convergono, perciò è possibile prenderne il limite $K \rightarrow \infty$, ottenendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^{k-1} = \xi \frac{d}{dw} \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right) \quad \text{per } \left|\frac{w}{\xi}\right| < \rho_0 \quad (6.74)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \xi^j = M(\xi) \quad \text{per } |\xi| < 1, \quad (6.75)$$

in cui la prima condizione è dovuta al fatto che il raggio di convergenza della derivata di Σ è lo stesso di Σ , e la seconda è dovuta alla presenza di un polo di $M(\xi)$ per $\xi = 1$. Allora si ha

$$\hat{R}(w, \bar{L}) = \lim_{K \rightarrow \infty} \hat{R}_K(w, \bar{L}) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \frac{d}{dw} \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right) \quad (6.76)$$

in cui il cammino di integrazione \mathcal{C} deve essere scelto in modo da soddisfare, a causa delle relazioni precedenti,

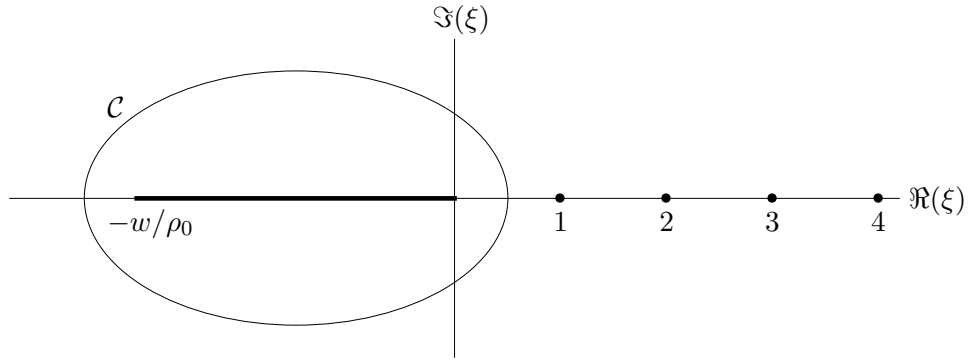
$$\frac{w}{\rho_0} < |\xi| < 1. \quad (6.77)$$

Se fossimo costretti ad usare esattamente un tale percorso si vede subito che per $w \geq 1$ la formula non ha senso, ma l'integrale di inversione di Borel è fatto nel range $0 \leq w < \infty$, il che è inaccettabile. In realtà, la condizione (6.77) si può rendere meno stringente; infatti $M(\xi)$ si può continuare analiticamente ad eccezione dei punti di singolarità presenti su ogni intero positivo, e quindi, a patto di non includere questi poli nel cammino \mathcal{C} , esso può essere deformato a piacere, rendendo l'integrazione possibile per ogni valore di w . Un esempio di tale cammino deformato è rappresentato in Figura 6.1.

Osservazione

Si noti che una generica serie si può scrivere in varie maniere del tutto equivalenti sotto ogni aspetto; ad esempio

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1}, \quad x \neq 0. \quad (6.78)$$

Figura 6.1: Contorno \mathcal{C} per l'integrazione in ξ .

Questo naturalmente non fa alcuna differenza a livello della serie, ma permette di implementare in maniera diversa la trasformazione di Borel, perché nel primo caso si ha

$$\hat{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} w^{k-1} \quad (6.79)$$

e nel secondo si ha invece

$$\hat{S}' = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} w^k, \quad (6.80)$$

e chiaramente $\hat{S} \neq \hat{S}'$. Naturalmente dopo l'inversione si ottiene lo stesso risultato in entrambi i casi.

Nel nostro caso possiamo raccogliere un $\bar{\alpha}^{-1}$ fuori dalla serie, e fare la sostituzione

$$\bar{\alpha}^{k+1} \rightarrow \frac{w^k}{k!}. \quad (6.81)$$

Procedendo in maniera analoga a prima, otteniamo, invece che la (6.73),

$$\hat{R}'_K(w, \bar{L}) = \frac{1}{\bar{\alpha}\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \xi^j \sum_{k=1}^K h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^k, \quad (6.82)$$

in cui è facile riconoscere, nel limite $K \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^K h_k \left(\frac{w}{\xi}\right)^k = \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right). \quad (6.83)$$

Otteniamo quindi una trasformata alternativa

$$\hat{R}'(w, \bar{L}) = \frac{1}{\bar{\alpha}\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \Sigma \left(\frac{w}{\xi}\right) \quad (6.84)$$

con gli stessi vincoli sul cammino d'integrazione. Nel momento in cui faremo l'integrale di inversione, i due risultati devono coincidere; ma visto che, come vedremo, tale integrale diverge, lo regolarizzeremo con un cut-off, e questi due modi alternativi portano a prescrizioni diverse.

6.2.4 Inversione della trasformata di Borel

Dalla $\hat{R}(w, \bar{L})$ si ottiene, tramite l'integrale di inversione di Borel,

$$R(\bar{L}) = \int_0^\infty dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \hat{R}(w, \bar{L}). \quad (6.85)$$

Questo integrale è divergente all'estremo superiore di integrazione, per ragioni del tutto analoghe al caso della sezione d'urto totale: anche in questo caso, infatti, a causa del taglio della funzione Σ , l'integrale in ξ deve essere fatto su un cammino \mathcal{C} che si estende sempre più verso $\Re(\xi) \rightarrow -\infty$ via via che w cresce, come si vede dalla Figura 6.1. Dal momento che in questa regione $M(\xi)$ ha un andamento che cresce più che fattorialmente, all'aumentare di w l'integrale in ξ cresce anch'esso più che fattorialmente, ed è quindi chiaro che l'integrale in w non può convergere.

Come nel caso precedente, adottiamo la prescrizione di limitare la regione di integrazione con un cut-off C . Si ottiene così

$$R^{\text{BP}}(\bar{L}, C) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \frac{d}{dw} \Sigma\left(\frac{w}{\xi}\right) \quad (6.86)$$

dove abbiamo scambiato l'ordine di integrazione. Per l'integrale in ξ si deve scegliere un cammino di integrazione che passi a sinistra di $-\frac{C}{\rho_0}$, cioè l'estremo corrispondente al massimo valore di w . Questa formula, avendo scelto un cut-off C , rappresenta la cercata estensione della *Borel prescription* al caso della distribuzione in impulso trasverso.

Notiamo che possiamo riscrivere la (6.86), tramite un'integrazione per parti, come

$$R^{\text{BP}}(\bar{L}, C) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \left[e^{-\frac{C}{\alpha}} \Sigma\left(\frac{C}{\xi}\right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \Sigma\left(\frac{w}{\xi}\right) \right]; \quad (6.87)$$

il vantaggio di questa seconda forma è la sua migliore implementabilità, dal momento che contiene direttamente Σ e non la sua derivata. Osserviamo che, se si usa la trasformata alternativa (6.84), si ottiene, mettendo anche qui un cut-off C ,

$$R^{\text{BP}' }(\bar{L}, C) = \frac{1}{\alpha \pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\alpha}} \Sigma\left(\frac{w}{\xi}\right). \quad (6.88)$$

Questa espressione è identica alla (6.87), eccetto per la mancanza del termine di bordo; infatti, questa prescrizione alternativa può essere ottenuta dalla precedente se il cut-off C viene messo *dopo* l'integrazione per parti, perché in tal caso il termine di bordo si annulla.

La discussione sul significato di questa prescrizione ricalca quella presentata nel caso della sezione d'urto totale, che qui ripercorriamo. La serie divergente è stata regolarizzata mediante l'introduzione del termine

$$R^{\text{ht}}(\bar{L}, C) \equiv R(\bar{L}) - R^{\text{BP}}(\bar{L}, C). \quad (6.89)$$

Per capire l'entità del termine $R^{\text{ht}}(\bar{L}; C)$, consideriamone il suo troncamento in serie all'or-

dine K ; per prima cosa calcoliamo, tramite l'espressione (6.60) per R_K ,

$$\begin{aligned}
R_K^{\text{BP}}(\bar{L}, C) &\equiv \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\bar{\alpha}}} \hat{R}_K(w, \bar{L}) \\
&= 2 \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \frac{1}{(k-1)!} \bar{L}^{k-j} \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\bar{\alpha}}} w^{k-1} \\
&= 2 \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \frac{\gamma\left(k, \frac{C}{\bar{\alpha}}\right)}{(k-1)!} \bar{\alpha}^k \bar{L}^{k-j}
\end{aligned} \tag{6.90}$$

dove si è fatto uso della definizione della funzione Gamma troncata

$$\gamma(k, z) = \int_0^z dt e^{-t} t^{k-1} = (k-1)! \left(1 - e^{-z} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{z^n}{n!} \right). \tag{6.91}$$

Troviamo

$$\begin{aligned}
R_K^{\text{ht}}(\bar{L}, C) &= R_K(\bar{L}) - R_K^{\text{BP}}(\bar{L}, C) \\
&= 2 e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} \sum_{j=0}^K \frac{M^{(j)}(0)}{j!} \sum_{k=j}^K \frac{k!}{(k-j)!} h_k \bar{\alpha}^k \bar{L}^{k-j} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{C}{\bar{\alpha}} \right)^n.
\end{aligned} \tag{6.92}$$

L'andamento di questa quantità nel limite $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ è determinato dall'esponenziale a fattore,

$$R_K^{\text{ht}}(\bar{L}, C) \underset{\bar{\alpha} \rightarrow 0}{\sim} e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}}, \tag{6.93}$$

che si annulla più velocemente di ogni potenza di $\bar{\alpha}$ quando $\bar{\alpha} \rightarrow 0$; ne segue che la differenza tra R^{BP} (come definita in (6.86), cioè nel limite $K \rightarrow \infty$) e lo sviluppo troncato dell'espressione originaria R_K è dell'ordine di $\bar{\alpha}^{K+1}$ (cioè il primo termine trascurato nello sviluppo in serie di R): equivalentemente, la serie (6.60) per R è *asintotica* al nostro risultato R^{BP} di (6.86).

Inoltre possiamo riscrivere, usando la forma all'ordine leading per $\alpha_s(Q^2)$ data in (3.17), il termine

$$e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} = \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^C [1 + \mathcal{O}(\alpha_s(Q^2))] , \tag{6.94}$$

da cui è evidente che il termine R_K^{ht} è soppresso per grandi valori di Q^2 (ossia è un termine di higher twist, come descritto nella Sezione precedente).

Si osservi che la scelta di C è totalmente arbitraria, e diverse scelte corrispondono all'inclusione di un opportuno termine di higher twist. Non vi è una scelta che a priori sia migliore di altre; in linea di principio si potrebbe calcolare l'integrale di inversione con un valore di C arbitrariamente grande. Tuttavia, dal momento che si tratta in ogni caso di una prescrizione, è conveniente scegliere un valore relativamente basso, in modo da rendere più veloce e preciso il calcolo numerico. La scelta $C = 1$ è minimale nel senso che corrisponde all'inclusione di termini next-to-leading twist (twist 4). A titolo di confronto, nel prossimo capitolo mostreremo anche risultati ottenuti con $C = 2$ e $C = 3$.

