

Lo sviluppo in serie di Fourier delle distribuzioni periodiche.

1. Le convergenze di alcune serie in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Consideriamo, innanzi tutto, le serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx} \quad ;$$

supponiamo che esistano un numero positivo $C > 0$ ed un intero $m \geq 0$, tali che

$$|a_k| \leq C (1 + |k|)^m, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Mostriamo che le serie converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Consideriamo, per questo, le serie di funzioni:

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} \quad ;$$

si ha

$$\left| \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} \right| \leq \frac{|a_k|}{|k|^{m+2}} \\ \leq \frac{C (1 + |k|)^m}{|k|^{m+2}}$$

$$\leq C \left(\frac{1}{|k|^{m+2}} + \frac{1}{|k|^2} \right).$$

Ne segue, per il criterio di Weierstrass, che le serie

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , quindi anche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Allora la serie che si ottiene derivando termine a termine questa serie un numero arbitrario di volte converge anch'esse in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Derivando $m+2$ volte, si ottiene che

$$a_0 + \sum_{k \neq 0} a_k e^{ikx}$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k;$$

continuiamo a supporre che esistano un numero positivo $C_1 >$ ed un intero $m \geq 0$, tali che

$$|a_k| \leq C_1 (1+|k|)^m, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

mostriamo che la serie converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; per ogni intero $j \geq 0$ esiste un numero positivo A_j , tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^j |\varphi(x)| \leq A_j;$$

inoltre

$$\begin{aligned} |a_k \varphi(k)| &\leq |a_k| |\varphi(k)| \leq C_1 (1+|k|)^m |\varphi(k)| \leq \\ &\leq C_1 (1+|k|)^m \frac{(1+|k|)^j}{(1+|k|)^j} |\varphi(k)|, \end{aligned}$$

in cui j è un intero > 1 . Allora si ha

$$|a_k \varphi(k)| \leq C_1 \frac{1}{(1+|k|)^j} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^{j+m} |\varphi(x)| \leq$$

$$\leq C' A_{j+m} \frac{1}{(1+|k|)^j}$$

Per ogni coppia M, N di interi ≥ 1 , avremo allora

$$\sum_{k=-M}^N |a_k \varphi(k)| \leq C' A_{j+m} \sum_{k=-M}^N \frac{1}{(1+|k|)^j}$$

in cui $j \geq 1$. La serie (di Riemann)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)^j}, \quad j \geq 1,$$

è convergente. Ciò mostra che la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(k)$$

è assolutamente convergente, quindi convergente, per ogni $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Con questo abbiamo mostrato che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, purché sia soddisfatta l'ipotesi

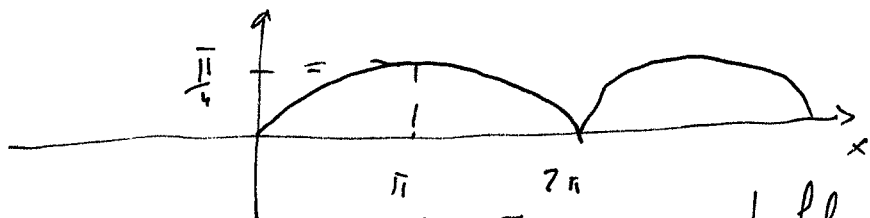
$$|a_k| \leq C_i (1+|k|)^m.$$

2. Le formule di somme di Poisson.

Denotiamo con f la funzione 2π -periodica su \mathbb{R} , la cui restrizione all'intervallo $[0, 2\pi]$

$$è \quad f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Il grafico di f è



Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π -periodica f è dato da

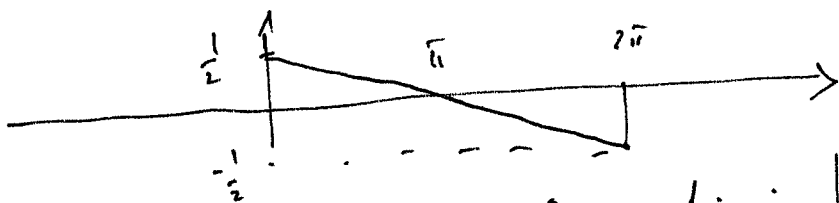
$$f(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

Essendo il criterio di Weierstrass, è immediato mostrare che la serie di Fourier di f converge a f uniformemente su tutto \mathbb{R} . In particolare, la serie di Fourier di f converge a f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quindi la serie che si ottiene derivando la serie di Fourier di f termine a termine p volte converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alla derivata distribuzionale $\mathcal{D}^p f$.

