

GIANNI CASSINELLI

# **ANALISI DI FOURIER**

Note per il corso di

Metodi Matematici della Fisica

del corso di laurea in Fisica

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Università di Genova



*dedicato a Francesca*



# Istruzioni per l'uso, avvertenze e ringraziamenti

Queste note contengono una parte del programma del corso di Metodi Matematici della Fisica. Il loro scopo è quello di sollevare lo studente dal compito di prendere appunti e di permettergli di concentrarsi con più attenzione sulle motivazioni, spiegazioni ed esempi che vengono forniti a lezione. In particolare, non credo che possano essere usate per uno studio indipendente, senza seguire le lezioni.

Sono convinto che non esiste una Matematica per Fisici meno rigorosa di quella per i Matematici. Ho quindi cercato di esporre gli argomenti con tutta la precisione necessaria. Spero che quello che ho scritto non smentisca le mie intenzioni.

Le dimostrazioni del Capitolo 1 e del primo paragrafo del Capitolo 2 che sono omesse possono essere trovate nel libro di S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag; questo libro può essere suggerito anche per tutti gli approfondimenti che uno studente voglia fare.

Non è di circostanza ringraziare tutti gli studenti che hanno seguito queste lezioni, che mi hanno fatto domande e suggerito (od ispirato) miglioramenti nell'esposizione e nella presentazione; non posso però non ringraziare particolarmente Beppe Bellé, non soltanto per il lavoro che ha fatto, è lui infatti che ha battuto in  $\text{\TeX}$  questi appunti, ma anche per l'entusiasmo che mi ha trasmesso nello scriverli; grazie Beppe!

Gianni Cassinelli



# Indice

<b>1</b>	<b>La teoria dell'integrazione</b>	<b>3</b>
1.1	La misura . . . . .	3
1.2	Le funzioni step e l'integrale delle funzioni step . . . . .	5
1.3	Le funzioni integrabili. L'integrale delle funzioni integrabili . . . . .	7
1.4	I teoremi di convergenza . . . . .	12
1.5	Lo spazio $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; gli spazi $L^1(\mu)$ e $L^2(\mu)$ . . . . .	20
1.6	Integrazione rispetto a misure prodotto . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Spazi di funzioni su <math>\mathbf{R}</math></b>	<b>27</b>
2.1	La misura e l'integrale di Lebesgue su $\mathbf{R}$ . . . . .	27
2.2	L'integrale di Lebesgue sugli intervalli di $\mathbf{R}$ . . . . .	30
2.3	La misura e l'integrale di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$ . . . . .	32
2.4	Spazi di funzioni su $\mathbf{R}$ . . . . .	34
2.5	Teoremi di densità per gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ . . . . .	39
2.6	Il teorema fondamentale di annullamento . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Gli integrali di Fourier su <math>L^1(\mathbf{R})</math> e <math>L^2(\mathbf{R})</math></b>	<b>55</b>
3.1	L'integrale di Fourier su $L^1(\mathbf{R})$ . . . . .	55
3.2	Gli operatori di Fourier-Plancherel su $L^2(\mathbf{R})$ . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Basi hilbertiane negli spazi <math>L^2(\Omega)</math></b>	<b>75</b>
4.1	Definizione e proprietà delle basi hilbertiane negli spazi $L^2(\Omega)$ . . . . .	75
4.2	Le basi trigonometriche . . . . .	80
4.3	Il teorema del sampling . . . . .	87
4.4	Discussione sulla convergenza della serie di Fourier . . . . .	88
4.5	Funzioni peso e polinomi ortogonali . . . . .	94
4.6	Polinomi e funzioni di Hermite . . . . .	96
4.7	I polinomi di Legendre . . . . .	100
4.8	Le armoniche sferiche . . . . .	104



# Capitolo 1

## La teoria dell'integrazione

### 1.1 La misura

**Definizione 1.1** Sia  $X$  un qualunque insieme (non vuoto) ed  $\mathcal{A}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ . Si dice che  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra se:

1.  $\mathcal{A}$  è non vuota,
2. per ogni  $A \in \mathcal{A}$ , il complemento di  $A$  in  $X$ ,  $X \setminus A$ , è anch'esso in  $\mathcal{A}$ .
3. per ogni successione  $(A_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\mathcal{A}$ , anche l'unione,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , è un elemento di  $\mathcal{A}$ .

Segue immediatamente dalla definizione che  $X$  stesso e l'insieme vuoto  $\emptyset$  appartengono necessariamente ad  $\mathcal{A}$ , e che, per ogni successione  $(A_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\mathcal{A}$ , anche l'intersezione,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , è un elemento di  $\mathcal{A}$ .

#### Esempi di $\sigma$ -algebre.

1. L'insieme  $\mathcal{P}(X)$  di tutti i sottoinsiemi di un insieme  $X$  è evidentemente una  $\sigma$ -algebra.
2. Sia  $\mathcal{E}$  una qualunque famiglia di sottoinsiemi di un insieme  $X$ ; si può mostrare che l'intersezione della famiglia delle  $\sigma$ -algebre contenenti  $\mathcal{E}$  è ancora una  $\sigma$ -algebra; è la "più piccola"  $\sigma$ -algebra (di sottoinsiemi di  $X$ ) che contiene  $\mathcal{E}$ ; viene detta la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{E}$  e viene indicata con  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ ;
3. consideriamo il caso  $X = \mathbf{R}$ , e denotiamo con  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  la  $\sigma$ -algebra generata da tutti gli insiemi aperti di  $\mathbf{R}$ ;  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  viene detta la  $\sigma$ -algebra degli **insiemi di Borel** di  $\mathbf{R}$ ; si può mostrare che  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  può essere equivalentemente definita come la  $\sigma$ -algebra generata da tutti gli intervalli aperti della forma  $]a, b[$ , con  $a, b \in \mathbf{R}$ , o chiusi, della forma  $[a, b]$ , o anche semichiusi  $[a, b[$  o  $]a, b]$ ; evidentemente ogni aperto ed ogni chiuso è elemento di  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ , ed inoltre gli insiemi formati da un solo punto, della forma  $\{x\}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , sono elementi di  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ .

**Definizione 1.2** Una coppia  $(X, \mathcal{A})$ , in cui  $X$  è un qualunque insieme (non vuoto) ed  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$ , viene detta uno **spazio misurabile**; gli elementi di  $\mathcal{A}$  vengono detti i sottoinsiemi **misurabili** di  $X$ .

**Definizione 1.3** Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile; diremo **misura positiva** un'applicazione

$$\mu(\mathcal{A} \rightarrow [0, \infty])$$

tale che

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. se  $(A_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{A}$  tale che  $A_i \cap A_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ , allora

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La tripla  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  viene detta uno **spazio dotato di misura**;  $\mu$  viene detta **finita** se  $\mu(X) < +\infty$ ;  $\mu$  viene detta  **$\sigma$ -finita** se  $X$  è scrivibile come un unione numerabile,  $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ , di insiemi misurabili, tali che  $\mu(A_n) < +\infty$ .

### Proprietà delle misure positive.

1. Se  $A, B \in \mathcal{A}$  ed  $A \subseteq B$  allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;
2. se  $(A_n)_{n \geq 1}$  è una successione qualunque di elementi di  $\mathcal{A}$  allora

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

3. se  $(A_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{A}$  tale che  $A_n \subseteq A_{n+1}$  per ogni  $n$ , allora

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n);$$

se  $(A_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{A}$ , tale che  $A_n \supseteq A_{n+1}$  per ogni  $n$ , e  $\mu(A_1) < +\infty$ , allora si ha

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

### Esempi di misure positive.

1. Consideriamo un insieme  $X$  e la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{P}(X)$ . Se  $A \in \mathcal{P}(X)$  definiamo

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito;} \end{cases}$$

tale misura viene detta "counting"; la misura counting è  $\sigma$ -finita se e solo se  $X$  è numerabile;

2. sia  $(X, \mathcal{A})$  un qualunque spazio misurabile, ed  $x_0$  un qualunque elemento di  $X$ ; se  $A \in \mathcal{A}$  poniamo

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A; \end{cases}$$

$\delta_{x_0}$  così definita viene detta la **misura di Dirac** nel punto  $x_0$ ;  $\delta_{x_0}$  è una misura finita;

3. consideriamo lo spazio misurabile  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ ; per ogni  $]a, b[ \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , definiamo

$$\mu(]a, b[) = b - a$$

si può mostrare che  $\mu$  si estende **univocamente** ad una misura positiva su  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  che viene detta la **misura di Lebesgue** sui Borel di  $\mathbf{R}$ ; è facile vedere che la misura di Lebesgue degli insiemi della forma  $\{x\}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , è nulla; quindi ogni sottoinsieme numerabile di  $\mathbf{R}$  ha misura nulla; è chiaro che la misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  è  $\sigma$ -finita.

**Definizione 1.4** Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un qualunque spazio dotato di misura, ed  $E$  un qualunque sottoinsieme di  $X$ , non necessariamente elemento di  $\mathcal{A}$ ; diremo che  $E$  è **trascurabile** (rispetto alla misura  $\mu$ ; se è necessario si precisa:  $\mu$ -trascurabile) se esiste un insieme misurabile  $A \in \mathcal{A}$ , tale che

$$E \subset A \quad e \quad \mu(A) = 0;$$

evidentemente, ogni sottoinsieme di un insieme trascurabile è trascurabile ed ogni **unione numerabile** di insiemi trascurabili è trascurabile. Si dice che una proprietà  $P(x)$ , che dipende dal punto  $x \in X$ , è verificata **quasi ovunque**, o **per quasi ogni**  $x$ , se è verificata per tutti gli  $x \in X$  eccetto che per un insieme trascurabile.

## 1.2 Le funzioni step e l'integrale delle funzioni step

In tutto il seguito  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  denoterà, senza ulteriori specificazioni, uno spazio dotato di misura.

**Definizione 1.5** Una funzione

$$f(X \rightarrow \mathbf{C})$$

viene detta una funzione **step** quando  $f$  può essere espressa nella forma

$$f = \sum_{i=1}^r y_i \chi_{A_i},$$

in cui  $y_i \in \mathbf{C}$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $A_i \in \mathcal{A}$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $A_i \cap A_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ , e se  $y_i \neq 0$  allora deve essere  $\mu(A_i) < +\infty$ . L'insieme delle funzioni  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$  che sono step verrà indicato con  $\text{St}(\mu)$ .

**Proprietà delle funzioni step.**

1.  $\text{St}(\mu)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ ;
2. se  $f \in \text{St}(\mu)$  anche  $|f| \in \text{St}(\mu)$ ;
3. se  $f, g \in \text{St}(\mu)$  anche  $f \cdot g \in \text{St}(\mu)$ ; in altre parole  $\text{St}(\mu)$  è un'algebra su  $\mathbf{C}$ .

**Definizione 1.6** Supponiamo  $f \in \text{St}(\mu)$ ; si definisce l'**integrale di  $f$  rispetto alla misura  $\mu$**  come

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{i=1}^r \mu(A_i) f(A_i)$$

in cui  $f(A_i)$  indica il valore costante di  $f$  su  $A_i$ ; notiamo che se  $f(A_i) \neq 0$ ,  $\mu(A_i)$  è finita, per definizione di funzione step; **conveniamo** che se  $f(A_i) = 0$ ,  $\mu(A_i) \cdot f(A_i) = 0$  anche se  $\mu(A_i) = +\infty$ . Se  $A \in \mathcal{A}$  e  $f \in \text{St}(\mu)$  definiamo

$$f_A = f \cdot \chi_A;$$

$f_A \in \text{St}(\mu)$  anch'essa e definiamo l'**integrale di  $f$  su  $A$**  come

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f_A \, d\mu.$$

È facile verificare che l'integrale di  $f$  **non** dipende dalla rappresentazione di  $f$  scelta, ma soltanto da  $f$  stessa. Useremo, per semplicità di notazione, la scrittura  $\int_X f$  o anche  $\int f$ , invece di  $\int_X f \, d\mu$ , quando non c'è possibilità di ambiguità su  $\mu$  e su  $X$ .

### Proprietà dell'integrale delle funzioni step.

1. L'integrale è una forma lineare

$$f \mapsto \int f \, d\mu : \text{St}(\mu) \rightarrow \mathbf{C}$$

sullo spazio vettoriale delle funzioni step;

2. se  $A, B \in \mathcal{A}$  sono disgiunti

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f,$$

ciò è chiaro dalla linearità e dal fatto che, se  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ ;

3. se  $f$  e  $g$  sono a valori **reali** e  $f \leq g$  quasi ovunque, allora si ha

$$\int f \leq \int g;$$

equivalentemente, se  $f \geq 0$  quasi ovunque, allora

$$\int f \geq 0;$$

4. se  $f \geq 0$  e  $A \subseteq B$  ( $A, B \in \mathcal{A}$ ) allora

$$\int_A f \leq \int_B f;$$

5.  $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|;$

6. per ogni  $f \in \text{St}(\mu)$ , poniamo

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu,$$

allora  $\|\cdot\|_1$  è una seminorma su  $\text{St}(\mu)$ , ed inoltre  $\|f\|_1 = 0$  se e solo se  $f = 0$  quasi ovunque.