Capitolo 7

Risultati

In questo Capitolo confronteremo i risultati ottenuti con la prescrizione proposta nel Capitolo precedente con quelli ottenuti utilizzando altre prescrizioni proposte in letteratura, e discuteremo vantaggi e svantaggi di ognuna di esse. Ci concentreremo sul caso della sezione d'urto differenziale in impulso trasverso, a cui si riferiscono i risultati originali della tesi.

7.1 Altre prescrizioni

Come spiegato nel Capitolo precedente, la struttura analitica della sezione d'urto risommata $\Sigma(\bar{\alpha}L)$ rende mal definita l'inversione della trasformata di Fourier. In letteratura sono state proposte varie prescrizioni per risolvere questo problema. Esse possono essere divise in due categorie: nella prima, l'integrale di inversione viene eseguito lungo un percorso di integrazione modificato, in modo da aggirare il branch cut; nella seconda, l'inversione viene effettuata termine a termine sulla sezione d'urto approssimata ad una certa accuratezza logaritmica, in modo da non risentire della divergenza della serie (la prescrizione di Borel proposta in questa tesi appartiene alla seconda categoria, ma consente di utilizzare la sezione d'urto risommata nello spazio della variabile coniugata includendo tutti gli ordini di accuratezza logaritmica). Appartengono alla prima categoria la prescrizione che nel seguito verrà chiamata b_* , proposta in [29], e la cosiddetta minimal prescription [32], mentre esempi della seconda categoria sono le approssimazioni LL [30] e NLL [31]. Ricordiamo che la funzione $\Sigma(\bar{\alpha}L)$ ha un taglio sull'asse reale negativo $\bar{\alpha}L \leq \rho_0 = -1$. L'estremo del taglio corrisponde al valore

$$b = b_L \equiv \frac{b_0}{Q} e^{\frac{1}{2\bar{\alpha}}} , \quad (7.1)$$

valore in cui si colloca il polo di Landau.

7.1.1 b_* prescription

Questa prescrizione consiste nel sostituire la variabile b con una funzione che approssimi bene b per $b \ll b_L$, ma che tenda ad un limite finito $b_{\text{lim}} \leq b_L$ quando $b > b_L$. Un esempio è

$$b_* \equiv \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{b_{\text{lim}}}\right)^2}}. \quad (7.2)$$

In questo modo, al variare di b da 0 a ∞ , b_* si mantiene minore di b_{lim} , e quindi nell'integrale la funzione Σ non viene mai calcolata sul taglio. Si ottiene quindi, al posto della (6.43),

$$\bar{\Sigma}^{b_*}(\hat{q}_T^2) = \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \Sigma \left(\bar{\alpha} \log \frac{b_0^2}{Q^2 b_*^2} \right). \quad (7.3)$$

La motivazione per questa procedura consiste nell'osservazione che la regione di b molto grandi è comunque affetta da incertezze dovute ad effetti non perturbativi: l'arbitrarietà della funzione b_* e del valore di b_{lim} può essere quindi considerata come una parametrizzazione di tali effetti. Lo svantaggio principale di questa prescrizione consiste nelle difficoltà connesse con la sua implementazione numerica. Questo punto è stato affrontato e discusso in [30].

7.1.2 Minimal prescription

In questa prescrizione si deforma il cammino di integrazione nel piano complesso di b , in modo da evitare il taglio che si estende sull'asse reale da b_L a $+\infty$. Il nome minimal prescription deriva dall'analoga prescrizione per il caso della sezione d'urto totale [23]: in entrambi i casi questo cammino modificato restituisce il risultato corretto nel caso in cui la funzione Σ è invertibile.

Vediamo in qualche dettaglio in che modo è costruita questa prescrizione. La scelta naturale sembra essere quella di integrare lungo l'asse reale fino ad un certo valore di b minore di b_L , e poi deformare il cammino di integrazione verso il semipiano superiore o inferiore (cioè scegliere uno dei due cammini mostrati in Figura 7.1). Questa non è tuttavia la scelta corretta. Infatti, nell'integrale (6.43) la funzione Σ è moltiplicata per $\hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b})$, e questo fattore oscilla con ampiezza crescente andando verso l'infinito lungo il cammino di integrazione γ_1 o γ_2 , rendendo impossibile il calcolo numerico. La soluzione trovata in [32] consiste nel riscrivere la funzione di Bessel di ordine 0 come

$$J_0(z) = h_1(z, v) + h_2(z, v) \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad (7.4)$$

dove

$$h_1(z, v) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+iv\pi}^{-iv\pi} d\theta e^{-iz \sin \theta}, \quad (7.5a)$$

$$h_2(z, v) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-iv\pi}^{\pi+iv\pi} d\theta e^{-iz \sin \theta}, \quad (7.5b)$$

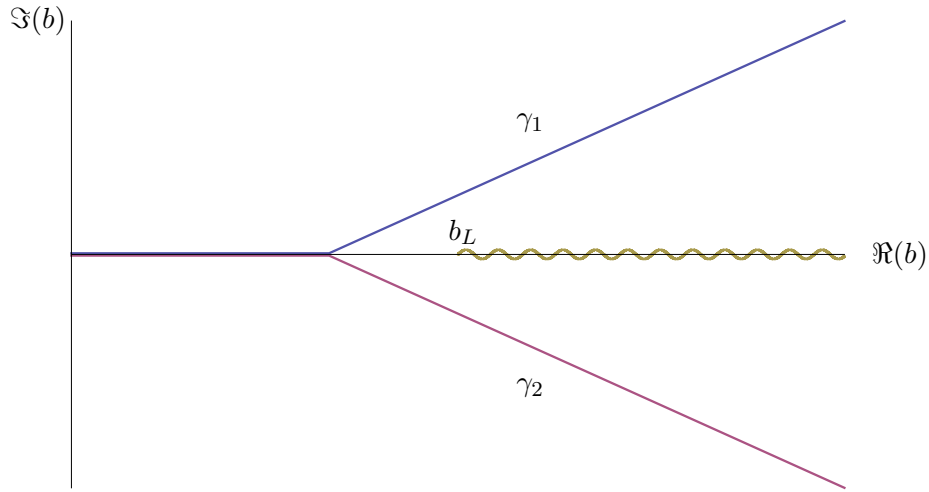


Figura 7.1: Cammini modificati per minimal prescription; la curva ondulata rappresenta il taglio della funzione integranda.

e v è una costante arbitraria. Si noti che per $v = 0$ l'identità (7.4) coincide esattamente con la forma integrale (6.44). Il vantaggio dell'introduzione di queste funzioni è che h_1 tende a zero nel semipiano superiore $\Re(b) > 0$, $\Im(b) > 0$ e h_2 tende a zero nel semipiano inferiore, $\Re(b) > 0$, $\Im(b) < 0$. Quindi si può scegliere di calcolare l'antitrasformata di Fourier di Σ come

$$\bar{\Sigma}^{\text{MP}}(\hat{q}_T^2) = \int_{\gamma_1} d\hat{b} \hat{b} h_1(\hat{q}_T \hat{b}, v) \Sigma(\bar{\alpha}L) + \int_{\gamma_2} d\hat{b} \hat{b} h_2(\hat{q}_T \hat{b}, v) \Sigma(\bar{\alpha}L). \quad (7.6)$$

Questa prescrizione ha il vantaggio di essere esatta se la funzione non ha tagli, in quanto consiste semplicemente in una deformazione del cammino di integrazione. Tuttavia possiede due svantaggi: il primo è numerico, in quanto richiede il calcolo preliminare delle funzioni h_1 e h_2 , usualmente non disponibili nelle librerie più comunemente usate. Il secondo svantaggio è l'assenza di parametri liberi, che consentano la stima delle ambiguità connesse con l'uso di una prescrizione arbitraria.

7.1.3 Approssimazione leading log

Un altro modo di operare è quello di calcolare l'antitrasformata di Fourier termine a termine della sezione d'urto approssimata ad un certo grado di accuratezza logaritmica. Per fare questo sarà utile la relazione (6.55), che riportiamo qui:

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} M^{(j)}(0) \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \log^{k-j} \hat{q}_T^2.$$

Come anticipato, l'approssimazione leading log (LL) consiste nel tenere solo la potenza più alta (corrispondente al termine $j = 0$) di $\log \hat{q}_T^2$ nell'inversione di ogni termine, vale a dire

$$\left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right]_{\text{LL}} = 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \log^k \hat{q}_T^2. \quad (7.7)$$

Così, per una generica funzione

$$F(L) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k L^k \quad (7.8)$$

si ottiene

$$\left[\int_0^{\infty} d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) F(L) \right]_{\text{LL}} = 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \sum_{k=0}^{\infty} F_k \log^k \hat{q}_T^2 = 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} F(\log \hat{q}_T^2) . \quad (7.9)$$

Nel caso di Σ , si trova

$$\bar{\Sigma}^{\text{LL}}(\hat{q}_T^2) = 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \Sigma(\bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2) , \quad (7.10)$$

che è il risultato presentato in [30].

Questa prescrizione ha un'ovvia limitazione: a causa del taglio in Σ , $\bar{\Sigma}^{\text{LL}}$ è definita solo per

$$\hat{q}_T > e^{-\frac{1}{2\bar{\alpha}}} , \quad (7.11)$$

corrispondente al polo di Landau. Questo range è tuttavia sufficiente per la maggior parte delle applicazioni fenomenologiche. Per esempio, per $Q \sim 100 \text{ GeV}$ il valore minimo di q_T ammesso dalla (7.10) è $\sim 156 \text{ MeV}$.

In [30] si sostiene che questa approssimazione è valida al NNLL. Questo viene dedotto dal fatto che, per una scelta opportuna di b_0 , il secondo ed il terzo termine dello sviluppo (6.55) sono nulli. Infatti si ha

$$M^{(1)}(0) = \log \frac{b_0^2}{4} + 2\gamma_E \quad (7.12)$$

$$M^{(2)}(0) = \left(\log \frac{b_0^2}{4} + 2\gamma_E \right)^2 , \quad (7.13)$$

che per $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ si annullano.¹ Ciò nonostante, la formula (7.10) è di fatto valida solo al LL, perché nel caso fisico le approssimazioni $N^n\text{LL}$ vanno fatte sull'esponente di Sudakov \mathcal{S} , essendo $\Sigma = \exp \mathcal{S}$.

7.1.4 Approssimazione next-to-leading log

Cerchiamo quindi una forma di $\bar{\Sigma}$ accurata al NLL nel senso descritto nella sottosezione precedente. Per raggiungere questo obiettivo è utile riscrivere la (6.55) in un modo alternativo. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log^k \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} &= \frac{1}{\hat{q}_T^2} \int_0^{\infty} dx x J_0(x) \log^k \frac{b_0^2 \hat{q}_T^2}{x^2} \\ &= \frac{1}{\hat{q}_T^2} \int_0^{\infty} dx \frac{d}{dx} [x J_1(x)] \log^k \frac{b_0^2 \hat{q}_T^2}{x^2} \\ &= 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \int_0^{\infty} dx J_1(x) \left(\log \hat{q}_T^2 + \log \frac{b_0^2}{x^2} \right)^k . \end{aligned} \quad (7.14)$$

¹Questo valore di b_0 ha una sua magia: oltre ad essere legato, come evidente, alle derivate di M (cioè ad integrali di funzioni di Bessel) esso ha anche la bella proprietà di semplificare la forma di alcuni coefficienti (derivanti dalla fisica), come mostrato in [33].

