

Note per il corso di Metodi Matematici della Fisica 2

Teoria Delle Distribuzioni e applicazioni

Agosto 2007

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Distribuzioni | 5 |
| 1.1 | Lo spazio delle funzioni di prova | 5 |
| 1.2 | Lo spazio delle distribuzioni | 6 |
| 1.3 | Esempi elementari di distribuzioni | 7 |
| 1.4 | Operazioni elementari sulle distribuzioni | 9 |
| 1.5 | La convergenza debole delle distribuzioni | 13 |
| 1.6 | Supporto di una distribuzione | 18 |
| 2 | La distribuzione x^{-1} e variazioni sul tema | 21 |
| 2.1 | Premessa. La formula di Taylor | 21 |
| 2.2 | La distribuzione x^{-1} | 22 |
| 2.3 | L'uguaglianza $\partial \log x = x^{-1}$ | 24 |
| 2.4 | La formula $\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0} \right)$ | 27 |
| 2.5 | Le distribuzioni x_+^{-k} , x_-^{-k} | 28 |
| 3 | Tre importanti problemi | 33 |
| 3.1 | Il problema della divisione | 33 |
| 3.2 | Il problema della primitiva | 36 |
| 3.3 | Gli spazi $W^{k,p}(I)$ | 39 |
| 3.4 | La caratterizzazione delle distribuzioni il cui supporto è un punto | 44 |
| 4 | Le distribuzioni temperate | 47 |
| 4.1 | Lo spazio delle funzioni di Schwartz | 47 |
| 4.2 | Le distribuzioni temperate su \mathbf{R}^n | 51 |
| 4.3 | Esempi di distribuzioni temperate | 53 |
| 4.4 | Operazioni con le distribuzioni temperate | 55 |
| 4.4.1 | La derivazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 55 |
| 4.4.2 | Traslazione e dilatazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 55 |
| 4.4.3 | Moltiplicazione per funzioni C^∞ | 55 |
| 5 | L'analisi di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 57 |
| 5.1 | La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 57 |
| 5.2 | Proprietà della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 57 |
| 5.3 | Esempi di trasformate di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ | 63 |
| 5.4 | La serie di Fourier delle distribuzioni periodiche | 64 |
| 5.4.1 | La formula di somma di Poisson | 64 |
| 5.4.2 | La serie di Fourier delle distribuzioni periodiche (trattazione alternativa a quella del paragrafo precedente) | 67 |
| 5.5 | Lo sviluppo di Fourier di una funzione definita su un intervallo | 76 |

Capitolo 1

Distribuzioni

1.1 Lo spazio delle funzioni di prova

Denotiamo con I un intervallo aperto di \mathbf{R}

$$I =]a, b[$$

(notiamo che I può avere, eventualmente, lunghezza infinita; cioè a può essere $-\infty$ e b può essere $+\infty$).

Ricordiamo che viene denotato con $C_c^\infty(I)$ lo spazio vettoriale complesso delle funzioni

$$f : I \rightarrow \mathbf{C}$$

che hanno le seguenti proprietà

- FT,1) f è dotata di derivate di tutti gli ordini, su I ; in altre parole $f \in C^\infty(I)$;
- FT,2) esiste un intervallo chiuso $[c, d]$ che è contenuto in $]a, b[$:

$$[c, d] \subset]a, b[$$

al di fuori del quale f si annulla, in altre parole f è ‘a supporto compatto’ in $]a, b[$.

Ricordiamo le due proprietà fondamentali di $C_c^\infty(I)$

Teorema di Densità.

$C_c^\infty(I)$ è denso in $L^p(I)$ ($p = 1, 2$)

Teorema di Annullamento.

Se $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(I)$ e si ha

$$\int_I F(x)f(x)dx = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

allora $F = 0$ quasi ovunque su I .

Vogliamo definire anche lo spazio $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Prima introduciamo una notazione abbreviata per le derivate parziali di funzioni di più variabili. Supponiamo che

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

sia una n -pla di interi non negativi (≥ 0). Denotiamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e useremo la definizione

$$\partial^\alpha f$$

per la derivata parziale

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Diremo che la funzione f è in $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ quando f è dotata di derivate parziali continue $\partial^\alpha f$ a tutti gli ordini ed esiste una palla chiusa in \mathbf{R}^n

$$B_R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$$

tale che f è nulla al di fuori di B_R . $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ è uno spazio vettoriale complesso. Per esso si hanno le proprietà analoghe dei teoremi di densità e annullamento, ricordati in precedenza per $C_c^\infty(I)$. Precisamente:

Teorema di Densità.

$C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbf{R}^n)$ ($p = 1, 2$)

Teorema di Annullamento.

Se $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$ e si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(x) f(x) d^n x = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$$

allora $F = 0$ quasi ovunque su \mathbf{R}^n .

Vogliamo introdurre una nozione di "convergenza a 0" di una successione di funzioni in C_c^∞ . Daremo questa definizione prima per $C_c^\infty(I)$ e poi per $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Supponiamo che

$$(f_n)_{n \geq 1}$$

denoti una successione di elementi di $C_c^\infty(I)$. Diremo che $f_n \rightarrow 0$ "nel senso di D" quando

- CFT,1) esiste un intervallo chiuso $[c, d]$ di lunghezza finita al di fuori del quale tutte le funzioni f_n si annullano;
- CFT,2) $f_n \rightarrow 0$ uniformemente su $[c, d]$ insieme a tutte le derivate parziali di tutti gli ordini:

$$\partial^\alpha f_n \rightarrow 0 \text{ uniformemente su } [c, d]$$

Quando $C_c^\infty(I)$ è dotato di questa nozione di convergenza viene detto "lo spazio delle funzioni di prova" o "delle funzioni test". A volte viene indicato anche con $D(I)$.

Naturalmente, la nozione di "convergenza a 0" può essere definita anche per una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Supponiamo che

$$(f_n)_{n \geq 1}$$

sia una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Diremo che $f_n \rightarrow 0$ in $D(\mathbf{R}^n)$ quando tutte le derivate parziali $\partial^\alpha f_n$ tendono a 0 uniformemente su \mathbf{R}^n ed esiste una palla chiusa B_R con R tanto grande che tutte le funzioni f_n si annullino al di fuori di B_R . Quando è dotato di questa nozione di convergenza, $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ viene detto "spazio delle funzioni test" e viene denotato, a volte, con $D(\mathbf{R}^n)$.

1.2 Lo spazio delle distribuzioni

Definizione. Una distribuzione T su I è un'applicazione

$$f \rightarrow \langle T, f \rangle : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbf{C}$$

che abbia le proprietà:

- D,1) T è lineare, cioè

$$\langle T, \alpha f + \beta g \rangle = \alpha \langle T, f \rangle + \beta \langle T, g \rangle$$

per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ e tutte le $f, g \in C_c^\infty(I)$

- D,2) se $(f_n)_{n \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(I)$, che converge a 0 in D , allora si ha

$$\langle T, f_n \rangle \rightarrow 0$$

L'insieme delle distribuzioni su I viene indicato con $D'(I)$. A volte, se $I = \mathbf{R}$ si scrive D' semplicemente, invece che $D'(\mathbf{R})$. Si definiscono combinazioni lineari di elementi di $D'(I)$ nella maniera che segue. Se $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ e $T, S \in D'(I)$, si definisce $\alpha T + \beta S$ ponendo

$$\langle \alpha T + \beta S, f \rangle = \alpha \langle T, f \rangle + \beta \langle S, f \rangle$$

per ogni $f \in C_c^\infty(I)$. Con queste definizioni di combinazione lineare di distribuzioni, $D'(I)$ ha la struttura di spazio vettoriale complesso.

La nozione di distribuzione su \mathbf{R} viene definita in maniera perfettamente analoga. Una distribuzione T su \mathbf{R}^n è un'applicazione lineare

$$f \rightarrow \langle T, f \rangle : C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$$

che abbia la proprietà: se $(f_n)_{n \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ che converge a 0 in D , allora

$$\langle T, f_n \rangle \rightarrow 0$$

L'insieme delle distribuzioni su \mathbf{R}^n viene denotato con $D'(\mathbf{R}^n)$ o anche con D' (nei casi in cui l'ambiente \mathbf{R}^n sia chiaro dal contesto). $D'(\mathbf{R}^n)$ ha una struttura di spazio vettoriale complesso, in maniera completamente analoga a $D'(I)$.

1.3 Esempi elementari di distribuzioni

1. Supponiamo che F sia una funzione localmente integrabile su I . Ricordiamo che si denota con $\mathcal{L}_{loc}^1(I)$ lo spazio di queste funzioni, e che $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(I)$ se e solo se $F \in \mathcal{L}^1(c, d)$ per ogni intervallo $[c, d] \subset I$. Ricordiamo, infine, che

$$\mathcal{L}^1(I) \subset \mathcal{L}_{loc}^1(I), \quad \mathcal{L}^2(I) \subset \mathcal{L}_{loc}^2(I)$$

Se $f \in C_c^\infty(I)$, allora

$$f \cdot F \in \mathcal{L}^1(I)$$

Possiamo così definire un elemento T_F di $D'(I)$, ponendo

$$\langle T_F, f \rangle = \int_I F(x) f(x) dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

Per mostrare che T_F così definita è effettivamente una distribuzione su I , dobbiamo verificare che siano soddisfatte entrambe le condizioni (D,1) e (D,2):

- D.1) $f \rightarrow \int_I F(x) f(x) dx$ è, ovviamente, lineare
- D.2) se $f \rightarrow 0$ in D , esiste un intervallo $[c, d]$, di lunghezza finita, tale che

$$\int_I F(x) f_n(x) dx = \int_c^d F(x) f_n(x) dx \quad \forall n \geq 1$$

inoltre

$$|\langle T, f_n \rangle| = \left| \int_c^d F(x) f_n(x) dx \right| \leq \int_c^d |F(x)| |f_n(x)| dx \leq \sup_{x \in [c, d]} |f_n(x)| \int_c^d |F(x)| dx$$

Ciò mostra che T_F è una distribuzione. Si dice che è "La funzione F ". Se $F, G \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$ sono tali che $T_F = T_G$, si ha

$$\langle T_F, f \rangle = \langle T_G, f \rangle \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

Quindi

$$\int_I (F(x) - G(x)) f(x) dx = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

Per il teorema fondamentale di annullamento, segue che

$$F(x) = G(x), \text{ per quasi ogni } x$$

Se si definisce

$$L_{loc}^1(I) = \mathcal{L}_{loc}^1(I)/\mathcal{N}$$

otteniamo che l'applicazione

$$F \rightarrow T_F : L_{loc}^1(\mathbf{R}) \rightarrow D'(\mathbf{R})$$

che è definita dal pairing canonico

$$\langle T_F, f \rangle = \int_I F(x) f(x) dx$$

è iniettiva e permette di identificare $L_{loc}^1(I)$ con un sottospazio di $D'(I)$. Nel seguito useremo la notazione più semplice F al posto di T_F .

Questo esempio, di importanza fondamentale, si generalizza alle distribuzioni su \mathbf{R}^n , in maniera del tutto ovvia.

2. Se $a \in I$, si definisce una distribuzione δ_a su I , ponendo

$$\langle \delta_a, f \rangle = f(a), \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

E' immediato verificare che si tratta di una distribuzione. Se $I = \mathbf{R}$ ed $a = 0$ si scrive di solito δ invece che δ_0 . In maniera analoga si definisce la distribuzione δ_a su \mathbf{R}^n . La distribuzione δ_a viene detta la "delta di Dirac in a ".

3. Supponiamo che \mathcal{C} sia una curva "liscia" in \mathbf{R}^n e denotiamo con $d\sigma$ l'elemento di lunghezza d'arco su \mathcal{C} . Possiamo definire una distribuzione $T_{\mathcal{C}}$ su \mathbf{R}^n ponendo

$$\langle T_{\mathcal{C}}, f \rangle = \int_{\mathcal{C}} f(\vec{x}) d\sigma(\vec{x}), \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$$

Esplicitamente se \mathcal{C} è parametrizzata come $\vec{x} = \vec{x}(t)$, si ha

$$\langle T_{\mathcal{C}}, f \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt$$

si può pensare a questa distribuzione come ad una "Delta di Dirac lungo \mathcal{C} ". Per esempio, supponiamo che \mathcal{C} sia il cerchio unitario in \mathbf{R}^2 . Introducendo coordinate polari nel piano, \mathcal{C} può essere parametrizzata come

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta) : r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

per cui

$$\langle T_{\mathcal{C}}, f \rangle = \int_0^{2\pi} f(1, \theta) d\theta$$

In maniera intuitiva $T_{\mathcal{C}}$ è $\delta(r-1)$; cioè

$$\int_0^{2\pi} f(1, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r, \theta) \delta(r-1) r dr d\theta$$

4. Se \mathcal{S} è una superficie "liscia" in \mathbf{R}^3 e denotiamo con $d\mathcal{S}$ l'elemento d'area superficiale su \mathcal{S} , possiamo definire una distribuzione $T_{\mathcal{S}}$ su \mathbf{R}^3 , ponendo

$$\langle T_{\mathcal{S}}, f \rangle = \int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) d\mathcal{S}(\vec{x})$$

e $T_{\mathcal{S}}$ può essere pensata come una "delta lungo \mathcal{S} ".

1.4 Operazioni elementari sulle distribuzioni

1. La derivazione in $D'(I)$

Se $T \in D'I$ e $\alpha \geq 0$ è un intero, definiamo la derivata di ordine α di T , che viene denotata con $\partial^\alpha T$, ponendo

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^\alpha \langle T, f^{(\alpha)} \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

in cui $f^{(\alpha)}$ denota l'usuale derivata di ordine α della funzione $f \in C_c^\infty(I)$. E' immediato verificare che

$$f \rightarrow (-1)^\alpha \langle T, f^{(\alpha)} \rangle$$

definisce una distribuzione su I , per ogni α . Quindi la definizione è ben posta.

Esempi

- (a) Se $F \in C^1(I) \subset L_{loc}^1(I)$ allora

$$\partial T_F = T_{F'}$$

come si verifica immediatamente, con una integrazione per parti. Più in generale, se $F \in C^\infty(I)$, le derivate distribuzionali di F coincidono con le "derivate classiche" di F .

- (b) Se $F \in L_{loc}^1(I)$, indicheremo con $\partial^\alpha F$ le derivate distribuzionali di F vista come distribuzione, con notazione più completa $\partial^\alpha F$ denota $\partial^\alpha T_F$.

- (c) Si ha, se $a \in I$,

$$\langle \partial^\alpha \delta_a, f \rangle = (-1)^\alpha f^{(\alpha)}(a)$$

- (d) Denotiamo con H la "funzione di Heaviside"

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

H è evidentemente localmente integrabile, quindi definisce una distribuzione su \mathbf{R} . Si ha

$$\partial H = \delta$$

infatti, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\langle \partial H, f \rangle = -\langle H, f' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x) f'(x) dx = -\int_0^{\infty} f'(x) dx = -f(x)|_0^{\infty} = f(0) = \langle \delta, f \rangle$$

- (e) Generalizzazione dell'esempio precedente. Supponiamo che

$$F \in C^1(\mathbf{R} - \{0\})$$

e che nel punto $x = 0$ F abbia una discontinuità "a salto" (i limiti destro e sinistro sono finiti). E' evidente che una F con tali proprietà è in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$, quindi definisce una distribuzione. Vogliamo calcolare ∂F . Denotiamo con F' la derivata classica di F , che non è definita in 0, e che è una funzione continua su $\mathbf{R} - \{0\}$; supponiamo che F' sia

localmente integrabile su \mathbf{R} ; quindi che definisca una distribuzione su \mathbf{R} . Allora si ha, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$,

$$\langle \partial F, f \rangle = -\langle F, f' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)f'(x)dx = -\int_{-\infty}^0 F(x)f'(x)dx - \int_0^{+\infty} F(x)f'(x)dx =$$

integrando per parti, cosa che è lecita nelle ipotesi in cui ci siamo posti

$$\begin{aligned} &= -F(x)f(x)|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 F'(x)f(x)dx - F(x)f(x)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} F'(x)f(x)dx = \\ &= -F(0^-)f(0) + \int_{-\infty}^0 F'(x)f(x)dx + F(0^+)f(0) + \int_0^{+\infty} F'(x)f(x)dx = \\ &= f(0) [F(0^+) - F(0^-)] + \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)f(x)dx = \\ &= [F(0^+) - F(0^-)] \langle \delta, f \rangle + \langle F', f \rangle \end{aligned}$$

Per cui

$$\partial F = F' + [F(0^+) - F(0^-)] \delta$$

La derivata distribuzionale della funzione F è la derivata classica più la Delta moltiplicata per "il salto" della funzione nel punto di discontinuità.

Questo risultato si generalizza facilmente nella maniera seguente: supponiamo che f sia C^1 a tratti, con le discontinuità (o punti di non derivabilità) nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; supponiamo che in questi punti i limiti destro e sinistro di F esistano entrambi finiti (ciò implica, in particolare, che $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$); supponiamo, infine, che la derivata classica F' (funzione che non è definita nei punti x_n) sia in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$. Allora si ha la formula

$$\partial F = F' + \sum_n [F(x_n^+) - F(x_n^-)] \delta_{x_n}$$

Deve essere sottolineato che entrano in gioco solo le discontinuità di F e non quelle di F' . Si può vedere facilmente (integrando per parti a tratti e poi sommando) che se F è anche continua (oltre ad avere le proprietà citate sopra), allora

$$\int_{\mathbf{R}} F' f dx = - \int_{\mathbf{R}} F f' dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

anche se F' presenta delle discontinuità. Quindi, in tal caso,

$$\partial F = F'$$

2. La derivazione in $D'(\mathbf{R}^n)$

Se $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è un multiindice, definiamo la derivata di ordine $|\alpha|$ di T , rispetto a x_1, α_1 volte, ..., rispetto a x_n, α_n volte, che indichiamo con $\partial^\alpha T$, ponendo

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \rangle$$

E' molto semplice verificare che

$$f \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \rangle : C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$$

definisce una distribuzione su \mathbf{R}^n , e quindi che la definizione è ben posta.

Ricordiamo che se f è una funzione di più variabili (per semplificare consideriamo in caso $n = 2$) può aversi il caso che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

esistano entrambe ma non siano uguali. Questa situazione non può apparire nel contesto delle distribuzioni su \mathbf{R}^n : si ha in ogni caso

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}, T \in D'(\mathbf{R}^2)$$

Questo perché, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, f \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}, f \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right\rangle$$

e si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$$

3. La traslazione in $D'(\mathbf{R}^n)$

Se $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ e $a \in \mathbf{R}^n$ definiamo l'elemento T_a di $D'(\mathbf{R}^n)$ ponendo

$$\langle T_a, f \rangle = \langle T, f_{-a} \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$$

ricordiamo che, se f è una qualunque funzione in \mathbf{R}^n , si denota

$$f_a(x) = f(x - a), x \in \mathbf{R}^n$$

E' chiaro che se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ anche $f_a \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, e che

$$f \rightarrow \langle T, f_{-a} \rangle$$

definisce una funzione distribuzione su \mathbf{R}^n .

Esempi

(a) Se T è la funzione $F \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (T_f)_a, f \rangle = \langle T_f, f_{-a} \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) f(x+a) d^n x = \int_{\mathbf{R}^n} F(x-a) f(x) d^n x = \langle T_{F_a}, f \rangle$$

quindi $T_{F_a} = F_a$. La traslazione di F , vista come distribuzione, è uguale alla funzione F_a (anch'essa in $L_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$)

(b) La traslazione della δ è definita da

$$\langle (\delta)_a, f \rangle = \langle \delta, f_{-a} \rangle = f(a) = \langle \delta_a, f \rangle$$

quindi la nostra definizione precedente della δ_a coincide con la traslazione di a della delta in 0.