Per $p=1$, si ha:

la derivata $\mathcal{D}f$ è la funzione 2π -periodica su \mathbb{R} la cui restrizione a $[0, 2\pi]$ è data da

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$$



Notiamo che $\mathcal{D}f$ è C^∞ negli intervalli aperti

$$]2k\pi, 2(k+1)\pi[\quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

e ha discontinuità "a salto" nei punti:

$$2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La derivata $\partial^2 f$ è data da

$$\partial^2 f = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}$$

Allora si ha

$$-\frac{1}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx}, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R});$$

da cui

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Questa uguaglianza è nota come "formula di somma di Poisson". Può essere generalizzata facilmente: se $a > 0$, si ha anche

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{na} = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in \frac{2\pi}{a} x}, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Notiamo infine che dal momento che le trasformate di Fourier di sequenzialmente continue in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si ha anche

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{na} \right)^\wedge = \frac{1}{a} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge =$$
$$= \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(e^{in \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{n \frac{2\pi}{a}};$$

a volte si dice il nome di formula di somma di Poisson a quest'ultima uguaglianza.

3. Un risultato intermedio.

Supponiamo che u sia una distribuzione su \mathbb{R} a supporto compatto e che a sia un numero strettamente positivo:

$$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \quad a > 0.$$

La serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka}$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (cfr. il paragrafo 1); quindi è definito il prodotto di convoluzione

$$u * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka}.$$

L'applicazione

$$v \mapsto u * v : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

è continua per successioni; allora si ha

$$\begin{aligned} u * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u * \delta_{ka} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ka}(u). \end{aligned}$$

Notiamo che la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ka}(u)$$

(che è convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) definisce una distribuzione periodica con periodo a ; infatti:

$$\tau_a \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{ka}(u) \right) =$$

(poiché $\tau_a: \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
è continua per successioni)

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_a(\tilde{t}_{ka}(u))$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{a(k+1)}(u)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{ka}(u).$$

Le distribuzioni periodiche (con periodo a) e temperate

si ottiene la periodizzazione di u con periodo a .

Usando la formula di somma di Poisson, si ha:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{ka}(u) = u * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka} = u * \left(\frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik \frac{2\pi}{a} x} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u * e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

Dobbiamo calcolare

$$u * e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

per il teorema della convoluzione, si ha

$$(u * e^{ik \frac{2\pi}{a} x})^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{u} \cdot \left(e^{ik \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge$$

$$= \sqrt{2\pi} \hat{u} \cdot \sqrt{2\pi} \delta_{k \frac{2\pi}{a}}$$

(notiamo che $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$,

dal momento che $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$)

$$= 2\pi \hat{u} \left(k \frac{2\pi}{a} \right) \delta_{k \frac{2\pi}{a}}$$

per cui

$$u * e^{ik \frac{2\pi}{a} x} = 2\pi \hat{u} \left(k \frac{2\pi}{a} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik \frac{2\pi}{a} x} \right)^{\wedge}$$

$$= 2\pi \hat{u} \left(k \frac{2\pi}{a} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

In conclusione, abbiamo le seguenti importanti uguaglianze:

se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $a > 0$, si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{ka}(u) = \frac{1}{a} \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u} \left(k \frac{2\pi}{a} \right) e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

in cui le serie ai due membri convergono in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e l'uguaglianza deve essere intesa in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4. Lo sviluppo di Fourier di una distribuzione periodica.