Nel primo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $x = \hat{q}_T \hat{b}$; nel secondo abbiamo usato l'identità

$$x J_0(x) = \frac{d}{dx} [x J_1(x)] , \quad (7.15)$$

e nell'ultimo abbiamo integrato per parti, sfruttando il fatto che

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{\hat{q}_T}{x}\right) = -2 \frac{\hat{q}_T^2}{x} \frac{d}{d\hat{q}_T^2} f\left(\frac{\hat{q}_T}{x}\right) . \quad (7.16)$$

Sviluppando la potenza del binomio e integrando i singoli termini si ritrova esattamente la (6.55), come si può verificare notando che

$$M^{(j)}(0) = \int_0^\infty dx J_1(x) \log^j \frac{b_0^2}{x^2} , \quad (7.17)$$

che si può facilmente ottenere da

$$M(\eta) = \int_0^\infty dx J_1(x) \left(\frac{b_0^2}{x^2}\right)^\eta , \quad (7.18)$$

che deriva a sua volta dalla (6.49).

Il vantaggio della (7.14) è di permettere di effettuare un'approssimazione NⁿLL *prima* di calcolare l'integrale di inversione. In questo modo, possiamo approssimare al NLL l'esponente di Sudakov, e con la sua forma approssimata invertire Σ . Usando di nuovo le notazioni generiche della Sottosezione precedente, consideriamo una funzione $F(L)$ sviluppabile come in (7.8), e sviluppiamo in serie il suo logaritmo

$$G(L) \equiv \log F(L) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k L^k . \quad (7.19)$$

L'approssimazione NLL si ottiene sviluppando $L^k = \left(\log \hat{q}_T^2 + \log \frac{b_0^2}{x^2}\right)^k$ al secondo ordine in $\log \frac{b_0^2}{x^2}$:

$$\begin{aligned} [G(L)]_{\text{NLL}} &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k \left(\log^k \hat{q}_T^2 + k \log^{k-1} \hat{q}_T^2 \log \frac{b_0^2}{x^2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k \log^k \hat{q}_T^2 + \log \frac{b_0^2}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} G_k k \log^{k-1} \hat{q}_T^2 \\ &= G(\log \hat{q}_T^2) + G'(\log \hat{q}_T^2) \log \frac{b_0^2}{x^2} . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) F(L) \right]_{\text{NLL}} &= 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \int_0^\infty dx J_1(x) \exp \left(G(\log \hat{q}_T^2) + G'(\log \hat{q}_T^2) \log \frac{b_0^2}{x^2} \right) \\ &= 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \left[F(\log \hat{q}_T^2) \int_0^\infty dx J_1(x) \left(\frac{b_0^2}{x^2} \right)^{G'(\log \hat{q}_T^2)} \right] \\ &= 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \left[F(\log \hat{q}_T^2) M(G'(\log \hat{q}_T^2)) \right] , \end{aligned} \quad (7.21)$$

in cui si è fatto uso della (7.18). Applicando questa formula alla sezione d'urto otteniamo il risultato NLL presentato in [31]

$$\bar{\Sigma}^{\text{NLL}}(\hat{q}_T^2) = 2 \frac{d}{d\hat{q}_T^2} \left[\Sigma(\bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2) M \left(\frac{d}{d \log \hat{q}_T^2} \log \Sigma(\bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2) \right) \right]. \quad (7.22)$$

Occorre precisare che NLL qui si riferisce all'accuratezza logaritmica con cui si effettua l'antitrasformata di Fourier, ma anche Σ è calcolata con una certa accuratezza logaritmica. Per coerenza, dunque, se la Σ è calcolata con un'accuratezza $N^n\text{LL}$, dal momento che nella derivata ad argomento di M compare un $\bar{\alpha}$, lì la Σ può essere calcolata con un'accuratezza inferiore, $N^{n-1}\text{LL}$.

In linea di principio questa prescrizione costituisce un miglioramento rispetto all'approssimazione LL della Sottosezione precedente. In pratica tuttavia, nella regione più interessante dei piccoli valori di q_T , si scopre che le cose non stanno così: infatti, a causa delle singolarità della funzione M , questa prescrizione è definita solo per q_T maggiore di un certo valore, che non soltanto è maggiore del valore a cui l'approssimazione LL fallisce, ma per di più è una funzione crescente di Q^2 . Questo è dovuto al fatto che la serie invertita termine a termine è divergente, quando si includano tutti gli ordini di accuratezza logaritmica.

7.2 Risultati analitici

In questa Sezione confronteremo le diverse prescrizioni tramite l'inversione di funzioni semplici che diano risultati calcolabili analiticamente.

7.2.1 Inversione di $\log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2}$

L'esempio più semplice è il caso in cui la Σ consti solamente del primo termine dello sviluppo, e in particolare del solo logaritmo L :

$$L = \frac{1}{\bar{\alpha}} (\bar{\alpha} L). \quad (7.23)$$

In questo caso conosciamo il risultato esatto: dalla (6.55) si ha

$$\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} = \frac{2}{\hat{q}_T^2}. \quad (7.24)$$

Dal momento che L è definita su tutto il semipiano $\Re(b) > 0$, la minimal prescription costituisce una deformazione del cammino di integrazione in una regione di analiticità della funzione, e perciò restituisce il risultato esatto:

$$\left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right]_{\text{MP}} = \frac{2}{\hat{q}_T^2}. \quad (7.25)$$

La Borel prescription, invece, dipende dal parametro C ; se C fosse infinito darebbe il risultato esatto, come è ovvio per il fatto che in questo caso l'inversione di Borel sarebbe esatta e applicata ad una serie convergente (di fatto contiene un solo termine). Per C generico, si ottiene direttamente dalla (6.86), usando il teorema dei residui,

$$\left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right]_{\text{BP}} = \frac{2}{\hat{q}_T^2} \left(1 - e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} \right). \quad (7.26)$$

Si noti che questo risultato differisce dal risultato esatto per un termine soppresso da un esponenziale (un termine di higher twist), che è tanto più piccolo quanto più grande è C (coerentemente col fatto che per $C \rightarrow \infty$ si ha il risultato esatto) ma anche quando $\bar{\alpha} \rightarrow 0$, cioè, per la QCD, nel limite di grandi energie (grandi valori di Q^2).

Usando la Borel prescription alternativa (6.88) si ottiene invece

$$\left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right]_{\text{BP}'} = \frac{2}{\hat{q}_T^2} \left[1 - e^{-\frac{C}{\bar{\alpha}}} \left(1 + \frac{C}{\bar{\alpha}} \right) \right]. \quad (7.27)$$

La prescrizione b_* dà invece un risultato all'apparenza molto diverso:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}_*^2} &= \int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \left[\frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \left(1 + \frac{\hat{b}^2}{\hat{b}_{\text{lim}}^2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\hat{q}_T^2} \left[1 - \hat{b}_{\text{lim}} \hat{q}_T K_1(\hat{b}_{\text{lim}} \hat{q}_T) \right], \end{aligned} \quad (7.28)$$

dove K_1 è una funzione di Bessel. Essa differisce dal risultato esatto per un termine che tende a zero per $\hat{q}_T \gg \frac{1}{\hat{b}_{\text{lim}}}$ come si vede dall'andamento asintotico $K_1(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} e^{-z}/\sqrt{z}$, ma è significativamente grande per \hat{q}_T piccoli; in particolare, l'inversione del logaritmo si annulla per $\hat{q}_T = 0$.

L'approssimazione LL dà anch'essa, naturalmente, il risultato esatto

$$\left[\int_0^\infty d\hat{b} \hat{b} J_0(\hat{q}_T \hat{b}) \log \frac{b_0^2}{\hat{b}^2} \right]_{\text{LL}} = \frac{2}{\hat{q}_T^2}, \quad (7.29)$$

dato che l'inversione del logaritmo leading in b contiene solo il logaritmo leading in q_T . Non ha ovviamente alcun significato considerare l'approssimazione NLL all'inversione del logaritmo singolo.

I vari risultati appena descritti sono riportati in Figura 7.2, in cui il risultato è moltiplicato per \hat{q}_T^2 , per rendere più facile la lettura. La curva solida è la trasformata inversa esatta, che coincide con i risultati ottenuti con la minimal prescription e l'approssimazione LL. La Borel prescription è rappresentata dalla curva tratteggiata, che si scosta un poco da quella esatta; per calcolarla abbiamo usato

$$\bar{\alpha} = 0.1, \quad C = 0.5. \quad (7.30)$$

Il valore di C è stato scelto volutamente piccolo, in modo da apprezzare visivamente la differenza nel grafico: già per $C = 1$ la curva esatta e la Borel prescription non si distinguono. La curva puntata è la prescrizione b_* , calcolata con

$$\hat{b}_{\text{lim}} = \hat{b}_L = 166.7, \quad (7.31)$$

avendo usato la (7.1) (in realtà, nel caso di singolo logaritmo b_L non ha nessun senso; esso compare solo nel caso della sezione d'urto reale).

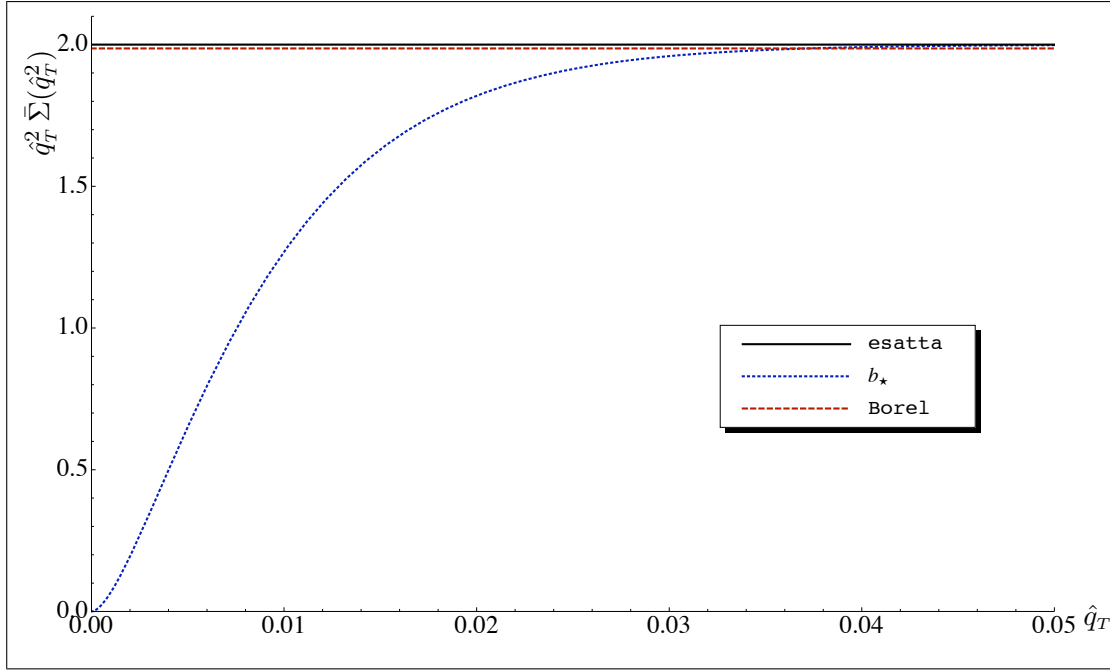


Figura 7.2: Prescrizioni per l'inversione del singolo logaritmo.