**Definizione 1.7** Se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $\text{St}(\mu)$ , diremo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  è **di Cauchy** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero  $N_\varepsilon$  tale che per ogni  $n, p \geq N_\varepsilon$  si abbia  $\|f_n - f_p\|_1 < \varepsilon$ .

## 1.3 Le funzioni integrabili. L'integrale delle funzioni integrabili

**Definizione 1.8** Denotiamo con  $\mathcal{L}^1(\mu)$  l'insieme delle funzioni  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$  tali che esiste una successione di Cauchy di funzioni step che converge ad  $f$  quasi ovunque (diremo, nel seguito, che una tale successione di funzioni step **approssima**  $f$ ); le funzioni in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  vengono dette **integrabili**.

È del tutto evidente dalla definizione che  $\text{St}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ ; vogliamo estendere a  $\mathcal{L}^1(\mu)$  la definizione di integrale già data per le funzioni di  $\text{St}(\mu)$ ; per questo, è necessario stabilire due lemmi tecnici, che ammetteremo senza dimostrazione; in particolare, il primo di essi può essere considerato il lemma fondamentale dell'integrazione.

**Lemma 1.9** Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di Cauchy di funzioni step; allora esiste una sottosuccessione  $(f_{n_p})_{p \geq 1}$  che converge punto per punto quasi ovunque, e soddisfa l'ulteriore proprietà: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme misurabile  $Z$  tale che  $\mu(Z) < \varepsilon$  e che la sottosuccessione converge uniformemente al di fuori di  $Z$ .

**Lemma 1.10** Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  e  $(g_n)_{n \geq 1}$  siano due successioni di funzioni step, che approssimano la stessa funzione  $f$ ; allora i limiti seguenti esistono finiti e sono uguali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n;$$

inoltre si ha

$$\lim \int |f_n - g_n| = 0.$$

**Definizione 1.11** Supponiamo che  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una qualunque successione di funzioni step che approssima  $f$ ; il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu,$$

è finito e dipende soltanto da  $f$  e non dalla successione  $(f_n)_{n \geq 1}$ ; tale limite viene detto **l'integrale** di  $f$  (rispetto a  $\mu$ ) e viene denotato

$$\int_X f d\mu$$

(o con varianti di questa notazione); se  $A \in \mathcal{A}$  diremo che  $g(X \rightarrow \mathbf{C})$  è **integrabile su  $A$**  se  $g_A = \chi_A \cdot g$  è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; in tal caso, diremo **integrale di  $g$  su  $A$** , e lo denoteremo con

$$\int_A g d\mu,$$

l'integrale di  $g_A$ .

**Proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale.**

1.  $\mathcal{L}^1(\mu)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ ;  $\text{St}(\mu)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; l'integrale su  $\mathcal{L}^1(\mu)$  estende l'integrale già definito su  $\text{St}(\mu)$ ;

2. l'applicazione

$$f \mapsto \int f \, d\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbf{C}$$

è una forma lineare su  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; in particolare, se  $A, B \in \mathcal{A}$  sono disgiunti, per ogni  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  si ha

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu;$$

3. l'insieme delle  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tali che  $f = 0$  quasi ovunque viene denotato con  $\mathcal{N}$ ;  $\mathcal{N}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ;  $f = 0$  quasi ovunque implica che si ha

$$\int f \, d\mu = 0;$$

4. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $h = f$  quasi ovunque, allora  $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e

$$\int f \, d\mu = \int h \, d\mu;$$

5. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  ed  $A \in \mathcal{A}$ , allora  $f$  è integrabile su  $A$ ;

6. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  anche  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e si ha

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu;$$

7. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  è a valori reali, allora  $\int f \, d\mu \in \mathbf{R}$ ;

8. se  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  sono a valori reali e  $f \leq g$  quasi ovunque allora

$$\int f \leq \int g;$$

equivalentemente se  $f \geq 0$  quasi ovunque, allora

$$\int f \geq 0;$$

in altre parole, l'integrale è una forma lineare positiva.

**Definizione 1.12** Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  poniamo

$$\|f\|_1 := \int |f(x)| \, d\mu(x).$$

L'applicazione  $f \mapsto \|f\|_1$  è una seminorma su  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; infatti si ha

1.

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_1 &= \int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu = \\ &= |\alpha| \|f\|_1, \quad \text{se } \alpha \in \mathbf{C}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|f + g\|_1 &= \int |f + g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

Le nozioni di successione convergente, di successione di Cauchy e di forma lineare continua, vengono definite in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  rispetto alla seminorma  $\|\cdot\|_1$  nel modo seguente.

**Definizione 1.13** Diremo che una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  converge ad una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  nel senso della seminorma  $\|\cdot\|_1$  (o anche "in media") se si ha

$$\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n| \, d\mu \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty;$$

diremo che una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  è una successione di Cauchy (rispetto a  $\|\cdot\|_1$ , o in media) se si ha

$$\|f_n - f_p\|_1 = \int |f_n - f_p| \, d\mu \rightarrow 0 \quad \text{se } n, p \rightarrow \infty.$$

Una forma lineare  $\varphi$  su  $\mathcal{L}^1(\mu)$  viene detta continua (rispetto a  $\|\cdot\|_1$ , o in media) se esiste un numero  $k > 0$  tale che

$$|\varphi(f)| \leq k \|f\|_1, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Alcune conseguenze elementari ma importanti delle definizioni precedenti devono essere sottolineate:

1. Per la nozione di convergenza in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  **non** c'è unicità del limite: infatti, supponiamo che  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e che  $g = f$  quasi ovunque, allora si ha

$$\begin{aligned}\int |f_n - g| \, d\mu &= \int |f_n - f + (f - g)| \, d\mu \leq \\ &\leq \int |f_n - f| \, d\mu + \int |f - g| \, d\mu = \\ &= \int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

2. se  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , allora è anche di Cauchy; infatti, si ha

$$\begin{aligned}\int |f_n - f_p| \, d\mu &= \int |f_n + f - f - f_p| \, d\mu \leq \\ &\leq \int |f_n - f| \, d\mu + \int |f_p - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad \text{se } n, p \rightarrow \infty;\end{aligned}$$

3. se  $\varphi$  è una forma lineare continua su  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e se  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , allora  $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ ; infatti si ha

$$|\varphi(f) - \varphi(f_n)| = |\varphi(f - f_n)| \leq k \|f - f_n\|_1;$$

4. poiché si ha

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

ne segue che la forma lineare  $f \mapsto \int f \, d\mu$  è continua su  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ;

5. per ogni  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  esiste una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\text{St}(\mu)$  tale che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu);$$

questa proprietà viene descritta dicendo che  $\text{St}(\mu)$  è denso in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  (rispetto alla seminorma  $\|\cdot\|_1$ ); per mostrare questo fatto, supponiamo  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; allora, per definizione di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , esiste una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\text{St}(\mu)$  che approssima  $f$ ; denotiamo con  $p$  un intero fissato, e consideriamo la successione

$$(|f_n - f_p|)_{n \geq 1};$$

questa successione è composta di elementi di  $\text{St}(\mu)$ , converge a  $|f - f_p|$  quasi ovunque (infatti si ha

$$\left| |f - f_p| - |f_n - f_p| \right| \leq |f - f_p - f_n + f_p| = |f - f_n| < \varepsilon$$

per quasi ogni  $x$ , se  $n$  è sufficientemente grande), ed è di Cauchy (infatti si ha

$$\begin{aligned} \left\| |f_n - f_p| - |f_m - f_p| \right\|_1 &= \int \left| |f_n - f_p| - |f_m - f_p| \right| \, d\mu \leq \\ &\leq \int |f_n - f_m| \, d\mu = \|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

se  $n$  ed  $m$  sono sufficientemente grandi); allora  $(|f_n - f_p|)_{n \geq 1}$  è una successione che approssima  $|f - f_p|$ , e, per definizione, si ha

$$\int |f - f_p| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_p| \, d\mu,$$

cioè

$$\|f - f_p\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_p\|_1;$$

poiché la successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy, si ha che

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f - f_p\|_1 = \lim_{n, p \rightarrow \infty} \|f_n - f_p\|_1 = 0$$

cioè  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

La seguente è la proprietà fondamentale dello spazio  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Proposizione 1.14 (Teorema di Fischer-Riesz)** *Ogni successione di Cauchy di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  converge (nel senso della seminorma  $\|\cdot\|_1$ ) ad un elemento di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; in altre parole  $\mathcal{L}^1(\mu)$  è completo, rispetto alla seminorma  $\|\cdot\|_1$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $(f_n)_{n \geq 1}$  una successione di Cauchy in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; poiché  $\text{St}(\mu)$  è denso in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , per ogni  $n \geq 1$  esiste un  $g_n \in \text{St}(\mu)$  tale che

$$\|f_n - g_n\|_1 < \frac{1}{n};$$

la successione  $(g_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy; infatti si ha

$$\|g_n - g_m\|_1 \leq \|g_n - f_n\|_1 + \|f_n - f_m\|_1 + \|f_m - g_m\|_1;$$

per  $n, m$  sufficientemente grandi i tre addendi al membro di destra sono più piccoli di  $\varepsilon$ , e ciò prova che  $(g_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy; per il Lemma fondamentale dell'integrazione (Lemma 1.9) sappiamo che esiste una sottosuccessione  $(g_{n_p})_{p \geq 1}$  tale che

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g_{n_p}(x)$$

esiste finito per quasi ogni  $x$ ; definiamo una funzione  $f$  ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{p \rightarrow \infty} g_{n_p}(x) & \text{quando il limite esiste finito} \\ z & (z \in \mathbf{C} \text{ arbitrario}) \text{ per gli altri } x; \end{cases}$$

la funzione  $f$  così definita è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  (infatti la successione  $(g_{n_p})_{p \geq 1}$  è essa stessa di Cauchy, quindi  $f$  è limite punto per punto quasi ovunque di una successione di Cauchy di funzioni step); si ha

$$\|f - f_{n_p}\|_1 \leq \|f_{n_p} - g_{n_p}\|_1 + \|g_{n_p} - f\|_1 < 2\varepsilon$$

se  $n_p$  è sufficientemente grande, quindi  $f_{n_p} \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  se  $p \rightarrow \infty$ ; poiché  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy, ciò implica che  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  se  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

La proposizione seguente, estremamente utile, estende alle funzioni di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  il risultato enunciato nel Lemma fondamentale dell'integrazione; la sua dimostrazione viene omessa.

**Proposizione 1.15** *Sia  $(f_n)_{n \geq 1}$  una successione (di Cauchy) di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , convergente, nel senso della seminorma  $\|\cdot\|_1$ , ad una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; allora esiste una sottosuccessione  $(f_{n_p})_{p \geq 1}$ , estratta dalla precedente che converge a  $f$  punto per punto quasi ovunque; inoltre ha la proprietà seguente: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme  $Z$  misurabile, di misura  $\mu(Z) \leq \varepsilon$ , tale che su  $X \setminus Z$  la convergenza ad  $f$  della successione  $(f_{n_p})_{p \geq 1}$  sia uniforme.*

**Corollario 1.16** *Se  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$ , sono equivalenti tra loro*

1.  $f = 0$  quasi ovunque ( $f \in \mathcal{N}$ )
2.  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $\|f\|_1 = 0$ .

**Dimostrazione.**  $1 \implies 2$  è del tutto ovvia.  $2 \implies 1$ : se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $\|f\|_1 = 0$  la successione  $(0, 0, \dots, 0, \dots)$  è di Cauchy e converge a  $f$ , nel senso della seminorma  $\|\cdot\|_1$ ; allora, per la proposizione precedente, esiste una sottosuccessione che converge ad  $f$  quasi ovunque; allora  $f = 0$  quasi ovunque.  $\square$

**Corollario 1.17** *Se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di Cauchy di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , tale che esiste una funzione  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$ , con la proprietà  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  per quasi ogni  $x$ , allora  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $f_n \rightarrow f$  rispetto a  $\|\cdot\|_1$ .*

**Dimostrazione.** La successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  è convergente, nel senso di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , ad una qualche  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  (per il Teorema di Fischer-Riesz); per la proposizione precedente, una sottosuccessione converge a  $g$  quasi ovunque; tale sottosuccessione deve convergere anche a  $f$  quasi ovunque, quindi  $f = g$  quasi ovunque, ed anche  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; inoltre si ha  $|f_n - f| = |f_n - g|$  quasi ovunque, e quindi  $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1$  e la successione considerata converge a  $f$  nel senso della seminorma  $\|\cdot\|_1$ .  $\square$

## 1.4 I teoremi di convergenza

**Teorema 1.18 (della convergenza monotona)** *Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di funzioni di  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , a valori reali, monotona, e tale che esista un  $k > 0$  con la proprietà*

$$\left| \int f_n \, d\mu \right| \leq k, \quad \forall n \geq 1;$$

*allora  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e converge, sia in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  che quasi ovunque, ad una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; inoltre si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

**Dimostrazione.** Supponiamo, per fissare le idee, che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia crescente; se esiste un  $k > 0$  tale che

$$\left| \int f_n \, d\mu \right| \leq k,$$

la successione  $(\int f_n \, d\mu)_{n \geq 1}$  è limitata e monotona e quindi convergente; quindi è di Cauchy in  $\mathbf{R}$ ; se  $n \geq m \geq 1$ , si ha

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int |f_n - f_m| \, d\mu = \int f_n \, d\mu - \int f_m \, d\mu < \varepsilon$$

se  $n$  e  $m$  sono sufficientemente grandi; ciò mostra che  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_1$ ; allora  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  ad una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; inoltre esiste una sottosuccessione di  $(f_n)_{n \geq 1}$  che converge ad  $f$  quasi ovunque; poiché  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  è monotona per ogni  $x$ , ne segue che  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  converge ad  $f(x)$  per quasi ogni  $x$ ; se  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  l'ultima affermazione del teorema è banale.  $\square$

Per il teorema seguente, ricordiamo alcune definizioni: se  $(a_n)_{n \geq 1}$  è una successione di numeri reali, si definiscono

$$\limsup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

$$\liminf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k;$$

è noto che, qualunque sia la successione  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $\limsup$  e  $\liminf$  esistono sempre, **finiti** o **infiniti**; se  $(a_n)_{n \geq 1}$  è convergente allora  $\limsup a_n$  e  $\liminf a_n$  esistono entrambi finiti e sono uguali a  $\lim a_n$ .