Supponiamo che u sia una distribuzione su \mathbb{R} , periodica con periodo $a > 0$. Vogliamo mostrare che u può essere sviluppata in serie di Fourier, convergente in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Per usare il risultato del paragrafo precedente, mostriamo che u può essere scritta come la periodizzazione (con periodo $a > 0$) di una distribuzione a supporto compatto. Si

fissa

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

con le proprietà

$$\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$$

$$\varphi \geq 0 \text{ su tutto } \mathbb{R}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{ka}(\varphi) = 1$$

(si può costruire esplicitamente una funzione con queste proprietà); è importante osservare che, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, il prodotto

$$\varphi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{ka}(\varphi) = \varphi$$

si riduce ad una somma finite di termini diversi da 0, che sono funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \varphi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{ka}(\varphi) \right\rangle$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \varphi \cdot \tilde{u}_{ka}(\varphi) \rangle$$

(poiché u è periodica con periodo a)

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{u}_{ka} u, \varphi \cdot \tilde{u}_{ka}(\varphi) \rangle$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \tilde{u}_{ka}(\varphi) \cdot \varphi \rangle.$$

Dal momento che l'applicazione

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{ka}(\varphi) : \mathcal{F} \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$$

è continua, l'ineguaglianza

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \tilde{u}_{ka}(\varphi) \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

mostra che u è temperata.

Otteniamo così un primo importante risultato:

se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è periodica, allora è temperata.

Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \psi \cdot \tilde{\tau}_{-ka}(\psi) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \psi \cdot u, \tilde{\tau}_{-ka}(\psi) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\tau}_{ka}(\psi u), \psi \rangle; \end{aligned}$$

otteniamo così l'uguaglianza

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{ka}(\psi \cdot u).$$

Mostriamo che

$$\psi \cdot u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R});$$

allora, per quanto mostrato nel paragrafo precedente, si ha

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{ka}(\psi \cdot u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi u)^{\wedge} \left(k \frac{2\pi}{a} \right) e^{ik \frac{2\pi}{a} x},$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Questa uguaglianza costituisce lo sviluppo di Fourier della distribuzione (temperata) periodica u . Se si denota

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} (\psi u)^{\wedge} \left(k \frac{2\pi}{a} \right),$$

lo sviluppo di Fourier di u può essere scritto

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{2\pi}{a} x}, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Apparentemente, i coefficienti c_n dipendono dalla scelta della funzione φ ; ma non è così; lo sviluppo di Fourier di u è intrinseco a u , e i coefficienti c_n dipendono solo da u . Infatti, dal momento che lo sviluppo di Fourier di u converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si ha

$$\hat{u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left(e^{i n \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i n \frac{2\pi}{a} x} dx$$

Supponiamo, per assurdo, che u abbia anche un altro sviluppo

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n e^{i n \frac{2\pi}{a} x}$$

(per esempio, ottenuto calcolando c'_n con un'altra funzione φ'). Si otterrebbe

$$\hat{u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n \left(e^{i n \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i n \frac{2\pi}{a} x} dx$$

per cui

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n - c'_n) \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i n \frac{2\pi}{a} x} dx = 0, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R});$$

e quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n - c'_n) \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i n \frac{2\pi}{a} x} dx = 0, \forall \varphi > 0,$$

qualunque sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Scegliendo φ

Tale che

$$\varphi\left(\bar{k} \frac{2\pi}{a}\right) = 1, \quad \bar{k} \text{ fissato in } \mathbb{Z},$$

$$\varphi\left(k \frac{2\pi}{a}\right) = 0, \quad \text{se } k \neq \bar{k},$$

si ottiene

$$(c_{\bar{k}} - c'_{\bar{k}}) \sqrt{2\pi} = 0, \quad \text{qualunque sia } \bar{k} \in \mathbb{Z};$$

cio' mostra l'unicita' dello sviluppo di Fourier della distribuzione periodica u .

I coefficienti c_k dello sviluppo di una distribuzione periodica su \mathbb{R} (di periodo a) sono detti da

$$c_k = \frac{2\pi}{a} \hat{v}\left(k \frac{2\pi}{a}\right),$$

in cui v e' una distribuzione a supporto compatto (precisamente, $v = \varphi \cdot u$ in cui $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$). D'altra parte si ha

$$\hat{v}\left(k \frac{2\pi}{a}\right) = \left\langle v, e^{-ik \frac{2\pi}{a} x} \right\rangle,$$

per cui

$$|c_k| = \frac{2\pi}{a} \left| \left\langle v, e^{-ik \frac{2\pi}{a} x} \right\rangle \right|.$$