7.2.2 Dimensione anomala al LL

Un'altra grandezza che è utile studiare è la cosiddetta dimensione anomala γ , definita come

$$\gamma(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = \frac{d\mathcal{S}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L)}{d \log Q^2}, \quad (7.32)$$

essendo \mathcal{S} l'esponente di Sudakov (5.49). Usando questa espressione si trova in generale

$$\gamma(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = - \int_{\frac{b_0^2}{\bar{v}^2}}^{Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} A(\alpha_s(\mu^2)) - B(\alpha_s(Q^2)). \quad (7.33)$$

Nell'approssimazione LL contribuisce solo il termine con A_1 , e si ottiene, effettuando una semplice integrazione, con $\alpha_s(\mu^2)$ dato dalla (3.14),

$$\gamma_{\text{LL}}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = \frac{A_1}{\beta_0} \log(1 + \bar{\alpha}L). \quad (7.34)$$

Questa funzione è considerevolmente più semplice della sezione d'urto; tuttavia è abbastanza rappresentativa del caso generale, perché presenta lo stesso taglio da $\bar{\alpha}L = -\infty$ a $\bar{\alpha}L = -1$ della sezione d'urto, che rende necessario l'utilizzo di una prescrizione per l'inversione della trasformata.

L'approssimazione LL è, al solito, molto semplice:

$$\bar{\gamma}_{\text{LL}}^{\text{LL}}(\hat{q}_T^2) = \frac{2A_1\bar{\alpha}}{\beta_0\hat{q}_T^2} \frac{1}{1 + \bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2}, \quad (7.35)$$

questa espressione mostra esplicitamente la presenza del polo di Landau situato a $\hat{q}_T = e^{-\frac{1}{2\bar{\alpha}}}$.

Anche la Borel prescription si applica in questo caso in modo molto semplice, grazie al fatto che la derivata

$$\frac{d}{dw} \gamma_{\text{LL}} \left(\bar{\alpha}, \frac{w}{\xi} \right) = \frac{A_1}{\beta_0} \frac{1}{\xi + w} \quad (7.36)$$

può essere prolungata analiticamente ove in Σ vi era il taglio, lasciando unicamente un polo in $\xi = -w$. Usando la (6.86), si trova

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\text{LL}}^{\text{BP}}(\hat{q}_T^2, C) &= \frac{A_1}{\beta_0 \hat{q}_T^2} \int_0^C dw e^{-\frac{w}{\bar{\alpha}}} \frac{1}{\pi i} \oint_C d\xi e^{\bar{L}\xi} M(\xi) \frac{1}{\xi + w} \\ &= \frac{2A_1}{\beta_0 \hat{q}_T^2} \int_0^C dw e^{-w(\frac{1}{\bar{\alpha}} + \bar{L})} M(-w) \\ &= \frac{2A_1}{\beta_0 \hat{q}_T^2} \int_0^C dw \left(\frac{\Lambda^2}{q_T^2} \right)^w M(-w), \end{aligned} \quad (7.37)$$

dove all'ultimo passaggio si è usata coerentemente l'approssimazione LL per la running coupling (3.17). Si vede chiaramente, in questa forma, che l'integrale in w diverge nel limite $C \rightarrow \infty$, a causa dell'andamento oscillante con ampiezza crescente più che fattorialmente del termine $M(-w)$. È importante osservare che in questo caso la Borel prescription rende l'integrale convergente trascurando termini che sono soppressi come una potenza inversa di q_T^2 e non di Q^2 , come avveniva nel caso del logaritmo. Infatti, il termine trascurato è

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\text{LL}}^{\text{ht}}(\hat{q}_T^2, C) &= \frac{2A_1}{\beta_0 \hat{q}_T^2} \int_C^\infty dw \left(\frac{\Lambda^2}{q_T^2} \right)^w M(-w) \\ &= \frac{2A_1}{\beta_0 \hat{q}_T^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q_T^2} \right)^C \int_0^\infty dw \left(\frac{\Lambda^2}{q_T^2} \right)^w M(-w - C). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Questo mostra che la Borel prescription per la dimensione anomala è tanto migliore quanto più q_T è grande, fatto confortante perché per q_T grande le approssimazioni ad ordine fisso sono sufficienti, e quindi i risultati devono coincidere. Per q_T piccolo invece la prescrizione diventa rilevante, e il risultato differirà in generale da quelli ottenuti con altre prescrizioni. Ci si aspetta che queste considerazioni siano ancora valide nel caso, più complesso, della sezione d'urto. Questo è ciò che verificheremo, con metodi numerici, nella prossima Sezione.

7.3 Risultati numerici

Passiamo ora al confronto delle diverse prescrizioni nel caso realistico della distribuzione in impulso trasverso per il processo di produzione di coppie di Drell-Yan, risommata nello spazio del parametro di impatto b fino all'accuratezza next-to-leading log. Si ha

$$\Sigma(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}L) = \exp \mathcal{S}_{\text{NLL}} \left(Q^2, \frac{b_0^2}{b^2} \right), \quad (7.39)$$

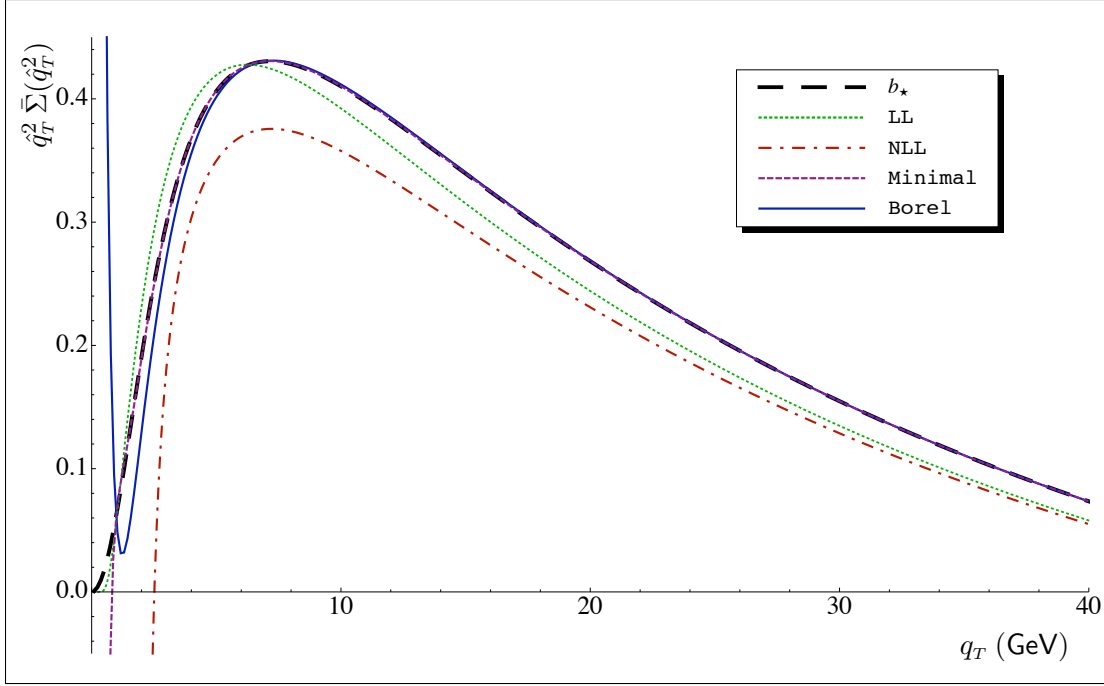


Figura 7.3: Sezione d'urto al NLL per il processo di Drell-Yan ottenuta con diverse prescrizioni (Borel prescription con $C = 1$).

dove \mathcal{S}_{NLL} è data in (5.69). A questo livello di accuratezza, gli unici coefficienti rilevanti sono A_1 , A_2 e B_1 , che per $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ assumono i valori

$$A_1 = \frac{C_F}{\pi} \quad (7.40a)$$

$$A_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27} n_f \right) \quad (7.40b)$$

$$B_1 = -\frac{3C_F}{2\pi} . \quad (7.40c)$$

Naturalmente l'espressione è troppo complicata per poter essere invertita analiticamente con tutte le prescrizioni descritte all'inizio del Capitolo. Di fatto, un calcolo analitico è possibile solo per le prescrizioni LL e NLL, mentre le altre richiedono necessariamente il calcolo di integrali numerici.

Per mezzo di un codice appositamente creato abbiamo ottenuto i grafici riportati in Figura 7.3 ottenuti per

$$Q = 100 \text{ GeV} . \quad (7.41)$$

Il valore di b_{lim} necessario per la prescrizione b_* è stato scelto uguale alla posizione del polo di Landau:

$$b_{\text{lim}} = b_L = 7.2 \text{ GeV}^{-1} . \quad (7.42)$$

Infine, la curva corrispondente alla Borel prescription è stata calcolata per il valore $C = 1$.

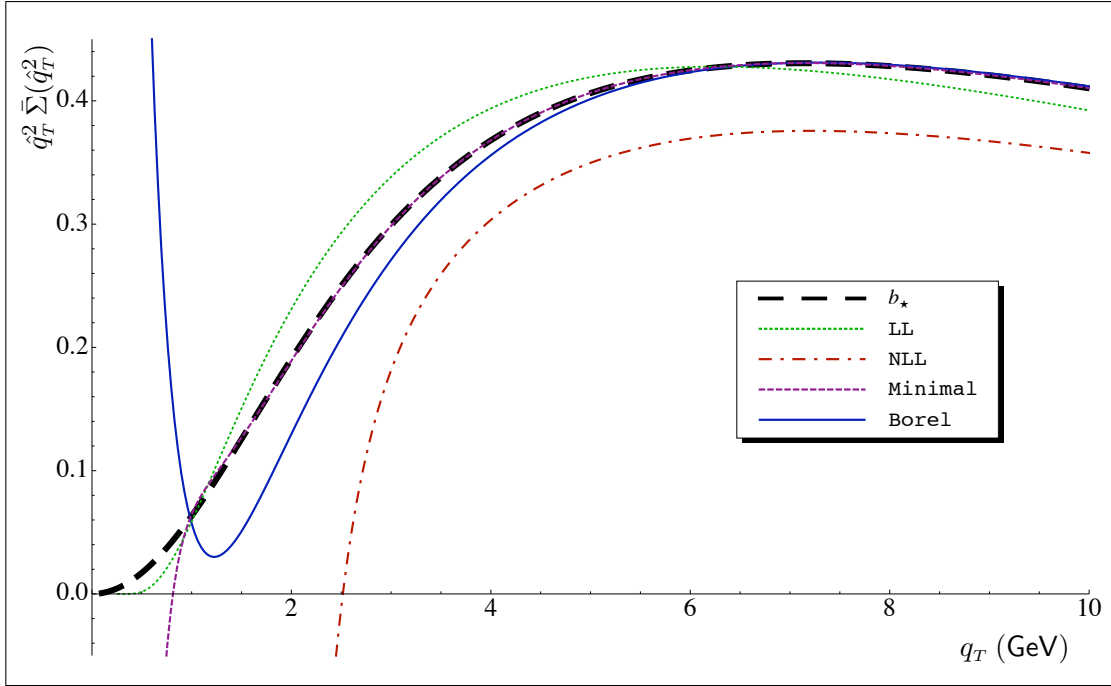


Figura 7.4: Sezione d'urto al NLL per il processo di Drell-Yan ottenuta con diverse prescrizioni (Borel prescription con $C = 1$).