**Teorema 1.19 (lemma di Fatou)** *Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di funzioni  $\mathcal{L}^1(\mu)$  a valori reali positivi; supponiamo che*

$$\liminf \|f_n\|_1$$

*esista finito (e sia quindi un numero reale non negativo); allora  $\liminf_n f_n(x)$  esiste finito per quasi ogni  $x$ ; la funzione  $\liminf f_n$ , definita ponendo*

$$(\liminf f_n)(x) = \begin{cases} \liminf_n f_n(x) & \text{se esiste finito} \\ q & \text{altrove (q fissato)} \end{cases}$$

*è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e si ha*

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

**Dimostrazione.** Poniamo, per ogni  $n$ ,

$$g_{n,p} = \inf(f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+p}), \quad p \geq 0,$$

$$g_n = \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) = \inf_p g_{n,p} = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{n,p};$$

per ogni  $p \geq 0$  le funzioni  $g_{n,p}$  sono non negative, la successione  $(g_{n,p})_{p \geq 0}$  è decrescente, inoltre ogni  $g_{n,p}$  è integrabile<sup>1</sup> e si ha

$$0 \leq \int g_{n,p} = \int \inf(f_n, \dots, f_{n+p}) \leq \int f_n, \quad \forall p \geq 0;$$

allora si può applicare alla successione  $(g_{n,p})_{p \geq 0}$  il teorema della convergenza monotona e si ha che

$$g_n = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{n,p} \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$0 \leq \int g_n = \inf_p \int g_{n,p} \leq \inf_{m \geq n} \int f_m \leq \liminf \int f_m;$$

la successione  $(g_n)_{n \geq 1}$  è una successione crescente di elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e, per l'ultima disuguaglianza scritta, ad essa si può applicare il teorema della convergenza monotona, ottenendo che

$$\sup_n g_n = \liminf f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

ed inoltre

$$\int \liminf f_n = \int \sup_n g_n = \sup \int g_n \leq \sup_n \inf_{m \geq n} \int f_m,$$

e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

---

<sup>1</sup>per convincersi che l'inf o il sup di una famiglia finita di funzioni integrabili è integrabile, è sufficiente scrivere

$$\inf(f, g) = 1/2(f + g - |f - g|)$$

$$\sup(f, g) = 1/2(f + g + |f - g|)$$

Il lemma di Fatou è usato soprattutto nella situazione semplice in cui le funzioni  $f_n$  sono integrabili e la successione  $(\int f_n d\mu)_{n \geq 1}$  è limitata: in tal caso  $\liminf_n f_n$  è una funzione integrabile; in particolare se la successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge punto per punto  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  è integrabile (in tal caso, però, **non** si può affermare che

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

almeno in generale).

**Teorema 1.20 (della convergenza dominata)** *Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di funzioni di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  tale che esiste una funzione  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$ , con le proprietà*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in X$$

*supponiamo inoltre che esista una funzione  $g$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , a valori reali positivi, tale che, per ogni  $n \geq 1$ ,*

$$|f_n| \leq g \quad \text{quasi ovunque;}$$

*allora  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e*

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

**Dimostrazione.** Poniamo

$$g_{n,p} = \sup_{\substack{n \leq m \\ r \leq n+p}} |f_m - f_r|$$

$$g_n = \sup_p g_{n,p} = \sup_{\substack{m \geq n \\ r \geq n}} |f_m - f_r|$$

allora, per ogni  $n$  e  $p$ ,  $g_{n,p}$  è una funzione reale integrabile tale che  $0 \leq g_{n,p} \leq 2g$ ; la successione

$$(g_{n,p})_{p \geq 0}$$

è crescente e

$$\left| \int g_{n,p} d\mu \right| \leq 2 \int g d\mu$$

per il teorema della convergenza monotona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = 0;$$

la definizione stessa di  $g_n$  mostra allora che la successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy; ne segue che  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e che  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .  $\square$

Per poter studiare alcune importanti conseguenze del fondamentale teorema precedente, è necessario premettere alcune definizioni che potrebbero apparire arbitrarie ed immotivate.

**Definizione 1.21** Se  $f$  è una funzione a valori reali,

$$f(X \rightarrow \mathbf{R}),$$

diremo che  $f$  è **misurabile** se si ha

$$f^{-1}(E) := \{x \in X: f(x) \in E\} \in \mathcal{A}, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{R});$$

se  $f$  è una funzione a valori complessi

$$f(X \rightarrow \mathbf{C}),$$

si può univocamente scrivere  $f = u + iv$ , in cui  $u$  e  $v$  sono funzioni a valori reali; diremo allora che  $f$  è **misurabile** quando lo sono  $u$  e  $v$ . Denoteremo con  $\mathcal{M}$  l'insieme di tutte le funzioni definite in  $X$ , a valori complessi e misurabili. Deve essere sottolineato che la misurabilità di una funzione dipende **solo** dalla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ , e **non** dalla misura  $\mu$  definita su  $\mathcal{A}$ . Una funzione

$$f(X \rightarrow \mathbf{C})$$

viene detta  **$\mu$ -misurabile** se è il limite punto per punto quasi ovunque di una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di funzioni di  $\text{St}(\mu)$ ; in altre parole, se si ha

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

per quasi ogni  $x \in X$ , e  $f_n \in \text{St}(\mu) \forall n$ . Denoteremo con  $\mathcal{M}(\mu)$  l'insieme di tutte le funzioni definite in  $X$ , a valori complessi e  $\mu$ -misurabili. Contrariamente alla nozione di misurabilità, la  $\mu$ -misurabilità di una funzione **dipende** da  $\mu$ .

### Proprietà delle funzioni misurabili e $\mu$ -misurabili.

1.  $\mathcal{M}$  è un'algebra su  $\mathbf{C}$ ; se  $f \in \mathcal{M}$  anche  $|f| \in \mathcal{M}$ ;
2. se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{M}$  e se  $f_n \rightarrow f$  punto per punto (per **ogni**  $x \in X$ ) allora  $f \in \mathcal{M}$ ;
3.  $\mathcal{M}(\mu)$  è un'algebra su  $\mathbf{C}$ ; se  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  anche  $|f| \in \mathcal{M}(\mu)$ ;
4. se  $f \in \mathcal{M}$  e  $g \in \mathcal{M}(\mu)$  allora anche  $fg \in \mathcal{M}(\mu)$ ;
5.  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  se e solo se **entrambe** le condizioni seguenti sono soddisfatte:
  - (a)  $f$  si annulla al di fuori di un insieme di misura  $\sigma$ -finita,
  - (b) esiste  $g \in \mathcal{M}$  tale che  $f = g$  quasi ovunque;

in particolare, se  $\mu$  è una misura  $\sigma$ -finita, le funzioni  $\mu$ -misurabili sono le funzioni uguali quasi ovunque alle funzioni misurabili (si noti che, in generale, **non** c'è alcuna inclusione tra  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}(\mu)$ ; se  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, si ha  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ );

6. se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di funzioni in  $\mathcal{M}(\mu)$  e se  $f_n \rightarrow f$  **quasi ovunque**, allora  $f \in \mathcal{M}(\mu)$ ;

7. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  allora  $f$  può essere ridefinita su un insieme di misura nulla in modo da renderla misurabile; infatti, se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  allora esiste una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \text{St}(\mu) \forall n$ , ed un insieme  $Z \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(Z) = 0$ , tali che

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{se } n \rightarrow \infty, \quad \forall x \in X \setminus Z;$$

per ogni  $n \geq 1$  definiamo

$$\psi_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{su } X \setminus Z \\ 0 & \text{su } Z; \end{cases}$$

allora  $\psi_n \in \mathcal{M}$  per ogni  $n$ , e la successione  $(\psi_n(x))_{n \geq 1}$  è convergente (in  $\mathbf{C}$ ) per ogni  $x$ ; il limite della successione definisce una funzione  $g \in \mathcal{M}$

$$\psi_n(x) \rightarrow g(x) \quad \text{se } n \rightarrow \infty, \quad \forall x \in X,$$

e si ha  $g = f$  eccetto che sui punti di  $Z$ .

**Teorema 1.22** *Una funzione  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$  è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  se e solo se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte*

a)  $f \in \mathcal{M}(\mu)$

b) esiste  $g \geq 0$ ,  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , tale che  $|f| \leq g$  quasi ovunque.

**Dimostrazione.** Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $f$  è per definizione limite quasi ovunque di funzioni di  $\text{St}(\mu)$ , quindi  $f \in \mathcal{M}(\mu)$ ; inoltre  $|f|$  stessa è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ . Inversamente, supponiamo  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  e che esista  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $g \geq 0$ , tale che  $|f| \leq g$  quasi ovunque. Senza perdere in generalità possiamo supporre  $|f| \leq g$  ovunque, poiché il fatto di modificare  $f$  su un insieme trascurabile non ne modifica l'eventuale integrabilità. Poiché  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  esiste una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ,  $\varphi_n \in \text{St}(\mu)$ , che converge a  $f$  quasi ovunque. Per ogni  $n \geq 1$  ed ogni  $x \in X$ , poniamo

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{se } |\varphi_n(x)| \leq 2g(x) \\ 0 & \text{se } |\varphi_n(x)| > 2g(x); \end{cases}$$

per ogni  $n \geq 1$ ,  $\psi_n \in \text{St}(\mu)$  e  $|\psi_n| \leq 2g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; per ogni  $x$  tale che  $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$  è anche

$$\psi_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

(infatti: se  $g(x) = 0$ ,  $|f(x)| = 0$ , quindi  $f(x) = 0$  e  $\psi_n(x) = 0$  per ogni  $n \geq 1$ ; se  $g(x) \neq 0$ , poiché  $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$  e  $|f(x)| \leq g(x)$ , esiste  $N \geq 0$  tale che per ogni  $n \geq N$   $|\varphi_n(x)| \leq 2g(x)$ , quindi  $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$ ); allora la successione  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  converge a  $f$  quasi ovunque, e ad essa è applicabile il teorema della convergenza dominata; ciò mostra che  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .  $\square$

**Teorema 1.23** *Supponiamo che sia  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e che  $g \in \mathcal{M}$  sia tale che esista  $k > 0$  con la proprietà*

$$|g(x)| \leq k \quad \forall x \in X;$$

allora  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , ed inoltre

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \sup_x |g(x)| \int |f| \, d\mu.$$

**Dimostrazione.** Per una proprietà delle funzioni misurabili e  $\mu$ -misurabili, si ha  $f \cdot g \in \mathcal{M}(\mu)$ ; inoltre si ha

$$|fg| \leq k|f| \in \mathcal{L}^1(\mu);$$

quindi  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; infine

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \int |gf| \, d\mu \leq k \int |f| \, d\mu. \quad \square$$

**Teorema 1.24** *Supponiamo che sia  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e che  $S$  sia un sottoinsieme chiuso di  $\mathbf{C}$  inoltre supponiamo che per ogni  $A \in \mathcal{A}$ , tale che si abbia  $\mu(A) \neq 0$ , sia*

$$\frac{1}{\mu(A)} \cdot \int_A f \, d\mu \in S$$

(con la convenzione  $1/\mu(A) = 0$  se  $\mu(A) = +\infty$ ), allora  $f(x) \in S$  per quasi ogni  $x$ .