(c) Se $T \in D'(\mathbf{R})$, e si ha $T_a = T$ per un qualche $a \in \mathbf{R}$, si dice che T è periodica, con periodo a .

4. La dilatazione in $D'(\mathbf{R}^n)$

Se $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ e $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, definiamo una nuova distribuzione, che denotiamo $T^{[a]}$ e che viene detta la "dilatazione di T con scala a ", ponendo

$$\langle T^{[a]}, f \rangle = |a|^{-n} \langle T, f^{[\frac{1}{a}]} \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$$

Ricordiamo che se f è una qualunque funzione su \mathbf{R}^n si pone

$$f^{[a]}(x) = f(ax)$$

E' chiaro che se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, allora $f^{[a]} \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, per ogni $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, e che

$$f \rightarrow \langle T, f^{[\frac{1}{a}]} \rangle$$

definisce una nuova distribuzione su \mathbf{R}^n

Esempi

(a) Se $T = F$, in cui $F \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$, la sua dilatazione $(T_F)^{[a]}$ è data da

$$\langle (T_F)^{[a]}, f \rangle = \frac{1}{|a|^n} \langle T_F, f^{[\frac{1}{a}]} \rangle = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbf{R}^n} F(x) f\left(\frac{x}{a}\right) d^n x =$$

con il cambio di variabile $\frac{x}{a} = y$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} F(ay) f(y) d^n y = \langle T_{F^{[a]}}, f \rangle$$

Quindi se $F \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$, la sua dilatazione, quando è vista come distribuzione, coincide con $F^{[a]}$.

(b) Se $T = \delta$, si ha, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\langle \delta^{[a]}, f \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta, f^{[\frac{1}{a}]} \rangle = \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} \langle \delta, f \rangle$$

per cui

$$\delta^{[a]} = \frac{1}{|a|} \delta$$

(c) Un caso particolare si ha per $n = 1$ e $a = -1$. In tal caso $T^{[-1]}$ viene detta la "riflessione" di T . Si dice che T è "pari" se

$$T^{[-1]} = T$$

Si dice che T è "dispari" se

$$T^{[-1]} = -T$$

5. Moltiplicazione per funzioni C^∞

Se $T \in D'(I)$ e $\varphi \in C^\infty(I)$, possiamo definire il "prodotto di T e φ ", ponendo

$$\langle \varphi T, f \rangle = \langle T, \varphi f \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

E' chiaro che

$$f \rightarrow \langle T, \varphi f \rangle$$

definisce una distribuzione, qualunque sia $\varphi \in C^\infty(I)$. Questa operazione si generalizza in maniera naturale alle distribuzioni su \mathbf{R}^n .

Esempi

(a) Supponiamo $\varphi(x) = x$ e $T = \delta$ ($0 \in I$). Si ha

$$\langle x\delta, f \rangle = \langle \delta, xf \rangle = 0f(0) = 0;$$

per cui

$$x\delta = 0$$

(b) Supponiamo ancora $\varphi(x) = x$, ma $T = \partial\delta$. Si ha

$$\langle x\partial\delta, f \rangle = \langle \partial\delta, xf \rangle = -\langle \delta, (xf)' \rangle = -\langle \delta, f + xf' \rangle = -\langle \delta, f \rangle - \langle \delta, xf' \rangle = -f(0) - 0f'(0) = -\langle \delta, f \rangle$$

per cui

$$x\delta' = -\delta$$

1.5 La convergenza debole delle distribuzioni

Se $(T_n)_{n \geq 1}$ è una successione di elementi di $D'(I)$, e $T \in D'(I)$, diremo che la successione $(T_n)_{n \geq 1}$ converge a T "debolmente" o "nel senso di D' ", e denoteremo ciò scrivendo

$$T_n \rightarrow T \text{ in } D'(I)$$

se per ogni $f \in C_c^\infty(I)$ si ha

$$\langle T_n, f \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$$

in maniera analoga, se T_t è una famiglia di distribuzioni su I , indicizzata da un parametro reale t , e se $T \in D'(I)$, diremo che T_t tende debolmente a T , se $t \rightarrow t_0$ in \mathbf{R} , se

$$\langle T_t, f \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$$

quando $t \rightarrow t_0$, per ogni $f \in C_c^\infty(I)$.

Queste definizioni si estendono in maniera del tutto ovvia al caso di distribuzioni su \mathbf{R}^n .

Quando le distribuzioni T_n sono funzioni localmente integrabili F_n , è necessario distinguere accuratamente tra la convergenza debole e tipi di convergenza che possono essere attribuiti alla successione (F_n) , guardata come successione di funzioni (in particolare la convergenza puntuale o quasi ovunque)

Esempi

1. Denotiamo

$$F_k(x) = e^{ikx} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Evidentemente, $F_k \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$, per ogni $k \geq 1$, e si ha

$$F_k(2\pi n) \rightarrow 1 \text{ se } k \rightarrow \infty, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

In ogni altro punto x di \mathbf{R} la successione $(F_k(x))$ non ha limite. Nonostante ciò, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ si ha

$$\langle F_k, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f'(x) dx$$

e ciò mostra che $F_k \rightarrow 0$ in $D'(\mathbf{R})$.

2. Per ogni intero $k \geq 1$, definiamo F_k ponendo

$$F_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } k^{-1} < x < 2k^{-1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

E' chiaro che $F_k(x) \in D'(\mathbf{R})$, per ogni $k \geq 1$.

Per ogni fissato $x \in \mathbf{R}$, se k è sufficientemente grande

$$x \notin]k^{-1}, 2k^{-1}[$$

quindi $F_k(x) = 0$, purché k sia sufficientemente grande. Ciò mostra che

$$F_k(x) \rightarrow 0, \text{ se } k \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

D'altra parte, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ si ha

$$\langle F_k, f \rangle = k \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} f(x) dx = k \left[g\left(\frac{2}{k}\right) - g\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

in cui g denota una qualunque primitiva di f . Inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle F_k, f \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[g\left(\frac{2}{k}\right) - g\left(\frac{1}{k}\right) \right] = g'(0) = f(0) = \langle \delta, f \rangle$$

da cui

$$F_k \rightarrow \delta \text{ se } k \rightarrow \infty \text{ in } D'(\mathbf{R})$$

3. Per ogni $k \geq 1$ consideriamo la funzione F_k^2 , in cui F_k è la funzione definita nell'esempio precedente. E' chiaro che F_k^2 è una distribuzione, per ogni $k \geq 1$. In questo caso si ha

$$F_k^2(x) \rightarrow 0, \text{ se } k \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

ma F_k^2 non ha limite in $D'(\mathbf{R})$, quando $k \rightarrow \infty$.

Se $(F_k)_{k \geq 1}$ è una successione di funzioni in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$ e $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$, le seguenti sono condizioni sufficienti affinché

$$F_k \rightarrow F \text{ in } D'(\mathbf{R}^n)$$

1. Se $F_k \rightarrow F$ punto per punto (quasi ovunque) ed esiste una funzione localmente integrabile $G \geq 0$, tale che $|F_k(x)| \leq G(x)$, per ogni $k \geq 1$ ed ogni $x \in \mathbf{R}^n$. E' immediato provarlo usando il Teorema della Convergenza Dominata.
2. Se $F_k \rightarrow F$ uniformemente su ogni sottoinsieme limitato (cioè contenuto in una palla \mathcal{B}_R , con R sufficientemente grande) di \mathbf{R}^n . E' immediato, ancora dal Teorema della Convergenza Dominata.
3. (In questo caso supponiamo $n = 1$). Se $F_k \rightarrow F$ nella norma L^2 , su ogni intervallo limitato di \mathbf{R} . Infatti, se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ e $[-a, a]$ è un intervallo tale che $\text{supp } f \subset [-a, a]$, si ha

$$|\langle F_k, f \rangle - \langle F, f \rangle| = \left| \int_{-a}^a (F_k(x) - F(x)) f(x) dx \right| \leq \int_{-a}^a |F_k(x) - F(x)| |f(x)| dx \leq$$

per la disuguaglianza di Hölder

$$\leq \left(\int_{-a}^a |F_k(x) - F(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^a |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

per l'ipotesi fatta sulla convergenza delle F_k a F .

L'interesse maggiore della nozione di convergenza debole deriva dal fatto che il limite in $D'(\mathbf{R})$ di una successione di funzioni può non essere una funzione ma una distribuzione più singolare. Esempi di tale situazione sono le successioni di funzioni che "approssimano la δ ". Quello che segue è un risultato abbastanza generale per poter essere applicato in Meccanica Quantistica (Teoria delle perturbazione dipendenti dal tempo).

Teorema. *Supponiamo*

$$g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$$

Poniamo

$$\alpha = \int_{-\infty}^0 g(x)dx, \beta = \int_0^{+\infty} g(x)dx, (\alpha + \beta) = 1$$

*Supponiamo che f sia una funzione limitata su \mathbf{R} e continua a tratti (in altre parole, possa avere al più un'infinità numerabile di discontinuità "a salto", cioè $f(x^+)$ e $f(x^-)$ sono finiti, per ogni $x \in \mathbf{R}$, e le discontinuità non si annullano al finito). In particolare, il prodotto di convoluzione $f * g$ è definito su tutto \mathbf{R} . Poniamo*

$$g^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \epsilon > 0$$

Allora si ha

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f * g^\epsilon(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

In particolare, se f è continua in 0,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f * g^\epsilon(0) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^\epsilon(-x)dx = f(0)$$

Dimostrazione. Si ha

$$(f * g^\epsilon)(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-) = \int_{-\infty}^0 [f(x-y) - f(x^+)] g^\epsilon(y)dy + \int_0^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)] g^\epsilon(y)dy$$

Da cui

$$\begin{aligned} & |(f * g^\epsilon)(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^0 |[f(x-y) - f(x^+)] g^\epsilon(y)| dy + \int_0^{+\infty} |[f(x-y) - f(x^-)] g^\epsilon(y)| dy \end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che entrambi gli integrali possono essere resi arbitrariamente piccoli, scegliendo ϵ sufficientemente piccolo. L'argomento è lo stesso per entrambi. Fissiamo le idee solo sul secondo. Dato $\delta > 0$, possiamo scegliere $c > 0$ tanto piccolo che

$$|f(x-y) - f(x)| < \delta \text{ se } 0 < y < c;$$

spezziamo l'integrale in due pezzi

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^c \dots + \int_c^{+\infty} \dots$$

Si ha

$$\int_0^c |[f(x-y) - f(x^-)]| \cdot |g^\epsilon(y)| dy \leq \delta \int_0^c |g^\epsilon(x)| dy = \delta \int_0^{\frac{c}{\epsilon}} |g(y)| dy \leq$$

se $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ anche $|g| \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$

$$\leq \delta \int_0^{+\infty} |g(y)| dy$$

Ciò mostra che $\int_0^c \dots$ può essere reso arbitrariamente piccolo, indipendentemente da ϵ , scegliendo δ opportunamente.

Per quel che riguarda $\int_c^{+\infty} \dots$ dal momento che f è limitata su \mathbf{R} , si ha

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

per cui

$$\begin{aligned} & \int_c^{+\infty} |[f(x-y) - f(x^-)]| \cdot |g^\epsilon(x)| dy \leq \\ & 2M \int_c^{+\infty} |g^\epsilon(x)| dy = 2M \int_{\frac{c}{\epsilon}}^{+\infty} |g(y)| dy \end{aligned}$$

l'ultimo integrale tende a 0 se $\epsilon \downarrow 0$, poiché $|g|$ è integrabile su \mathbf{R} .

□

Esempio

In meccanica quantistica, nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, è necessario considerare limiti del tipo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^t x}{tx^2} dx$$

in cui f è una funzione d'onda. E' evidente che un tale limite può essere valutato usando il teorema precedente. Se poniamo

$$g(x) = k \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

con k tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 1$$

e poniamo $t = \frac{1}{\epsilon}$, abbiamo

$$g^t(x) = tk \frac{\sin^2 tx}{t^2 x^2} = k \frac{\sin^2 tx}{tx^2}$$

Applichiamo il precedente teorema, e supponendo f continua in 0, otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) k \frac{\sin^2 tx}{tx^2} dx = f(0)$$

Per calcolare k , abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \left\| \frac{\sin x}{x} \right\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 =$$

per il teorema di Plancherel

$$= \left\| \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{[-1,1]} \right\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dx = \pi$$

per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 tx}{tx^2} dx = \pi f(0)$$

Il corollario seguente precisa il risultato del teorema in una maniera più utile per lo studio della convergenza debole di successioni di funzioni

Corollario. Supponiamo $F \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1$$

Per ogni $\epsilon > 0$, poniamo

$$F^\epsilon(x) = \epsilon^{-1} F\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

allora si ha

$$F^\epsilon \rightarrow \delta \text{ in } D'(\mathbf{R}), \text{ se } \epsilon \downarrow 0$$

Dimostrazione. La funzione $F^{[-1]}$ è in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ e ha le proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^{[-1]}(x) dx = 1$$

Se applichiamo il teorema precedente al caso in cui $g = F^{[-1]}$ e $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, otteniamo

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon} F\left(\frac{x}{\epsilon}\right) f(x) dx = f(0)$$

Ciò significa, precisamente, che $F^\epsilon \rightarrow \delta$ in $D'(\mathbf{R})$

□

Un risultato completamente analogo a quello enunciato nel precedente Corollario si ha anche in \mathbf{R}^n : se $F \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ e $\int_{\mathbf{R}^n} F(x) d^n x = 1$ e se si pone

$$F^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} F\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora si ha

$$F^\epsilon \rightarrow \delta \text{ in } D'(\mathbf{R}^n), \text{ se } \epsilon \downarrow 0$$

La dimostrazione è analoga (ma non identica!) a quella del teorema e del corollario precedenti.

Una proprietà fondamentale della convergenza debole in $D'(I)$ (e in $D'(\mathbf{R}^n)$) è la continuità della derivazione: se $(T_k)_{k \geq 1}$ è una successione in $D'(I)$ (o in $D'(\mathbf{R}^n)$) e $T \in D'(I)$ (o $T \in D'(\mathbf{R}^n)$) tali che

$$T_k \rightarrow T \text{ in } D'(I) \text{ o in } D'(\mathbf{R}^n)$$

allora per ogni intero $\alpha \geq 0$ (o per ogni multiindice α)

$$\partial^\alpha T_k \rightarrow T \text{ in } D'(I) \text{ (o in } D'(\mathbf{R}^n))$$

Infatti, per ogni $f \in C_c^\infty(I)$ (o in $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$) si ha

$$\langle \partial^\alpha T_k, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha f \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle = \langle \partial^\alpha T, f \rangle$$

Questa proprietà è in totale contrasto con la situazione che si ha per le funzioni: se $F_k \rightarrow F$ punto per punto o uniformemente, non c'è nulla che porti a concludere che $\partial^\alpha F_k \rightarrow \partial^\alpha F$ punto per punto o uniformemente. L'esempio seguente può essere chiarificante.

Esempio

Supponiamo che

$$F_k(x) = k^{-1} \cos kx, k \geq 1, x \in \mathbf{R}$$

in questo caso

$$|F_k(x)| \leq k^{-1} \Rightarrow F_k \rightarrow 0 \text{ uniformemente su } \mathbf{R} \Rightarrow F_k \rightarrow 0 \text{ in } D'(\mathbf{R})$$

D'altra parte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F'_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-\sin kx) \text{ non esiste se } x \neq n\pi$$

nonostante $F'_k \rightarrow 0$ in $D'(\mathbf{R})$; infatti, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx f(x) dx \right| = 0$$

integrando per parti

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{k} \cos kx f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx f'(x) dx \right| \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx = 0 \end{aligned}$$

1.6 Supporto di una distribuzione

Supponiamo che $S, T \in D'(I)$. Se $U \subset I$ è un aperto, diremo che "S e T sono uguali su U" se si ha

$$\langle S, f \rangle = \langle T, f \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(I) \text{ tale che } \text{supp } f \subset U$$

in particolare, diremo che T si annulla in $U \subset I$ (Uaperto) se

$$\langle T, f \rangle = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(I), \text{ tale che } \text{supp } f \subset U$$

Notiamo che in questo modo si dà senso all'affermazione che T si annulla in un intorno di $x \in I$. Non è possibile, però, dare senso alla proprietà che T si annulla in un punto $x \in I$.

Definizioni del tutto analoghe si hanno nel caso di distribuzioni su \mathbf{R}^n .

Consideriamo ancora $T \in D'(I)$ e consideriamo tutti gli aperti U su cui T si annulla. L'unione di tutti questi aperti è ancora un aperto in I. E' possibile dimostrare (la dimostrazione non è del tutto elementare, e noi ammetteremo questa proprietà) che T si annulla sull'unione, che è il più grande aperto di I su cui T si annulla. Il suo complementare, che è un sottoinsieme chiuso di I, viene detto il "supporto" di T e viene denotato con $\text{supp } T$. Se $\text{supp } T$ è un insieme limitato si dice che T è "a supporto compatto". Se $T \in D'(\mathbf{R}^n)$, il supporto di T viene definito in maniera completamente analoga.

Esempi

1. Si ha

$$\langle \delta, f \rangle = 0$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, tale che $0 \notin \text{supp } f$. Quindi

$$\text{supp } \delta = \{0\}$$

Analogamente, se $a \in \mathbf{R}^n$,

$$\text{supp } \delta_a = \{a\}$$

Se α è un qualunque multiindice

$$\langle \partial^\alpha \delta, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, f^\alpha \rangle = 0$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, tale che $0 \notin \text{supp } f$. Quindi

$$\text{supp } \partial^\alpha \delta = \{0\}$$

$$\text{supp } \partial^\alpha \delta = \{a\}$$

2. Se $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ sono tali che i supporti di T e di f sono tra loro disgiunti, allora esiste, per ipotesi, un aperto contenente $\text{supp } f$ su cui $T = 0$. Quindi

$$\langle T, f \rangle = 0$$

E' importante notare, però, che se f si annulla sul supporto di T , non si ha necessariamente che $\langle T, f \rangle = 0$. Esempio di questo fatto è la distribuzione $\partial\delta = \delta'$, su \mathbf{R} . Si ha

$$\text{supp } \delta' = \{0\}$$

nonostante ciò, se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è tale che $f(0) = 0$ ma $f'(0) \neq 0$, si ha

$$\langle T, f \rangle = -f'(0) \neq 0$$

ma f è uguale a 0 nel supporto di T .

3. Se F è una funzione continua su \mathbf{R}^n (oppure su I) F è localmente integrabile quindi definisce una distribuzione. Il supporto di F , come elemento di $D'(\mathbf{R}^n)$ (oppure $D'(I)$) coincide con il supporto di F come funzione (cioè la chiusura in \mathbf{R}^n (oppure I) dell'insieme $\{x : F(x) \neq 0\}$).