Poiche' u e' una distribuzione a supporto compatto, esistono

una costante $B > 0$

un intero $N \geq 0$

un compatto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$

tali che si abbia le stime

$$\left| \left\langle v, e^{-ix\xi} \right\rangle \right| \leq B \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \sup \left\{ \left| \partial^j (e^{-ix\xi}) \right| : x \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= B \sum_{j \in \mathbb{N}} \sup_{x \in [K]} |(-i\xi)^j e^{-i\xi x}| : x \in [K]$$

~~$$= B \sum_{j \in \mathbb{N}} C_j |(-i\xi)^j e^{-i\xi x}|$$~~

$$\leq B \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi|^j$$

Per cui:

$$|c_k| = \frac{2\pi}{a} \left| \langle v, e^{-ik \frac{2\pi}{a} x} \rangle \right|$$

$$\leq \frac{2\pi}{a} B \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| k \frac{2\pi}{a} \right|^j$$

$$= \frac{2\pi}{a} B \left(1 + \frac{2\pi}{a} |k| + \dots + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^N |k|^N \right)$$

$$\leq C_1 (1 + |k|)^N,$$

in cui $C_1 > 0$ è opportunamente grande.

Inoltre, se

$$(c_n : n \in \mathbb{Z})$$

è una successione con le proprietà che esistono
 $C > 0$ e N intero $\neq 0$

tali che

$$|c_n| \leq C (1 + |n|)^N, \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

abbiamo visto (per $\nu \perp$) che la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a una distribuzione periodica

di periodo a .

In questo modo, abbiamo mostrato che le serie delle forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{2\pi}{a} x},$$

in cui

$$|c_k| \leq C (1 + |k|)^M, \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z},$$

sono esattamente tutte e sole gli sviluppi in serie di Fourier delle distribuzioni (temperate)

periodiche su \mathbb{R} , con periodo $a > 0$.

Poiché la trasformata di Fourier

$$u \mapsto \hat{u} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

è continua, ne segue che le trasformate di Fourier delle distribuzioni (temperate) periodiche su \mathbb{R} , con periodo $a > 0$, sono tutte e sole le serie (convergenti in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, cfr. paragrafo 1) delle

forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \int_{\mathbb{R}} e^{ik \frac{2\pi}{a} x} dx$$

in cui

$$|d_k| \leq D (1 + |k|)^M, \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare

$$d_k = c_k \sqrt{2\pi}.$$

Nel seguito vedremo alcuni esempi di col-

colore esplicito dei coefficienti: c_n (o d_n).

La serie di Fourier associate ad una funzione definita su un intervallo di \mathbb{R} e ha due dei termini a termine.

Supponiamo che f sia una funzione definita in $]x_0, x_0+a[$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

e che

$$f \in L^1(x_0, x_0+a).$$

Vogliamo riguardare f come una distribuzione su \mathbb{R} a supporto compatto. Definiamo, a questo scopo una funzione f_0 (che viene detta l'estensione per zero di f) ponendo

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]x_0, x_0+a[\\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

E' chiaro che f_0 è una funzione integrabile su \mathbb{R} e che il suo supporto è contenuto in

$$[x_0, x_0+a],$$

quindi è compatto. La funzione f_0 definisce così una distribuzione su \mathbb{R} , a supporto compatto.

Consideriamo la serie, convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{na}(f_0);$$

(a volte denotiamo con f_{per} la somma, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di questa serie); definisce una distribuzione

periodica su \mathbb{R} , con periodo a . Per il risultato del paragrafo 3, si ha l'uguaglianza in $f'(\mathbb{R})$

$$f_{\text{per}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{r}_{ka}(f_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{2\pi}{a} x},$$

in cui

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \int_0^a \left(k \frac{2\pi}{a} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik \frac{2\pi}{a} x} f_0(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x_0+a} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{a} x} dx. \end{aligned}$$

La serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$

viene detta la serie di Fourier associate alla funzione $f \in L^1(x_0, x_0+a)$. Notiamo che, classicamente, non si ha alcune proprietà di convergenza per la serie di Fourier associate ad una funzione integrabile su un intervallo.

Un problema importante, nella trattazione delle serie di Fourier delle funzioni, è quello delle dittehi: liti termine a termine delle serie di Fourier. Può essere posto in questi termini.