**Dimostrazione.** Denotiamo con

$$(z_m: m \text{ intero}, m \geq 1)$$

una famiglia (numerabile) di numeri complessi, densa in  $\mathbf{C} \setminus S$  (tale famiglia esiste poiché  $\mathbf{C} \setminus S$  è aperto); poiché  $S$  è chiuso, per ogni  $m \geq 1$  esiste

$$B_m = \{z \in \mathbf{C}: |z - z_m| < r_m, \quad r_m > 0\},$$

di centro  $z_m$  e raggio  $r_m$  opportuno, che non interseca  $S$ ; poiché  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  esistono

- a) una famiglia numerabile ( $E_n: n \geq 1$ ) di sottoinsiemi misurabili di  $X$ , di misura finita, tali che  $f$  si annulla al di fuori di  $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,
- b) un sottoinsieme trascurabile,  $Z$ , di  $X$ , tale che

$$f^{-1}(B) \cap (X \setminus Z) \in \mathcal{A}, \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{B}(\mathbf{C});$$

in particolare si avrà

$$Z_{m,n} := f^{-1}(B_m) \cap E_n \cap (X \setminus Z) \in \mathcal{A};$$

poiché si ha  $\cup_{m=1}^{\infty} B_m \supseteq \mathbf{C} \setminus S$ , se ne deduce

$$\cup_{n,m=1}^{\infty} Z_{m,n} \supseteq f^{-1}(\mathbf{C} \setminus S) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap (X \setminus Z);$$

tra un momento mostreremo che  $\mu(Z_{m,n}) = 0$  per ogni  $m$  e  $n$ ; ciò permette di dedurre

$$\mu \left( f^{-1}(\mathbf{C} \setminus S) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap (X \setminus Z) \right) = 0;$$

poiché  $Z$  è trascurabile ciò mostra che

$$f(x) \in S \quad \text{per quasi ogni } x \in \cup_{n=1}^{\infty} E_n;$$

ciò conclude la dimostrazione, infatti se è

$$\mu(X \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n) \neq 0$$

si ha che  $0 \in S$ , per l'ipotesi del teorema

$$\frac{1}{\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)} \int_{x \in \bigcup_n E_n} f \, d\mu = 0 \in S;$$

siamo quindi ricondotti a mostrare che  $\mu(Z_{m,n}) = 0$  per ogni  $m, n$ ; supponiamo per assurdo  $\mu(Z_{m,n}) \neq 0$ , allora si avrebbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Z_{m,n})} \int_{Z_{m,n}} f \, d\mu &= \alpha \in S \\ \alpha - z_m &= \frac{1}{\mu(Z_{m,n})} \int_{Z_{m,n}} f \, d\mu - z_m = \frac{1}{\mu(Z_{m,n})} \int_{Z_{m,n}} (f - z_m) \, d\mu, \end{aligned}$$

per cui

$$|\alpha - z_m| \leq \frac{1}{\mu(Z_{m,n})} \int_{Z_{m,n}} |f - z_m| \, d\mu < r_m$$

poiché  $|f(x) - z_m| < r_m$  per ogni  $x \in Z_{m,n}$ ; ciò implica  $\alpha \in B_m$  e quindi  $\alpha \notin S$ , cioè una contraddizione.  $\square$

Il teorema precedente ha la seguente ovvia ma **importantissima** conseguenza.

**Corollario 1.25** *Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e si ha*

$$\int_A f \, d\mu = 0$$

*per ogni  $A \in \mathcal{A}$  tale che  $\mu(A) \neq 0$  allora*

$$f = 0 \quad \text{quasi ovunque.}$$

Infine, consideriamo come ultima applicazione dei teoremi di convergenza, il problema della continuità e derivabilità di un integrale dipendente da un parametro. Consideriamo una funzione

$$f(X \times A \rightarrow \mathbf{C})$$

in cui  $A$  è un aperto in  $\mathbf{R}$  (più in generale, in  $\mathbf{R}^n$ ); supponiamo che, per ogni  $t \in A$ , la funzione

$$x \mapsto f(x, t)$$

sia  $\mu$ -integrabile; denotiamo con

$$F(t) = \int f(x, t) \, d\mu(x);$$

ci poniamo il problema della continuità e derivabilità di  $F$ .

**Teorema 1.26** *Supponiamo che  $A$  sia un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}$ ; supponiamo che*

$$f(X \times A \rightarrow \mathbf{C})$$

*abbia le proprietà*

1. per ogni  $t \in A$  la funzione  $(x \mapsto f(x, t)) \in \mathcal{L}^1(\mu)$
2. per ogni  $x \in X$  la funzione  $(t \mapsto f(x, t))$  sia continua nell'aperto  $A$
3. esiste una funzione  $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tale che

$$|f(x, t)| \leq |h(x)| \quad \forall t \in A, \forall x \in X;$$

in queste ipotesi la funzione

$$t \mapsto F(t) = \int f(x, t) \, d\mu(x)$$

è continua in  $A$ .

**Dimostrazione.** È sufficiente dimostrare che, per ogni successione  $(t_n)_{n \geq 1}$  convergente a  $t \in A$ , l'integrale  $\int f(x, t_n) \, d\mu(x)$  tende a  $\int f(x, t) \, d\mu(x)$ ; questo fatto segue immediatamente dal teorema della convergenza dominata.  $\square$

**Teorema 1.27** Supponiamo che  $A \subseteq \mathbf{R}$  sia aperto, e che

$$f(X \times A \rightarrow \mathbf{C})$$

abbia le proprietà

1. per ogni  $t \in A$  la funzione  $(x \mapsto f(x, t)) \in \mathcal{L}^1(\mu)$
2. per ogni  $x \in X$  la funzione  $(t \mapsto f(x, t))$  sia derivabile
3. esiste una funzione  $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tale che

$$|\partial_t f(x, t)| \leq |h(x)| \quad \forall t \in A, \forall x \in X;$$

in queste ipotesi la funzione

$$t \mapsto F(t) = \int f(x, t) \, d\mu(x)$$

è derivabile, per ogni  $t \in A$  la funzione

$$(x \mapsto \partial_t f(x, t)) \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

ed inoltre

$$F'(t) = \int \partial_t f(x, t) \, d\mu(x).$$

**Dimostrazione.** Denotiamo con  $(t_n)_{n \geq 1}$  una successione di punti di  $A$ , tale che  $t_n \rightarrow t \in A$ ; poniamo

$$g_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t};$$

per ogni  $x$ ,  $g_n(x)$  tende a  $\partial_t f(x, t)$ ; d'altra parte, per il teorema di Lagrange, si ha

$$g_n(x) = \partial_t f(x, s)$$

in cui  $s \in ]t_0, t[$ ; quindi

$$|g_n(x)| \leq |h(x)|$$

per ogni  $n$ ; allora, per il teorema della convergenza dominata, la funzione  $(x \mapsto \partial_t f(x, t))$  è integrabile e si ha

$$\int \partial_t f(x, t) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t};$$

poiché questo è vero per ogni successione  $(t_n)_{n \geq 1}$  tale che  $t_n \rightarrow t$ , se ne deduce che  $F'(t)$  esiste e che

$$F'(t) = \int \partial_t f(x, t) d\mu(x). \quad \square$$

## 1.5 Lo spazio $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; gli spazi $L^1(\mu)$ e $L^2(\mu)$

**Definizione 1.28** Denoteremo con  $\mathcal{L}^2(\mu)$  l'insieme delle funzioni

$$f(X \rightarrow \mathbf{C})$$

tali che

1.  $f \in \mathcal{M}(\mu)$
2. la funzione  $(x \mapsto \overline{f(x)}f(x))$  è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$

(deve essere sottolineato che esistono funzioni  $f$  tali che  $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$  ma  $f \notin \mathcal{M}(\mu)$ ); se  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  diremo che  $f$  è “a quadrato integrabile”.

**Teorema 1.29** Supponiamo che  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ; allora si ha

1.  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,
2. si ha la disuguaglianza

$$\int |f| \cdot |g| d\mu \leq \left( \int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

(che viene detta “disuguaglianza di Hölder”)

3.  $|f + g|^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e si ha la disuguaglianza

$$\int |f + g|^2 d\mu \leq \left[ \left( \int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

(che viene detta “disuguaglianza di Minkowski”)

**Dimostrazione.**

1. Si ha  $|fg| \in \mathcal{M}(\mu)$ , inoltre

$$(|f| - |g|)^2 \geq 0 \Rightarrow |f|^2 + |g|^2 - 2|fg| \geq 0 \Rightarrow |fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) \in \mathcal{L}^1(\mu);$$

ciò mostra che  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ;

2. dal punto precedente si ottiene la disuguaglianza

$$\int |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{2} \int |f|^2 \, d\mu + \frac{1}{2} \int |g|^2 \, d\mu;$$

sostituendo in questa disuguaglianza  $f$  con  $\lambda f$ , in cui  $\lambda > 0$ , si ha

$$\int |fg| \, d\mu \leq \frac{\lambda}{2} \int |f|^2 \, d\mu + \frac{1}{2\lambda} \int |g|^2 \, d\mu;$$

quest'ultima disuguaglianza deve essere soddisfatta per ogni  $\lambda > 0$ ; scegliendo  $\lambda = (\int |f|^2 \, d\mu)^{-\frac{1}{2}} (\int |g|^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}}$ , in modo da minimizzare il membro di destra, si ottiene

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left( \int |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}};$$

3. evidentemente  $|f + g|^2 \in \mathcal{M}(\mu)$ , inoltre

$$|f + g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2|fg| \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

per quanto mostrato in 1; ciò mostra che  $|f + g|^2$  è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; inoltre, dalla disuguaglianza precedente si ha, utilizzando il punto 2,

$$\begin{aligned} \int |f + g|^2 \, d\mu &\leq \int |f|^2 \, d\mu + \int |g|^2 \, d\mu + 2 \int |fg| \, d\mu \leq \\ &\leq \int |f|^2 \, d\mu + \int |g|^2 \, d\mu + 2 \left( \int |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ \left( \int |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \quad \square \end{aligned}$$

Il teorema precedente ha delle conseguenze **importanti**:

1.  $\mathcal{L}^2(\mu)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ ;
2. se  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  poniamo

$$\|f\|_2 := \left( \int |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}};$$

allora la funzione

$$f \mapsto \|f\|_2,$$

è una **seminorma** su  $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; infatti si ha

- a)  $\|f\|_2 \geq 0$  per ogni  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ;
- b)  $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ ,  $\alpha \in \mathbf{C}$ ;
- c)  $\|f + g\|_2^2 = \int |f + g|^2 \, d\mu \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$ .

3.  $\mathcal{N}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}^2(\mu)$  e si ha

$$\|f\|_2 = 0 \iff |f|^2 = 0 \text{ quasi ovunque} \iff f = 0 \text{ quasi ovunque} \iff f \in \mathcal{N}$$

4. Se  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$  poniamo

$$(f, g) := \int \bar{f} \cdot g \, d\mu;$$

l'applicazione  $f, g \mapsto (f, g)$  ha tutte le proprietà di un prodotto scalare su  $\mathcal{L}^2(\mu)$ , ad esclusione della  $(f, f) = 0 \iff f = 0$ ; in effetti

$$(f, f) = 0 \quad \text{se e solo se } f \in \mathcal{N};$$

notiamo che è

$$\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}};$$

inoltre, la disuguaglianza di Schwartz per il (quasi-) prodotto scalare  $(f, g)$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$  si scrive come

$$|(f, g)| = \left| \int \bar{f} g \, d\mu \right| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

e può essere vista come una conseguenza della disuguaglianza di Hölder;

5. se  $X$  ha misura finita, cioè se  $\mu(X) < +\infty$ , allora  $\mathcal{L}^2(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ ; infatti, in tal caso, la funzione 1, definita come

$$1(x) = 1 \quad \forall x \in X$$

è in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; allora si ha

$$f = 1 \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu);$$

la disuguaglianza di Hölder ci fornisce, inoltre

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu = \int |f| \cdot |1| \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 = \|f\|_2 \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{2}};$$

nel caso  $\mu(X) < +\infty$  si dice che la seminorma  $\|\cdot\|_2$  è **più fine** della seminorma  $\|\cdot\|_1$ , poiché vale la disuguaglianza

$$\|f\|_1 \leq k \|f\|_2 \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mu) \subseteq \mathcal{L}^1(\mu).$$

I risultati seguenti estendono a  $\mathcal{L}^2(\mu)$  proprietà analoghe già stabilite per  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Teorema 1.30** *Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di elementi di  $\mathcal{L}^2(\mu)$ , che sia di Cauchy rispetto alla seminorma  $\|\cdot\|_2$ ; allora esiste un elemento (non unico)  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  con le proprietà seguenti*

1.  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$

2. esiste una sottosuccessione  $(f_{n_p})_{p \geq 1}$  con le proprietà

(a)  $f_{n_p} \rightarrow f$  quasi ovunque

(b) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme misurabile  $Z_\varepsilon$ , con  $\mu(Z_\varepsilon) < \varepsilon$ , tale che la convergenza di questa sottosuccessione è uniforme su  $X \setminus Z_\varepsilon$ .

**Dimostrazione** (schematica). Dimostreremo le affermazioni del teorema in ordine inverso rispetto a come sono enunciate, ed omettendo qualche dettaglio tecnico.

Passando, eventualmente, ad una sottosuccessione, possiamo assumere che si abbia per  $p \geq n$

$$\|f_n - f_p\|_2^2 > \frac{1}{2^{2n}};$$

sia  $Y_n$  l'insieme degli  $x \in X$  tali che

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)|^2 \geq \frac{1}{2^n};$$

si può mostrare che  $Y_n$  è misurabile e che  $\mu(Y_n) \leq \frac{1}{2^n}$ ; poniamo

$$Z_n = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots$$

allora  $Z_n$  è misurabile e la sua misura può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo  $n$  sufficientemente grande; ponendo

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$$

allora  $Z$  è misurabile e di misura nulla. Se  $x \notin Z_n$  allora per  $k \geq n$  abbiamo

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)|^2 < \frac{1}{2^n}$$

così che la serie

$$f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)$$

converge uniformemente ed assolutamente sul complemento di  $Z_n$ , per ogni  $n$ ; e quindi converge punto per punto ed assolutamente sul complemento di  $Z$ ; ciò prova 2, a e b.