Capitolo 2

La distribuzione x^{-1} e variazioni sul tema

2.1 Premessa. La formula di Taylor

Supponiamo che $f \in C^{(n)}(\mathbf{R})$, consideriamo l'integrale

$$\int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt, \quad x \in \mathbf{R}$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt &= f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Big|_0^x + \int_0^x f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} dt = \\ &= -f^{(n-1)}(0) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} dt = \end{aligned}$$

iterando le integrazioni per parti

$$\begin{aligned} &= -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) - \dots - x f'(0) + \int_0^x f'(t) dt = \\ &= -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) - \dots - x f'(0) + f(x) - f(0) \end{aligned}$$

Da cui si ha, per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

Si ha anche

$$\int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt =$$

ponendo $t = xs$

$$\frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(xs) ds$$

Per cui si ha ("formula di Taylor")

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{x^n}{n!} r_f(x),$$

in cui

$$r_f^n(x) = n \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(xs) ds$$

La proprietà di r_f^n sono:

1. r_f^n è continua su \mathbf{R} , per il teorema di continuità di un'integrale che dipende da un parametro; se $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, allora $r_f^n \in C^\infty(\mathbf{R})$, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.
2. $|r_f^n(x)| \leq n \sup_{x \in \mathbf{R}} |f^{(n)}(x)|$, dal momento che

$$0 \leq (1-s)^{n-1} \leq 1, \text{ se } 0 \leq s \leq 1$$

3. più in generale, se $f \in C^\infty(\mathbf{R})$

$$|\partial^k r_f^n(x)| \leq n \sup_{x \in \mathbf{R}} |f^{n+k}(x)|$$

dal momento che

$$0 \leq s^k (1-s)^n - 1 \leq 1, \text{ se } 0 \leq s \leq 1$$

2.2 La distribuzione x^{-1}

La funzione

$$\frac{1}{x}, x \neq 0$$

non è localmente integrabile su \mathbf{R} ; nonostante ciò si può associare ad essa una distribuzione su \mathbf{R} . Mostriamo che per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ il limite

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

esiste finito e definisce una distribuzione su \mathbf{R} (può essere opportuno sottolineare che $\frac{f(x)}{x}$ è integrabile su $\{x : |x| > \epsilon\}$). Per la formula di Taylor si ha

$$f(x) = f(0) + x r_f^1(x)$$

in cui

$$r_f^1(x) = \int_0^1 f'(xs) ds \quad r_f^1 \in C^\infty(\mathbf{R})$$

Se $a > 0$ è tale che

$$\text{supp } f \subset [-a, a]$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{f(0) + x r_f^1(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^a \frac{f(0) + x r_f^1(x)}{x} dx =$$

$\frac{f(0)}{x}$ è dispari ed è integrata su $[-a, -\epsilon] \cup [\epsilon, a]$

$$\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^a r_f^1(x) dx$$

La funzione $r_f^1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ è integrabile su $[-a, a]$, per cui

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{-a}^a r_f^1(x) dx$$

Ciò mostra che il limite in questione esiste finito. Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right| &\leq \int_{-a}^a |r_f^1(x)| dx \leq \\ &\leq 2a \sup_{x \in \mathbf{R}} |r_f^1(x)| \leq 2a \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \end{aligned}$$

Ciò mostra che

$$f \rightarrow \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx : C_c^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}$$

definisce una distribuzione su \mathbf{R} . Questa distribuzione viene detta "valor principale di uno su x "; tra le notazioni usate per indicarla abbiamo

$$x^{-1}, \frac{1}{x}, vp \frac{1}{x}, Pf \frac{1}{x}, X^{-1}, \dots$$

Poco sopra, abbiamo mostrato che

$$\langle x^{-1}, f \rangle = \int_{-a}^a r_f^1(x) dx$$

in cui $a > 0$ è tale che f si annulla al di fuori di $[-a, a]$. Ovviamente $\langle x^{-1}, f \rangle$ non dipende dalla scelta di a , e si ha anche

$$\langle x^{-1}, f \rangle = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a r_f^1(x) dx$$

Notiamo che

$$r_f^1(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}, \text{ se } x \neq 0$$

per cui si ha

$$\langle x^{-1}, f \rangle = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0)}{x} dx$$

Deve essere sottolineato che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

è integrabile su $[-a, a]$ per ogni $a > 0$ (tale che f si annulli al di fuori di $[-a, a]$), inoltre

$$\lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0)}{x} dx$$

esiste finito, ma la funzione

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

non è integrabile su \mathbf{R} .

Un ultimo commento: supponiamo che F sia una funzione continua su \mathbf{R} e pari, cioè

$$F(x) = F(-x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

consideriamo

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{F(x)f(x)}{x} dx$$

si possono ripetere passo per passo i ragionamenti fatti in precedenza e mostrare che si ottiene in questo modo una distribuzione su \mathbf{R} , che viene indicata con

$$vp \frac{F}{x}$$

In particolare, sono definite

$$\begin{aligned}\langle vp \frac{\cos x}{x}, f \rangle &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} f(x) dx \\ \langle vp \frac{e^{-|x|}}{x}, f \rangle &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-|x|}}{x} f(x) dx\end{aligned}$$

2.3 L'uguaglianza $\partial \log |x| = x^{-1}$

La funzione

$$\log |x|, x \neq 0$$

è localmente integrabile su \mathbf{R} , quindi definisce una distribuzione su \mathbf{R}

$$\log |x| \in D'(\mathbf{R})$$

La derivata distribuzionale di $\log |x|$ è una distribuzione, che vogliamo descrivere esplicitamente. Se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, si ha

$$\langle \partial \log |x|, f \rangle = -\langle \log |x|, f' \rangle = -\int_{-\infty}^0 \log(-x) f'(x) dx - \int_0^{+\infty} \log(x) f'(x) dx$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} \log x f'(x) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \log x f(x) \Big|_{\epsilon}^{+\infty} - \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ -\log \epsilon f(\epsilon) - \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right\}\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \log(-x) f'(x) dx &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \log(-x) f'(x) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \log(-x) f(x) \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \log \epsilon f(-\epsilon) - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx \right\}\end{aligned}$$

Per cui:

$$\langle \partial \log |x|, f \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \log \epsilon (f(\epsilon) - f(-\epsilon)) + \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right\}$$

Si ha

$$\begin{aligned}f(\epsilon) &= f(0) + \epsilon r_f^1(\epsilon) \\ f(-\epsilon) &= f(0) - \epsilon r_f^1(-\epsilon)\end{aligned}$$

da cui

$$f(\epsilon) - f(-\epsilon) = \epsilon [r_f^1(\epsilon) + r_f^1(-\epsilon)]$$

ricordiamo che $r_f^1 \in C^\infty(\mathbf{R})$, per cui

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \{ \log \epsilon (f(\epsilon) - f(-\epsilon)) \} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log \epsilon [r_f^1(\epsilon) + r_f^1(-\epsilon)] = 0$$

In conclusione

$$\langle \partial \log |x|, f \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \langle x^{-1}, f \rangle$$

Ciò mostra che

$$\partial \log |x| = x^{-1}$$

La distribuzione x^{-2} ; la generalizzazione al caso x^{-k}

Classicamente, cioè nel senso delle funzioni su \mathbf{R} , si ha

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \text{ se } x \neq 0$$

Definiamo, in analogia, la distribuzione x^{-2} su \mathbf{R} , ponendo

$$x^{-2} = -\partial x^{-1}$$

Vogliamo descrivere il più esplicitamente possibile l'azione di x^{-2} sulle funzioni di prova. Può essere di interesse ottenere due espressioni diverse per questa azione. Consideriamo la prima

$$\langle x^{-2}, f \rangle = -\langle \partial x^{-1}, f \rangle = \langle x^{-1}, f' \rangle =$$

Usiamo una delle due espressioni esplicite per x^{-1} che abbiamo trovato in precedenza

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{f'(x) - f(0)}{x} dx = \\ &= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \epsilon \downarrow 0}} \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+a} \frac{f'(x) - f(0)}{x} dx = \end{aligned}$$

(integrando per parti in ogni tratto; notiamo anche che

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} [f(x) - f(0) - x f'(0)] = f'(x) - f'(0) \\ &= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \epsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x} \Big|_{-a}^{-\epsilon} + \Big|_{\epsilon}^{+a} - \left[\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+a} (f(x) - f(0) - x f'(0)) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right] \right\} = \\ &= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \epsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{f(-\epsilon) - f(0)}{-\epsilon} - f'(0) - \frac{f(-a) - f(0)}{-a} + f'(0) + \frac{f(a) - f(0)}{a} - f'(0) - \frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} + f'(0) \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+a} \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} dx \right] \right\} = \\ &= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \epsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{f(0) - f(-\epsilon)}{\epsilon} + \frac{f(0) - f(\epsilon)}{\epsilon} - 2 \frac{f(0)}{a} + \frac{f(a) + f(-a)}{a} \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+a} \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} dx \right] \right\} = \\ &= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \epsilon \downarrow 0}} \int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+a} \frac{1}{2} r_f^2(x) dx = \end{aligned}$$

$(r_f^2 \in C^\infty(\mathbf{R}))$, quindi è integrabile su $[-a, a]$)

$$\lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{2} r_f^2(x) dx$$

In conclusione

$$\langle x^{-2}, f \rangle = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{2} r_f^2(x) dx = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x^2} dx$$

Possiamo avere un'altra espressione per x^{-2} come segue

$$\begin{aligned} \langle x^{-2}, f \rangle &= -\langle x^{-1}, f \rangle = \langle x^{-1}, f' \rangle = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f'(x)}{x} dx = \end{aligned}$$

(integrando per parti in ciascun tratto)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx + \frac{f(x)}{x} \Big|_{\epsilon}^{+\infty} - \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ -\frac{f(\epsilon)}{\epsilon} - \frac{f(\epsilon)}{\epsilon} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx \right\} = \end{aligned}$$

Dato che

$$-\frac{f(-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{f(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{f(0) - f(-\epsilon)}{\epsilon} + \frac{f(0) - f(\epsilon)}{\epsilon} - 2\frac{f(0)}{\epsilon}$$

allora

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} - 2\frac{f(0)}{\epsilon} \right\}$$

La distribuzione x^{-2} viene detta "valor principale di uno su x-quadro" e viene denotata anche con

$$X^{-2}, vp \frac{1}{x^2}, Pf \frac{1}{x^2}, \dots$$

La definizione di X^{-2} può essere generalizzata facilmente. Nel senso delle funzioni su \mathbf{R} , si ha

$$\frac{1}{x^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{1}{x} \right), \text{ se } x \neq 0$$

Allora, per analogia, si definisce la distribuzione su \mathbf{R} x^{-k} ponendo

$$x^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \partial^{k-1} (x^{-1}), (k \geq 2)$$

Si ha, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \langle x^{-k}, f \rangle &= \frac{1}{(k-1)!} \langle x^{-1}, f^{(k-1)} \rangle \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} dx = \end{aligned}$$

Procedendo in analogia con il caso $k = 2$

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{x^k} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} x^j \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right) dx = \\ &= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{k!} r_f^k(x) dx \end{aligned}$$

2.4 La formula $\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0} \right)$

Denotiamo

$$z = x + iy; \quad x \in \mathbf{R}, \quad y > 0;$$

definiamo $\log z$ fissando

$$0 < \arg z < \pi$$

quindi

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

La funzione

$$x \rightarrow \log |z| = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad (y > 0 \text{ fissato})$$

è evidentemente continua e derivabile su tutto \mathbf{R} .

Nel seguito saremo interessati al limite per $y \rightarrow 0$, quindi è sufficiente avere un'idea dell'andamento di questa funzione per y abbastanza piccoli, in particolare, possiamo supporre sia

$$0 < y < \sqrt{1 - y^2} < 1$$

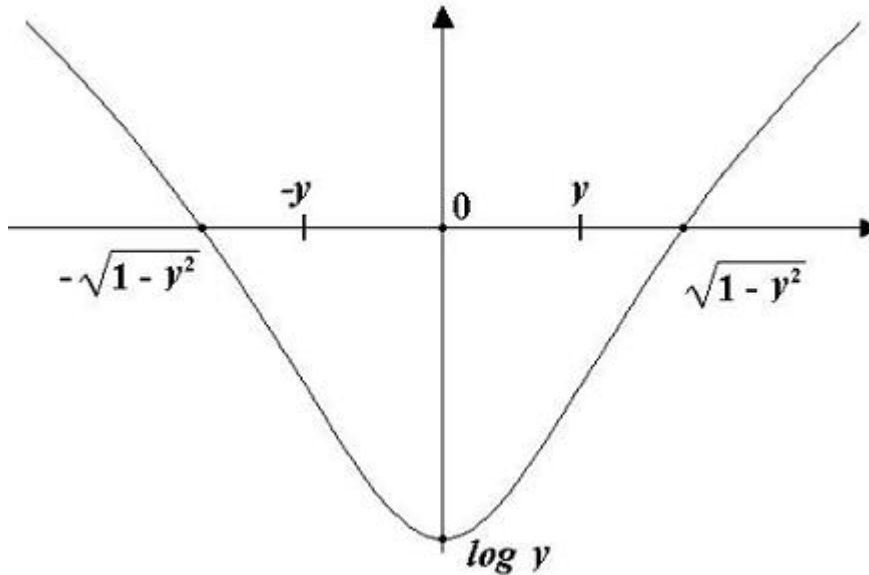


Figura 2.1: Andamento della funzione $\log \sqrt{x^2 + y^2}$, a y fissato

La funzione

$$x \rightarrow \arg(x + iy), \quad y > 0$$

è continua e limitata su \mathbf{R} .

Quindi la funzione

$$x \rightarrow \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg(x + iy), \quad y > 0, \quad 0 < \arg(x + iy) < \pi$$

è localmente integrabile su \mathbf{R} ; quindi definisce una distribuzione su \mathbf{R} .

Consideriamo il limite (puntuale)

$$\lim_{y \downarrow 0} \log z = \log |x| + i \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \pi & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

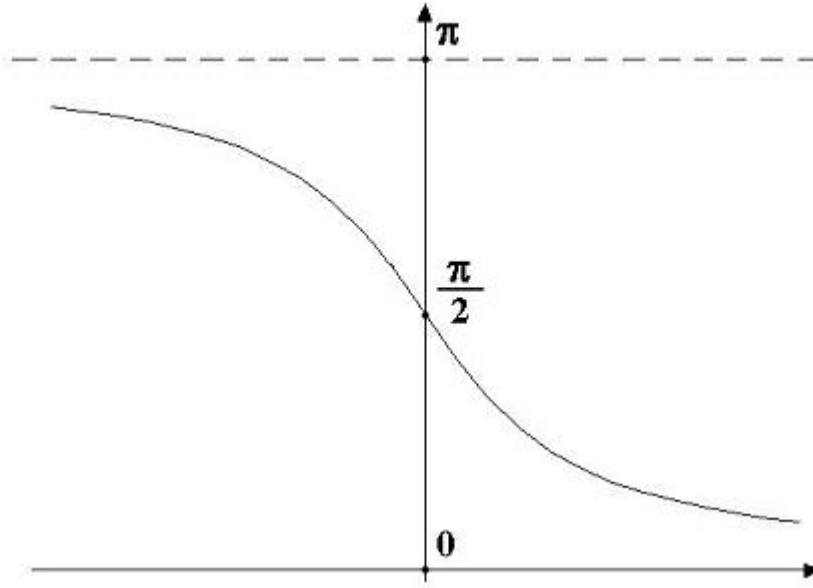


Figura 2.2: Andamento della funzione $\arg(x + iy)$, a $y > 0$ fissato

Un uso elementare del Teorema della Convergenza Dominata ci assicura che il limite precedente continua a valere anche in $D'(\mathbf{R})$:

$$\lim_{y \downarrow 0} \log z = \log |x| + i\pi(1 - H) \text{ in } D'(\mathbf{R})$$

(ricordiamo che H denota la "funzione di Heaviside"). Per una proprietà fondamentale della derivata in $D'(\mathbf{R})$ si ha

$$\lim_{y \downarrow 0} (\partial \log z) = \partial \left(\lim_{y \downarrow 0} \log z \right) = \partial (\log |x| + i\pi(1 - H)) = x^{-1} - i\pi\delta$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \partial \log z &= \frac{d}{dx} \left(\log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x + i \frac{y \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} \end{aligned}$$

Possiamo concludere che

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{x + iy} \text{ è una distribuzione su } \mathbf{R}$$

che viene denotata con $\frac{1}{x+i0}$, e si ha

$$\frac{1}{x + i0} = x^{-1} - i\pi\delta$$

Può essere opportuno sottolineare che l'uguaglianza precedente non definisce $\frac{1}{x+i0}$, ma deve essere interpretata come un'uguaglianza. La distribuzione $\frac{1}{x+i0}$ viene definita da

$$\left\langle \frac{1}{x + i0}, f \right\rangle = \lim_{y \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x + iy} dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

Il ragionamento precedente ci assicura che il limite definisce davvero una distribuzione. *Mutatis mutandis* si dimostra anche che

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{x - iy} = x^{-1} + i\pi\delta$$

analogamente, si denota

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{x - iy} = \frac{1}{x - i0}$$

Si ha immediatamente l'uguaglianza

$$\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right)$$

Questa formula è usata spesso in Meccanica Quantistica (ad esempio, nella teoria della scattering)

2.5 Le distribuzioni x_+^{-k} , x_-^{-k}

Denotiamo

$$L_+(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Deve essere sottolineato che

$$L_+ \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R})$$

Definiamo una famiglia di distribuzioni

$$x_+^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ponendo

$$x_+^0 = H$$

$$x_+^{-1} = \partial L_+$$

$$x_+^{-2} = -\partial^2 L_+ - \delta'$$

...

$$(k \geq 2) \quad x_+^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\partial^k L_+ + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \delta^{(k-1)} \right]$$

...

Esplicitamente

$$\langle x_+^0, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$\langle x_+^{-1}, f \rangle = - \int_0^{+\infty} f'(x) \log x dx$$

...

$$(k \geq 2) \quad \langle x_+^{-k}, f \rangle = - \int_0^{+\infty} f^{(k)}(x) \log x \frac{dx}{(k-1)!} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$$

...

Si possono dare altre rappresentazioni esplicite per le distribuzioni x_+^{-k} . Come esempio, diamo quelle per x_+^{-1} e x_+^{-2} ; si dimostrano in modo del tutto simile ai casi di x^{-1} e x^{-2} :

$$\langle x_+^{-1}, f \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \log \epsilon \right]$$

$$\langle x_+^{-2}, f \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx - \frac{f(0)}{\epsilon} + f'(0) \log \epsilon \right]$$

La definizione delle distribuzioni x_+^{-k} può sembrare molto arbitraria e immotivata. In realtà, la definizione è data avendo in mente delle proprietà che debbano avere le distribuzioni x_+^{-k} . Queste proprietà fondamentali sono:

1. $x_+^{-k} |] - \infty, 0[= 0$
 $x_+^{-k} |] 0, +\infty[= \frac{1}{x^k}$
2. $x \cdot x_+^{-k} = x_+^{1-k} \quad (k \geq 1)$
3. $\partial x_+^{-k} = -k x_+^{-(k+1)} + (-1)^k \frac{\delta^{(k)}}{k!}$

Mostriamo la (1). È ovvio che x_+^{-k} ristretta a $] - \infty, 0[$ è 0. Per quel che riguarda l'altra, consideriamo innanzi tutto, per semplicità, il caso $k = 1$. Se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è tale che

$$\text{supp } f \subset] 0, +\infty[$$

si ha

$$\langle x_+^{-1}, f \rangle = - \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx =$$

integrando per parti, è lecito nelle ipotesi in cui siamo

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

Quindi

$$x_+^{-1} |] 0, +\infty[= \frac{1}{x}$$

Deve essere sottolineato che $\frac{1}{x} \in \mathcal{L}_{loc}^1(0, +\infty)$. Si procede in maniera del tutto analoga per $k \geq 2$.

Mostriamo la (2).

Se $k = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \langle x \cdot x_+^{-1}, f \rangle &= \langle x_+^{-1}, x f \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} \log x f(x) dx - \int_0^{+\infty} x \log x f'(x) dx = \end{aligned}$$

integrando per parti il secondo

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{+\infty} \log x f(x) dx - \left\{ x \log x f(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \log x f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right\} = \\ &= - \int_0^{+\infty} \log x f(x) dx + \int_0^{+\infty} \log x f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \langle H, f \rangle \end{aligned}$$

Da cui

$$x \cdot x_+^{-1} = H = x_+^0$$

Se $k = 2$, si ha

$$\begin{aligned} \langle x \cdot x_+^{-2}, f \rangle &= \langle x_+^{-2}, x f \rangle = \\ &= - \int_0^{+\infty} \log x (x f)'' dx - \langle \delta'_0, x f \rangle \\ &= -2 \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \log x f''(x) dx + \langle \delta_0, f + x f' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx - \left\{ x \log x f'(x) dx \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(x) \log x dx - \int_0^{+\infty} f'(x) dx \right\} + f(0) = \\
&= -2 \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx + \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx - f(0) + f(0) = \\
&= - \int_0^{+\infty} \log x f'(x) dx = \langle x_+^{-1}, f \rangle
\end{aligned}$$

Nello stesso ordine di idee, si dimostra la proprietà (2) per ogni $k \geq 2$.