Supponiamo che f sia derivabile nell'intervallo $[x_0, x_0+a]$ (eventualmente, eccetto che in un

numero finito di punti) e che f' sia integrabile (e, solitamente) sull'intervallo. Le serie di Fourier associate a f' può essere data dalle serie di Fourier associate a f derivando termine a termine?

Per rispondere a queste domande, torniamo all'uguaglianza

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{na}(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(n \frac{2\pi}{a}\right) e^{i n \frac{2\pi}{a} x},$$

valida in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, in cui $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Derivando, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ambo i membri, otteniamo

$$\mathcal{D} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{na}(u) \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \mathcal{D} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}\left(n \frac{2\pi}{a}\right) e^{i n \frac{2\pi}{a} x} \right)$$

Al secondo membro, per la continuità di \mathcal{D} in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

si ha

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \mathcal{D} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}\left(n \frac{2\pi}{a}\right) e^{i n \frac{2\pi}{a} x} \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}\left(n \frac{2\pi}{a}\right) (i n \frac{2\pi}{a}) e^{i n \frac{2\pi}{a} x},$$

quindi la derivata del secondo membro è la derivata termine a termine delle serie di Fourier. Per quel che riguarda il primo membro

$$\mathcal{D} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{na}(u) \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{t}_{na}(\mathcal{D}u), \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

in cui $\mathcal{D}u$ è la derivata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (o in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) della distribuzione a supporto compatto su \mathbb{R} .

Quindi si ha l'uguaglianza

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{na} (\partial u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u} \left(n \frac{2\pi}{a} \right) \left(i n \frac{2\pi}{a} \right) e^{i n \frac{2\pi}{a} x}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Nel caso particolare

$$u = f_0,$$

in cui f è definita e (assolutamente) integrabile su $]x_0, x_0 + a[$, si ottiene

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{na} (\partial f_0) = \sum_n c_n \left(i n \frac{2\pi}{a} \right) e^{i n \frac{2\pi}{a} x}.$$

Quindi possiamo concludere che la serie di Fourier di f associata a f è derivabile termine a termine (nel senso preciso definito sopra) purché si abbia

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{na} (\partial f_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{na} (f'_0),$$

in cui

∂f_0 è la derivata distribuzionale di f_0

(f'_0) è l'estensione per zeri della funzione f' definita su $]x_0, x_0 + a[$.

Gli esempi seguenti dovrebbero poter chiarire la situazione.

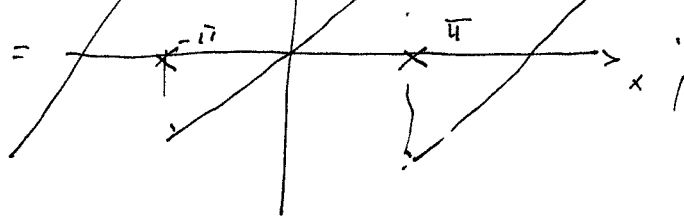
Esempio 1.

In questo esempio consideriamo

$$f(x) = x, \quad \text{per } x \in [-\pi, \pi].$$

si ha

$$f_0(x) = x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]} ;$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{2k\pi} (x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}) =$$


$$\partial f_0 = \chi_{]-\pi, \pi[} - \pi \delta_{\pi} - \pi \delta_{-\pi} ;$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{2k\pi} \left(\chi_{]-\pi, \pi[} - \pi \delta_{\pi} - \pi \delta_{-\pi} \right) = 1 - 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi} .$$

Inoltre, si ha

$$f'(x) = 1, \quad \text{su }]-\pi, \pi[;$$

$$(f')_0(x) = \chi_{]-\pi, \pi[}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{2k\pi} \left((f')_0 \right) = 1, \quad \text{se } x \neq (2k+1)\pi .$$

In questo esempio, abbiamo questa situazione

$$\partial f_0 \neq (f')_0 .$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{2k\pi} (\partial f_0) \neq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{2k\pi} \left((f')_0 \right) .$$

La serie di Fourier associata ad f non può essere derivata termine a termine.