Poniamo  $f(x) = \lim_n f_n(x)$  se  $x \notin Z$ , e poniamo (arbitrariamente)  $f(x) = 0$  se  $x \in Z$ ; rimane da dimostrare che  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  e che  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; l'espressione

$$\int_X |f_n - f_p|^2 d\mu$$

è la  $\|\cdot\|_1$ -seminorma di  $|f_n - f_p|^2$ ; fissando  $n$  e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , possiamo applicare il lemma di Fatou, e concludere che  $|f - f_p|^2$  è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e quindi che  $f - f_p \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ; dal momento che  $\mathcal{L}^2(\mu)$  è uno spazio vettoriale, possiamo concludere che  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ; il lemma di Fatou mostra anche che

$$\int |f - f_p|^2 d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int |f_k - f_p|^2 d\mu;$$

quindi  $\|f - f_p\|_2$  è piccola, se  $p$  è sufficientemente grande, cioè  $(f_n)_{n \geq 1}$  tende a  $f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ .  $\square$

**Teorema 1.31** Se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di Cauchy in  $\mathcal{L}^2(\mu)$  e se esiste  $f(X \rightarrow \mathbf{C})$  tale che

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in X,$$

allora  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  e  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ .

**Dimostrazione.** Ovvio dal teorema precedente.  $\square$

**Teorema 1.32 (della convergenza dominata per  $\mathcal{L}^2(\mu)$ )** Supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione in  $\mathcal{L}^2(\mu)$  che converge punto per punto quasi ovunque ad una funzione  $f$ ; supponiamo, inoltre che esista  $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$  tale che  $g \geq 0$  e  $|f_n| \leq g$ ; allora  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  e  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ .

**Dimostrazione.**  $f$  è limite quasi ovunque di funzioni  $\mu$ -misurabili e quindi è  $\mu$ -misurabile; inoltre  $|f| \leq g$  quasi ovunque e quindi  $|f|^2 \leq g^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$  quasi ovunque; allora  $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ; le funzioni  $|f - f_n|^2$  sono elementi di  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e sono maggiorate da  $(2g)^2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ; possiamo dunque applicare alla successione che esse formano, e che tende a 0 quasi ovunque, il teorema della convergenza dominata; ciò mostra che  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ .  $\square$

**Teorema 1.33**  $\text{St}(\mu)$  è denso in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; esplicitamente, per ogni  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\varphi \in \text{St}(\mu)$  tale che

$$\|f - \varphi\|_2 < \varepsilon.$$

**Dimostrazione.** Sia  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ,  $f$  è  $\mu$ -misurabile quindi esiste una successione  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $\text{St}(\mu)$  che converge ad  $f$  quasi ovunque; per ogni  $n \geq 1$  ed ogni  $x$ , poniamo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{se } |\psi_n(x)| \leq |2f(x)| \\ 0 & \text{se } |\psi_n(x)| > |2f(x)|; \end{cases}$$

possiamo sempre supporre  $f$  misurabile (al più modificandola su un insieme trascurabile), quindi le funzioni  $\varphi_n$  così definite sono in  $\text{St}(\mu)$ ; esse verificano  $|\varphi_n| \leq |2f| \in \mathcal{L}^2(\mu)$  e la loro successione converge quasi ovunque ad  $f$ ; per il teorema precedente, allora,  $\varphi \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2(\mu)$ ; ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Consideriamo gli spazi  $\mathcal{L}^p(\mu)$  ( $p = 1, 2$ ); abbiamo visto in precedenza che

$$\|f\|_p = 0, \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu) \iff f \in \mathcal{N} \quad (\text{ossia } f = 0 \text{ q.o.});$$

inoltre, lo spazio  $\mathcal{N}$  delle funzioni nulle quasi ovunque è ovviamente un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}^p(\mu)$  per  $p = 1, 2$ .

**Definizione 1.34** denoteremo con  $L^p(\mu)$  ( $p = 1, 2$ ) lo spazio quoziente dello spazio vettoriale  $\mathcal{L}^p(\mu)$  rispetto al sottospazio  $\mathcal{N}$  delle funzioni nulle quasi ovunque; in altre parole,  $L^p(\mu)$  è lo spazio vettoriale delle **classi d'equivalenza** di elementi di  $\mathcal{L}^p(\mu)$  rispetto alla relazione di equivalenza:  $f = g$  quasi ovunque.

Supponiamo che  $\hat{f}$  sia un elemento di  $L^1(\mu)$  e che  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$  siano due rappresentazioni qualunque della classe di equivalenza  $\hat{f}$ ; allora  $f_1 - f_2 = 0$  quasi ovunque, e quindi

$$\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu, \quad \|f_1\|_1 = \|f_2\|_1;$$

grazie alle relazioni precedenti, possiamo definire l'integrale e la seminorma  $\|\cdot\|_1$  su  $L^1(\mu)$ , ponendo

$$\int \hat{f} := \int f \, d\mu, \quad \|\hat{f}\|_1 = \|f\|_1$$

in cui  $f$  è un **qualunque** rappresentativo della classe  $\hat{f}$ ; è evidente dalla definizione che

$$\|\hat{f}\|_1 = 0 \iff \hat{f} = 0,$$

e quindi la seminorma  $\|\cdot\|$  diventa una **norma** su  $L^1(\mu)$ ; dotato di questa norma  $L^1(\mu)$  è uno **spazio di Banach**.

Analogamente, si definisce una **norma** su  $L^2(\mu)$  ponendo

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad \hat{f} \in L^2(\mu).$$

Supponiamo che  $\hat{f}, \hat{g}$  siano elementi di  $L^2(\mu)$ ; poniamo

$$(\hat{f}, \hat{g}) := \int \overline{f(x)}g(x) d\mu(x),$$

in cui  $f$  e  $g$  sono due **qualunque** rappresentazioni delle classi  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  rispettivamente; al solito, l'indipendenza di  $(\hat{f}, \hat{g})$  dalla scelta degli elementi rappresentativi è evidente; l'applicazione

$$\hat{f}, \hat{g} \mapsto (\hat{f}, \hat{g})$$

definisce un **prodotto scalare** su  $L^2(\mu)$ ; la norma di cui  $L^2(\mu)$  è munito in maniera naturale come spazio dotato di prodotto scalare (cioè  $\hat{f} \mapsto \sqrt{(\hat{f}, \hat{f})}$ ) non è altro che la norma  $\|\cdot\|_2$  definita in precedenza;  $L^2(\mu)$  è **completo** rispetto alla nozione di convergenza indotta dalla seminorma  $\|\cdot\|_2$ , quindi è uno **spazio di Hilbert**.

## 1.6 Integrazione rispetto a misure prodotto

**Definizione 1.35** *Supponiamo che  $(X, \mathcal{A})$  e  $(Y, \mathcal{B})$  siano due spazi misurabili; consideriamo l'insieme  $X \times Y$ , prodotto cartesiano degli spazi  $X$  e  $Y$ ; i sottoinsiemi di  $X \times Y$  della forma*

$$A \times B, \quad A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}$$

*vengono detti **rettangoli misurabili**; la  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X \times Y$  generata dai rettangoli misurabili viene denotata con*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

*e viene detta la  **$\sigma$ -algebra prodotto** delle  $\sigma$ -algre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .*

Supponiamo che  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  siano due spazi dotati di misura  **$\sigma$ -finita**. Se  $A \times B$  è un rettangolo misurabile poniamo

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B);$$

si può mostrare che esiste un'**unica** misura  $\sigma$ -finita, definita su  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  che coincide con  $\mu \otimes \nu$  sui rettangoli prodotto; questa misura viene denotata con  $\mu \otimes \nu$  e viene detta il **prodotto** delle misure  $\mu$  e  $\nu$ ; lo spazio dotato di misura

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$$

viene detto il **prodotto** degli spazi  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

La proprietà fondamentale dell'integrazione su uno spazio prodotto è il teorema di Fubini; noi lo ammetteremo senza dimostrazione; per poterlo enunciare è necessario fissare alcune notazioni.

**Notazioni.**

Sia

$$f(X \times Y \rightarrow \mathbf{C}),$$

si definiscono una funzione  $f_x(Y \rightarrow \mathbf{C})$  ed una funzione  $f_y(X \rightarrow \mathbf{C})$  ponendo

$$f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y)$$

rispettivamente;  $f_x$  e  $f_y$  vengono dette, a volte, le sezioni della funzione  $f$ .

**Teorema 1.36 (di Fubini)** *Supponiamo  $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ ; allora, per quasi ogni  $x \in X$ , l'applicazione  $f_x$  è in  $\mathcal{L}^1(\nu)$ ; la funzione definita da*

$$x \mapsto \int_Y f_x d\nu$$

*per quasi ogni  $x$  (ed arbitrariamente per gli altri  $x$ ) è in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; infine si ha*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f_x d\nu \right) d\mu;$$

*(risultato analogo scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$ ).*

Nel teorema di Fubini appare l'ipotesi  $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ ; questa condizione può essere difficile da verificare, in pratica; una condizione sufficiente molto utile nelle applicazioni è la seguente:

**Teorema 1.37 (di Tonelli)** *Supponiamo che*

$$f(X \times Y \rightarrow \mathbf{C})$$

*sia  $\mu \otimes \nu$ -misurabile; supponiamo che per quasi ogni  $x \in X$  l'applicazione  $|f_x|$  sia in  $\mathcal{L}^1(\nu)$ , e che l'applicazione data da*

$$x \mapsto \int_Y |f_x| d\nu$$

*(per quasi ogni  $x$ , e arbitrariamente altrimenti) sia in  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ; allora*

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu);$$

*(risultato analogo scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$ ).*

La struttura della misura prodotto permette di dimostrare alcune proprietà utili nelle applicazioni:

1. se  $f(X \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{M}(\mu)$  e  $g(Y \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{M}(\nu)$  allora

$$(x, y \mapsto f(x)g(y)) \in \mathcal{M}(\mu \otimes \nu);$$

2. se  $f \in \mathcal{M}(\mu)$  allora

$$(x, y \mapsto f(x)) \in \mathcal{M}(\mu \otimes \nu);$$

3. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$  allora

$$(x, y \mapsto f(x)g(y)) \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu).$$

# Capitolo 2

## Spazi di funzioni su $\mathbf{R}$

### 2.1 La misura e l'integrale di Lebesgue su $\mathbf{R}$

**Definizione 2.1** Ricordiamo che si denota con  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  la  $\sigma$ -algebra generata dai sottoinsiemi aperti di  $\mathbf{R}$ ;  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  è la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di Borel di  $\mathbf{R}$ .

Si può mostrare che  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  coincide con la  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$  generata dagli intervalli della forma

$$]a, b[, \quad a, b \in \mathbf{R};$$

inoltre, si può mostrare il seguente fondamentale risultato: su  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  esiste un'unica misura positiva, che viene denotata di solito come

$$A \mapsto |A|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

tale che per ogni intervallo della forma  $]a, b[$  si ha

$$|]a, b[| := b - a;$$

la misura

$$A \mapsto |A|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

viene detta la **misura di Lebesgue** su  $\mathbf{R}$ .