Mostriamo la (3). Se $k = 0$ la proprietà è già nota

$$\partial H = \delta$$

Se $k = 1$, si ha

$$\langle \partial x_+^{-1}, f \rangle = -\langle x_+^{-1}, f' \rangle = \int_0^{+\infty} \log x f''(x) dx = \langle \partial^2 L_+, f \rangle$$

Da cui

$$\partial x_+^{-1} = \partial^2 L_+ = -x_+^{-2} - \delta'$$

Se $k \geq 2$, si ha

$$\begin{aligned}
&\langle \partial x_+^{-k}, f \rangle = -\langle x_+^{-k}, f' \rangle = \\
&= \int_0^{+\infty} f^{(k+1)}(x) \log x \frac{dx}{(k-1)!} - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} = \\
&= -k \left[- \int_0^{+\infty} f^{(k+1)}(x) \log x \frac{dx}{k!} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} k^{-1} \right] + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \\
&= -k \langle x_+^{-(k+1)}, f \rangle + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}
\end{aligned}$$

da cui

$$\partial x_+^{-k} = -k x_+^{-(k+1)} + (-1)^k \frac{\delta^{(k)}}{k!}$$

Per ogni intero $k \geq 0$, definiamo la distribuzione

$$x_-^{-k} \text{ in } D'(\mathbf{R})$$

ponendo

$$x_-^{-k} = (x_+^{-k})^{[-1]}$$

(Ricordiamo che, se $T \in D'(\mathbf{R})$, $T^{[-1]}$ denota la "riflessione" di T). Esplicitamente, si ha: se $k = 0$:

$$x_-^0 = H^{[-1]} = (1 - H)$$

$$\langle x_-^0, f \rangle = \int_{-\infty}^0 f(x) dx$$

se $k = 1$

$$\langle x_-^{-1}, f \rangle = \int_{-\infty}^0 \log(-x) f'(x) dx$$

se $k \geq 2$

$$\langle x_-^{-k}, f \rangle = (-1)^{k-1} \left\{ \int_{-\infty}^0 \log(-x) f^{(n)}(x) \frac{dx}{(k-1)!} + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \right\}$$

in particolare, per $k = 2$

$$\langle x_-^{-2}, f \rangle = - \int_{-\infty}^0 f''(x) \log(-x) dx - f'(0)$$

Dalle formule precedenti, è evidente che le distribuzioni x_-^{-k} possono essere definite anche in maniera analoga alle x_+^{-k} . Infatti, se definiamo

$$L_-(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \log(-k) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è facile verificare che

$$x_-^{-1} = -\partial L_-$$

$$(k \geq 2) \quad x_-^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \left[-\partial^k L_- + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \delta^{(k-1)} \right]$$

Le proprietà delle distribuzioni x_-^{-k} sono del tutto analoghe a quelle delle distribuzioni x_+^{-k} . Si ha

1. $x_-^{-k} |] -\infty, 0[= \frac{1}{(-x)^k} = (-x)^{-k}$
 $x_-^{-k} |] 0, +\infty[= 0$
2. $x \cdot x_-^{-k} = -x_-^{1-k} \quad (k \geq 1)$
3. $\partial x_-^{-k} = k x_-^{-(k+1)} - \frac{1}{k!} \delta^{(k)}$

In termini delle distribuzioni x_+^{-1} e x_-^{-1} , si verifica immediatamente che

$$x^{-1} = x_+^{-1} - x_-^{-1}$$

e, in generale,

$$x^{-k} = x_+^{-k} + (-1)^k x_-^{-k}$$

Si possono definire, in analogia, anche

$$|x|^{-1} = x_+^{-1} + x_-^{-1} \quad , \quad |x|^{-k} = x_+^{-k} + x_-^{-k}$$

Capitolo 3

Tre importanti problemi

3.1 Il problema della divisione

Se S è un fissato elemento in $D'(\mathbf{R})$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ il problema di trovare tutte le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che

$$\varphi \cdot T = S$$

viene detto il "problema della divisione" in $D'(\mathbf{R})$. Se $\varphi \neq 0$ su tutto \mathbf{R} , allora $\frac{1}{\varphi} \cdot S$ è soluzione dell'equazione. Se non è questo il caso, il problema può diventare molto complicato. Esamineremo in dettaglio un caso particolare, ma importante, del problema della divisione: trovare tutte le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che

$$x^k T = S$$

in cui $k > 0$ è un intero, ed $S \in D'(\mathbf{R})$ è un elemento assegnato.

Infine, indicheremo brevemente una (facile) generalizzazione di questo caso.

I risultati tecnici necessari per risolvere il problema $x^k T = S$ sono il contenuto di due semplici lemmiche seguono.

Lemma. *L'applicazione*

$$f \rightarrow x^k f : C_c^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbf{R}), k > 0 \text{ intero}$$

è iniettiva, la sua immagine è costituita dalle funzioni $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tali che

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$$

Dimostrazione. Che l'applicazione sia iniettiva è del tutto evidente. Se $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è una funzione della forma $g = x^k f$, con $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, si ha, per $j = 0, \dots, k-1$

$$\frac{d^j}{dx^j} (x^k f(x)) = \sum_{l+i=j} \frac{j!}{l!i!} k(k-1)\dots(k-l+1)x^{k-l} f^{(i)}(x),$$

e ciò mostra che $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$.

Inversamente, supponiamo che $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ abbia la proprietà

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0)$$

la formula di Taylor ci assicura allora che

$$g(x) = \frac{x^k}{k!} r_g^k(x)$$

in cui $r_g^k \in C^\infty(\mathbf{R})$. D'altra parte, l'uguaglianza precedente ci assicura che g e r_g^k hanno lo stesso supporto, se sono ristrette a $\mathbf{R} - \{0\}$; allora $\text{supp } g = \text{supp } r_g^k$; quindi $r_g^k \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ e il lemma è provato.

□

Si ha il seguente lemma

Si fissa . Allora

Lemma. Fissato un intero $k \geq 1$, e fissata $f_0 \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tale che $f_0 = 1$ in un intorno di 0, ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ può essere decomposta univocamente come

$$f = af_0 + f_1$$

in cui

$$a = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) \right),$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = \dots = f_1^{(k-1)}(0) = 0$$

(cioè f_1 è della forma $x^k r_{f_1}^k$, in cui $r_{f_1}^k \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, per il Lemma precedente)

Dimostrazione. Data f_0 e k , si ha l'ovvia uguaglianza

$$f(x) = af_0(x) + [f(x) - af_0(x)]$$

Definiamo

$$f_1(x) = f(x) - af_0(x) = f(x) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) \right) f_0(x)$$

Utilizzando la formula di Leibnitz usata nella dimostrazione del Lemma precedente è immediato verificare che

$$f_1(0) = f_1'(0) = \dots = f_1^{(k-1)}(0) = 0$$

L'unicità della decomposizione di f è chiara, dalla costruzione stessa di f_1

□

Data $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ e $k \geq 1$, si fissa f_0 e si ottiene la decomposizione

$$f = af_0 + f_1$$

descritta nel lemma precedente, inoltre

$$f_1 = x^k \frac{r_{f_1}^k}{k!}$$

Il nostro problema è risolvere l'equazione

$$x^k T = S \text{ in } D'(\mathbf{R})$$

definiamo una distribuzione $T_0 \in D'(\mathbf{R})$ ponendo

$$\langle T_0, f \rangle = \langle S, \frac{1}{k!} r_{f_1}^k \rangle$$

La verifica che T_0 , così definita, sia una distribuzione viene lasciata come esercizio (è utile ricordare la proprietà (3) del paragrafo sulla formula di Taylor). Si ha

$$\langle x^k T_0, f \rangle = \langle T_0, x^k f \rangle = \langle S, \frac{1}{k!} r_{(x^k f)_1}^k \rangle = \langle S, f \rangle$$

Quindi T_0 è una soluzione dell'equazione $x^k T = S$. Il risultato fondamentale che si fornisce tutte le soluzioni dell'equazione è contenuto nel teorema seguente.

Teorema. *Le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che e*

$$x^k T = S$$

sono tutte e sole quelle della forma

$$T = T_0 + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \partial^j \delta$$

in cui $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbf{C}$.

Dimostrazione. Se T è della forma

$$T = T_0 + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \partial^j \delta$$

è immediato verificare che $x^k T = S$. Inversamente, se $x^k T = S$, si ha, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \langle T, a f_0 + f_1 \rangle = \langle T, a f_0 + x^k \frac{r_{f_1}^k}{k!} \rangle = \\ &= \langle a T, f_0 \rangle + \langle x^k T, \frac{r_{f_1}^k}{k!} \rangle = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \langle \frac{x^j}{j!} T, f_0 \rangle f^{(j)}(0) + \langle S, \frac{1}{k!} r_{f_1}^k \rangle = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \langle \frac{x^j}{j!} T, f_0 \rangle (-1)^j \langle \delta^{(j)}, f \rangle + \langle T_0, f \rangle = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j \langle \delta^{(j)}, f \rangle + \langle T_0, f \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$T = T_0 + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \delta^{(j)}$$

□

Procedendo in maniera perfettamente analoga, non è difficile dimostrare una generalizzazione del risultato precedente:

Teorema. *se $S \in D'(I)$ e $a \in I$, esistono distribuzioni $T \in D'(I)$ che risolvono l'equazione*

$$(x - a)^k T = S$$

E sono tutte della forma

$$T = T_0 + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \delta_a^{(j)}$$

in cui c_1, \dots, c_{k-1} sono arbitrari numeri complessi e T_0 è una qualunque soluzione dell'equazione.

3.2 Il problema della primitiva

Supponiamo che I sia un intervallo aperto di \mathbf{R} e S una fissata distribuzione su I . Ogni T in $D'(I)$ che sia soluzione dell'equazione

$$\partial T = S$$

viene detta una "primitiva di S (su I)". Ci proponiamo di descrivere esplicitamente tutte le primitive di un'assegnata distribuzione S .

Per semplificare l'esposizione, daremo la dimostrazione solo nel caso $I = \mathbf{R}$. Dei risultati più importanti, ripeteremo gli enunciati nel caso di un intervallo I qualunque.

Lemma. *L'applicazione lineare*

$$f \rightarrow f' : C_c^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbf{R})$$

è iniettiva. La sua immagine è costituita dalle funzioni $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 0$$

Tale immagine è un sottospazio di $C_c^\infty(\mathbf{R})$ di codimensione 1. Esplicitamente, fissato $f_0 \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) dt = 1$$

ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ha un'unica decomposizione

$$f = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) f_0 + f_1$$

in cui $f_1 = g'_f$, per una funzione $g_f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ univocamente determinata.

Dimostrazione. Se $f' = 0$ su tutto \mathbf{R} , allora f è costante su \mathbf{R} ; quindi $f = 0$, dal momento che è a supporto compatto. Ciò mostra che l'applicazione $f \rightarrow f' : C_c^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbf{R})$ è iniettiva.

Se $g = f'$, con $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = 0$$

Inversamente, se $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 0$, allora la funzione

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$$

è in $C_c^\infty(\mathbf{R})$, ed è tale che $f' = g$. Ciò mostra che l'immagine dell'applicazione iniettiva ($f \rightarrow f'$) è l'insieme delle funzioni a integrale nullo.

Fissiamo $f_0 \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) dt = 1$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$, e per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, si ha l'ovvia uguaglianza

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) f_0(x) + \left[f(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) f_0(x) \right]$$

poniamo

$$f_1(x) = f(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) f_0(x)$$

allora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)dt \right) = 0$$

Ciò mostra che $C_c^\infty(\mathbf{R})$ si decompone nella somma del sottospazio generato da f_0 e del sottospazio delle funzioni a integrale nullo. Tale somma è evidentemente diretta. Ciò mostra l'unicità della decomposizione

$$f = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \right) f_0 + f_1$$

Per la prima parte della dimostrazione $f_1 = g'_f$ in cui g_f è un elemento di $C_c^\infty(\mathbf{R})$ univocamente determinato.

□

Lemma. *La forma lineare su $C_c^\infty(\mathbf{R})$*

$$f \rightarrow -\langle S, g_f \rangle$$

definisce una distribuzione, che denotiamo T_0 . Inoltre si ha

$$\partial T_0 = S$$

Dimostrazione. Del lemma precedente abbiamo

$$g_f(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t)dt$$

Se $a > 0$ è tale che

$$\text{supp } f, \text{ supp } f_0 \subset [-a, a]$$

è facile vedere che anche

$$\text{supp } g_f \subset [-a, a]$$

Inoltre, se $b > 0$ è tale che

$$\text{supp } f_0 \subset [-b, b]$$

si ha

$$\begin{aligned} |g_f(x)| &\leq 2a(1 + 2b \text{sup } |f_0|) \text{sup } |f| \\ |g_f^{(k)}(x)| &\leq \text{sup } |f^{(k-1)}| + 2a \text{sup } |f| \text{sup } |f_0^{(k-1)}| \end{aligned}$$

Le relazioni precedenti mostrano che se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R})$ tale che

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } D(\mathbf{R})$$

allora

$$g_{f_j} \rightarrow 0 \text{ in } D(\mathbf{R})$$

Ciò mostra che

$$f \rightarrow -\langle S, g_f \rangle : C_c^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}$$

definisce un elemento di $D'(\mathbf{R})$, che denotiamo con T_0 . Si ha

$$\langle \partial T_0, f \rangle = -\langle T_0, f' \rangle = \langle S, g_{f'} \rangle = \langle S, f \rangle$$

Per cui

$$\partial T_0 = S$$

□

Teorema. Le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che

$$\partial T = S$$

sono tutte e sole quelle della forma

$$T = T_0 + c, \quad c \in \mathbf{C}$$

In particolare le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che $\partial T = 0$ sono tutte e sole le costanti.

Dimostrazione. Se $T = T_0 + c$, allora

$$\partial T = \partial T_0 + \partial c = \partial T_0 = S$$

Inversamente, se $\partial T = S$, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ si ha

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \langle T, \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right] f_0 + g'_f \rangle = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right] \langle T_0, f_0 \rangle + \langle T, g'_f \rangle = \\ &= \langle \langle T, f_0 \rangle, f \rangle - \langle \partial T, g_f \rangle = \langle c, f \rangle - \langle S, g_f \rangle = \langle c, f \rangle + \langle T_0, f \rangle \end{aligned}$$

per cui

$$T = T_0 + c$$

□

Il teorema precedente si generalizza immediatamente sostituendo a \mathbf{R} un qualunque intervallo aperto I . Si ha quindi

Teorema. Se S è una fissata distribuzione in $D'(I)$, allora esistono distribuzioni $T \in D'(I)$ tali che

$$\partial T = S$$

Se T_1 e T_2 sono due elementi di $D'(I)$ con questa proprietà, allora

$$T_2 - T_1 = c, \quad c \in \mathbf{C}$$

In particolare, le distribuzioni in $D'(I)$ tali che

$$\partial T = 0$$

sono tutte e sole le costanti.

Una conseguenza importante del precedente teorema è descritta nel seguito. Essa costituisce un caso particolarmente semplice di un teorema molto profondo, noto come teorema "di regolarità ellittica".

Corollario. Se $T \in D'(I)$ è soluzione dell'equazione

$$\partial T + fT = g$$

in cui

$$f \in C^\infty(I), \quad g \in C(I)$$

allora

$$T \in C^1(I)$$

e T è soluzione dell'equazione

$$T' + ft = g$$

in senso classico.

Dimostrazione. Supponiamo, innanzi tutto, che sia $f = 0$. Dal momento che g ha una primitiva $G \in C^1(I)$ e

$$\partial(T - G) = \partial T - G' = g - g = 0$$

il Teorema precedente ci assicura che

$$T - G = c \Rightarrow T = G + c \in C^1(I)$$

Consideriamo ora il caso in cui $f \neq 0$. Denotiamo con F una qualunque primitiva di f , su I . Denotiamo

$$E(x) = e^{F(x)}$$

Allora $E \in C^\infty(I)$ e non si annulla mai su I . Si ha allora

$$\partial(ET) = E\partial T + E'T = E\partial T + fET = E(\partial T + fT) =$$

dal momento che $\partial T + fT = g$

$$= E \cdot g \in C(I)$$

Allora, per la prima parte della dimostrazione,

$$ET \in C^1(I)$$

Dal momento che $E \neq 0$ su I , si ha $T \in C^1(I)$

□

Poiché equazioni differenziali ordinarie di ordine più alto sono riducibili a sistemi del primo ordine, si può dedurre il risultato seguente:

Corollario. Sia $T \in D'(I)$, tale che

$$\partial^k T + f_{k-1} \partial^{k-1} T + \dots + f_0 T = g$$

in cui $g \in C(I)$ e $f_0, \dots, f_{k-1} \in C^\infty(I)$, allora

$$T \in C^k(I)$$

e l'equazione è soddisfatta in senso classico.

La generalizzazione dei risultati precedenti alle distribuzioni su \mathbf{R}^n è altamente non banale. Citiamo soltanto (senza dimostrazione) un utile analogo (più debole) di uno dei corollari precedenti

Teorema. Se f, g sono funzioni continue su \mathbf{R}^n e

$$\partial_j f = g \text{ nel senso delle distribuzioni}$$

allora la derivata parziale classica $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ ed è uguale a $g(x)$.

3.3 Gli spazi $W^{k,p}(I)$

Supponiamo che $I =]a, b[$ sia un intervallo aperto di \mathbf{R} (non necessariamente limitato) e che F sia un elemento di $\mathcal{L}_{loc}^1(I)$. Fissiamo un qualunque punto $x_0 \in I$, e per ogni $x \in I$, poniamo

$$G(x) = \int_{x_0}^x F(t) dt.$$

Per il teorema della convergenza dominata, G è una funzione continua su I , quindi definisce una distribuzione su I .

Proposizione. *Si ha*

$$\partial G = F \text{ in } L^1_{loc}(I)$$

Dimostrazione. Per definizione è

$$\langle \partial G, f \rangle = -\langle G, f' \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

quindi per mostrare che $\partial G = F$ dobbiamo mostrare che

$$\int_a^b F(x)f(x)dx = -\int_a^b G(x)f'(x)dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(I)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x)f'(x)dx &= \int_a^b f'(x) \left[\int_{x_0}^x F(t)dt \right] dx = \\ &= \int_a^{x_0} dx \left[f'(x) \int_{x_0}^x F(t)dt \right] + \int_{x_0}^b dx \left[f'(x) \int_{x_0}^x F(t)dt \right] \end{aligned}$$

Usando il Teorema di Fubini, vedi figura (3.3)

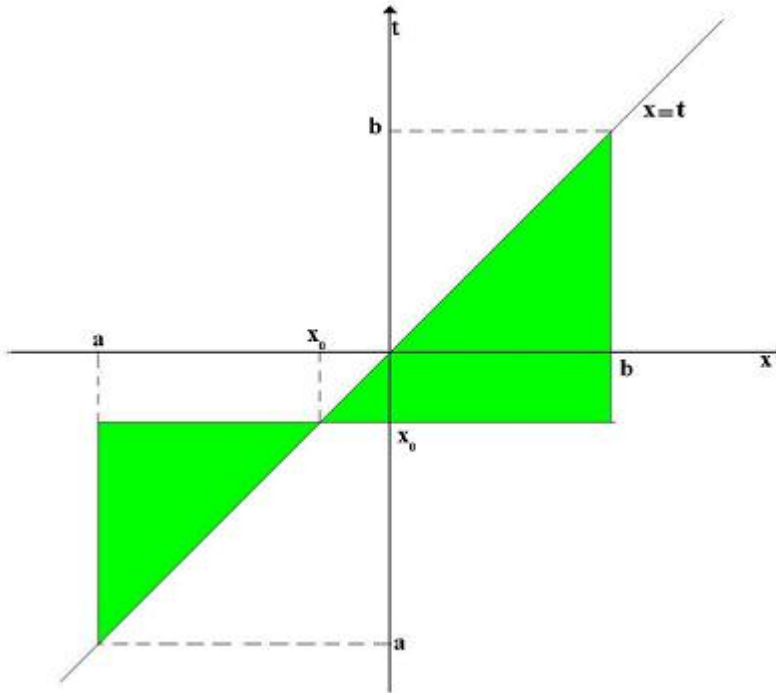


Figura 3.1:

$$\begin{aligned} &= -\int_a^{x_0} dt F(t) \left[\int_a^t dx f'(x) \right] + \int_{x_0}^b dt F(t) \left[\int_t^b dx f'(x) \right] \\ &= \int_a^{x_0} dt F(t) [-f(t) + f(a)] + \int_{x_0}^b dt F(t) [f(b) - f(t)] = \\ &= -\int_a^b F(t)f(t)dt \end{aligned}$$

ciò mostra che $F = \partial G$.