Unicamente, nell'esempio concreto, è possibile "verificare" questo fatto. La serie di Fourier associata a f ,

così lo sviluppo di Fourier di $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{2n\pi}(f_0)$, è dato da

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]})^{\wedge}(k) e^{ikx};$$

si calcola rapidamente

$$(x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]})^{\wedge}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^k}{-ik} & \text{se } k \neq 0 \end{cases};$$

per cui

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}(x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{ik} e^{ikx};$$

la serie ottenuta derivando termine a termine la serie al membro di destra è

$$- \sum_{k \neq 0} (-1)^k e^{ikx};$$

notiamo che questa serie converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e la distribuzione

$$1 - 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(2k+1)\pi}$$

D'altra parte, l'unica uguaglianza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}(\chi_{[-\pi, \pi]}) = 1$$

costituisce lo sviluppo di Fourier della distribuzione

zione al membro di sinistra. In altre parole, nelle serie di Fourier associate a f' tutti i coefficienti c_n sono nulli, eccetto c_0 che è uguale a 1.

In questa maniera, abbiamo "verificato" che la serie di Fourier associate a f' non si ottiene dalla serie di Fourier associate a f derivando le termine a termine.

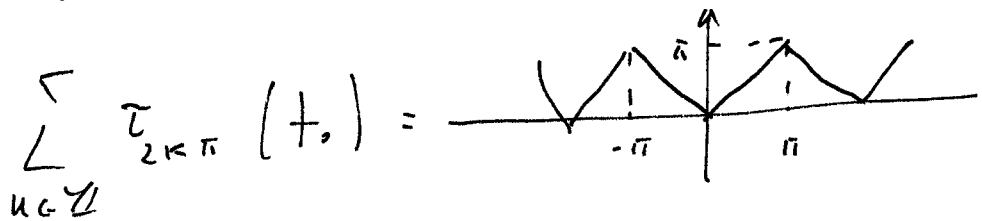
Esempio 2

Consideriamo

$$f(x) = |x|, \quad \text{su } [-\pi, \pi].$$

Si ha

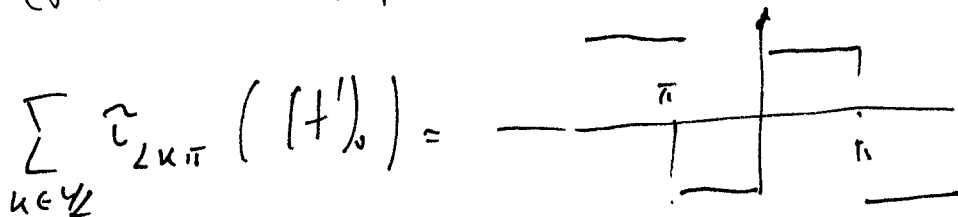
$$f_0(x) = |x| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}$$



Inoltre, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{se } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

$$(f')_0(x) = \chi_{]0, \pi[} - \chi_{]-\pi, 0[}$$



Abbiamo anche

$$Df_0 = -\chi_{]-\pi, 0[} + \chi_{]0, \pi[} - \pi \delta_{\pi} + \pi \delta_{-\pi}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (\partial f_0) = \text{[Diagram of a square wave function with period } 2\pi \text{ and amplitude } 1 \text{, centered at } 0 \text{.]}$$

Quindi, in questo esempio si ha

$$\partial f_0 \neq (f'_0),$$

ma, ~~dimostrando~~ dimostrando questo, si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (\partial f_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (f'_0).$$

Possiamo concludere che la serie di Fourier associata

a f può essere derivata termine a termine.

Questo fatto può essere verificato esplicitamente. La

serie di Fourier associata a f (cioè lo sviluppo di

Fourier di $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (f_0)$) è data da

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (f_0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{2n\pi} (|x| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|x| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]})^{\wedge}(n) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Si può calcolare facilmente

$$\left(|x| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]} \right)^{\wedge}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2} & n \neq 0 \end{cases}$$

per cui

☞

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{2k\pi} (|x| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2} e^{ikx} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - 4 \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(2k+1)x}}{(2k+1)^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

La serie che si ottiene diverge alle estremità a termine e'

$$\frac{2}{i\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(2k+1)x}}{(2k+1)}$$