#### Proprietà della misura di Lebesgue su $\mathbf{R}$ .

1. Ogni insieme aperto, ogni insieme chiuso, ogni insieme formato da un solo punto (della forma  $\{x\}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ) è in  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ; ogni insieme numerabile è in  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ; ogni intervallo che contenga oppure no i suoi estremi, limitato oppure no, è in  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ;
2. per ogni  $x \in \mathbf{R}$ , si ha

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

quindi

$$|\{x\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0;$$

3. dal punto precedente, si deduce che ogni insieme numerabile ha misura nulla; deve essere sottolineato, però, che esistono insiemi **non numerabili** che hanno misura nulla (l'esempio è l'“insieme ternario di Cantor”);
4. la misura di **ogni** intervallo, che contenga oppure no i suoi estremi, è la lunghezza dell'intervallo;
5. ogni insieme misurabile che sia contenuto in un intervallo limitato ha misura finita;
6. poiché si ha

$$\mathbf{R} = \cup_{n \in \mathbf{Z}} [n, n + 1[$$

la misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  è  $\sigma$ -finita;

7. se  $A$  è un **aperto** e  $x \in A$ , allora per  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo l'intervallo  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  è **tutto** contenuto in  $A$ , quindi

$$|A| \neq 0 \quad \text{per ogni aperto } A \in \mathbf{R};$$

8. la proprietà precedente ha come conseguenza un fatto molto importante: se  $f, g$  sono due funzioni definite in  $\mathbf{R}$  e **continue**, allora, se sono uguali quasi ovunque, sono uguali ovunque; infatti, sia  $x_0$  un qualunque punto di  $\mathbf{R}$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono

$$\delta_1 > 0 \quad \text{tale che se } |x - x_0| < \delta_1 \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\delta_2 > 0 \quad \text{tale che se } |x - x_0| < \delta_2 \text{ allora } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon;$$

sia  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  allora, se  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon;$$

per ogni  $\delta$ ,  $J_\delta = \{x: |x - x_0| < \delta\}$  è un aperto di misura non nulla, quindi non può essere

$$f(x) \neq g(x) \quad \forall x \in J_\delta;$$

sia  $\bar{x}$  uno di tali  $x \in J_\delta$  per cui  $f(x) = g(x)$ ; allora

$$\begin{aligned} |f(x_0) - g(x_0)| &= |f(x_0) - f(\bar{x}) + g(\bar{x}) - g(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x_0) - f(\bar{x})| + |g(\bar{x}) - g(x_0)| < 2\varepsilon; \end{aligned}$$

poiché questa disuguaglianza deve valere per ogni  $\varepsilon > 0$  se ne deduce che  $f(x_0) = g(x_0)$ ;

9. si può provare la seguente proprietà di approssimazione per la misura di Lebesgue: per ogni  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$|B| = \inf\{|A|: A \text{ aperto } A \supseteq B\} = \sup\{|K|: K \text{ compatto } K \subseteq B\};$$

in particolare, se  $|B| < +\infty$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono un aperto  $A$  ed un compatto  $K$  tali che

$$K \subseteq B \subseteq A, \quad |A \setminus K| < \varepsilon;$$

10. si può provare che si ha, per ogni  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  e per ogni  $a \in \mathbf{R}$

$$|\{y \in \mathbf{R}: y = x + a, x \in A\}| = |A|$$

$$|\{y \in \mathbf{R}: y = ax, x \in A\}| = |a| \cdot |A|;$$

11. non ogni sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  è in  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ; in altre parole si ha  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$  strettamente;

12. le funzioni  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  che sono **misurabili** rispetto alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  vengono dette **Borel-misurabili** (o anche funzioni “di Borel”); ogni funzione continua è Borel-misurabile, ma esistono evidentemente funzioni non continue che sono Borel-misurabili; un esempio è la funzione caratteristica,  $\chi_A$ , di un insieme di Borel  $A$ ;

13. le funzioni  $\mu$ -misurabili, quando  $\mu$  è la misura di Lebesgue sui Borel di  $\mathbf{R}$ , vengono detti anche **Lebesgue-misurabili**; poiché la misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  è  $\sigma$ -finita, le funzioni Lebesgue-misurabili sono le funzioni uguali quasi ovunque alle funzioni Borel-misurabili; la classe di funzioni Lebesgue-misurabili è vastissima: in particolare, ogni funzione continua quasi ovunque è Lebesgue-misurabile. Nel seguito useremo anche la proprietà seguente: se  $f(A \rightarrow \mathbf{C})$  è una funzione definita su un insieme  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  che sia continua quasi ovunque su  $A$  allora  $f$  è Lebesgue-misurabile se la si prolunga su tutto  $\mathbf{R}$  ponendola uguale a zero su  $\mathbf{R} \setminus A$ .

Una funzione che sia integrabile rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  viene detta **Lebesgue-integrabile**; il suo integrale viene denotato con

$$\int f(x) dx;$$

gli spazi  $\mathcal{L}^1$ ,  $\mathcal{L}^2$ ,  $L^1$  e  $L^2$ , rispetto alla misura di Lebesgue vengono denotati con  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ,  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $L^1(\mathbf{R})$  e  $L^2(\mathbf{R})$  rispettivamente; in altre parole, se la misura non è esplicitamente indicata è sottointeso che si tratta della misura di Lebesgue. Ovviamente, l'integrale di Lebesgue (e gli spazi  $\mathcal{L}^p$  ed  $L^p$ , ad esso associati) godono di tutte le proprietà viste in precedenza per l'integrale rispetto ad una qualunque misura; in più ha particolari proprietà dovute alla struttura di  $\mathbf{R}$ , che studieremo nel seguito; una prima proprietà dell'integrale di Lebesgue, che deriva dalla proprietà 10, vista in precedenza della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$ , è la seguente: per ogni funzione  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$ , definiamo

$$f_a(x) := f(x - a) \quad a \in \mathbf{R}$$

$$f^-(x) := f(-x);$$

con queste notazioni, si ha che se  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ) allora anche  $f_a, f^- \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ); inoltre

$$\int f_a(x) dx = \int f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$\int f^-(x) dx = \int f(x) dx.$$

## 2.2 L'integrale di Lebesgue sugli intervalli di $\mathbf{R}$

È particolarmente importante considerare le proprietà degli integrali di Lebesgue estesi agli **intervalli** di  $\mathbf{R}$ . Denotiamo con  $I$  un intervallo **qualsunque** di  $\mathbf{R}$  ( $I$  può essere limitato oppure no, i suoi estremi possono, oppure no, appartenere ad  $I$  stesso); se  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$ , l'integrabilità di  $f$  su  $I$ , ed il suo integrale su  $I$ , **non** dipendono dall'appartenenza ad  $I$  dei suoi estremi (poiché i sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$  formati da un punto sono di misura di Lebesgue nulla); per questo, denoteremo

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (a \leq b)$$

in cui  $a$  e  $b$  (che possono essere anche  $\pm\infty$ ) denotano gli estremi di  $I$ ; porremo anche, per definizione

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (a \leq b).$$

Consideriamo un intervallo della forma  $[a, b[$  ( $b$  può essere  $+\infty$ ) ed una funzione  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  che sia Lebesgue **integrabile** su **ogni** sub-intervallo  $[a, c]$  ( $a \leq c < b$ ). Ricordiamo, innanzi tutto, alcune definizioni:

si dice che l'integrale  $\int_a^b f(x) dx$  è **convergente** (o anche che  $f$  ammette su  $[a, b[$  un "integrale improprio") se esiste **finito**

$$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx;$$

si dice che l'integrale è **assolutamente convergente** se l'integrale di  $|f|$  è convergente; è ben noto che  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  è un esempio di integrale convergente ma **non** assolutamente convergente; per contro ogni integrale assolutamente convergente è convergente. Con queste definizioni possiamo enunciare il teorema seguente, che è di importanza fondamentale, sia teorica che calcolistica.

**Teorema 2.2** *Se  $f$  soddisfa le ipotesi precedenti, allora  $f$  è Lebesgue-integrabile su  $[a, b[$  se e solo se il suo integrale su  $[a, b[$  è assolutamente convergente; in tal caso si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx.$$

**Dimostrazione.** Supponiamo, innanzi tutto,  $f$  integrabile su  $[a, b[$ ; denotiamo con,  $(c_n)_{n \geq 1}$  una successione crescente, tale che  $c_n \in ]a, b[$  per ogni  $n$ , e  $c_n \rightarrow b$  se  $n \rightarrow \infty$ ; poniamo  $g_n = |f| \chi_{[a, c_n]}$ ; ogni  $g_n$  è integrabile per ipotesi; inoltre le  $g_n$  formano una successione (crescente) che ha come limite (punto per punto)  $|f|$ ; si ha

$$g_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1,$$

allora per il teorema della convergenza dominata

$$\int g_n dx \rightarrow \int_a^b |f| dx$$

e ciò prova che l'integrale è assolutamente convergente. Inversamente, supponiamo l'integrale assolutamente convergente; poniamo  $f_n = f \chi_{[a, c_n]}$ ; le  $f_n$  sono integrabili e convergono

punto per punto a  $f$ ; inoltre gli integrali  $\int |f_n| dx$  formano una successione limitata, poiché esiste finito  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| dx$ ; la successione delle  $|f_n|$  è monotona e tende a  $|f|$  punto per punto, allora per il teorema della convergenza monotona  $|f|$  è integrabile su  $[a, b]$ ; il teorema della convergenza dominata applicato alla successione delle  $f_n$ , tenuto conto che  $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1$ , ci assicura che  $f$  è integrabile e che si ha anche

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \int f_n(x) dx = \lim \int_a^{c_n} f(x) dx. \quad \square$$

Naturalmente, si ha un risultato analogo anche nel caso di un intervallo  $]a, b]$ , in cui  $a$  può essere  $-\infty$ , e, considerando due limiti, nel caso  $]a, b[ = \mathbf{R}$ .

Oltre all'importanza teorica che potrà essere apprezzata più avanti nel corso, il risultato precedente ha una notevole importanza pratica: riduce il calcolo di un integrale di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  al calcolo di un integrale di una funzione su un intervallo chiuso e limitato (cioè compatto)  $[a, b]$ .

Consideriamo questo problema nell'ipotesi, in pratica spesso verificata, che si tratti di una funzione **continua** su  $[a, b]$  (quindi, per il teorema di Weierstrass, limitata, e quindi, sia ben chiaro, integrabile su  $[a, b]$ ). Alla base del calcolo dell'integrale di  $f$  sta il seguente risultato:

**Teorema 2.3** *Se  $f \in C([a, b])$ ,  $]a, b[$  limitato oppure no, la funzione*

$$t \mapsto \int_{t_0}^t f(x) dx, \quad t_0 \in ]a, b[$$

*è derivabile in  $]a, b[$ , e si ha*

$$D_t \int_{t_0}^t f(x) dx = f(t).$$

**Dimostrazione.** Notiamo, innanzi tutto, che l'integrale  $\int_{t_0}^t f(x) dx$  ha un senso per ogni  $t \in ]a, b[$ ; inoltre la sua derivata esiste e vale  $f$  in ogni punto  $t \in ]a, b[$ , poiché è

$$D_t \int_{t_0}^t f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx = f(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f(x) - f(t)) dx = f(t);$$

infatti, poiché  $f$  è continua in  $t$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $h$  sufficientemente piccolo in modulo, tale che, se  $x \in [t, t+h] \subset ]a, b[$ , si ha

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon;$$

allora si ha anche

$$\left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f(x) - f(t)) dx \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+|h|} |f(x) - f(t)| dx \leq \varepsilon,$$

e ciò mostra che  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} (f(x) - f(t)) dx = 0$ .  $\square$

Torniamo ora al problema del calcolo dell'integrale di una funzione  $f$  continua su un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Nel caso che  $f$  sia continua **anche** su un intervallo  $]c, d[$  che contiene (strettamente)  $]a, b[$ , il teorema precedente risolve il problema: infatti si ha, designando con  $F$  una **primitiva** di  $f$  in  $]c, d[$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

poiché i due membri, considerati come funzioni dell'“estremo superiore di integrazione  $b$ ”, con “estremo inferiore di integrazione  $a$ ” fissato, hanno uguali derivate in  $]a, b[$  e sono uguali per  $b = a$ .

La formula precedente continua a valere, con modifiche, anche nel caso che si supponga **solamente**  $f \in C([a, b])$ . Infatti, per ogni  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$ , si ha, per quanto visto in precedenza,

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha);$$

inoltre, per il teorema fondamentale sull'integrazione sugli intervalli, si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \lim_{\beta \uparrow b} \int_\alpha^\beta f(x) dx = \lim_{x \uparrow b} F(x) - \lim_{x \downarrow a} F(x).$$

L'ultima formula scritta ed il teorema fondamentale sull'integrale sugli intervalli permettono di calcolare un integrale di Lebesgue su  $\mathbf{R}$  in **tutti** i casi che si presentano in pratica.

## 2.3 La misura e l'integrale di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$

La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  degli **insiemi di Borel di  $\mathbf{R}^n$** , viene definita come la  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$  **generata** dagli aperti di  $\mathbf{R}^n$ . Si può mostrare che  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  coincide con la  $\sigma$ -algebra prodotto

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}) \quad (n \text{ fattori}).$$

Su  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ , la misura che è il prodotto delle misure di Lebesgue sugli  $n$  spazi fattore  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  viene detta la **misura di Lebesgue sui Borel di  $\mathbf{R}^n$** . Essa è **caratterizzata** dal fatto di essere l'unica misura (positiva) su  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  tale che

$$|\times_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|, \quad \text{se } E_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \quad i = 1, \dots, n$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni  $f(\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C})$  che sono integrabili rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$  viene denotato con  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ ; similmente, lo spazio vettoriale delle funzioni che sono  $\mu$ -misurabili rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$  ed il cui quadrato è integrabile, viene denotato con  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$ . L'integrale di un elemento  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$  viene denotato con

$$\int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

o piú semplicemente

$$\int f(x) dx.$$

Tra le proprietà della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$ , ne ricordiamo due che verranno usate nel seguito.

1. Se  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  è una funzione Lebesgue-misurabile, allora

$$x, y \mapsto f(x - y)$$

è Lebesgue-misurabile su  $\mathbf{R}^2$ ;

2. è particolarmente importante, nel caso della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$ , la “formula del cambiamento di variabili negli integrali”; la riportiamo senza dimostrazione.