□

Vogliamo caratterizzare le distribuzioni F , su I , che hanno la proprietà

$$F \in L^1_{loc}(I) , \partial F \in L^1_{loc}(I)$$

Ricordiamo che con la notazione

$$\int_{x_0}^x \partial F(t) dt , \quad x, x_0 \in I$$

intendiamo l'integrale (da x_0 a x) di una qualunque funzione che appartenga alla classe di equivalenza $\partial F \in L^1_{loc}(I)$. Per la proposizione precedente

$$\partial \left[\int_{x_0}^x \partial F(t) dt \right] = \partial F \text{ in } L^1_{loc}(I)$$

per cui

$$\partial \left[F - \int_{x_0}^x \partial F(t) dt \right] = 0$$

Per quanto mostrato in precedenza, esiste $c \in \mathbf{C}$ tale che

$$F - \int_{x_0}^x \partial F(t) dt = c \text{ in } L^1_{loc}(I)$$

Se poniamo

$$\tilde{F}(x) = \int_{x_0}^x \partial F(t) dt + c$$

abbiamo

1. \tilde{F} è continua su I ;
2. \tilde{F} è nella classe di equivalenza $F \in L^1_{loc}(I)$;
3. $\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0) = \int_{x_0}^x \partial F$

Notiamo che \tilde{F} è l'unica funzione continua che appartiene alla classe di equivalenza $F \in L^1_{loc}(I)$ con la quale, dunque, può essere identificata. Quando sarà conveniente (ad esempio per dare significato a $F(x)$, con $x \in I$) sostituiremo sistematicamente F con \tilde{F} . Per non appesantire la notazione, denoteremo ancora con F il rappresentante continuo. Con questo abuso, si ha

$$F(x) = \int_{x_0}^x \partial F(t) dt + F(x_0)$$

Notiamo che se supponiamo $F \in L^1_{loc}(I)$ e

$$\partial F \in C(I) \subset L^1_{loc}(I)$$

otteniamo che nella classe $F \in L^1_{loc}(I)$ esiste un'unica funzione

$$\tilde{F} \in C^1(I)$$

tale che

$$\partial F = \tilde{F}' \text{ (derivata classica)}$$

Questo fatto ci era già noto.

Ragionando per induzione, si può considerare il caso in cui si abbia

$$F, \partial F, \dots, \partial^k F \in L^1_{loc}(I)$$

con la convenzione sulle notazioni discussa in precedenza, si ha che $\partial^{k-1}F$ è una funzione continua

$$\partial^{k-1}F(x) = \int_{x_0}^x \partial^k F(t) dt + \partial^{k-1}F(x_0)$$

Inoltre, dal fatto che ∂F è continua, si ha

$$F \in C^{k-1}(I)$$

In generale, due distribuzioni su I , non possono essere moltiplicate tra di esse, ma se

$$F, G \in L^1_{loc}(I) \subset D'(I)$$

il loro prodotto è in $L^1_{loc}(I)$, quindi è una distribuzione su I . La proposizione seguente descrive condizioni sufficienti affinché la derivata (distribuzionale) di $F \cdot G$ obbedisca la regola di Leibnitz.

Proposizione. *Supponiamo*

$$F, G \in L^1_{loc}(I) ; \quad \partial F, \partial G \in L^1_{loc}(I)$$

allora si ha

$$\partial(F \cdot G) = F \cdot \partial G + G \cdot \partial F, \quad \text{in } L^1_{loc}(I)$$

Commento. Nelle ipotesi in cui ci siamo posti, si ha $F, G \in C(I)$, quindi $F \cdot \partial G, G \cdot \partial F \in L^1_{loc}(I)$.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che si ha

$$\int_{x_0}^x (\partial F \cdot G + F \cdot \partial G) dt = F(x)G(x) - G(x_0)F(x_0)$$

come uguaglianza punto per punto di funzioni continue. Per questo, consideriamo innanzi tutto

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \partial F(t) \cdot G(t) dt &= \int_{x_0}^x \partial F(t) \left[\int_{x_0}^t \partial G(\omega) d\omega + G(x_0) \right] dt = \\ &= \int_{x_0}^x \partial F(t) \cdot G(x_0) dt + \int_{x_0}^x \partial F(t) \cdot \left[\int_{x_0}^t \partial G(\omega) d\omega \right] dt = \\ &= F(x) \cdot G(x_0) - F(x_0) \cdot G(x_0) + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t d\omega [\partial F(t) \partial G(\omega)] \end{aligned}$$

Similmente

$$\int_{x_0}^x \partial F(t) \cdot G(t) dt = F(x_0) \cdot G(x) - F(x_0) \cdot G(x_0) + \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t d\omega [\partial F(\omega) \partial G(t)]$$

per cui

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^x [\partial F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot \partial G(t)] dt = \\ &= \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t d\omega [\partial F(\omega) \partial G(t) + \partial F(t) \partial G(\omega)] + F(x_0)G(x) + G(x_0)F(x) - 2F(x_0)G(x_0) \end{aligned}$$

scambiando l'ordine delle integrazioni, vedi figura 3.3

$$\int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t d\omega = \int_{x_0}^x d\omega \int_{\omega}^x dt$$

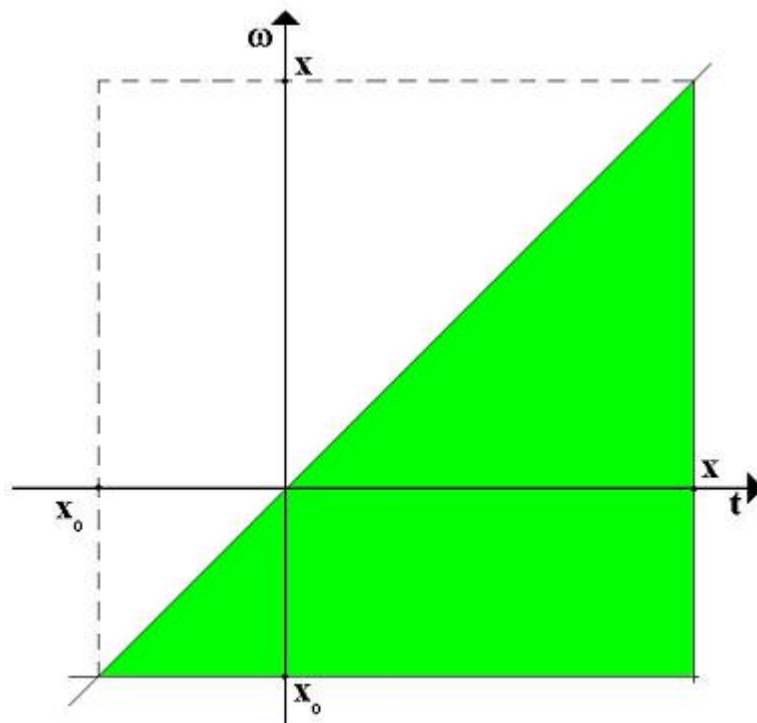


Figura 3.2:

$$\int_{x_0}^x d\omega \int_{\omega}^x dt [\partial F(\omega) \partial G(t) + \partial F(t) \partial G(\omega)] + F(x_0)G(x) + G(x_0)F(x) - 2F(x_0)G(x_0) =$$

con pochi passaggi

$$2F(x) \cdot G(x) - 2F(x_0) \cdot G(x_0) - \int_{x_0}^x d\omega [F(\omega) \partial G(\omega) + G(\omega) \partial F(\omega)]$$

da cui

$$\int_{x_0}^x [F(t) \partial G(t) + G(t) \partial F(t)] dt = F(x) \cdot G(x) - F(x_0) \cdot G(x_0)$$

quest'ultima uguaglianza implica

$$\partial(F \cdot G) = F \partial G + G \partial F$$

□

Notiamo che nella dimostrazione precedente abbiamo ottenuto la formula di integrazione per parti: se $F, G \in L^1_{loc}(I)$, $\partial F, \partial G \in L^1_{loc}(I)$, allora per tutte le coppie $x, y \in I$, si ha

$$\int_x^y F \partial G + \int_x^y G \partial F = F(y)G(y) - F(x)G(x)$$

Denotiamo ($1 \leq p \leq 2$, $k \geq 1$)

$$W^{k,p}(I) = \{F \in L^p(I) : \partial F, \dots, \partial^k F \in L^p(I)\}$$

Ricordiamo che

$$L^p(I) \subset L^1_{loc}(I) \quad (p = 1, 2)$$

quindi gli elementi di $W^{k,p}(I)$ hanno tutte le proprietà delle distribuzioni in $L^1_{loc}(I)$ tali che le loro derivate, fino all'ordine k , sono in $L^1_{loc}(I)$.

Per discutere le proprietà specifiche di $W^{k,p}(I)$ è conveniente distinguere i casi in cui I è limitato oppure no.

Consideriamo, innanzi tutto, il caso I limitato; si ha $L^2(I) \subseteq L^1(I)$, quindi è sufficiente discutere il caso $p = 1$. Se $F \in W^{1,1}(I)$, si ha

$$F(x) = \int_{x_0}^x \partial F + F(x_0)$$

ed inoltre

$$\partial F \in L^1(I)$$

Per il teorema della convergenza dominata (o, equivalentemente, per il teorema dell'integrazione sugli intervalli) si ha allora

$$F \in C([a, b])$$

Ovviamente, in maniera analoga, se $F \in W^{k,1}(I)$ si ha $F \in C^{k-1}(\bar{I})$ (in cui $\bar{I} = [a, b]$). La formula di integrazione per parti per $W^{1,1}(I)$ può essere enunciata come

$$\int_x^y F \partial G + G \partial F = F(y) \cdot G(y) - F(x) \cdot G(x)$$

per ogni coppia $x, y \in \bar{I}$. Il caso $I = \mathbf{R}$ e $p = 1$ può essere discusso come segue: se $F \in W^{k,1}(\mathbf{R})$, si ha

$$F(x) = \int_{x_0}^x \partial F + F(x_0), \quad \partial F \in L^1(\mathbf{R})$$

questo implica che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} |F(x)| \quad \text{esistono finiti;}$$

dal momento che $F \in L^1(\mathbf{R})$, tali limiti devono essere 0; quindi si ha

$$W^{k,1}(\mathbf{R}) \subset C_0^{k-1}(\mathbf{R})$$

Supponiamo $p = 2$. Già si ha che $W^{k,2}(\mathbf{R}) \subset C^{k-1}(\mathbf{R})$. D'altra parte $|F|^2 \in L^1(\mathbf{R})$ e

$$\partial(|F|^2) = \partial(\bar{F} \cdot F) = \bar{F} \cdot \partial F + \partial \bar{F} \cdot F \in L^1(\mathbf{R})$$

quindi $|F|^2 \in W^{1,1}(\mathbf{R})$; allora

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F|^2 = 0$$

questo implica

$$W^{k,2}(\mathbf{R}) \subset C_0^{k-1}(\mathbf{R})$$

3.4 La caratterizzazione delle distribuzioni il cui supporto è un punto

Si hanno i risultati seguenti:

1. Se I è un qualunque intervallo aperto di \mathbf{R} , e $a \in I$ le distribuzioni $T \in D'(I)$ tali che

$$\text{supp } T = \{a\}$$

sono tutte e sole quelle della forma

$$T = \sum_{j=0}^k c_j \partial^j \delta_a$$

in cui k è un intero positivo che dipende da T , e $c_0, \dots, c_k \in \mathbf{C}$.

2. Se $a \in \mathbf{R}^n$ le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ tali che

$$\text{supp } T = \{a\}$$

sono tutte e sole quelle della forma

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta_a$$

in cui la somma è estesa a tutti i multiindici $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tali che $0 \leq |\alpha| \leq k$; k è un intero positivo che dipende da T , e

$$c_\alpha \in \mathbf{C}, \text{ per ogni } \alpha \text{ tale che } 0 \leq |\alpha| \leq k$$

Dimostriamo queste proprietà soltanto nel caso particolare $I = \mathbf{R}$ e $a = 0$. Ciò permette alcune semplificazioni, soprattutto notazionali. Le dimostrazioni nei casi più generali sono sostanzialmente analoghe.

Lemma. *Supponiamo che*

$$T \in D'(\mathbf{R}), \quad \text{supp } T = \{0\}$$

Allora esiste un intero $k \geq 0$ con la proprietà

$$\langle T, f \rangle = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}), \text{ tale che } f^{(j)}(0) = 0 \text{ se } j \leq k$$

Dimostrazione. Fissiamo $f_0 \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ con le proprietà

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Sia $\epsilon \in]0, 1[$; allora si ha, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$,

$$f(x) - f(x)f_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = 0 \text{ se } |x| < \epsilon$$

inoltre $] -\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[$ è un intorno (aperto) di $\text{supp } T$. Allora si ha

$$\langle T, f - f \cdot f_0^{[\frac{1}{\epsilon}]} \rangle = 0 \Rightarrow \langle T, f \rangle = \langle T, f \cdot f_0^{[\frac{1}{\epsilon}]} \rangle$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. La funzione $f \cdot f_0^{[\frac{1}{\epsilon}]}$ è in $C_c^\infty(\mathbf{R})$ e ha il supporto contenuto in $\{x : |x| < 1\}$ (poiché $0 < \epsilon < 1$). Allora, per definizione di distribuzione, esistono un intero $k \geq 0$ ed un numero $C > 0$, tali che

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \sum_{j \leq k} \text{sup} \left| \partial^j \left(f \cdot f_0^{[\frac{1}{\epsilon}]} \right) \right|$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Scegliamo f tale che

$$f^{(j)}(0) = 0, \text{ se } 0 \leq j \leq k$$

Usiamo la formula di Taylor per la funzione $f^{(j)}$:

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= \sum_{i=0}^{k-j} \frac{x_i}{i!} f^{(i+j)}(0) + \frac{x^{k-j+1}}{(k-j+1)!} r_{f^{(j)}}^{k-j+1}(x) = \\ &= \frac{x^{k-j+1}}{(k-j+1)!} r_{f^{(j)}}^{k-j+1}(x) \end{aligned}$$

Con la stima

$$\left| f^{(j)}(x) \right| \leq \frac{\epsilon^{k-j+1}}{(k-j+1)!} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f^{(k+1)}(x) \right|$$

per ogni $j \leq k$, se $|x| < \epsilon$.

La formula di Leibnitz ci dà

$$\frac{d^j}{dx^j} \left[f(x) \cdot f_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right] = \sum_{p+q=j} \frac{j!}{p!q!} \epsilon^{-q} f^{(p)}(x) f_0^{(q)} \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$$

Combinando gli ultimi due risultati, e tenendo conto che $f(x) \cdot f_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = 0$ se $|x| > \epsilon$, si ha, se $j \leq k$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^j}{dx^j} \left(f \cdot f_0 \left[\frac{\cdot}{\epsilon} \right] \right) (x) \right| &\leq \sum_{p+q=j} \frac{j!}{p!q!} \epsilon^{-q} \left| f^{(p)}(x) \right| \cdot \left| f_0^{(q)} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{p+q=j} \frac{j!}{p!q!} \epsilon^{k-j+1} \frac{1}{(k-j)!} \sup \left| f^{(k+1)}(x) \right| \sup \left| f_0^{(j)}(x) \right| \leq C_j \epsilon^{k+1-j} \end{aligned}$$

in cui C_j non dipende da ϵ . Allora si ha

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \sum_{j \leq k} c_j \epsilon^{k+1-j} \leq C' \epsilon$$

per un qualche numero positivo C' , che non dipende da ϵ . Dal momento che ϵ è arbitrario, il risultato è provato. □

Teorema. *Le distribuzioni $T \in D'(\mathbf{R})$ tali che*

$$\text{supp } T = \{0\}$$

sono tutte e sole quelle della forma

$$T = \sum_{j=0}^k c_j \partial^j \delta, \quad c_j \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{N}$$

Dimostrazione. Se T è della forma precedente, evidentemente $\text{supp } T = \{0\}$. Inversamente, supponiamo $\text{supp } T = \{0\}$, per il lemma precedente, esiste un intero $k \geq 0$ tale che

$$\langle T, f \rangle = 0$$

Per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ tale che $f^{(j)}(0) = 0$ se $j \leq k$. Questo implica che

$$\langle x^{k+1} T, f \rangle = 0 \text{ per ogni } f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

Allora

$$x^{k+1} T = 0$$

e per un risultato precedente

$$T = \sum_{j=0}^k c_j \partial^j \delta$$

□

Capitolo 4

Le distribuzioni temperate

4.1 Lo spazio delle funzioni di Schwartz

Prima di definire lo spazio delle funzioni di Schwartz su \mathbf{R}^n , introduciamo una notazione per i monomi (su \mathbf{R}^n) analoga alla notazione per le derivate parziali. Se

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

e

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

è un multiindice, con la notazione x^α indicheremo il monomio

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

nelle n variabili x_1, \dots, x_n .

Definizione. Una funzione f (a valori complessi) definita su \mathbf{R}^n , viene detta una "funzione di Schwartz" quando sono soddisfatte le condizioni

- F.S.1) $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;
- F.S.2) $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$, per tutti i multiindici α, β

Denoteremo con $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'insieme delle funzioni di Schwartz su \mathbf{R}^n .

Proprietà di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

1. $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è uno spazio vettoriale su \mathbf{C} ; inoltre, il prodotto di due funzioni in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è ancora in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, quindi $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è un'algebra su \mathbf{C} ;
2. E'ovvio che $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \supset C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$;
3. La funzione

$$e^{-|x|^2}$$

in cui $|x|^2$ denota il quadrato della norma euclidea di x :

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, x = (x_1, \dots, x_n)$$

è in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, ma non è in $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Più in generale, se P è un polinomio (complesso) in n variabili,

$$P(x)e^{-|x|^2}$$

è in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ma non è in $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

4. Una funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se e solo se, per ogni coppia di multiindici α, β si ha

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0$$

(Si dice che una funzione con la proprietà precedente è a "decrecenza rapida", poiché f tende a 0, per $|x| \rightarrow \infty$, più rapidamente dell'inverso di ogni polinomio). Infatti, supponiamo che $x^\alpha \partial^\beta f$ sia una funzione limitata su \mathbf{R}^n , per ogni coppia di multiindici α e β . Si ha

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)} (1 + |x|^2) x^\alpha \partial^\beta f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

inoltre la funzione

$$(1 + |x|^2)(x^\alpha \partial^\beta f(x))$$

è limitata su \mathbf{R}^n (per ipotesi) e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + |x|^2} = 0$$

quindi

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0$$

Inversamente, è chiaro che se si ha il limite precedente, allora la funzione $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ è limitata su \mathbf{R}^n .