D'altra parte, la serie di Fourier associate a f' (cioè lo sviluppo di Fourier di $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{2k\pi} (f')_0$) è dato da

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{2k\pi} (f')_0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{2k\pi} (\chi_{[0, \pi]} - \chi_{[-\pi, 0]}) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\chi_{[0, \pi]} - \chi_{[-\pi, 0]})^\wedge(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned} (\chi_{[0, \pi]} - \chi_{[-\pi, 0]})^\wedge(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari (o } 2\pi) \\ \frac{4}{ik} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{r}_{2n\pi} \left(\chi_{]0, \pi[} - \chi_{] - \pi, 0[} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \frac{4 e^{i(2k+1)x}}{i(2k+1)}$$

$$= \frac{2}{i\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{(2k+1)x}}{(2k+1)}$$

Questo sviluppo coincide con quello ottenuto derivando termine a termine lo sviluppo di Fourier associato a f .

Esempio 3

In questo esempio consideriamo una situazione in cui si ha

$$(f')_0 = \partial f_0,$$

quindi, "a fortiori",

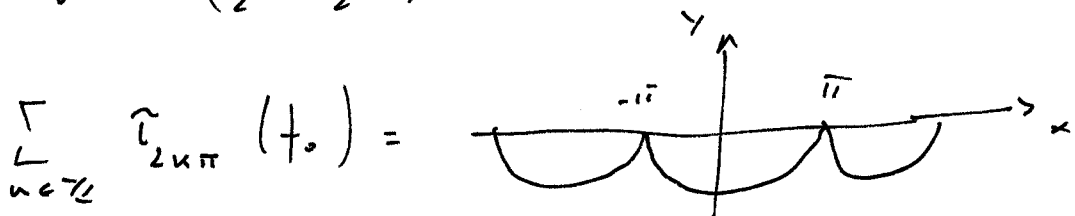
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{r}_{2n\pi} (\partial f_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{r}_{2n\pi} (f')_0.$$

Consideriamo

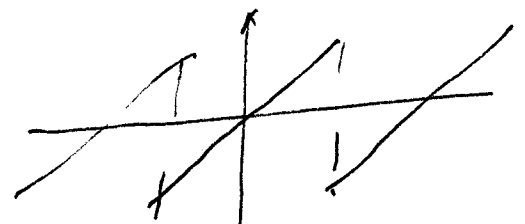
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

si ha

$$f_0(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}$$



$$\partial f_0 = x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]} \mathbb{I}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{2n\pi} (x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]} \mathbb{I}) =$$


Inoltre si ha

$$f'(x) = x \quad \text{su }]-\pi, \pi[$$

$$(f')_0(x) = x \cdot \chi_{]-\pi, \pi[}$$

Per cui, in questo esempio si ha

$$\partial f_0 = (f')_0$$

Dobbiamo, perciò, aspettarci che scrivendo termine a termine la serie di Fourier associata a $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right)$ si ottenga la serie di Fourier associata

a x . Si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{2n\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right)^{\wedge}(n) e^{inx};$$

in cui

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right)^{\wedge}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2}{3}\pi^3\right) & \text{se } k=0 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{k^2} & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

per cui si ha la sviluppo di Fourier

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k\pi} \left(\frac{k^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \left\{ -\frac{2}{3} \pi^3 + \sum_{k \neq 0} \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikx} \right\}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikx}$$

$$\left(= -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx \right).$$

La serie che si ottiene derivando termine a termine è

$$\sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^2} (ik) e^{ikx} = \sum \frac{(-1)^k}{-ik} e^{ikx}$$

Questa serie è esattamente la serie di Fourier associata alla funzione x (definita su $[-\pi, \pi]$), come si è visto nell'esempio 1.

Le formule fondamentali per le distribuzioni periodiche sono ($\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{t}_{ka}(\mu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}\left(k \frac{2\pi}{a}\right) e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{t}_{ka}(\mu) \right)^\wedge = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}\left(k \frac{2\pi}{a}\right) \left(e^{ik \frac{2\pi}{a} x} \right)^\wedge =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}\left(k \frac{2\pi}{a}\right) \sqrt{2\pi} \delta_{k \frac{2\pi}{a}}$$

$$= \frac{2\pi}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}\left(k \frac{2\pi}{a}\right) \delta_{k \frac{2\pi}{a}}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{t}_{ka}(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik \frac{2\pi}{a} x}$$

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{t}_{ka}(\mu) \right)^\wedge = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \sqrt{2\pi} \delta_{k \frac{2\pi}{a}}$$

Esempi di calcoli di serie di Fourier e ~~Fourier~~ trasformate di Fourier di distribuzioni periodiche.