Siano  $U_1$  ed  $U_2$  due aperti di uno spazio  $\mathbf{R}^n$ ,  $A$  è un'applicazione di  $U_1$  in  $U_2$  biiettiva bicontinua e di classe  $C^1$  con la sua inversa  $A^{-1}$ ; allora  $f$  è integrabile su  $U_2$  se e solo se la funzione  $(f \circ A) \cdot |DA|$  è integrabile su  $U_1$  (con  $DA$  denotiamo lo Jacobiano di  $A$ ); in tal caso si ha l'uguaglianza

$$\int_{U_2} f(x_2) dx_2 = \int_{U_1} f(A(x_1)) |DA(x)| dx_1.$$

In pratica, per applicare la formula di cambiamento di variabili precedente, è necessario escludere dal dominio di definizione di  $A$  dei sottoinsiemi di misura nulla, affinché la restrizione di  $A$  al resto del suo dominio di definizione soddisfi le ipotesi della precedente definizione. Ad esempio, l'applicazione

$$A(\mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2)$$

definita da

$$A(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

che definisce il passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane, non è iniettiva:

$$A(0, \theta) = (0, 0) \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi[;$$

la restrizione di  $A$  ad  $U_1 = (\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}) \times ]0, 2\pi[$  soddisfa le ipotesi della proposizione precedente, in cui  $U_2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ . Poiché

$$\mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi] \setminus U_1$$

$$\mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R} \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\})$$

sono di misura nulla, si può scrivere la formula del cambiamento di variabili cartesiane-polari come

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Come ultimo commento, notiamo che se  $A$  è una trasformazione affine, cioè della forma

$$x \mapsto ax + b$$

in cui  $a$  è un operatore lineare invertibile, si ha

$$\int_{U_2} f(x_2) dx_2 = |\det a| \cdot \int_{U_1} f(A(x_1)) dx_1.$$

## 2.4 Spazi di funzioni su $\mathbf{R}$

1. Denoteremo con

$$\mathcal{BM}(\mathbf{R})$$

lo spazio delle funzioni  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  che siano

- (a) Borel-misurabili
- (b) limitate, tali cioè che esista  $k > 0$  tale che

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

È evidente che  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ , rispetto alle usuali operazioni lineari definite punto per punto.

Si definisce una norma su  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$ , che viene detta la “norma del sup”, e viene denotata con  $\|\cdot\|_\infty$ , ponendo

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\}, \quad f \in \mathcal{BM}(\mathbf{R}).$$

È un semplice esercizio verificare che la funzione  $f \mapsto \|f\|_\infty$  definisce effettivamente una norma su  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$  e che la nozione di convergenza di una successione, rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ , coincide con la nozione di **convergenza uniforme su  $\mathbf{R}$** .

$\mathcal{BM}(\mathbf{R})$  è uno **spazio di Banach** rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Per mostrare questo fatto supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di Cauchy di elementi di  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$ , rispetto alla norma del sup; questo significa, esplicitamente, che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $N_\varepsilon$  tale che, per ogni coppia  $n, p \geq N_\varepsilon$ , si ha

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon;$$

questo implica che per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si avrà anche

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon,$$

e, quindi, che la successione (numerica)  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  è convergente per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; denoteremo con  $f(x)$  il limite finito della successione  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; in questo modo si definisce una funzione

$$(x \mapsto f(x))(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C});$$

- (a)  $f$  è **misurabile**, come limite punto per punto di una successione di funzioni misurabili;
- (b)  $f$  è il limite della successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  **nella norma**  $\|\cdot\|_\infty$ ; infatti, dal fatto che  $(f_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ , si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N_\varepsilon$  tale che se  $n, p \geq N_\varepsilon$

$$\sup_x |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon,$$

ciò implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{se } p \geq N_\varepsilon,$$

da cui

$$\sup_x \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - f_p(x) \right| \leq \varepsilon \quad \text{se } p \geq N_\varepsilon,$$

per cui

$$\sup_x |f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{purché } p \geq N_\varepsilon;$$

ciò mostra che si ha

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } \|\cdot\|_\infty;$$

- (c)  $f$  è **limitata**; infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $n$  sufficientemente grande, per cui sia

$$\sup_x |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon;$$

per tali  $n$  si avrà

$$\sup_x |f(x)| \leq \sup_x |f(x) - f_n(x)| + \sup_x |f_n(x)| \leq k + \varepsilon.$$

In conclusione  $f \in \mathcal{BM}(\mathbf{R})$  e  $f_n \rightarrow f$  rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ ; ciò mostra che  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$  è uno spazio di Banach.

2. Denoteremo con  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  lo spazio delle funzioni **continue e limitate** su  $\mathbf{R}$ ; poiché ogni funzione continua è misurabile, è evidente che  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  è un **sottospazio vettoriale** di  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$ . Poiché il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni continue è continua si ha che  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  è **completo** nella norma  $\|\cdot\|_\infty$ , e quindi è uno spazio di Banach.

Deve essere sottolineato che  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  non è un sottoinsieme di  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ ; ad esempio la funzione che vale 1 per ogni  $x \in \mathbf{R}$  è ovviamente in  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  ma **non** è in  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ).

3. Denoteremo con  $C_0(\mathbf{R})$  lo spazio delle funzioni  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

- (a)  $f$  è continua  
 (b)  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ ;

$C_0(\mathbf{R})$  è in maniera naturale uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ ; in effetti, anche  $C_0(\mathbf{R})$  è uno **spazio di Banach** rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ ; per mostrare questo fatto, supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di Cauchy di elementi di  $C_0(\mathbf{R})$ , poiché  $C_0(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{BC}(\mathbf{R})$ , esiste una funzione  $f \in \mathcal{BC}(\mathbf{R})$  tale che  $f_n \rightarrow f$  rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ , e quindi uniformemente, allora si ha

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0;$$

ciò mostra che  $f \in C_0(\mathbf{R})$ , che è completo.

Notiamo che anche  $C_0(\mathbf{R})$  **non** è un sottoinsieme di  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ ; ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

è in  $C_0(\mathbf{R})$  ma **non** è né in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  né in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ .

4. Denotiamo con  $C_c(\mathbf{R})$  lo spazio delle funzioni  $f(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

- (a)  $f$  è **continua**
- (b) la chiusura in  $\mathbf{R}$  dell'insieme  $\{x: f(x) \neq 0\}$  è **limitata**;

la chiusura in  $\mathbf{R}$  dell'insieme  $\{x: f(x) \neq 0\}$  viene detta il **supporto** di  $f$ ; gli elementi di  $C_c(\mathbf{R})$  vengono detti “funzioni continue a supporto compatto” (ricordiamo che, per un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ , “compatto” equivale a “chiuso e limitato”).  $C_c(\mathbf{R})$  è in maniera naturale un sottospazio vettoriale di  $C_0(\mathbf{R})$ . In effetti,  $C_c(\mathbf{R})$  è **denso** in  $C_0(\mathbf{R})$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Per mostrare questo fatto, occorre mostrare che, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $f \in C_0(\mathbf{R})$ , esiste una funzione  $g \in C_c(\mathbf{R})$  tale che

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon;$$

poiché  $f \in C_0(\mathbf{R})$ , dato  $\varepsilon > 0$ , esiste un intervallo chiuso e limitato  $[-\delta, \delta]$  tale che

$$\sup\{|f(x)|: x \notin [-\delta, \delta]\} < \varepsilon;$$

allora si può definire una funzione  $g(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  ponendo, se  $k > 0$ ,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\delta, \delta] \\ \frac{(x + \delta + k)f(-\delta)}{k} & \text{se } x \in [-\delta - k, -\delta] \\ \frac{(x - \delta - k)f(\delta)}{-k} & \text{se } x \in [\delta, \delta + k] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora  $g \in C_c(\mathbf{R})$  ed evidentemente

$$\|f - g\|_\infty < 2\varepsilon$$

Se  $f \in C_c(\mathbf{R})$  allora esiste un numero  $\delta > 0$  tale che

$$f(x) = 0 \quad \text{se } x \notin [-\delta, \delta];$$

allora

$$|f(x)| \leq \varphi(x)$$

in cui  $\varphi$  è la funzione in  $\text{St}(\mu)$  definita come  $\varphi = \chi_{[-\delta, \delta]} \cdot \sup_x |f(x)|$ ; allora  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  e si ha

$$\|f\|_1 = \int |f(x)| dx \leq 2\delta \cdot \|f\|_\infty;$$

notate però che il numero  $\delta$  **dipende da**  $f$  e quindi **non** si può concludere che su  $C_c(\mathbf{R})$  la norma del sup è piú fine della norma  $\|\cdot\|_1$  (o della norma  $\|\cdot\|_2$ , infatti con un ragionamento analogo al precedente si potrebbe concludere che si ha anche  $C_c(\mathbf{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ).

Nel seguito denoteremo **sistematicamente** con  $\Omega$  un sottoinsieme **aperto** di  $\mathbf{R}$ .

5. Se  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  è una funzione definita in  $\Omega$ , denoteremo  $f^\Omega(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$  la funzione

$$f^\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \Omega; \end{cases}$$

diremo che  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{R})$  è **misurabile** se è (Borel-)misurabile la funzione  $f^\Omega$ ; ciò è **equivalente** a dire che  $f$  è misurabile se

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \quad \text{e} \quad f^{-1}(E) \subseteq \Omega$$

per ogni  $E \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$  (i Borel di  $\mathbf{C}$  vengono definiti in maniera usuale, identificando  $\mathbf{C}$  con  $\mathbf{R}^2$ ).

Utilizzando la definizione precedente, si può definire lo spazio  $\mathcal{BM}(\Omega)$ ; è lo spazio di tutte le funzioni  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

- (a)  $f$  è misurabile
- (b)  $f$  è limitata, cioè esiste un  $k > 0$  tale che

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in \Omega.$$

Come nel caso  $\Omega = \mathbf{R}$ , considerato in precedenza, è immediato verificare che  $\mathcal{BM}(\mathbf{R})$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ , che l'applicazione

$$f \mapsto \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

definisce una norma su  $\mathcal{BM}(\Omega)$ , e che  $\mathcal{BM}(\Omega)$  è uno spazio di Banach rispetto a questa norma.

6.  $\mathcal{BC}(\Omega)$  denota lo spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$  delle funzioni  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  che sono continue e limitate; anche in questo caso è immediato verificare che è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{BM}(\Omega)$  e che è completo rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

7.  $C_0(\Omega)$  denota il sottospazio vettoriale di  $\mathcal{BM}(\Omega)$  delle funzioni  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

- (a)  $f$  è continua
- (b) per ogni  $\varepsilon > 0$  l'insieme

$$\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

è compatto (cioè chiuso e limitato) in  $\mathbf{R}$  e contenuto in  $\Omega$ ;

non è difficile mostrare che  $C_0(\Omega)$  è, in effetti, un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{BC}(\Omega)$ , che è completo rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

8.  $C_c(\Omega)$  denota lo spazio delle funzioni  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

- (a)  $f$  è continua
- (b) la chiusura in  $\mathbf{R}$  dell'insieme

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

intersecata con  $\Omega$ , sia un insieme compatto (cioè chiuso e limitato) in  $\mathbf{R}$ .

$C_c(\Omega)$  è un sottospazio vettoriale di  $C_0(\Omega)$  ed un semplice adattamento della dimostrazione vista nel caso  $\Omega = \mathbf{R}$  ci assicura che  $C_c(\Omega)$  è denso in  $C_0(\Omega)$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

9. Denoteremo con  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  l'insieme di tutte le funzioni  $f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$  tali che

$$f^\Omega \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R});$$

è immediato che  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{C}$ ; se  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  definiamo

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \|f^\Omega\|_p = \left[ \int_{\mathbf{R}} |f^\Omega(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}};$$

l'applicazione

$$f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

definisce una **seminorma** su  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , e si ha che  $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$  se e solo se  $f = 0$  quasi ovunque su  $\Omega$ ; in maniera naturale si definisce allora  $L^p(\Omega)$ . Non è affatto ovvio però che  $L^p(\Omega)$ , così definito sia uno spazio di Banach (di Hilbert, in particolare, se  $p = 2$ ). Una maniera semplice per convincersene è la seguente: denotiamo

$$\mathcal{N}_\Omega(\mathcal{L}^p(\mathbf{R})) = \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}): f = 0 \text{ quasi ovunque in } \mathbf{R} \setminus \Omega\}$$

e, in maniera naturale, definiamo

$$\mathcal{N}_\Omega(L^p(\mathbf{R}));$$

allora le applicazioni

$$f \mapsto f|_\Omega (\mathcal{L}^p(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\Omega))$$

$$f \mapsto f^\Omega (\mathcal{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathbf{R}))$$

inducono un isomorfismo lineare tra

$$L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_\Omega(L^p(\mathbf{R}));$$

in questo isomorfismo **si conservano le norme**; si ottiene quindi un'identificazione naturale tra  $L^p(\Omega)$  ed il sottospazio vettoriale di  $L^p(\mathbf{R})$  costituito dalle funzioni che si annullano quasi ovunque al di fuori di  $\Omega$ .

Notiamo che  $\mathcal{N}_\Omega(\mathcal{L}^p(\mathbf{R}))$  è un sottospazio **completo** di  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ ; infatti, supponiamo che  $(f_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di Cauchy (rispetto alla seminorma  $\|\cdot\|_p$  su  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ ) di funzioni tutte in  $\mathcal{N}_\Omega(\mathcal{L}^p(\mathbf{R}))$ ; per la completezza di  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ , allora esisterà  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  tale che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in} \quad \mathcal{L}^p(\mathbf{R});$$

sappiamo però che esisterà una sottosuccessione  $(f_{n_p})_{p \geq 1}$  di  $(f_n)_{n \geq 1}$  che convergerà a  $f$  punto per punto quasi ovunque (questo in entrambi i casi  $p = 1, 2$ ); allora  $f = 0$  quasi ovunque su  $\mathbf{R} \setminus \Omega$ , e quindi  $f \in \mathcal{N}_\Omega(\mathcal{L}^p(\mathbf{R}))$ . L'identificazione (isometrica) che abbiamo stabilito tra  $\mathcal{N}_\Omega(L^p(\mathbf{R}))$  e  $L^p(\Omega)$  ci permette di concludere che **anche**  $L^p(\Omega)$  è completo, e quindi è uno **spazio di Banach**.