5. Usando la formula di Leibnitz è facile mostrare che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se e solo se, per tutte le coppie α, β di multiindici, si ha

$$\partial^\beta x^\alpha f(x) \rightarrow 0 \text{ se } |x| \rightarrow \infty$$

a sua volta, ciò è equivalente al fatto che per ogni coppia α, β si abbia

$$\begin{aligned} \partial^\beta (x^\alpha f) &\text{ è limitata su } \mathbf{R}^n \\ &\equiv \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\partial^\beta (x^\alpha f)(x)| < \infty \end{aligned}$$

6. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, allora si ha

$$\begin{aligned} x^\alpha f &\in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \\ f_a &\in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad \forall a \in \mathbf{R}^n \\ \partial^\beta f &\in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

7. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) &\subset \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) \\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) &\subset \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

Infatti supponiamo $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; si ha

$$f(x) = \frac{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)}{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)} f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

La funzione

$$(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) f(x)$$

è limitata su \mathbf{R}^n ; inoltre

$$\frac{1}{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

allora il loro prodotto, f , è in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Si ha anche che f è in $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$, dal momento che f è in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ ed è limitata.

Ricordiamo che se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, la sua "trasformata di Fourier" $\mathcal{F}f$ è la funzione continua e limitata su \mathbf{R}^n definita da

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(x) d^n x$$

in cui $x \cdot y$ denota il prodotto scalare euclideo in \mathbf{R}^n

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Ricordiamo anche le proprietà fondamentali di intreccio tra \mathcal{F} , la derivazione e la moltiplicazione:

1. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ e $x_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, allora $\mathcal{F}f$ è derivabile rispetto a y_j e si ha

$$i \frac{\partial}{\partial y_j} \mathcal{F}f(y) = \mathcal{F}(x_j f)(y)$$

2. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ è di classe C^1 rispetto alla variabile x_j , e se

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

allora

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) (y) = i y_j \mathcal{F}f(y)$$

In particolare, le formule di intreccio precedenti valgono per tutte le $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e per tutti i $j = 1, \dots, n$.

Procedendo per induzione, si ottengono le seguenti formule di intreccio, che sono valide per tutte le $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e tutti i multiindici

1. $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(y) = i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}f(y)$;
2. $\mathcal{F}(x^\alpha f)(y) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}f(y)$.

Con queste premesse, la proprietà fondamentale dello spazio $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è enunciata nel teorema seguente

Teorema. *L'applicazione \mathcal{F} è una biiezione lineare di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in sé.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Per ogni coppia di multiindici α, β si ha

$$\partial^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

quindi, in particolare,

$$\partial^\alpha x^\beta f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n), \quad x^\beta f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

Dal momento che f e $x^\beta f$ sono in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, per ogni multiindice β , ne risulta che $\mathcal{F}f$ è derivabile a tutti gli ordini. Inoltre

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha x^\beta f) = i^{|\alpha|+|\beta|} y^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}f$$

Ciò mostra che $y^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}f$ è limitata, come trasformata di Fourier di una funzione in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\mathcal{F}^* f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad \text{se } f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Il teorema di inversione di Fourier su $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ ci assicura che \mathcal{F} e \mathcal{F}^* sono trasformazioni lineari di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in sé, l'una l'inversa dell'altra. Quindi sono biettive.

□

Si può introdurre una nozione di convergenza a 0 di una successione di funzioni di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Definizione. Se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, diciamo che

$$f_j \rightarrow 0 \quad \text{"nel senso di } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \text{"}$$

se per ogni coppia di α, β di multiindici si ha
 (CS) $x^\alpha \partial^\beta f_j \rightarrow 0$ uniformemente su \mathbf{R}^n .

Proprietà della convergenza in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

1. E' del tutto evidente che se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ che converge a 0 in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, allora

$$\begin{aligned} x^\alpha f_j &\rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \text{ per ogni } \alpha \\ \partial^\alpha f_j &\rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \text{ per ogni } \alpha \\ x^\alpha \partial^\beta f_j &\rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \text{ per ogni } \alpha, \beta \end{aligned}$$

2. E' evidente che se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, tale che

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } D\mathbf{R}^n$$

allora anche

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

3. Quella che segue è la proprietà fondamentale della convergenza in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

allora anche

$$\mathcal{F}f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Infatti, per ogni coppia α, β di multiindici, si ha

$$x^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}f_j) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F} [\partial^\alpha (y^\beta f)],$$

da cui

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}f_j)(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta f_j)(x)| d^n x = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)} |\partial^\alpha (x^\beta f_j)(x)| d^n x \end{aligned}$$

Dal momento che $f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, la funzione

$$(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2) \partial^\alpha (x^\beta f_j(x))$$

è limitata, su \mathbf{R}^n , d'altra parte la funzione

$$\frac{1}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)}$$

è integrabile su \mathbf{R}^n , e il suo integrale vale π^n . Per cui

$$|x^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}f_j)(x)| \leq \frac{\pi^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1+x_1^2) \dots (1+x_n^2) |\partial^\alpha x^\beta f_j(x)|$$

se $f_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, allora

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |\partial^\alpha x^\beta f_j(x)| \rightarrow 0, \text{ se } j \rightarrow \infty$$

per cui

$$x^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}f_j)(x) \rightarrow 0 \text{ uniformemente su } \mathbf{R}^n, \text{ se } j \rightarrow \infty$$

Ciò mostra che

$$\mathcal{F}f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

4.2 Le distribuzioni temperate su \mathbf{R}^n

Definizione. Una "distribuzione temperata" su \mathbf{R}^n è un'applicazione

$$T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$$

con la proprietà

- D.T.1) T è lineare;
- D.T.2) se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ con la proprietà

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

allora

$$\langle T, f_j \rangle \rightarrow 0$$

Le distribuzioni temperate sono lo spazio delle forme lineari su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ che hanno la proprietà di continuità (D.T.2), analoga alla proprietà di continuità (D.2), che caratterizza le distribuzioni su \mathbf{R}^n . Apparentemente, gli spazi $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ e $D'(\mathbf{R}^n)$, essendo formati da forme lineari definite su spazi differenti, non sono legati tra essi. E' importante, invece, rendersi conto che $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ è identificabile canonicamente con un sottospazio di $D'(\mathbf{R}^n)$. Per mostrare questo risultato, dobbiamo usare una proprietà di densità di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, che ammetteremo senza dimostrarla.

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ esiste una (non unica, in generale) successione $(f_j)_{j \geq 1}$ di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, che converge a f nel senso di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Ricordiamo che questo significa che per ogni coppia α, β di multiindici si ha

$$x^\alpha \partial^\beta (f - f_j) \rightarrow 0, \text{ uniformemente su } \mathbf{R}^n, \text{ se } j \rightarrow \infty$$

Usando questa proprietà di densità, possiamo mostrare i due lemmi che seguono.

Lemma 1. Se T è una distribuzione temperata la sua restrizione T_0 a $C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$T_0 = T |_{C_c^\infty(\mathbf{R}^n)}$$

è un elemento di $D'(\mathbf{R}^n)$, T_0 ha necessariamente la proprietà di continuità

- D.T.2') se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, con la proprietà

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

allora

$$\langle T_0, f_j \rangle \rightarrow 0, \text{ se } j \rightarrow \infty$$

l'applicazione

$$T \rightarrow T_0 : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow D'(\mathbf{R}^n)$$

è iniettiva.

Lemma 2. *Ogni distribuzione $T_0 \in D'(\mathbf{R}^n)$ che abbia la proprietà di continuità (D.T.2') si estende univocamente ad un elemento T di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.*

I due Lemmi implicano immediatamente il risultato fondamentale seguente.

Teorema. *Le distribuzioni temperate possono essere identificate con il sottospazio degli elementi di $D'(\mathbf{R}^n)$ che hanno la proprietà di continuità' (D.T.2')*

Dimostrazione del Lemma 1. Mostriamo che $T_0 \in D'(\mathbf{R}^n)$, se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_{inf} \mathbf{R}^n$, tale che $f_j \rightarrow 0$ in $D'(\mathbf{R}^n)$, si ha anche $f_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ (proprietà (2) della convergenza in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$), per cui

$$\langle T_0, f_j \rangle = \langle T, f_j \rangle \rightarrow 0, \text{ se } j \rightarrow \infty$$

poiché $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. E' evidente che T_0 ha la proprietà (D.T.2'). Infatti, se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una qualunque successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tale che $f_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle T_0, f \rangle = \langle T, f \rangle \rightarrow 0, \text{ se } j \rightarrow 0$$

Mostriamo, infine, l'iniettività. Per questo supponiamo $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ tali che

$$S_0 = T_0$$

cioè, esplicitamente,

$$\langle S, f \rangle = \langle T, f \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$$

Per la proprietà di densità di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, esiste una successione $(f_j)_{j \geq 1}$ di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$f_j \rightarrow f \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \text{ se } j \rightarrow \infty$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \langle T, \lim f_j \rangle = \lim \langle T, f_j \rangle = \lim \langle T_0, f_j \rangle \\ \langle S, f \rangle &= \langle S, \lim f_j \rangle = \lim \langle S, f_j \rangle = \lim \langle S_0, f_j \rangle \end{aligned}$$

Dal momento che

$$\langle T_0, f_j \rangle = \langle S_0, f_j \rangle \quad \forall j \geq 1$$

Se ne deduce

$$\langle S, f \rangle = \langle T, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

quindi

$$S = T$$

□

Dimostrazione del Lemma 2 (schematica). Supponiamo che $T_0 \in D'(\mathbf{R}^n)$ abbia la proprietà di continuità' (D.T.2'). Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e $(f_j)_{j \geq 1}$ una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$f_j \rightarrow f \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Ciò implica

$$(f_j - f_k) \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \text{ se } j, k \rightarrow \infty$$

Allora

$$\langle T_0, f_j - f_k \rangle \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \text{ se } j, k \rightarrow \infty$$

Ciò implica che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_0, f_j \rangle \text{ esiste finito}$$

Definiamo una forma lineare $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ ponendo

$$\langle T, f \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_0, f_j \rangle$$

Si può vedere facilmente che il limite precedente non dipende dalla successione $(f_j)_{j \geq 1}$ scelta per approssimare f in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, ma soltanto da f stessa. Si può mostrare anche che il limite definisce un elemento di $D'(\mathbf{R}^n)$, che estende $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

□

alle distribuzioni temperate si può estendere, in maniera naturale, la nozione di convergenza debole.

Definizione. Se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, e T è un elemento di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, diremo che " T_j converge temperatamente a T ", o che " T_j converge a T in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ ", quando

$$\langle T_j, f \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle, \quad \text{se } j \rightarrow \infty$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

4.3 Esempi di distribuzioni temperate

1. Se $F \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ definiamo $\langle T_F, f \rangle$ ponendo

$$\langle T_F, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) f(x) d^n x, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

La funzione $F \cdot f$ è integrabile su \mathbf{R}^n , poiché F è integrabile e f è limitata. Inoltre

$$|\langle T_F, f \rangle| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |F(x)| \cdot |f(x)| d^n x \leq \|F\|_1 \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|$$

ciò mostra che T_F è una distribuzione temperata. Spesso si denota $\langle T_F, f \rangle$ come $\langle F, f \rangle$, e si dice che T_F è "la funzione F ". È ovvio che $\langle F, f \rangle$ dipende soltanto dalla classe di F in $L^1(\mathbf{R}^n)$, e che abbiamo definito in questo modo un'identificazione naturale

$$L^1(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

Quest'ultimo commento si applica anche, "mutatis mutandis", agli esempi (2), (3) e (4) che seguono.

2. Se F è limitata (e Lebesgue misurabile) su \mathbf{R}^n poniamo

$$\langle F, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \cdot f(x) d^n x, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

La funzione $F \cdot f$ è integrale, poiché F è limitata e $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Inoltre

$$\begin{aligned} |\langle F, f \rangle| &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)} (1+x_1^2) \dots (1+x_n^2) F(x) f(x) d^n x \right| \leq \\ &\leq \left\| \frac{F}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)} \right\|_1 \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1+x_1^2) \dots (1+x_n^2) |f(x)| \end{aligned}$$

Dal momento che $(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2) f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e

$$\frac{1}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)} F(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

Ciò mostra che F definisce una distribuzione temperata .

3. Se $F \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$, si definisce una distribuzione temperata ponendo

$$\langle F, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \cdot f(x) d^n x, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

$F \cdot f$ è integrabile poiché $F \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^n$; inoltre si ha

$$|\langle F, f \rangle| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \cdot f(x) d^n x \right| \leq$$

(Per la disuguaglianza di Hoelder)

$$\leq \|F\|_2 \cdot \|f\|_2$$

inoltre

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^N \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 d^n x = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)} (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |f(x)| d^n x \leq \\ &\leq \left\| \frac{f}{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)} \right\| \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |f(x)| \end{aligned}$$

dato che

$$\text{frac}|f(x)|(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) \quad \text{è in } \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

e

$$(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) |f(x)| \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Ciò mostra che F definisce, anche in questo caso, una distribuzione temperata.

4. Se $F \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$ è tale che

$$(1 + |x|^2)^{-N} \cdot F \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

per un qualche intero positivo N (in particolare, se F è un polinomio su \mathbf{R}^n), allora F definisce una distribuzione temperata ponendo, per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle F, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \cdot f(x) d^n x$$

La definizione è ben posta, in quanto si ha

$$F(x)f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^N} (1 + |x|^2)^N F(x) \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

inoltre

$$\frac{F}{(1 + |x|^2)^N} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$$

per l'ipotesi fatta su F , e $(1 + |x|^2)^N \cdot f(x)$ è limitata su \mathbf{R}^n . Inoltre

$$|\langle F, f \rangle| \leq \left\| \frac{F}{(1 + |x|^2)^N} \right\|_1 \cdot \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^N \cdot |f(x)|$$

ciò mostra che F definisce una distribuzione temperata.

5. E' del tutto evidente che δ e δ_a , per ogni $a \in \mathbf{R}^n$ e $\partial^\alpha \delta_a$ per ogni α , sono distribuzioni temperate.
6. Piu' in generale se \mathbf{C} è una curva liscia in \mathbf{R}^n e \mathbf{S} è una superficie liscia in \mathbf{R}^n , le distribuzioni $T_{\mathbf{C}}$ e $T_{\mathbf{S}}$ sono temperate.
7. La funzione e^x , $x \in \mathbf{R}$, è l'esempio di una funzione $C^\infty(\mathbf{R})$ che non definisce una distribuzione temperata.

4.4 Operazioni con le distribuzioni temperate

4.4.1 La derivazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, si definisce la derivata $\partial^\alpha T$ per ogni multiindice α , ponendo

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

E' del tutto ovvio che $\partial^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. E' anche immediato verificare che se $(T_j)_{j \geq 1}$ è una successione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ tale che $T_j \rightarrow T$ temperatamente, allora

$$\partial^\alpha T_j \rightarrow \partial^\alpha T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

per ogni ordine α di derivazione.

4.4.2 Traslazione e dilatazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

Si definiscono la traslazione, T_a , e la dilatazione, $T^{[a]}$, di una distribuzione temperata T in maniera analoga a come si fa in $D'(\mathbf{R}^n)$:

$$\langle T_a, f \rangle = \langle T, f_{-a} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad a \in \mathbf{R}^n$$

$$\langle T^{[a]}, f \rangle = \frac{1}{|a|^n} \langle T, f^{[\frac{1}{a}]} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad a \in \mathbf{R}^n - \{0\}$$

(ricordiamo che $f^{[a]}(x) = f(ax)$).

E' facile verificare che se $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ sia T_a che $T^{[a]}$ sono in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Nel caso $a = -1$, si dice che T è pari se

$$T^{[-1]} = T$$

e si dice che T è dispari se

$$T^{[-1]} = -T$$

4.4.3 Moltiplicazione per funzioni C^∞

Se $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è tale che $\varphi f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, (in particolare, questo si ha se φ è un polinomio in n variabili, o se $\varphi(x) = e^{iax}$, $a \in \mathbf{R}^n$) si può definire φT ponendo

$$\langle \varphi T, f \rangle = \langle T, \varphi f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Nel seguito useremo questa formula solo nei casi in cui φ è un polinomio o $\varphi = e^{iax}$, $a \in \mathbf{R}^n$. In questo caso è facile vedere che $\varphi T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, se $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Capitolo 5

L'analisi di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

5.1 La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

Definizione. Supponiamo $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; definiamo \hat{T} ponendo

$$\langle \hat{T}, f \rangle = \langle T, \mathcal{F}f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

\hat{T} , così definita, è una distribuzione temperata su \mathbf{R}^n . Questo fatto discende da due proprietà fondamentali della trasformata di Fourier \mathcal{F} su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, dimostrate in precedenza, le ricordiamo

- T.F.1) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.
- T.F.2) Se $(f_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ allora

$$f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \mathcal{F}f_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

Nello stesso modo si definisce \check{T} ponendo

$$\langle \check{T}, f \rangle = \langle T, \mathcal{F}^* f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

La distribuzione \hat{T} viene detta la "trasformata di Fourier di T ". La distribuzione \check{T} viene detta la "trasformata di Fourier inversa".

5.2 Proprietà della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

1. Per ogni $a \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (T_a)^\wedge, f \rangle = \langle T_a, \mathcal{F}f \rangle = \langle T, (\mathcal{F}f)_{-a} \rangle$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)_{-a} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x+a) \cdot y} f(y) d^n y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} e^{-ia \cdot y} f(y) d^n y = \mathcal{F}(e^{-ia \cdot y} f) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle (T_a)^\wedge, f \rangle &= \langle T, \mathcal{F}(e^{-ia \cdot y} f) \rangle = \langle \hat{T}, e^{-ia \cdot y} f \rangle \\ &= \langle e^{-ia \cdot y} \check{T}, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

In conclusione

$$(T_a)^\wedge = e^{-ia \cdot y} \check{T}$$

2. Per ogni $a \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (e^{ia \cdot x} T)^\wedge, f \rangle = \langle e^{ia \cdot x} T, \mathcal{F}f \rangle = \langle T, e^{ia \cdot x} \mathcal{F}f \rangle$$

Inoltre

$$\begin{aligned} e^{ia \cdot x} \mathcal{F}f &= e^{ia \cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(y) d^n y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot (y-a)} f(y) d^n y = \end{aligned}$$

(con il cambio di variabili $(y - a) = z$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot z} f(z+a) d^n z = \\ &= \mathcal{F}f_{-a} \end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{aligned} \langle (e^{ia \cdot x} T)^\wedge, f \rangle &= \langle T, e^{ia \cdot x} \mathcal{F}f \rangle = \langle T, \mathcal{F}f_{-a} \rangle = \\ &= \langle \hat{T}, f_{-a} \rangle = \left\langle \left(\hat{T} \right)_a, f \right\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

In conclusione

$$(e^{ia \cdot x} T)^\wedge = \left(\hat{T} \right)_a$$

3. Per ogni $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$, e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (T^{[a]})^\wedge, f \rangle = \langle T^{[a]}, \mathcal{F}f \rangle = \frac{1}{|a|^n} \langle T, (\mathcal{F}f)^{[\frac{1}{a}]} \rangle =$$

inoltre

$$(\mathcal{F}f)^{[\frac{1}{a}]}(x) = (\mathcal{F}f)\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\frac{x}{a} \cdot y} f(y) d^n y =$$

(effettuando il cambio di variabili $\frac{y}{a} = z$)

$$\begin{aligned} &= \frac{|a|^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot z} f(az) d^n z = \\ &= |a|^n \mathcal{F}(f^{[a]})(x) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle (T^{[a]})^\wedge, f \rangle &= \frac{1}{|a|^n} \langle T, (\mathcal{F}f)^{[\frac{1}{a}]} \rangle = \\ &= \langle T, \mathcal{F}(f^{[a]}) \rangle \\ &= \langle \hat{T}, f^{[a]} \rangle = \frac{1}{|a|^n} \left\langle \left(\hat{T} \right)^{[\frac{1}{a}]}, f \right\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

In conclusione

$$(T^{[a]})^\wedge = \frac{1}{|a|^n} \left(\hat{T} \right)^{[\frac{1}{a}]}$$

Equivalentemente

$$\left(\hat{T} \right)^{[a]} = \frac{1}{|a|^n} \left(T^{[\frac{1}{a}]} \right)^\wedge$$

Un caso importante è quello per $a = -1$. Otteniamo che la trasformata di Fourier di una distribuzione pari è pari, e che la trasformata di Fourier di una funzione dispari è dispari.