Ricordiamo la formula di somma di Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx}, \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} \right)^\wedge = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Esempio 1.

Consideriamo $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi}$ - (2π -periodica)

Si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\tau}_{2k\pi} \left(\delta_\pi \right)$$

allora otteniamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\hat{\delta}_\pi \right)(k) e^{ikx}$$

in cui

$$\left(\hat{\delta}_\pi \right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^k;$$

così si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \omega_{2k} x$$

Si ha anche

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{(2n+1)\pi} \right)^{\wedge} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_k$$

Esempio 2

Consideriamo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_{n\pi} \quad (2\pi\text{-periodico})$$

Si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_{n\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi} (\delta_0 - \delta_{\pi})$$

allora otteniamo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_{n\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_0 - \delta_{\pi})^{\wedge}(k) e^{ikx}$$

in cui

$$(\delta_0 - \delta_{\pi})^{\wedge}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-ik\pi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - (-1)^k);$$

anzi si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_{n\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - (-1)^k) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i(2k+1)x}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{(2k-1)x}$$

f: ha anche

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_{k\pi} \right)^\wedge = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(2k+1)\pi}$$

Esempio 3

Consideriamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi} \quad (\pi\text{-periodica})$$

f: ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\tau}_{k\pi}(\delta),$$

allora otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi}(\delta/x) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_A)^\wedge(k) e^{ik \frac{2\pi}{\pi} x} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2kx} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2kx. \end{aligned}$$

f: ha anche

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi} \right)^\wedge = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k}$$

Esempio 4

Consideriamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_{2k\pi} \quad (4\pi\text{-periodica})$$

Si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \int_{2k\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_{k, 4\pi} (\delta_0 - \delta_{2\pi}) ,$$

allora otteniamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \int_{2k\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_0 - \delta_{2\pi})^{\wedge} \left(\frac{k}{2} \right) e^{i k/2 x}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-i 2\pi k/2} \right) e^{i k/2 x}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - (-1)^k \right) e^{i k/2 x}$$

$$= \frac{1}{2k\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i (2k+1)/2 x}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos \left(\frac{(2k+1)}{2} x \right)$$

Si ha anche

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \int_{2k\pi} \right)^{\wedge} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2k+1}{2}}$$

Esempio 5

Si è x_0 tale che $0 < x_0 < \pi$, e consideriamo

la distribuzione

$$u = \delta_{x_0} + \delta_{-x_0} .$$

Consideriamo la periodizzazione, con periodo 2π , di

$$u: \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{2k\pi} (\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}).$$

Il suo sviluppo in serie di Fourier è dato da

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{2k\pi} (\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{ikx};$$

si ha anche

$$\begin{aligned} \hat{u}(k) &= (\delta_{x_0} + \delta_{-x_0})^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-ix_0 k} + e^{ix_0 k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \cos k x_0; \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{2k\pi} (\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2 \cos k x_0 e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos k x_0 e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k x_0 \cos k x \end{aligned}$$

Esempio 6

Consideriamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{2k\pi} (\delta_{x_0} - \delta_{-x_0})$$

si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{2k\pi} (\delta_{x_0} - \delta_{-x_0}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{x_0} - \delta_{-x_0})^\wedge(k) e^{ikx}$$

per cui si ha anche

$$(\delta_{x_0} - \delta_{-x_0})^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-ix_0 k} - e^{ix_0 k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2i) \sin kx_0$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{2n\pi} (\delta_{x_0} - \delta_{-x_0}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(-2i) \sin kx_0 e^{ikx} \\ &= \frac{-i}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin kx_0 e^{ikx} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin kx_0 \sin kx \end{aligned}$$

si ha anche

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{2n\pi} (\delta_{x_0} - \delta_{-x_0}) \right)^\wedge = \frac{-i}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin kx_0 \int_k$$