Questo grafico mostra chiaramente alcuni fatti. Per $q_T \gtrsim 10$ GeV, dove ci si aspetta un buon accordo con i risultati ad ordine fisso, si vede che le tre prescrizioni che operano l'inversione a tutti gli ordini logaritmici, cioè Borel prescription, minimal prescription e b_* prescription, sono perfettamente sovrapposte. Si osservi che per grandi q_T ci si aspetta che la b_* prescription dia risultati esatti: questo perché la prescrizione riparametrizza la zona a b grande, che corrisponde attraverso la trasformata di Fourier a q_T piccolo. Il perfetto accordo delle tre curve in questa regione conferma questa aspettativa.

Altra sorte hanno invece le approssimazioni LL e NLL. Entrambe, anche a grande q_T , differiscono parecchio dal risultato corretto. Inoltre, l'approssimazione NLL, invece di migliorare quella LL la peggiora parecchio, come anticipato, soprattutto nella regione di bassi q_T , riportata in Figura 7.4, in cui l'effetto dei termini NNLL e oltre, trascurati, è più importante. Infatti nel caso LL, come spiegato alla Sottosezione 7.1.3, il risultato è definito solo sopra il polo di Landau, cioè

$$q_T > Q e^{-\frac{1}{2\bar{\alpha}}} = 156 \text{ MeV} ; \quad (7.43)$$

quindi questa approssimazione è utilizzabile in un range di q_T sufficientemente ampio (per q_T dell'ordine del centinaio di MeV gli effetti non perturbativi saranno comunque rilevanti). Invece, nel caso NLL, il limite inferiore è dato dalla condizione che l'argomento di M sia minore di 1; tale argomento è la derivata logaritmica rispetto a $\log \hat{q}_T^2$ di $\Sigma(\bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2)$, però per essere coerenti con l'approssimazione NLL a tale termine deve contribuire solo $S_{LL} = \frac{1}{\bar{\alpha}} f_0$,

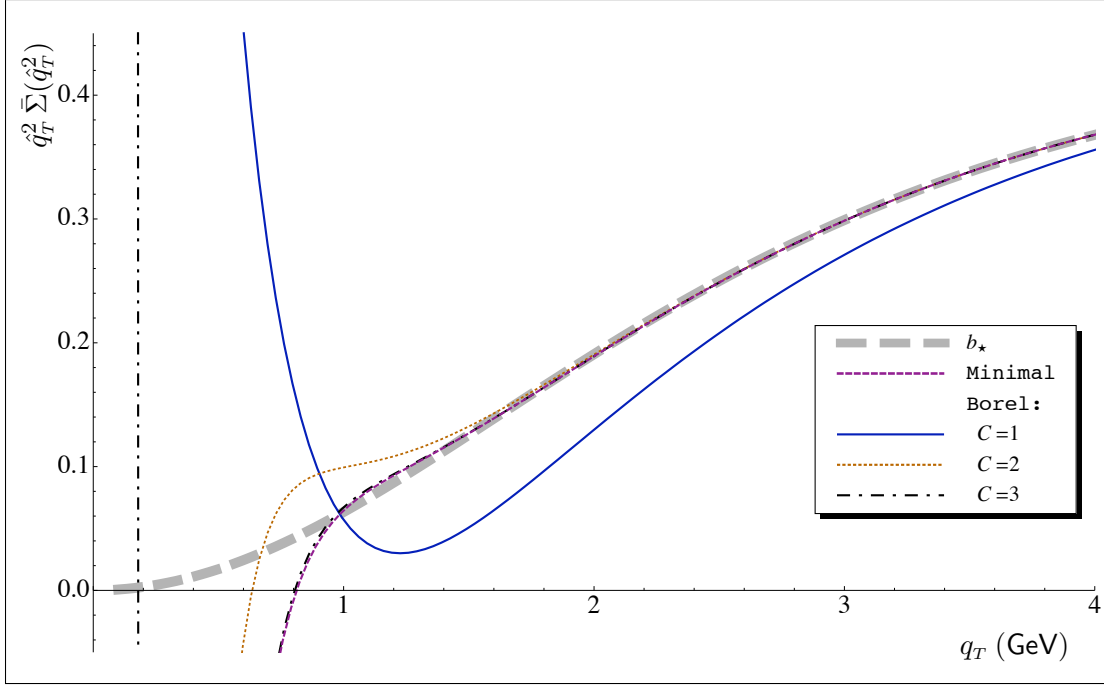


Figura 7.5: Confronto tra b_* prescription, minimal prescription e Borel prescription a diversi valori di C .

come definita in (5.64). Questa condizione è

$$-\frac{A_1}{\beta_0} \frac{\bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2}{1 + \bar{\alpha} \log \hat{q}_T^2} < 1, \quad (7.44)$$

ovvero

$$q_T > Q \exp\left(-\frac{1}{2(\beta_0 + A_1)\alpha_s(Q^2)}\right) \stackrel{\text{LL}}{\equiv} \Lambda \left(\frac{Q}{\Lambda}\right)^{\frac{A_1}{\beta_0 + A_1}}, \quad (7.45)$$

che è una funzione crescente di Q . Nel nostro caso si ha

$$q_T > 1.73 \text{ GeV} \quad (7.46)$$

che, come si può vedere dal grafico, è ben al di sopra del limite per l'approssimazione LL.

La conclusione che traiamo da questi argomenti è che le approssimazioni LL, NLL o oltre non sono affidabili, ed è necessario includere tutti i termini nell'inversione per avere un risultato accettabile. Perciò tralasciamo queste approssimazioni e concentriamoci sulle tre prescrizioni integrali.

In Figura 7.5 sono presentate le tre prescrizioni integrali in un range più piccolo; per la Borel prescription sono illustrati i grafici calcolati con $C = 1, 2, 3$.

La b_* prescription ha una particolarità: $\hat{q}_T^2 \bar{\Sigma}^{b_*}(\hat{q}_T^2)$ tende a zero per $q_T \rightarrow 0$. Questo si capisce anche dall'inversione del singolo logaritmo, Figura 7.2; quindi questo andamento, come si sapeva, non è veritiero. Inoltre, la b_* prescription è relativamente semplice da implementare numericamente a livello della sezione d'urto partonica, ma ha il difetto di avere difficoltà nel matching col risultato all'ordine fisso, come spiegato in [30].

La minimal prescription è la più complicata da implementare e la più lenta da eseguire, in quanto richiede di calcolare due volte (per ogni punto) un integrale nel piano complesso in cui la funzione integranda è anch'essa definita tramite un integrale nel piano complesso.² Inoltre in tale prescrizione non vi è nessun parametro libero. Visto che non pretende di essere una inversione esatta ma solo, per l'appunto, una prescrizione, quest'assenza non permette alcuna parametrizzazione di eventuali effetti che non sono tenuti in conto dalla teoria delle perturbazioni.

La Borel prescription, la cui complessità computazionale è intermedia (un integrale complesso in un percorso chiuso e un integrale reale), ha il vantaggio di possedere un grado di libertà, il cut-off C . In Figura sono riportate le curve per $C = 1, 2, 3$; vediamo che per $C = 1$ la curva si discosta³ dalle altre a cominciare da $q_T \sim 6 \text{ GeV}$, mentre per $C = 2, 3$ l'accordo con le altre prescrizioni è buono fino a $q_T \sim 2 \text{ GeV}$.

È comunque doveroso notare che, per $q_T \gtrsim 2 \text{ GeV}$, l'accordo tra b_* prescription, minimal prescription e Borel prescription con $C \geq 2$ è stupefacente; dal momento che valori così piccoli di q_T sono molto difficili da studiare sperimentalmente, si conclude che per applicazioni fenomenologiche l'ambiguità che deriva dallo scegliere l'una o l'altra delle tre prescrizioni in questione è trascurabile (con la riserva per la b_* prescription sul problema del matching con il calcolo completo a ordine fisso). La scelta sarà pertanto dettata essenzialmente da considerazioni sulla velocità di calcolo numerico e sulla versatilità; sotto questi aspetti, la Borel prescription presenta qualche punto di vantaggio sulle altre.

Osserviamo, per concludere, che la situazione è diversa dal caso della sezione d'urto totale, per la quale, come mostrato in [25], la scelta di prescrizioni diverse può indurre differenze dello stesso ordine di grandezza dell'effetto stesso della risommazione su calcolo a ordine fisso.

7.3.1 Il running di α_s e il problema delle soglie

Nella discussione precedente non abbiamo mai menzionato il valore scelto per la costante di accoppiamento $\alpha_s(Q^2)$; la questione merita una discussione accurata, a causa della presenza delle soglie dei quark pesanti descritto alla Sottosezione 3.2.1.

In linea di principio, la procedura corretta sarebbe quella di utilizzare $\alpha_s(\mu^2)$ come definita in (3.34) per il calcolo della funzione S_{NLL} . A parte la notevole complicazione algebrica, questo richiederebbe poi una certa attenzione nel considerare la continuazione analitica della funzione S_{NLL} nel piano complesso, come richiesto sia nel caso della Borel prescription, sia in quello della minimal prescription, a causa della non derivabilità di $\alpha_s(\mu^2)$ come definita in (3.34) in corrispondenza delle soglie.

Naturalmente, questo è un falso problema: la forma di $\alpha_s(\mu^2)$ data in (3.34) è soltanto continua, e non derivabile, alle soglie solo perché non sappiamo fare di meglio. Nel mondo

²Questo problema potrebbe in linea di principio essere aggirato calcolando una volta per tutte le funzioni h_1 e h_2 nel percorso di integrazione, ma la cosa è abbastanza complicata e non permette di cambiare il percorso di integrazione.