4. Per ogni multiindice α , e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (\partial^\alpha T)^\wedge, f \rangle = \langle \partial^\alpha T, \mathcal{F}f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha T, \mathcal{F}f \rangle$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \mathcal{F}(f) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(y) d^n y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} (-iy_1)^{\alpha_1} \dots (-iy_n)^{\alpha_n} f(y) d^n y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} (-iy_1)^\alpha e^{-ix \cdot y} (-iy_1)^\alpha f(y) d^n y = \\ &= \mathcal{F}((-ix)^\alpha f) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha T)^\wedge, f \rangle &= (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \mathcal{F}f \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \mathcal{F}((-ix)^\alpha f) \rangle = \\ &= (-1)^\alpha \langle \hat{T}, (-ix)^\alpha f \rangle = \\ &= (-1)^\alpha \langle (-ix)^\alpha T, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

In conclusione

$$(\partial^\alpha T)^\wedge = (ix)^\alpha \hat{T}$$

5. Per ogni multiindice α , e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\langle (x^\alpha T)^\wedge, f \rangle = \langle x^\alpha T, \mathcal{F}f \rangle = \langle T, x^\alpha \mathcal{F}f \rangle$$

inoltre

$$x^\alpha \mathcal{F}f = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} f(y_1 \dots y_n) dy_1 \dots dy_n =$$

(integrando per parti α_i volte in ogni variabile y_i)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} (\partial^\alpha f)(y) d^n y = \\ &= (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial^\alpha f) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle (x^\alpha T)^\wedge, f \rangle &= \langle T, x^\alpha \mathcal{F}f \rangle = (-i)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}(\partial^\alpha f) \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle (i)^{|\alpha|} T, \mathcal{F}(\partial^\alpha f) \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle (i)^{|\alpha|} \hat{T}, \partial^\alpha f \rangle = \\ &= i^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \hat{T}, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

In conclusione

$$(x^\alpha T)^\wedge = (i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{T}$$

6. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$\left\langle \left(\hat{T} \right)^\vee, f \right\rangle = \langle \hat{T}, \mathcal{F}^* f \rangle = \langle T, \mathcal{F} \mathcal{F}^* f \rangle =$$

per il teorema di inversione di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$= \langle T, f \rangle$$

Per cui si ha il teorema di inversione di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

$$\left(\hat{T}\right)^\vee = T$$

Nello stesso ordine di idee si ottiene anche

$$\left(\check{T}\right)^\wedge = T$$

$$\left(\hat{T}\right)^\wedge = T^{[-1]}$$

7. Se $(T_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$T_j \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

per ogni $F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ si ha

$$\langle \hat{T}_j, f \rangle = \langle T_j, \mathcal{F}f \rangle \rightarrow \langle T, \mathcal{F}f \rangle = \langle \hat{T}, f \rangle$$

da cui si hanno le proprietà di continuità della trasformata (e antitrasformata) di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

$$T_j \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \hat{T}_j \rightarrow \hat{T} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

$$T_j \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \check{T}_j \rightarrow \check{T} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

Abbiamo visto in precedenza come $L^1(\mathbf{R}^n)$ e $L^2(\mathbf{R}^n)$ possano essere considerati come sottospazi di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ è definita la trasformata di Fourier, inoltre su $L^1(\mathbf{R}^n)$ è definito l'integrale di Fourier e su $L^2(\mathbf{R}^n)$ è definito l'operatore di Fourier-Plancherel. Evidentemente, si pone il problema di stabilire se la trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ coincida con queste definizioni, quando è ristretta a $L^1(\mathbf{R}^n)$ e $L^2(\mathbf{R}^n)$ rispettivamente.

Proposizione.

1. Supponiamo $F \in L^1(\mathbf{R}^n)$, allora la trasformata di Fourier di F , considerato come elemento di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ (nell'identificazione naturale $L^1(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$) coincide in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ con $\mathcal{F}F$.
2. Supponiamo $F \in L^2(\mathbf{R}^n)$, allora la trasformata di Fourier di F , considerata come elemento di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ (nell'identificazione naturale $L^2(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$) coincide in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ con $\tilde{\mathcal{F}}F$.

Dimostrazione.

1. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}, f \rangle &= \langle F, \mathcal{F}f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \mathcal{F}f(x) d^n x = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(y) d^n y \right) d^n x = \end{aligned}$$

(Scambiando l'ordine delle integrazioni; si utilizza il teorema di Tonelli per mostrare che

$$(x, y \rightarrow e^{-ix \cdot y} f(y) F(x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$$

poi il teorema di Fubini per scambiare l'ordine delle integrazioni)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} F(x) e^{-ix \cdot y} d^n x \right) d^n y = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \mathcal{F}F(y) d^n y = \\ &= \langle \mathcal{F}F, f \rangle \end{aligned}$$

Da cui

$$\hat{F} = \mathcal{F}f, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

2. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}, f \rangle &= \langle F, \mathcal{F}f \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} F(x) \mathcal{F}f(x) d^n x = \\ &= (\bar{\mathcal{F}}f, F)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (\mathcal{F}^* \bar{f}, F)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \\ &= (\bar{f}, \tilde{\mathcal{F}}F)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \tilde{\mathcal{F}}F(x) d^n x = \\ &= \langle \tilde{\mathcal{F}}F, f \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{\mathcal{F}} = \hat{F}, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

□

Certamente, nell'uso pratico dell'analisi di Fourier, le formule di intreccio sono tra le più utili e usate. Quando vengono interpretate nell'ambito classico, in cui si considerano soltanto funzioni e derivate classiche di funzioni, la loro validità è soggetta a restrizioni. I commenti che seguono vogliono cercare di chiarire questi limiti di validità. Per semplicità di notazione limitiamo la nostra attenzione al caso in cui $n = 1$, la generalizzazione al caso n qualunque è abbastanza ovvia.

La prima osservazione è quella che le formule di intreccio hanno validità senza limitazioni, nell'ambito di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (\partial T)^\wedge = ix \hat{T} \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (xT)^\wedge = i\partial \hat{T}$$

Per chiarezza conviene distinguere i casi in cui T è un elemento di $L^1(\mathbf{R})$ oppure di $L^2(\mathbf{R})$.

1. Supponiamo $F \in L^1(\mathbf{R})$ e $xF \in L^1(\mathbf{R})$. Allora si ha

$$\hat{F} = \mathcal{F}f \in C_0 \text{ e } \partial \hat{F} = -i\mathcal{F}(xF) \in C_0(\mathbf{R})$$

Questo implica

$$\hat{F} = \mathcal{F}f \in C_0, \quad \partial(\mathcal{F}F) = (\mathcal{F}F)'$$

e l'uguaglianza

$$(\mathcal{F}F)' = -i\mathcal{F}(xF)$$

è valida punto per punto, come uguaglianza tra funzioni continue.

2. Suponiamo $F \in L^2(\mathbf{R})$ e $xF \in L^2(\mathbf{R})$. Allora si ha

$$F \in L^1(\mathbf{R}), \quad \widehat{F} = \mathcal{F}F = \tilde{\mathcal{F}}F \in C_0(\mathbf{R})$$

Inoltre

$$xF \in L^2(\mathbf{R}) \Rightarrow \partial \widehat{F} \in L^2(\mathbf{R})$$

quindi si ha l'uguaglianza in $L^2(\mathbf{R})$

$$\partial (\tilde{\mathcal{F}}F) = -i\tilde{\mathcal{F}}(xF)$$

Deve essere sottolineato che non è pèossibile (in generale) sostituire $\partial (\tilde{\mathcal{F}}F)$ con $(\tilde{\mathcal{F}}F)'$, non sappiamo se $\tilde{\mathcal{F}}F$ sia derivabile classicamente; nel caso in cui $\tilde{\mathcal{F}}F$ sia dotato di una derivata classica (almeno quasi ovunque) e sia

$$(\tilde{\mathcal{F}}F)' = \partial (\tilde{\mathcal{F}}F)$$

allora si può scrivere l'uguaglianza in $L^2(\mathbf{R})$

$$(\tilde{\mathcal{F}}F)' = -i\tilde{\mathcal{F}}(xF)$$

3. Supponiamo $F \in L^1(\mathbf{R})$ e $\partial F \in L^1(\mathbf{R})$. Allora si ha

$$(\partial F)^\wedge = \mathcal{F}(\partial F) \text{ e } \widehat{F} = \mathcal{F}F$$

e si ha l'uguaglianza tra funzioni continue su \mathbf{R}

$$\mathcal{F}(\partial F) = ix\mathcal{F}F;$$

nel caso in cui F (che necessariamente è in $C_0(\mathbf{R})$) sia dotata di una derivata classica F' (definita almeno quasi ovunque) e si abbia

$$\partial F = F' \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R})$$

Allora si ha l'uguaglianza

$$\mathcal{F}(F') = ix\mathcal{F}F$$

Come uguaglianza punto per punto tra funzioni continue.

4. Supponiamo $F \in L^2(\mathbf{R})$ e $\partial F \in L^2(\mathbf{R})$. Allora si ha

$$\widehat{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}F \in L^2(\cdot), \quad (\partial F)^\wedge = \tilde{\mathcal{F}}F \in L^2(\cdot);$$

dall'uguaglianza

$$\tilde{\mathcal{F}}(\partial F) = ix\tilde{\mathcal{F}}F$$

otteniamo

$$x\tilde{\mathcal{F}}F \in L^2(\mathbf{R}) \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}F \in L^1(\cap)L^2(\Rightarrow)F \in C_0(\mathbf{R})$$

(risultato già noto). Se F è dotata di una derivata classica F' (definita almeno quasi ovunque), e si ha

$$F' = \partial F$$

si ottiene l'uguaglianza in $L^2(\mathbf{R})$

$$\tilde{\mathcal{F}}(F') = ix\tilde{\mathcal{F}}F$$

5.3 Esempi di trasformate di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

1. Consideriamo innanzitutto la trasformata di Fourier della distribuzione δ in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ si ha

$$\langle \hat{\delta}, f \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}f \rangle = \mathcal{F}f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, f \right\rangle;$$

analogamente

$$\langle \check{\delta}, f \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}^* f \rangle = \mathcal{F}^* f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, f \right\rangle$$

Per cui

$$\hat{\delta} = \check{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Possiamo generalizzare queste formule se $a \in \mathbf{R}^n$ e α è un multiindice

$$(\partial^\alpha \delta_a)^\wedge = (ix)^\alpha (\delta_a)^\wedge = (ix)^\alpha e^{-ia \cdot x} \hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (ix)^\alpha e^{-iacdot{x}}$$

Usando la formula di inversione di Fourier si ha anche

$$(1)^\wedge = (1)^\vee = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta$$

in cui 1 denota la distribuzione definita dalla funzione costante uguale a 1 su \mathbf{R}^n . Anche queste ultime formule possono essere generalizzate:

$$(x^\alpha e^{ia \cdot x})^\wedge = (i)^{|\alpha|} \partial^\alpha (e^{ia \cdot x})^\wedge = (i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(\hat{1} \right)_a = (i)^{|\alpha|} \partial^\alpha (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta_a$$

Ponendo $a = 0$, otteniamo le formule

$$(\partial^\alpha \delta)^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (i)^{|\alpha|} x^\alpha$$

$$(x^\alpha)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta;$$

Abbiamo così l'importante conclusione che la trasformata di Fourier delle combinazioni lineari delle derivate della δ sono i polinomi, e viceversa.

2. Consideriamo la funzione sgn , definita su \mathbf{R} da

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Evidentemente sgn è una distribuzione temperata, inoltre

$$\partial sgn = 2\delta, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R});$$

per cui

$$(\partial sgn)^\wedge = ixsgn^\wedge = 2 \hat{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

otteniamo

$$x(sgn)^\wedge = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

da cui

$$(sgn)^\wedge = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1} + c\delta, \quad c \in \mathbf{C}$$

La funzione sgn è dispari, quindi la sua trasformata di Fourier è dispari; per cui $c = 0$. Abbiamo così provato

$$(sgn)^\wedge = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1}$$

usando la formula $T^{\wedge\wedge} = T^{[-1]}$, otteniamo

$$(x^{-1})^\wedge = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} sgn$$

dal momento che

$$\frac{1}{2} (sgn(x) + 1) = H(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Otteniamo

$$\hat{H} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta + \frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^{frac{1}{2}}} x^{-1}$$

5.4 La serie di Fourier delle distribuzioni periodiche

5.4.1 La formula di somma di Poisson

Consideriamo innanzitutto, per semplicità, il caso $n = 1$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, la serie

$$\sum (f(n) : n \in \mathbf{Z})$$

è assolutamente convergente. Infatti si ha

$$f(n) = \frac{1}{1+n^2} (1+n^2) f(n), \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

per cui

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} (1+n^2) |f(n)| \frac{1}{1+n^2} \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbf{Z}} (1+n^2) |f(n)| \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1+n^2} \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+x^2) |f(x)| \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1+n^2} \end{aligned}$$

La disuguaglianza precedente mostra che la forma lineare su $\mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n)$$

è ben definita; inoltre la disuguaglianza

$$\left| \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) \right| \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+x^2) |f(x)| \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1+n^2}$$

mostra che questa forma lineare definisce una distribuzione temperata su \mathbf{R} , che viene detta, a volte, "Pettine di Dirac". Dal momento che si ha

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n, f \right\rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n)$$

si può concludere che $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$ converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Useremo la notazione

$$P = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$$

Dal momento che $P \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$, possiamo calcolare la sua trasformata di Fourier \hat{P} , anch'essa in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Teorema. *Si ha*

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$$

Dimostrazione. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, si ha

$$\begin{aligned} \langle e^{2\pi i x} P, f \rangle &= \langle P, e^{2\pi i x} f \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i n} f(n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \langle P, f \rangle \end{aligned}$$

per cui

$$e^{2\pi i x} P = P$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \langle P_1, f \rangle &= \langle P, f_{-1} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n+1) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \\ &= \langle P, f \rangle \end{aligned}$$

Per cui

$$P_1 = P$$

Le due uguaglianze precedenti implicano

$$\begin{aligned} (P_1)^\wedge &= P^\wedge \Rightarrow e^{-ix} \hat{P} = \hat{P} \Rightarrow e^{ix} \hat{P} = \hat{P} \\ (e^{2\pi i x} P)^\wedge &= \hat{P} \Rightarrow \left(\hat{P} \right)_{2\pi} = \hat{P} \end{aligned}$$

Consideriamo, innanzitutto, l'uguaglianza

$$(e^{ix} - 1) \hat{P} = 0$$

se una funzione $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è tale che

$$f(2\pi n) = 0, \text{ per ogni } n \in \mathbf{Z}$$

allora, necessariamente,

$$\frac{f}{e^{ix} - 1} \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

infatti, i punti in cui il denominatore si annulla sono i punti $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; nell'intorno di ogni $x = 2\pi n$ si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= (t - 2\pi n)g(t), \quad g \in C_c^\infty(\mathbf{R}) \\ e^{it} - 1 &= (t - 2\pi n)k(t), \quad k \in C^\infty(\mathbf{R}), k(2\pi n) \neq 0 \end{aligned}$$

Allora, se $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ è tale che $f(2\pi n) = 0$, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, si ha

$$0 = \langle (e^{ix} - 1) \hat{P}, \frac{f}{e^{ix} - 1} \rangle = \langle \hat{P}, f \rangle$$

Per ogni $n \in \mathbf{Z}$, scegliamo una funzione h_n in $C_c^\infty(\mathbf{R})$, tale che $h_n(2\pi n) = 1$, e scegliamo le h_n in modo che i loro supporti siano a due a due disgiunti (cosa che è sempre possibile fare). Allora la funzione

$$f = g - \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(2\pi n)h_n$$

è in $C_c^\infty(\mathbf{R})$, per ogni g scelta in $C_c^\infty(\mathbf{R})$; inoltre si ha

$$f(2\pi n) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

Allora, per quanto visto in precedenza, per ogni $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, si avrà

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}, g - \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(2\pi n) h_n \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle \hat{P}, g \rangle &= \langle \hat{P}, \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(2\pi n) h_n \rangle, \quad \forall g \in C_c^\infty(\mathbf{R}) \\ &\Rightarrow \langle \hat{P}, g \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(2\pi n) \langle \hat{P}, h_n \rangle = \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \langle \delta_{2\pi n}, g \rangle = \langle \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \delta_{2\pi n}, g \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \delta_{2\pi n}$$

La relazione $\left(\frac{\hat{P}}{2\pi} \right)^\wedge = \hat{P}$ mostra che tutti i c_n sono uguali ad uno stesso c , per cui

$$\hat{P} = c \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$$

Per fissare la costante c , si può procedere come segue. Qualunque sia $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ si ha

$$\langle \hat{P}, f \rangle = \langle P, \mathcal{F}f \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(n)$$

d'altra parte

$$\langle \hat{P}, f \rangle = c \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle \delta_{2\pi n}, f \rangle = c \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n)$$

per cui

$$c \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(n)$$

usiamo quest'uguaglianza nel caso particolare

$$f(x) = e^{-\text{frac}{x^2}{4\pi}}, \quad \mathcal{F}f = \sqrt{2\pi} e^{-\pi x^2}$$

per cui

$$c \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{(2\pi n)^2}{4\pi}} = \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2}$$

in conclusione

$$c = \sqrt{2\pi}$$

□

Il Teorema precedente ha un immediato corollario.

Corollario. Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ si ha

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(n)$$

L'uguaglianza precedente è nota classicamente con il nome di "Formula di Somma di Poisson". E' diventato usuale questo nome anche per l'uguaglianza

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$$

E' immediato verificare che questa uguaglianza si generalizza alla seguente: per ogni $a > 0$, si ha

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{na} \right)^\wedge = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{\frac{2\pi n}{a}}$$

Poiché la serie $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$ è convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ e la trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ è continua per successioni, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n} &= \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\delta_n)^\wedge = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} \end{aligned}$$

o anche

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx}$$

L'uguaglianza precedente si generalizza in

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{\frac{2\pi n}{a}} = \frac{a}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inax}, a > 0$$

E' evidente come quest'ultima uguaglianza possa essere considerata come lo "sviluppo di Fourier" della distribuzione 2π -periodica $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{\frac{2\pi n}{a}}$.

Si possono generalizzare le formule precedenti anche a \mathbf{R}^n , con n qualunque. Se denotiamo con \vec{n} gli elementi di \mathbf{Z}^n , e sa $a > 0$, la serie

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^n} \delta_{a\vec{n}}$$

converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ e definisce una distribuzione temperata. Si può mostrare che

$$\left(\sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^n} \delta_{a\vec{n}} \right)^\wedge = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{a^n} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^n} \delta_{\frac{2\pi}{a}\vec{n}}$$

o anche

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^n} \delta_{\frac{2\pi}{a}\vec{n}} = \frac{a^n}{(2\pi)^n} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^n} e^{ia\vec{n} \cdot x}$$

5.4.2 La serie di Fourier delle distribuzioni periodiche (trattazione alternativa a quella del paragrafo precedente)

Vogliamo mostrare che ogni distribuzione periodica su \mathbf{R} è sviluppabile in serie di Fourier debolmente convergente. Il punto di partenza di questa seconda trattazione è un teorema di struttura, che assumiamo senza dimostrazione.

Teorema (di struttura delle distribuzioni periodiche). . Ogni distribuzione T , periodica su \mathbf{R} con periodo $a > 0$, ha la forma

$$T = c + \partial^m f$$

in cui

- c è una costante;
- f è continua su \mathbf{R} e periodica con periodo a ;
- m è un intero positivo.