³Un'investigazione più attenta della Figura 7.3 mostra che in realtà la curva per $C = 1$ non aderisce perfettamente alle altre anche nella regione $6 \text{ GeV} \lesssim q_T \lesssim 20 \text{ GeV}$, sebbene in questa zona lo scostamento sia molto piccolo; per $C \geq 2$ questo difetto è completamente assente e l'accordo perfetto.

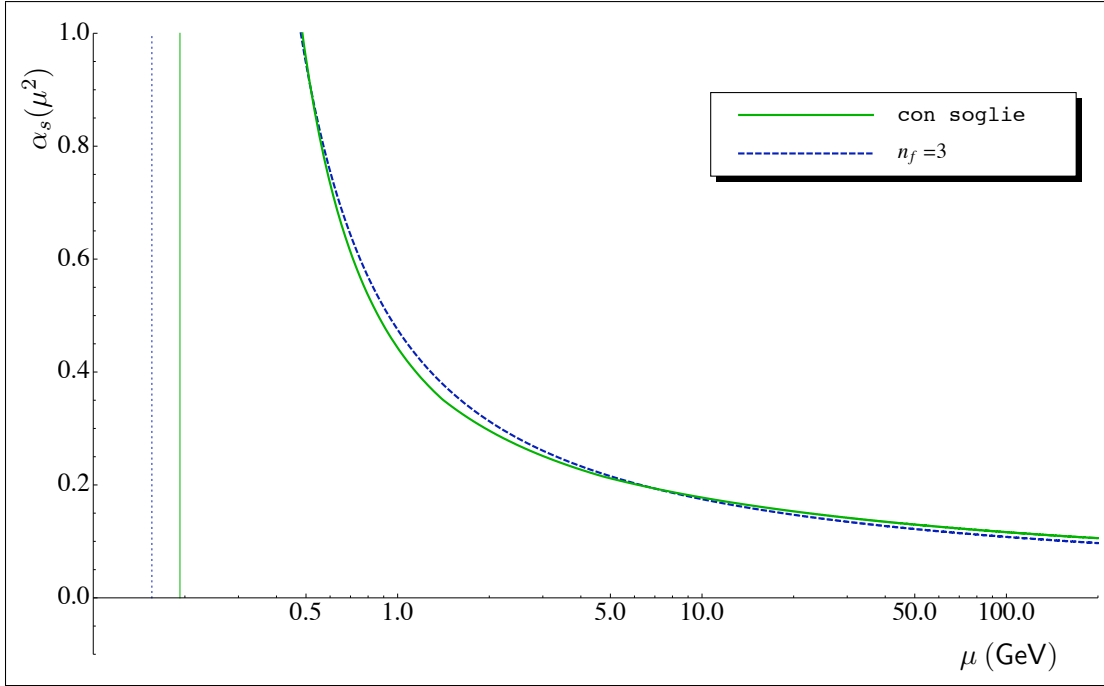


Figura 7.6: Running coupling a 2 loop con le soglie e match a $n_f = 3$ fissato.

reale il running di α_s è certamente C^∞ , almeno fino al polo di Landau, perciò se fossimo in grado di trovare una parametrizzazione del running con queste caratteristiche avremmo risolto in partenza il problema. In assenza di una tale soluzione, una buona scelta è quella di fissare un valore di n_f e trovare un valore di $\alpha_s(Q^2)$ tramite il quale la curva con le soglie sia riprodotta al meglio. La scelta più corretta è fissare $n_f = 3$, perché è il valore che ha nella zona del taglio, che è quella che ci interessa trattare con la prescrizione. Si trova che una buona approssimazione per $\alpha_s(Q^2)$ si ottiene scegliendo

$$\alpha_s(100 \text{ GeV}) = 0.108 , \quad (7.47)$$

e $n_f = 3$ fissato su tutto il range. Questo è il valore usato per ottenere i grafici di questa Sezione. La Figura 7.6 mostra che la costante di accoppiamento così definita è abbastanza vicina alla curva definita dalla (3.34) con il valore misurato di α_s alla scala della Z^0 .

Capitolo 8

Conclusioni

L'argomento di questa tesi è il calcolo di grandezze fisiche in QCD a partire da espressioni risommate a tutti gli ordini perturbativi, al fine di includere gli effetti di emissione soffice. Calcoli di questo tipo sono resi non banali dal fatto che in generale si pone il problema di effettuare l'inversione di trasformate integrali su funzioni che presentano singolarità lungo il cammino di integrazione.

Abbiamo mostrato che queste singolarità sono collegate alla presenza del polo di Landau nella costante di accoppiamento *running* della teoria. Abbiamo anche mostrato che il problema della non invertibilità delle trasformate integrali può essere riformulato in termini della non-convergenza dello sviluppo perturbativo, una circostanza piuttosto generale nell'ambito delle teorie di campo in generale e delle teorie di gauge non abeliane in particolare.

Il risultato più importante di questa tesi è la proposta di una prescrizione atta a risolvere questo problema nel caso delle distribuzioni in impulso trasverso di sistemi massivi, quali ad esempio i bosoni vettoriali deboli; questo processo riveste un notevole interesse dal punto di vista fenomenologico. La prescrizione proposta si basa sull'utilizzo del criterio di Borel per sommare serie divergenti; risulta che la serie divergente in questione non è neppure Borel-sommabile (come accade anche in altri contesti in QCD), ma che è tuttavia possibile fornire una definizione della grandezza fisica studiata mediante una opportuna regolarizzazione. L'impatto di tale regolarizzazione sui risultati fisici è stato studiato nel corso della tesi. I risultati principali di questa tesi sono già stati pubblicati [35].

Il metodo proposto è la generalizzazione di una analoga prescrizione già presente in letteratura, originariamente proposta per un'altra classe di osservabili. L'utilità di avere a disposizione diverse prescrizioni consiste nel fatto che ciò consente una stima delle ambiguità connesse con il procedimento di risommazione. Il nostro risultato mostra che l'ambiguità connessa con la scelta dell'una o dell'altra delle prescrizioni disponibili è, nel caso della distribuzione in impulso trasverso, relativamente piccola, in un ampio intervallo di valori dell'impulso trasverso. Va notato che in ogni caso la teoria delle perturbazioni non è in grado di fornire predizioni a scale di impulso inferiori alla costante Λ della QCD, dell'ordine di qualche centinaio di MeV.

La prescrizione proposta in questa tesi presenta alcuni vantaggi rispetto ad altre, presenti in letteratura. Vantaggi e svantaggi delle varie prescrizioni sono stati esposti nel corso della tesi; qui ci limitiamo a ricordare che la prescrizione in questione si presta ad una im-

plementazione numerica ragionevolmente semplice e facilmente utilizzabile in concomitanza con lo sviluppo perturbativo esatto a ordini finiti.

Appendice A

Formule utili in regolarizzazione dimensionale

In questa Appendice raccogliamo alcuni risultati relativi all'uso della regolarizzazione dimensionale, che sono stati utilizzati nel corso della tesi. Ovunque la dimensione dello spazio-tempo è $d = 4 - 2\epsilon$.

A.1 L'algebra di Dirac

Quattro matrici 4×4 indipendenti γ^μ soddisfano l'algebra di Dirac se

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad (\text{A.1})$$

dove \mathbb{I} è l'identità nello spazio di tali matrici, che spesso viene sottintesa. I seguenti risultati seguono in modo diretto dalla (A.1):

- saturazione di due matrici:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 4 - 2\epsilon \quad (\text{A.2a})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu = 2\gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\mu = -2(1 - \epsilon) \gamma^\rho \quad (\text{A.2b})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = 2\gamma^\sigma \gamma^\rho - \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma = 4\eta^{\rho\sigma} - 2\epsilon \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (\text{A.2c})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + 2\epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma ; \quad (\text{A.2d})$$

- formule di traccia:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \}) = \frac{1}{2} 2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}(\mathbb{I}) = 4\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.3a})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}] . \quad (\text{A.3b})$$

A.2 Integrali di loop

L'idea di considerare la dimensione dello spazio-tempo diversa da 4 nasce essenzialmente dalla necessità di regolarizzare gli integrali di loop. Tale metodo, rispetto ad esempio ad un cut-off, ha il vantaggio di rispettare le simmetrie e di non rompere l'invarianza di gauge.

Dopo aver modificato il denominatore con il metodo di Feynman, il generico integrale di loop si presenta nella forma

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_r}}{(k^2 - M^2 + i\eta)^n} . \quad (\text{A.4})$$

Se r è dispari, essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio, l'integrale si annulla. Nel caso in cui r sia pari, l'integrale dà un risultato che dipende dalla dimensione dello spazio-tempo, e può essere prolungato analiticamente per valori non interi di d . Non svolgeremo i dettagli del calcolo, che si possono trovare su vari libri. Il punto di partenza è effettuare il cambio di variabile $k^0 = i\bar{k}^4$, detta rotazione di Wick. In questo modo, definendo anche $k^j = \bar{k}^j$, si ha $k^2 = -\bar{k}^2$ e, essendo $\eta > 0$,

$$\int d^d k f(k^2 - i\eta) = i \int d^d \bar{k} f(-\bar{k}^2) . \quad (\text{A.5})$$

Allora, effettuando l'integrale in coordinate polari, si trovano per $r = 0, 2, 4$ i seguenti risultati:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\eta)^n} = (-1)^n \frac{i(4\pi)^\epsilon \Gamma(n-2+\epsilon)}{(4\pi)^2 \Gamma(n)} (M^2)^{-(n-2-\epsilon)} \quad (\text{A.6a})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M^2 + i\eta)^n} = (-1)^{n-1} \frac{i(4\pi)^\epsilon \Gamma(n-3+\epsilon)}{2(4\pi)^2 \Gamma(n)} (M^2)^{-(n-3-\epsilon)} \eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.6b})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(k^2 - M^2 + i\eta)^n} = (-1)^n \frac{i(4\pi)^\epsilon \Gamma(n-4+\epsilon)}{4(4\pi)^2 \Gamma(n)} (M^2)^{-(n-4-\epsilon)} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) . \quad (\text{A.6c})$$

A.3 Spazio delle fasi

La misura dello spazio delle fasi a n corpi, per un processo con impulso iniziale P e n corpi di stato finale con impulsi k_1, \dots, k_n e masse $m_i^2 = k_i^2$, è

$$d\phi_n(P; k_1, \dots, k_n) = \frac{d^{d-1}k_1}{(2\pi)^{d-1}2k_1^0} \cdots \frac{d^{d-1}k_n}{(2\pi)^{d-1}2k_n^0} (2\pi)^d \delta^{(d)}(P - k_1 - \dots - k_n). \quad (\text{A.7})$$

Vogliamo mostrare che lo spazio delle fasi a n corpi si può riscrivere [15] in termini dello spazio delle fasi a $n-r$ corpi e di quello a $r+1$ corpi (in particolare sarà interessante il caso in cui $r = n-2$). Per farlo cominciamo col notare che la delta di conservazione dell'energia si può riscrivere come

$$\delta^{(d)}(P - k_1 - \dots - k_n) = \int d^d q \delta^{(d)}(P - q - k_1 - \dots - k_r) \delta^{(d)}(q - k_{r+1} - \dots - k_n). \quad (\text{A.8})$$

Si può ulteriormente scrivere

$$d^d q = (2\pi)^d \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}2q^0} \frac{d(q^0)^2}{2\pi} = (2\pi)^d \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}2q^0} \frac{dq^2}{2\pi}, \quad (\text{A.9})$$

dove q^2 è sottoposto ai limiti cinematici

$$q_{\min}^2 \equiv (m_{r+1} + \dots + m_n)^2 \leq q^2 \leq (\sqrt{s} - m_1 - \dots - m_r)^2 \equiv q_{\max}^2, \quad s = P^2. \quad (\text{A.10})$$

Allora la (A.7) si può riscrivere

$$d\phi_n(P; k_1, \dots, k_n) = \int_{q_{\min}^2}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{2\pi} d\phi_{n-r}(q; k_{r+1}, \dots, k_n) d\phi_{r+1}(P; q, k_1, \dots, k_r). \quad (\text{A.11})$$

Si osservi che l'impulso fittizio q può essere pensato come l'impulso di uno stato intermedio che decade nelle particelle con impulsi k_{r+1}, \dots, k_n -esime. Applicando questo risultato con $r = n-2$ ricorsivamente, lo spazio delle fasi a $n > 1$ corpi si scrive in termini del solo spazio delle fasi a due corpi. In questo caso, e supponendo ulteriormente che le masse siano tutte nulle, si trova

$$d\phi_n(P; k_1, \dots, k_n) = \int_0^s \frac{dq^2}{2\pi} d\phi_2(q; k_{n-1}, k_n) d\phi_{n-1}(P; q, k_1, \dots, k_{n-2}). \quad (\text{A.12})$$

A.3.1 Spazio delle fasi a due corpi

In questa Sottosezione calcoleremo la misura dello spazio delle fasi a due corpi nel caso in cui le particelle di stato finale abbiano quadri-impulsi q , con $q^2 \neq 0$ e k , con $k^2 = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} d\phi_2(P; q, k) &= \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}2q^0} \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}2k^0} (2\pi)^d \delta^{(d)}(P - q - k) \\ &= \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-2}4q^0 k^0} \delta(P^0 - q^0 - k^0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d-2}4} \frac{|\vec{q}|^{d-2} d|\vec{q}| d\Omega_{d-1}}{|\vec{q}| P^0} \delta\left(|\vec{q}| - \frac{\sqrt{\lambda}}{2P^0}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d-2}4P^0} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2P^0}\right)^{d-3} d\Omega_{d-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

essendo, nel caso in cui $k^2 = 0$, $q^2 = Q^2$ e $P^2 = s$,

$$\lambda = s^2 + Q^4 - 2sQ^2 = \left(Q^2 \frac{1-x}{x} \right)^2, \quad x = \frac{Q^2}{s}. \quad (\text{A.14})$$

A questo punto occorre riscrivere l'elemento di angolo solido in $d-1$ dimensioni $d\Omega_{d-1}$. A tale scopo, usiamo l'espressione ricorsiva

$$d\Omega_{d-1} = (d\theta \sin^{d-3} \theta) d\Omega_{d-2}; \quad (\text{A.15})$$

e definiamo $y = \frac{1+\cos\theta}{2}$, da cui

$$d\theta \sin^{d-3} \theta = dy 2^{d-3} [y(1-y)]^{\frac{(d-4)}{2}}. \quad (\text{A.16})$$

Sfruttando l'invarianza del processo per rotazioni attorno alla direzione degli impulsi incidenti, possiamo integrare nell'angolo $(d-2)$ -dimensionale (il che equivale a integrare su un azimuth irrilevante in tre dimensioni spaziali). Si ottiene

$$d\Omega_{d-1} = \frac{(4\pi)^{1-\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} [y(1-y)]^{-\epsilon} dy, \quad (\text{A.17})$$

In questo passaggio si è usato il fatto che l'integrale sull'angolo solido $d\Omega_n$ in n dimensioni è dato da

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (\text{A.18})$$

Questo può essere facilmente verificato confrontando

$$\int d^n x e^{-x^2} = \int d\Omega_n \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int d\Omega_n \int_0^\infty dx^2 (x^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-x^2} = \frac{\Gamma(n/2)}{2} \int d\Omega_n \quad (\text{A.19})$$

con il risultato

$$\int d^n x e^{-x^2} = \pi^{n/2}. \quad (\text{A.20})$$

Concludendo, la misura di spazio delle fasi a due corpi nel caso considerato è data da

$$d\phi_2(P; q, k) = \frac{1}{8\pi} \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} (1-x) \left[Q^2 \frac{(1-x)^2}{x} \right]^{-\epsilon} y^{-\epsilon} (1-y)^{-\epsilon} dy. \quad (\text{A.21})$$

Nel caso in cui $Q^2 = 0$ questa espressione si riduce a

$$d\phi_2(P; q, k) = \frac{1}{8\pi} \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} s^{-\epsilon} y^{-\epsilon} (1-y)^{-\epsilon} dy, \quad (\text{A.22})$$

da cui

$$\int d\phi_2(P; q, k) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{s} \right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)}, \quad (\text{A.23})$$

che si riduce a $\frac{1}{8\pi}$ nel limite quadridimensionale.

A.3.2 Spazio delle fasi a un corpo

Calcoliamo ora anche lo spazio delle fasi ad un corpo. Chiamando $Q^2 = q^2$ la massa invariante del corpo di impulso q , si ha

$$\begin{aligned} d\phi_1(P; q) &= \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}2q^0} (2\pi)^d \delta^{(d)}(P - q) \\ &= 2\pi d^d q \delta^{(d)}(P - q) \delta(q^2 - Q^2) \theta(q^0) \\ &= 2\pi d^d q \delta^{(d)}(P - q) \delta(P^2 - Q^2) \theta(P^0) \end{aligned}$$

e, tenendo conto che nel c.m.s. si ha $\vec{P} = 0$, e definendo $s = P^2$

$$\begin{aligned} &= 2\pi d^{d-2} q_T \delta^{(d-2)}(\vec{q}_T) \delta(s - Q^2) \theta(P^0) \\ &= 2\pi dq_T^2 \delta(q_T^2) \delta(s - Q^2) \theta(P^0) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

che, se l'ampiezza non dipende dall'impulso q , può essere integrata ottenendo

$$= 2\pi \delta(s - Q^2) \theta(P^0) . \quad (\text{A.25})$$

Nel primo passaggio si è usata la relazione

$$\int dq^0 \delta(q^2 - Q^2) \theta(q^0) = \frac{1}{2q^0} ; \quad (\text{A.26})$$

al quarto passaggio si è utilizzata l'identità

$$d^{d-2} q_T \delta^{(d-2)}(\vec{q}_T) = dq_T^2 \delta(q_T^2) . \quad (\text{A.27})$$

Questa identità (intesa formalmente, in quanto i differenziali hanno dimensioni diverse), sebbene immediata in $d = 4$ dimensioni, non è banale in una dimensione generica. Per verificarla, è sufficiente moltiplicare per una funzione $f(\vec{q}_T)$ e integrare, ottenendo

$$\begin{aligned} \int d^{d-2} q_T \delta^{(d-2)}(\vec{q}_T) f(\vec{q}_T) &= f(0) \\ \int dq_T^2 \delta(q_T^2) f(\vec{q}_T) &= f(0) . \end{aligned}$$

Appendice B

Alcune nozioni matematiche

Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.

N. H. Abel

B.1 Serie divergenti

Per sapere tutto sulle serie divergenti, il testo di riferimento è senza dubbio [7]. Nel seguito, mostriamo alcune definizioni e risultati utili per questa tesi, senza alcuna pretesa di essere completi.

Definizione B.1. *Sia data una serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k . \quad (\text{B.1})$$

Essa è detta convergente se, definita la somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k , \quad (\text{B.2})$$

il limite

$$s \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (\text{B.3})$$

esiste finito. Se ciò non è vero la serie è detta divergente.

Se una serie è divergente, è comunque possibile *definire* (e non trovare, come in passato si cercava di fare) una somma della serie. La chiave sta nel generalizzare la nozione di limite di una successione. Data la successione di somme parziali $\{s_n\}_{n \geq 0}$, si definisce la *trasformazione lineare*

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} s_n , \quad (\text{B.4})$$

dove c_{mn} sono coefficienti complessi (si può generalizzare la (B.4) al caso in cui m sia un parametro continuo). Si dà la seguente

Definizione B.2. La trasformazione lineare (B.4) è detta regolare se, qualunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad (\text{B.5})$$

(cioè la serie originale converge), si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = s. \quad (\text{B.6})$$

È naturale aspettarsi che solo una trasformazione regolare sia la candidata all'estensione di un concetto di limite di una successione, affinché nel caso di successione convergente si recuperi il risultato esatto.

Vediamo un esempio molto semplice: la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{B.7})$$

Essa è chiaramente divergente; infatti la somma parziale n -esima è

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

che non ha un limite per $n \rightarrow \infty$. Tuttavia ci sono alcuni motivi per asserire che la sua somma è $\frac{1}{2}$. Uno di essi è che la serie (B.7) soddisfa un'equazione lineare: chiamando $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, si ha

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s, \quad (\text{B.9})$$

da cui segue elementarmente $s = \frac{1}{2}$. Un modo formale, che poggia sulla Definizione B.2, di convincersi che davvero $s = \frac{1}{2}$ in un senso generale, è usare il metodo di Cesàro: esso consiste nel calcolare

$$t_m = \frac{s_0 + \dots + s_m}{m+1}; \quad (\text{B.10})$$

si può vedere che questa trasformazione è regolare. Col metodo di Cesàro, la somma della serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ si calcola facendo la media delle somme parziali, che si alternano tra 0 e 1, e quindi si ottiene $\frac{1}{2}$.

B.1.1 Il metodo di Borel

Un altro metodo per calcolare la somma di una serie è il *metodo di Borel*. Si consideri la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}. \quad (\text{B.11})$$

Si definisce la *trasformata di Borel* di f la funzione \hat{f} definita da

$$\hat{f}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} w^k, \quad (\text{B.12})$$

che a causa del fattoriale al denominatore ha migliori proprietà di convergenza. Il metodo di Borel consiste nel calcolare

$$f_{\mathbf{B}}(z) = \int_0^{+\infty} dw e^{-w/z} \hat{f}(w) . \quad (\text{B.13})$$

Tale metodo è *regolare*, come si può capire notando che, se la serie (B.11) è convergente, allora l'integrale (B.13) consiste nell'inversione termine a termine della trasformata di Borel: quindi, se (B.11) converge, $f_{\mathbf{B}}(z) = f(z)$.

Definizione B.3. *Se*

- la serie (B.12) converge in un intorno di $w = 0$;
- la somma $\hat{f}(w)$ è regolare in $(0, +\infty)$;
- l'integrale (B.13) è convergente;

allora la serie (B.11) è detta Borel-sommabile, e $f_{\mathbf{B}}(z)$ la sua somma alla Borel.