Due conseguenze, quasi immediate, di questo Teorema devono essere enunciate immediatamente.

Corollario. *Ogni Distribuzione periodica su \mathbf{R} è temperata.*

Dimostrazione. Per il teorema di struttura

$$T = c + \partial^m f$$

la funzione f è continua e periodica su \mathbf{R} , quindi definisce una distribuzione temperata. La derivata di una distribuzione temperata è temperata. □

Corollario. *Ogni distribuzione T , periodica su \mathbf{R} con periodo $a > 0$, ha la forma*

$$T = c' + \partial^{m+1} f'$$

in cui

- c' è una costante;
- $f' \in C^1(\mathbf{R})$ è periodica di periodo a ;
- m è un intero positivo.

Dimostrazione. Per il Teorema di struttura, si ha

$$T = c + \partial^m f$$

Notiamo, innanzitutto, che

$$\int_x^{x+a} f(t) dt$$

non dipende da x ; infatti si ha

$$\int_x^{x+a} f(t) dt = \int_0^{x+a} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

per cui

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x+a} f(t) dt \right) = f(x+a) - f(x) = 0$$

poiché f ha periodo a . Poniamo

$$\alpha = \frac{1}{a} \int_x^{x+a} f(t) dt$$

(α non dipende da x , per quanto visto in precedenza)

$$f'(x) = \int_{x_0}^x [f(t) - \alpha] dt$$

si ha

1. $f' \in C^1(\mathbf{R})$

2.

$$\begin{aligned} f'(x+a) &= \int_{x_0}^{x+a} [f(t) - \alpha] dt = \\ &= \int_{x_0}^x [f(t) - \alpha] dt + \int_x^{x+a} [f(t) - \alpha] dt = \\ &= f'(x) + \int_x^{x+a} f(t) dt - \alpha \int_x^{x+a} dt \end{aligned}$$

quindi f' è periodica con periodo a .

3.

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x [f(t) - \alpha] dt = f(x) - \alpha$$

Quindi

$$\begin{aligned} c + \partial^{m+1} f' &= c + \partial^m (\partial f') = \\ &= c + \partial^m (f - \alpha) = \\ &= c + \partial^m f = T \end{aligned}$$

□

Il teorema che assicura lo sviluppo in serie di Fourier di ogni distribuzione periodica è il seguente

Teorema. *Ogni distribuzione su \mathbf{R} , periodica con periodo $a > 0$, può essere sviluppata in una serie di Fourier, convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$*

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a} i k x}, \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R})$$

e i coefficienti c_k dello sviluppo soddisfano

$$|c_k| \leq C |k|^N, \quad |k| \geq 1$$

per un qualche $C > 0$ e un qualche $N \geq 0$. Inversamente, se

$$(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$$

è una successione di numeri complessi tale che

$$|c_k| \leq C |k|^N, \quad |k| \geq 1$$

per un qualche $C > 0$ ed un qualche $N \geq 0$, allora

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a} i k x}, \quad a > 0$$

converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ ad una distribuzione temperata su \mathbf{R} , periodica con periodo a .

Dimostrazione. Supponiamo, innanzitutto, che T sia una distribuzione (temperata) su \mathbf{R} , periodica di periodo $a > 0$. Per il secondo corollario al Teorema di struttura, possiamo assumere

$$T = c + \partial^m F$$

in cui

- c è una costante;
- $F \in C^1(\mathbf{R})$ è a -periodica;
- m è un intero positivo ≥ 0

Possiamo sviluppare F in serie di Fourier, assolutamente e uniformemente convergente su tutto \mathbf{R}

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

dal momento che la serie converge uniformemente, converge anche temperatamente; inoltre i coefficienti d_k dello sviluppo sono tali che

$$|d_k| \rightarrow 0, \text{ se } |k| \rightarrow \infty$$

quindi, in particolare,

$$|d_k| \leq C, \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Per la proprietà della derivata in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ e della convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, si ha

$$\partial^m F = \sum_{k \neq 0} d_k \left(ik \frac{2\pi}{a} \right)^m e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

e l'uguaglianza si ha in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ (la serie al membro di destra converge nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$). Allora

$$T = c + \partial^m F = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

in cui

1. la serie converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$;
2. si ha

$$c_0 = c$$

$$c_k = d_k \left(\frac{2\pi}{a} ik \right)^m, \text{ se } k \neq 0$$

per cui, per $k \neq 0$, si ha

$$|c_k| = |d_k| \left(\frac{2\pi}{a} \right)^m |k|^m \leq C \left(\frac{2\pi}{a} \right)^m |k|^m$$

Inversamente, supponiamo che la successione

$$(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$$

abbia la proprietà

$$|c_k| \leq C |k|^N, \text{ se } k \neq 0$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{k \neq 0} \left(\frac{2\pi}{a} ik \right)^{-N-2} c_k e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

la disuguaglianza, per $k \neq 0$

$$|(ik)^{-N-2} c_k| \leq \frac{C}{|k|^{N+2}} |k|^N = \frac{C}{|k|^2}$$

ci assicura che la serie converge assolutamente e uniformemente su tutto \mathbf{R} ad una funzione continua e periodica di periodo a . Allora

$$\partial^{N+2}F = \sum_{n \neq 0} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx}, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R})$$

per cui

$$c_0 + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx}$$

converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ a

$$c_0 + \partial^{N+2}F$$

che è una distribuzione (temperata) periodica con periodo a .

□

E' molto importante stabilire l'unicità della successione $(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ dei coefficienti dello sviluppo di Fourier della distribuzione periodica T . Questa proprietà discende immediatamente dal semplicissimo Lemma che segue.

Lemma. *Supponiamo che la serie*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx}$$

converga a 0 in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Allora, necessariamente,

$$c_k = 0, \forall k \in \mathbf{Z}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx} \right)^\wedge = 0$$

da cui, per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx} \right)^\wedge, f \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a}ikx}, \mathcal{F}f \right\rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \langle e^{\frac{2\pi}{a}ikx}, \mathcal{F}f \rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \mathcal{F}^* \mathcal{F}f \left(\frac{2\pi k}{a} \right) = \end{aligned}$$

per il teorema di inversione di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \sqrt{2\pi} f \left(\frac{2\pi k}{a} \right)$$

Scegliendo f in $C_c^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$, uguale a 1 in un intorno di $k \in \mathbf{Z}$ e 0 al di fuori di $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, scelta sempre possibile, otteniamo $c_k = 0$. Questo per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

□

Dal momento che la trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ è (sequenzialmente) continua, rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, si ha la conclusione che se T è una distribuzione periodica con periodo a , si ha

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a} ikx} \right)^\wedge = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \left(e^{\frac{2\pi}{a} ikx} \right)^\wedge = \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{\frac{2\pi}{a} k}\end{aligned}$$

Il teorema dimostrato in questo paragrafo indica, nella dimostrazione, un metodo pratico concreto per ottenere lo sviluppo di Fourier di una distribuzione periodica T : si parte da una funzione periodica f che "a occhio" abbia la proprietà

$$T = c + \partial^m f$$

e si ottiene lo sviluppo di T derivando lo sviluppo di f . Un esempio estremamente importante di questa procedura è lo sviluppo di Fourier della distribuzione

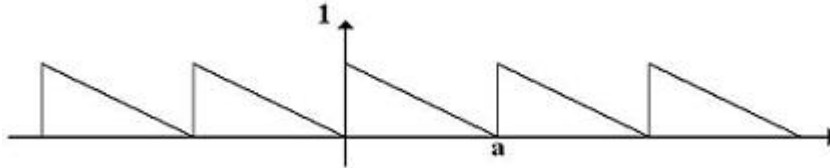
$$P_a = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ak}, \quad a > 0$$

che viene detta, a volte, "Pettine di Dirac" (con periodo a).

Consideriamo la funzione f , periodica con periodo a , la cui restrizione a $[0, a]$ è data da

$$f|_{[0, a]} = -\frac{1}{a}x + 1$$

il grafico di f è



Si ha

$$\partial f = -\frac{1}{a} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ak} \Rightarrow P_a = \frac{1}{a} + \partial f$$

Lo sviluppo di Fourier di f è

$$\begin{aligned}f &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \frac{e^{\frac{2\pi}{a} ikx}}{\sqrt{a}} \\ c_k &= \int_0^a f(x) \frac{e^{-\frac{2\pi}{a} ikx}}{\sqrt{a}} dx\end{aligned}$$

Ma, con qualche semplice calcolo,

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{\sqrt{a}}{2} \\ c_k &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \frac{1}{ik}, \quad \text{se } k \neq 0\end{aligned}$$

per cui

$$f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

$$\begin{aligned}\partial f &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{2\pi}{a} e^{\frac{2\pi}{a} ikx} \\ \Rightarrow P_a &= \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{\frac{2\pi}{a} ikx} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R})\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto in questo modo lo sviluppo di Fourier di P .

Una conseguenza importante è la "formula di somma di Poisson". Dallo sviluppo di Fourier otteniamo

$$\hat{P}_a = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{a} \delta_{frac{2\pi ak}$$

più esplicitamente

$$\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ka} \right)^\wedge = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{frac{2\pi ak}$$

L'uguaglianza precedente viene detta formula di somma di Poisson. In effetti, classicamente, questo nome veniva riservato alla seguente uguaglianza, che è una conseguenza elementare:

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$\left\langle \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ka} \right)^\wedge, f \right\rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ka}, \mathcal{F}f \right\rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(ka)$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{ka} \right)^\wedge, f \right\rangle &= \left\langle \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_{frac{2\pi ak}, f \right\rangle = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(frac{2\pi ak})\end{aligned}$$

per cui si ha l'uguaglianza

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(frac{2\pi ak}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(ka)$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$

Nella trattazione precedente manca un'espressione esplicita per i coefficienti c_k nello sviluppo di Fourier

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

della distribuzione a -periodica T . Questo non è tanto importante dal punto di vista pratico, quanto per stabilire come le serie di Fourier delle distribuzioni periodiche generalizzano le serie di Fourier classiche. Nel seguito, per semplicità consideriamo il caso di distribuzioni 2π -periodiche, gli adattamenti al caso di periodo a sono abbastanza semplici. Si definisce una funzione χ ponendo

$$\chi(x) = \frac{\int_{|x|}^{2\pi} e^{-\frac{1}{t(2\pi-t)}} dt}{\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{t(2\pi-t)}} dt}, \text{ se } |x| < 2\pi$$

$$\chi(x) = 0 \text{ se } |x| \geq 2\pi$$

E' facile verificare che

- $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$
- $\text{supp}\chi = [-2\pi, 2\pi]$

- $\chi(x) + \chi(x - 2\pi) = 1$, se $0 \leq x \leq 2\pi$
- $\chi(x) + \chi(x + 2\pi) = 1$, se $-2\pi \leq x \leq 0$

(le ultime due affermazioni sono equivalenti, per provarle è sufficiente sostituire

$$s = 2\pi - t$$

nell'integrale che definisce χ).

Le proprietà della funzione χ permettono di dimostrare un semplice Lemma.

Lemma. *Supponiamo che f sia una funzione 2π -periodica su \mathbf{R} , e che sia integrabile su un periodo*

$$f \in \mathcal{L}^1((x_0, x_0 + 2\pi)), x_0 \in \mathbf{R}$$

allora si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\chi(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\chi(x)dx &= \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\chi(x)dx = \\ &= \int_{-2\pi}^0 f(x)\chi(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)\chi(x)dx = \end{aligned}$$

usando le uguaglianze

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 - \chi(x + 2\pi), \text{ su } [-2\pi, 0] \\ \chi(x) &= 1 - \chi(x - 2\pi), \text{ su } [0, 2\pi] \end{aligned}$$

otteniamo

$$= \int_{-2\pi}^0 f(x)(1 - \chi(x + 2\pi))dx + \int_0^{2\pi} f(x)(1 - \chi(x - 2\pi))dx =$$

effettuando il cambiamento di variabile

$$x + 2\pi = t$$

nel primo integrale

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} f(x)(1 - \chi(x))dx + \int_0^{2\pi} f(x)(1 - \chi(x - 2\pi))dx = \\ &= \int_0^{2\pi} 2f(x) - f(x)(\chi(x)) + \chi(x - 2\pi)dx = \\ &= \int_0^{2\pi} (2f(x) - f(x))dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx \end{aligned}$$

□

Otteniamo così un'espressione esplicita per i coefficienti c_k .

Teorema.

Supponiamo che T sia una distribuzione (temperata) su \mathbf{R} , 2π -periodica, il cui sviluppo di Fourier è

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx}, \text{ in } S'(\mathbf{R})$$

allora si ha

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \langle T, \chi e^{-ikx} \rangle, \forall k \in \mathbf{Z}$$

Dimostrazione. Dal momento che $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, e che la serie di Fourier di T converge debolmente, si ha, qualunque sia $j \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \langle T, e^{-ijx} \chi \rangle &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle c_k e^{ikx}, e^{-ijx} \chi \rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \langle e^{i(k-j)x}, \chi \rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-j)x} \chi(x) dx = \end{aligned}$$

per il lemma precedente

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)x} dx = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \delta_{kj} \cdot 2\pi = 2\pi c_j \end{aligned}$$

□

Notiamo che se T è una funzione F , 2π -periodica su \mathbf{R} , e integrabile su ogni periodo, si ha

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \langle F, \chi e^{-ikx} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \chi(x) e^{ikx} dx = \end{aligned}$$

per il lemma

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{ikx} dx$$

Ciò mostra che lo sviluppo di Fourier di F , nel senso delle distribuzioni periodiche (temperate), coincide con la serie di Fourier classica che può essere associata formalmente ad ogni funzione periodica, integrabile su un periodo. Il punto fondamentale è che abbiamo mostrato che questa serie converge in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Neturalmente, nel caso di una funzione F che sia periodica, con periodo $a > 0$, ed integrabile su un periodo, la formula che fornisce i c_k si modifica come segue:

$$c_k = \frac{1}{a} \int_0^a F(x) e^{-\frac{2\pi}{a} ikx} dx$$

Nel caso più generale di n qualunque, diremo che una distribuzione T su \mathbf{R}^n è periodica, con periodo a , se si ha

$$T_{ak} = T \text{ per ogni } k \in \mathbf{Z}^n$$

si hanno dei risultati analoghi al caso $n = 1$:

1. Ogni distribuzione periodica su \mathbf{R}^n è temperata;
2. Se T è periodica su \mathbf{R}^n con periodo $a > 0$, T è sviluppabile in una serie di Fourier, convergente in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} c_k e^{\frac{2\pi}{a} ik \cdot x} \\ \hat{T} &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} c_k \delta_{\frac{2\pi}{a} k} \end{aligned}$$

3. Se T è una funzione F , l'espressione esplicita per i coefficienti c_k è data da

$$c_k = \frac{1}{a^n} \int_{I_a^n} F(x) e^{-\frac{2\pi}{a} ikx} d^n x$$

in cui

$$I_a^n = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 \leq x_j \leq a, 1 \leq j \leq n\}$$

4. Per il Pettine di Dirac su \mathbf{R}^n si hanno le formule

$$\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \delta_{ak} \right)^\wedge = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{a^n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \delta_{\frac{2\pi}{a} k}$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \delta_{ak} = \frac{1}{|a|^n} \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} e^{\frac{2\pi}{a} ikx}$$

5.5 Lo sviluppo di Fourier di una funzione definita su un intervallo

Supponiamo $F \in \mathcal{L}^1(0,1)$ (tutto quello che diremo in questo paragrafo utilizzando l'intervallo $]0,1[$ può essere ripetuto con ovvie modifiche per un qualunque intervallo di \mathbf{R}). Definiamo la "periodicizzazione" di F , che denoteremo F_{per} , ponendo

$$F_{per} = F(x - n), \quad x \in \mathbf{R}$$

in cui n è l'unico intero relativo tale che

$$x - n \in]0,1[$$

E' evidente che F_{per} è periodica con periodo 1, e che

$$F_{per}|]0,1[= F$$

F_{per} è una distribuzione temperata, quindi può essere sviluppata in serie di Fourier, convergente in $S'(\mathbf{R})$:

$$F_{per} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi ikx}, \quad \text{in } S'(\mathbf{R})$$

Ricordiamo che esiste un'unica successione $(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ tale che si abbia l'uguaglianza precedente. In altre parole, i coefficienti c_k sono univocamente determinati da F_{per} .

Dal momento che la serie converge in $S'(\mathbf{R})$, la sua restrizione converge necessariamente a F in $D'(\]0,1[)$:

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi ikx} \quad \text{in } D'(\]0,1[)$$

Quindi una funzione $F \in \mathcal{L}^1(0,1)$ può essere sviluppata in serie di Fourier, dalla formula precedente, e lo sviluppo converge in $D'(\]0,1[)$. Il punto importante che vogliamo sottolineare è che non c'è unicità dei coefficienti in questo sviluppo. In altre parole, si possono avere due successioni diverse

$$(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}, \quad (c'_k)_{k \in \mathbf{Z}}$$

tali che

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c'_k e^{2\pi ikx} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi ikx} \quad \text{in } D'(\]0,1[)$$

Per convincersene, è sufficiente pensare a una distribuzione T , periodica su \mathbf{R} con periodo 1 (quindi temperata), la cui restrizione a $]0,1[$ concida con F :

$$T|]0,1[= F$$

T può essere sviluppata in serie di Fourier

$$T = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k e^{2\pi i k x}, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

(i coefficienti d_k di questo sviluppo sono univocamente determinati da T) e si ha

$$T|]0, 1[= F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k e^{2\pi i k x} \text{ in } D'([0, 1])$$

Se T è diversa da F_{per} , si ha

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k e^{2\pi i k x} \text{ in } D'([0, 1])$$

Per avere un esempio di questa situazione, basta pensare alla funzione

$$F(x) = 1, \text{ su }]0, 1[$$

Evidentemente

$$F_{per}(x) = 1, x \in \mathbf{R}$$

boh?

$$1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi i k x}$$

in cui

$$c_k = 1, \text{ se } k = 0$$

$$c_k = 0 \text{ se } k \neq 0$$

costituisce lo sviluppo di Fourier di 1, in $D'([0, 1])$. D'altra parte, per la formula di Poisson

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k = \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i k x} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R})$$

Per cui

$$1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i k x}, \text{ in } D'([0, 1])$$

quindi possiamo concludere che non c'è unicità della successione $(c_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ dei coefficienti per cui si ha l'uguaglianza

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi i k x}, \text{ in } D'([0, 1])$$

Questo fatto ha una conseguenza che può valere la pena sottolineare. Supponiamo

$$F \in \mathcal{L}^2(0, 1) \subset \mathcal{L}^1(0, 1), \partial F \in \mathcal{L}^2(0, 1)$$

e consideriamo lo sviluppo di F sulla base Hilbertiana di $L^2(0, 1)$ definita da

$$(e^{2\pi i k x})_{k \in \mathbf{Z}}$$

Si ha

$$F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2\pi i k x}, \text{ in } L^2(0, 1)$$

(ricordiamo che i coefficienti, c_k , di questo sviluppo sono uguali a quelli che provengono dallo sviluppo di F_{per}). Dal momento che la serie converge in $L^2(0, 1)$, converge anche in $D'([0, 1])$; quindi

$$\partial F = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k (2\pi i k) e^{2\pi i k x}, \text{ in } D'([0, 1])$$

Non è detto, però, che questo costituisca lo sviluppo di $\partial F \in L^2(0, 1)$ sulla base $(e^{2\pi i k x})_{k \in \mathbf{Z}}$. Lo è soltanto se

$$(\partial F)_{per} = \partial(F_{per})$$

Questa uguaglianza non è vera, in generale. Basta pensare al caso

$$F(x) = x, \text{ su }]0, 1[$$

per convincersene.

Questa osservazione spiega perché la derivazione termine a termine delle serie di Fourier sia un'operazione delicata.