È evidente, quindi, che se la serie di partenza è divergente, è possibile che la somma alla Borel della serie esista. Si può mostrare che in questo caso $f_{\mathbf{B}}(z)$ non è analitica in $z = 0$. Vediamo un esempio esplicito: si consideri la serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! z^{k+1} , \quad (\text{B.14})$$

che diverge per ogni z (eccetto che in $z = 0$). In questo caso si ha

$$\hat{f}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-w)^k = \frac{1}{1+w} ; \quad (\text{B.15})$$

questa somma è valida solo per $|w| < 1$, ma può essere prolungata analiticamente ovunque eccetto che in $w = -1$, dove ha un polo. In particolare, $\hat{f}(w)$ è regolare sul semiasse reale positivo, e quindi si può calcolare

$$f_{\mathbf{B}}(z) = \int_0^{+\infty} dw e^{-w/z} \frac{1}{1+w} = e^{\frac{1}{z}} \Gamma\left(0, \frac{1}{z}\right) , \quad (\text{B.16})$$

dove $\Gamma(a, b)$ è la funzione Gamma di Eulero incompleta. Si vede chiaramente (già dall'integrale) che $f_{\mathbf{B}}(z)$ è definita solo nel semipiano $\Re(z) > 0$, e quindi non analitica in $z = 0$. Ciò nonostante, essendo l'integrale convergente, la serie (B.14), che diverge brutalmente, è Borel-sommabile.

B.2 La distribuzione $[\cdot \cdot \cdot]_+$

Se $f(x)$ è una funzione singolare (al più come una potenza) in $x = 0$ (tutto ciò che segue vale anche se la singolarità è in $x = 1$), la distribuzione $[f(x)]_+$, che differisce da $f(x)$ solo in $x = 0$, è definita richiedendo che, $\forall g$ regolare in $[0, 1]$, l'integrale

$$\int_0^1 dx g(x) [f(x)]_+ \quad (\text{B.17})$$

sia *finito*.

Dal momento che la differenza tra $f(x)$ e $[f(x)]_+$ è solo in $x = 0$, possiamo asserire che

$$[f(x)]_+ = f(x) + \sum_{n=0}^{N-1} A_n \delta^{(n)}(x) \quad (\text{B.18})$$

dove N , come sarà chiaro a breve, è dato dall'andamento di f vicino a 0, cioè

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{N+\epsilon}}, \quad 0 \leq \epsilon < 1. \quad (\text{B.19})$$

Infatti, dalla (B.17), abbiamo

$$\int_0^1 dx g(x) [f(x)]_+ = \int_0^1 dx g(x) f(x) + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A_n g^{(n)}(0), \quad (\text{B.20})$$

ma la richiesta che sia finito non può che essere soddisfatta sottraendo a $g(x)$ il suo sviluppo di Taylor in 0 fino al termine $N - 1$, in modo che il termine rimanente sia di ordine N e, per la (B.19), renda finito l'integrale:

$$\int_0^1 dx g(x) [f(x)]_+ = \int_0^1 dx \left[g(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) \right] f(x). \quad (\text{B.21})$$

Confrontando queste due espressioni si ottiene (formalmente)

$$A_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 dx \frac{x^n}{n!} f(x), \quad (\text{B.22})$$

che sono divergenti. Si osservi che, essendo

$$A_0 = \int_0^1 dx f(x), \quad (\text{B.23})$$

si ottiene la relazione (spesso usata come definizione ma in realtà non sufficiente)

$$\int_0^1 dx [f(x)]_+ = 0. \quad (\text{B.24})$$

Sebbene non sia necessario, può risultare utile estendere la (B.19) al caso in cui $\epsilon < 0$; così facendo, definendo $\eta = -\epsilon > 0$, si trova ad esempio per $f(x) = x^{-1+\eta}$

$$x^{-1+\eta} = [x^{-1+\eta}]_+ + \frac{1}{\eta} \delta(x), \quad (\text{B.25})$$

dove il coefficiente A_0 è stato calcolato esplicitamente in quanto finito.

Ringraziamenti

Ci tengo a ringraziare il mio relatore, prof. Giovanni Ridolfi, per la sua incredibile disponibilità e per avermi illuminato con le innumerevoli discussioni. È stato molto bello lavorare con lui.

Ringrazio anche il prof. Stefano Forte, col quale abbiamo collaborato per il lavoro presentato in questa tesi.

Ringrazio in generale tutti gli insegnanti del Dipartimento di Fisica, che in un modo o nell'altro mi hanno incoraggiato e mi hanno fatto capire che posso farcela.

Ringrazio i miei genitori, che in tanti anni mi hanno sempre aiutato, ascoltandomi senza mai capire alcunché di ciò che spiegavo loro.

Ringrazio i miei parenti perché ogni tanto un bel pranzo che finisca alle quattro del pomeriggio ci vuole.

Ringrazio mio cugino Luca, perché so che sarà esaltatissimo quando saprà che il suo nome è sulla mia tesi.

Ringrazio in particolare mio nonno, che ha sempre creduto in me. Mi sarebbe piaciuto che potesse vedere anche questa mia seconda laurea. Mi mancheranno le partite a canasta con un degno avversario.

Ringrazio i miei gatti (presenti, passati, futuri), che sanno sempre come tirarmi su il morale. Ringrazio soprattutto Mascia, perché so che lei mi vuole davvero bene; è bello coricarsi in giardino e avere una rompipalle che mi sale sulla pancia e non mi lascia dormire.

A tal proposito ringrazio anche la sorte, perché alla vigilia di ogni termine di una fase della mia istruzione qualche nuovo micetto è comparso nel mio giardino.

Voglio ricordare tutti i miei gatti defunti, perché non è giusto che se ne siano andati così presto, lasciando ciascuno un vuoto dentro di me: Pippo, Bardino, Cicci, Spick, Piuma, Mascetta, Click, Mascio, Gohan, Chichi, Mu.Zero, Epsilon.Zero, e per ultimo Quark. Auguro a Mascia, Mini, Squark, Sissi e Star di vivere a lungo.

Ringrazio tutti i miei amici, perché grazie a loro riesco a divertirmi senza fare stupide battute sulla fisica.

Ringrazio i miei compagni di corso, coi quali ho condiviso questi ultimi cinque anni di formazione: è stata una passeggiata, no?

Ringrazio l'unico elemento appartenente all'intersezione degli insiemi filosofi, logici, mezzi ingegneri, mezzi fisici, mezzi informatici e "intelligenti artificiali": grazie per esserti laureato di nuovo prima di me.

Ringrazio Roberta, perché grazie a lei sono una persona diversa, capace di vestirsi da pinguino il giorno della laurea; è bello vivere con te e condividere tutto.

Ringrazio Doc. Emmett Brown, perché è molto merito suo se sono un fisico teorico.

Ringrazio \LaTeX perché finalmente so come fare per scrivere come voglio io.

Ringrazio il mio Mac perché funziona.

Bibliografia

- [1] C. M. Becchi and G. Ridolfi, “An introduction to relativistic processes and the standard model of electroweak interactions,” *Milan, Italy: Springer (2006) 139 p*
- [2] M. Srednicki, “Quantum field theory,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2007) 641 p*
- [3] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p*; “Vol. 2: Modern applications,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p*
- [4] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, “QCD and collider physics,” *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **8** (1996) 1.
- [5] T. P. Cheng and L. F. Li, “Gauge Theory Of Elementary Particle Physics,” *Oxford, Uk: Clarendon (1984) 536 P. (Oxford Science Publications)*
- [6] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], *Phys. Lett. B* **667** (2008) 1.
- [7] G. H. Hardy, “Divergent Series,” *New York, USA: Oxford Univ. Pr. (1949) 412 p*
- [8] L. Evans, *New J. Phys.* **9** (2007) 335.
- [9] G. Bozzi, S. Catani, D. de Florian and M. Grazzini, *Nucl. Phys. B* **737** (2006) 73 [arXiv:hep-ph/0508068].
- [10] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85** (1952) 631.
- [11] G. 't Hooft, *Can we make sense out of Quantum Chromodynamics?*, in *The whys of subnuclear physics*, Erice 1977, Plenum Press, New York.
- [12] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys. B* **126** (1977) 298.
- [13] G. Altarelli, R. K. Ellis and G. Martinelli, *Nucl. Phys. B* **157** (1979) 461.
- [14] S. Catani, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **54A** (1997) 107 [arXiv:hep-ph/9610413].
- [15] S. Forte and G. Ridolfi, *Nucl. Phys. B* **650** (2003) 229 [arXiv:hep-ph/0209154].
- [16] P. Bolzoni, S. Forte and G. Ridolfi, *Nucl. Phys. B* **731** (2005) 85 [arXiv:hep-ph/0504115].
- [17] S. Catani and L. Trentadue, *Nucl. Phys. B* **327** (1989) 323.

- [18] G. Sterman, Nucl. Phys. B **281** (1987) 310.
- [19] S. Catani and L. Trentadue, Nucl. Phys. B **353** (1991) 183.
- [20] H. Contopanagos, E. Laenen and G. Sterman, Nucl. Phys. B **484** (1997) 303 [arXiv:hep-ph/9604313].
- [21] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5** (1988) 1 [arXiv:hep-ph/0409313].
- [22] S. Moch, J. A. M. Vermaseren and A. Vogt, Nucl. Phys. B **726** (2005) 317 [arXiv:hep-ph/0506288].
- [23] S. Catani, M. L. Mangano, P. Nason and L. Trentadue, Nucl. Phys. B **478** (1996) 273.
- [24] S. Forte, G. Ridolfi, J. Rojo and M. Ubiali, Phys. Lett. B **635** (2006) 313.
- [25] R. Abbate, S. Forte and G. Ridolfi, Phys. Lett. B **657** (2007) 55.
- [26] Yu.L. Dokshitzer, D.I. D'yakonov and S.I. Troyan, Phys. Lett. **78B** (1978) 290; Proc. 13th Winter School of the LPNI, Leningrad (1978); Phys. Reports **58** (1980) 271
- [27] G. Parisi and R. Petronzio, Nucl. Phys. B **154** (1979) 427.
- [28] G. Curci, M. Greco and Y. Srivastava, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 834; Nucl. Phys. B **159** (1979) 451.
- [29] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, Nucl. Phys. B **250** (1985) 199.
- [30] R. K. Ellis and S. Veseli, Nucl. Phys. B **511** (1998) 649.
- [31] S. Frixione, P. Nason and G. Ridolfi, Nucl. Phys. B **542** (1999) 311.
- [32] A. Kulesza, G. Sterman and W. Vogelsang, Phys. Rev. D **66** (2002) 014011.
- [33] C. T. H. Davies and W. J. Stirling, Nucl. Phys. B **244** (1984) 337.
- [34] J. Kodaira and L. Trentadue, Phys. Lett. B **112** (1982) 66;
R. K. Ellis, G. Martinelli and R. Petronzio, Phys. Lett. B **104** (1981) 45; Nucl. Phys. B **211** (1983) 106.
- [35] M. Bonvini, S. Forte and G. Ridolfi, arXiv:0807.3830 [hep-ph].