10. La discussione fatta in precedenza nel caso  $\Omega = \mathbf{R}$  ci assicura che **in generale**  $C_0(\Omega)$  **non è** contenuto in  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  (quindi, “a fortiori”, neppure  $\mathcal{BM}(\Omega)$  e  $\mathcal{BC}(\Omega)$  lo sono); invece, evidentemente si ha

$$C_c(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega), \quad (p = 1, 2).$$

Consideriamo, però, il caso  $|\Omega| < +\infty$  (cioè supponiamo che  $\Omega$  sia contenuto in un intervallo limitato di lunghezza finita). Supponiamo che  $f \in \mathcal{BM}(\Omega)$ , se  $k > 0$  è tale che  $|f(x)| \leq k \forall x \in \Omega$  ed  $I$  è un intervallo di lunghezza finita che contiene  $\Omega$ , allora

$$|f^\Omega| \leq k\chi_I \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

$$|f^\Omega|^2 \leq k^2\chi_I \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

e quindi  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  ( $p=1,2$ ). Poiché, nel caso  $|\Omega| < +\infty$ , si ha  $\mathcal{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{L}^1(\Omega)$ , otteniamo la catena di inclusioni

$$\mathcal{BM}(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{L}^1(\Omega),$$

più ovviamente tutte le inclusioni che da queste si deducono. Già sappiamo che la seminorma  $\|\cdot\|_2$  è più fine della  $\|\cdot\|_1$ ; questa “gerarchia” tra le seminorme si ha anche nel contenimento tra  $\mathcal{L}^2$  e  $\mathcal{BM}$ ; infatti, se  $f \in \mathcal{BM}(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ , si avrà

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \left( \int |f^\Omega(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty$$

(notate che il numero  $|\Omega|^{\frac{1}{2}}$  è **indipendente** dalla  $f$  scelta); ciò mostra che la norma  $\|\cdot\|_\infty$  è più fine di  $\|\cdot\|_2$  (e quindi a fortiori di  $\|\cdot\|_1$ ), nel caso in cui  $|\Omega| < +\infty$ . In particolare, questo implica che se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di funzioni in  $\mathcal{BM}(\Omega)$  (o in uno dei suoi sottospazi) che converge ad una funzione  $f \in \mathcal{BM}(\Omega)$  rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  **anche rispetto a**  $\|\cdot\|_p$ .

## 2.5 Teoremi di densità per gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$

In un qualunque spazio dotato di misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  si ha il teorema fondamentale di densità:

$$\text{St}(\mu) \text{ è denso in } \mathcal{L}^p(\mu) \quad (p = 1, 2);$$

esplicitamente questo significa:

$$\text{se } f \in \mathcal{L}^p(\mu), \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } \varphi \in \text{St}(\mu) \text{ tale che } \|f - \varphi\|_p < \varepsilon.$$

Nel caso della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$ , se consideriamo gli spazi  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ , possiamo ottenere ulteriori teoremi di densità.

La costruzione stessa degli insiemi misurabili, nel caso della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$ , a partire dagli intervalli, permette di considerare invece che funzioni step qualunque le funzioni “step rispetto agli intervalli”.

**Definizione 2.4** Diremo che una funzione

$$\varphi(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$$

è step rispetto agli intervalli se esiste una successione finita

$$a_1, \dots, a_n$$

di elementi di  $\mathbf{R}$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 & \text{se } x < a_1 \text{ o } x > a_n \\ \varphi(x) &= c_i & \text{se } a_i < x < a_{i+1} \text{ (con } c_i \text{ costanti)} \end{aligned}$$

Con questa definizione, si ha il seguente

**Teorema 2.5** Per ogni  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ) e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione  $\varphi$ , step rispetto agli intervalli, tale che

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon.$$

**Dimostrazione.** Poiché  $\text{St}(\mathbf{R})$  è denso in  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ , è sufficiente mostrare che per ogni  $\chi_A$ , in cui  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  ed  $|A| < +\infty$ , e per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\varphi$ , step rispetto agli intervalli, tale che

$$\|\chi_A - \varphi\|_p < \varepsilon.$$

Per la proprietà 9 della misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}$ , dato  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  tale che  $|A| < +\infty$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un aperto  $U$  tale che

$$U \supset A, \quad |U| \leq |A| + \varepsilon;$$

da cui

$$|U \setminus A| < \varepsilon.$$

Ricordiamo la seguente proprietà classica dei sottoinsiemi aperti di  $\mathbf{R}$ : ogni aperto di  $\mathbf{R}$  è unione numerabile di intervalli aperti disgiunti. Allora avremo

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

da cui

$$|U| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

Allora esiste un indice  $N$  tale che

$$\left| \bigcup_{n=1}^N I_n \right| \geq |U| - \varepsilon,$$

da cui

$$\left| U \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n \right| \leq \varepsilon.$$

Poniamo  $T = \bigcup_{n=1}^N I_n$  e osserviamo che

$$\chi_A - \chi_T = \chi_{A \Delta T},$$

dove  $A\Delta T := A \setminus T \cup T \setminus A$ . Quindi

$$\begin{aligned} \|\chi_A - \chi_T\|_p^p &= \int_{\mathbf{R}} |\chi_{A\Delta T}|^p \\ &= |A\Delta T| \\ &= |A \setminus T| + |T \setminus A| \\ &\leq |U \setminus T| + |U \setminus A| \\ &\leq 2\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Il teorema di densità precedente permette di ottenere risultati molto piú fini utilizzando la tecnica di “regolarizzazione” che è un mezzo estremamente potente e flessibile. Questo metodo di regolarizzazione è basato sulla nozione di prodotto di convoluzione tra due funzioni.

Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano due funzioni definite su tutto  $\mathbf{R}$ ; se la funzione

$$x \mapsto f(x)g(y-x)$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , per un qualche  $y \in \mathbf{R}$ , si pone

$$f * g(y) := \int_{\mathbf{R}} f(x)g(y-x) dx;$$

nel caso che  $y$  sia tale che  $f * g(y)$  sia definita, effettuando il cambiamento di variabili  $y-x = t$  nell'integrale che definisce  $f * g$ , si ottiene

$$f * g(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(y-x) dx = \int_{\mathbf{R}} f(y-t)g(t) dt = g * f(y).$$

Deve essere sottolineato che  $f * g$  è una funzione definita **soltanto** per gli  $y \in \mathbf{R}$  tali che

$$(x \mapsto f(x)g(y-x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

o, equivalentemente,

$$(x \mapsto f(y-x)g(x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

Nel seguito studieremo l'esistenza e le proprietà del prodotto di convoluzione tra due funzioni in  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ )<sup>1</sup>; considereremo separatamente le tre possibili scelte di  $p$ .

**Primo caso:**  $f, g \in \mathcal{L}^1$

1.  $f * g$  è definito per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;  
infatti, la funzione

$$(x, y \mapsto f(x)g(y-x)) \quad (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C})$$

è (Lebesgue-)misurabile, come prodotto di due funzioni,  $(x, y \mapsto f(x))$  e  $(x, y \mapsto g(y-x))$ , (Lebesgue-)misurabili su  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ; inoltre

$$(y \mapsto f(x)g(y-x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

---

<sup>1</sup>N.B.: questi non sono gli unici casi in cui esiste il prodotto di convoluzione, piú avanti vedremo un altro esempio

e

$$\left(x \mapsto \int dy |f(x)| |g(y-x)| = \|g\|_1 |f(x)|\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R});$$

allora il teorema di Tonelli assicura che la funzione

$$x, y \mapsto f(x)g(y-x)$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ , ed il teorema di di Fubini assicura che

$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)g(y-x) dx$$

è definito per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;

2.  $f * g \in \mathcal{L}^1$  e  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ ;

infatti, la prima affermazione discende immediatamente dal teorema di Fubini; lo stesso teorema assicura che si ha

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x)g(y-x) dx \right| dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} dy \left( \int_{\mathbf{R}} dx |f(x)| |g(y-x)| \right) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dx \left( \int_{\mathbf{R}} dy |f(x)| |g(y-x)| \right) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dx |f(x)| \cdot \int_{\mathbf{R}} dy |g_x(y)| = \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1; \end{aligned}$$

3. se  $g$  è anche limitata allora  $f * g$ , definita per ogni  $y \in \mathbf{R}$ , è limitata, e si ha

$$|f * g(y)| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_{\infty} \quad \forall y \in \mathbf{R};$$

notiamo che se  $g$  è limitata allora

$$(x \mapsto f(x)g(y-x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$$

per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ; inoltre

$$\begin{aligned} |f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} dx f(x)g(y-x) \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} dx |f(x)| |g(y-x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |g(y-x)| \cdot \|f\|_1 = \\ &= \|g\|_{\infty} \cdot \|f\|_1. \end{aligned}$$

**Secondo caso:**  $f \in \mathcal{L}^1$ ,  $g \in \mathcal{L}^2$

1.  $f * g$  è definito per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;

infatti, per ogni  $y \in \mathbf{R}$  la funzione  $(x \mapsto f(x)g(y-x))$  è (Lebesgue-)misurabile; inoltre

$|g|^2 \in \mathcal{L}^1$  e la discussione fatta per il caso precedente ci assicura che per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$  la funzione  $(x \mapsto f(y-x)|g|^2(x))$  è integrabile, cioè

$$(x \mapsto |f(y-x)|^{\frac{1}{2}} \cdot |g(x)|) \in \mathcal{L}^2;$$

poiché  $(x \mapsto |f(y-x)|^{\frac{1}{2}}) \in \mathcal{L}^2$ , la funzione

$$x \mapsto |f(y-x)|^{\frac{1}{2}} \cdot [|f(y-x)|^{\frac{1}{2}} \cdot |g(x)|]$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ , come prodotto di due funzioni di  $\mathcal{L}^2$ ;

2.  $f * g \in \mathcal{L}^2$  e si ha  $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_2$ ;

mostriamo, innanzi tutto, che  $f * g$  è (Lebesgue-)misurabile; poniamo  $g_A := g\chi_{[-A,A]}$ ;  $g_A$  è integrabile, quindi  $f * g_A$  è integrabile; in particolare,  $f * g_A$  è (Lebesgue-)misurabile, per ogni  $A$ ; inoltre,  $f * g_A \rightarrow f * g$  quasi ovunque per  $A \rightarrow \infty$ ; infatti, per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ , si ha

$$\begin{aligned} |f * g(y) - f * g_A(y)| &= |f * (g - g_A)(y)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(y-x)| \cdot |g(x) - g_A(x)| dx = \\ &= \int_{|x| \geq A} |f(y-x)| \cdot |g(x)| dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se  $A \rightarrow \infty$ , per il teorema della convergenza dominata; allora  $f * g$  come limite quasi ovunque di funzioni (Lebesgue-)misurabili è misurabile; inoltre

$$\begin{aligned} |f * g(y)|^2 &\leq [(|f| * |g|)(y)]^2 = \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^{\frac{1}{2}} [|f(x)|^{\frac{1}{2}} \cdot |g(y-x)|] dx \right)^2 \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbf{R}} |f(x)| \cdot |g(y-x)|^2 dx, \end{aligned}$$

in cui l'ultima disuguaglianza è giustificata dalla disuguaglianza di Hölder, dal fatto che la funzione  $(x \mapsto |f(x)|^{\frac{1}{2}}) \in \mathcal{L}^2$  e dal fatto che la funzione  $(x \mapsto |f(x)|^{\frac{1}{2}}|g(y-x)|) \in \mathcal{L}^2$ ; in conclusione

$$|f * g(y)|^2 \leq \|f\|_1 \cdot (|f| * |g|^2)(y);$$

poiché  $|f| \in \mathcal{L}^1$  e  $|g|^2 \in \mathcal{L}^1$ ,  $|f| * |g|^2 \in \mathcal{L}^1$ , e la disuguaglianza precedente mostra che  $|f * g|^2 \in \mathcal{L}^1$ ; inoltre, integrandola, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f * g(y)|^2 dy &= \|f * g\|_2^2 \leq \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbf{R}} (|f| * |g|^2)(y) dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|f\|_1 \cdot \| |g|^2 \|_1 = \\ &= \|f\|_1^2 \cdot \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

**Terzo caso:**  $f, g \in \mathcal{L}^2$ .

1.  $f * g$  è definito per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;

infatti,  $(x \mapsto f(x)) \in \mathcal{L}^2$  e  $(x \mapsto g(y-x)) \in \mathcal{L}^2$  per ogni  $y \in \mathbf{R}$ , e quindi  $(x \mapsto f(x)g(y-x)) \in \mathcal{L}^1$  per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;

2.  $f * g$  è una funzione limitata;

per ogni  $y \in \mathbf{R}$  si ha

$$\begin{aligned} |f * g(y)| &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)| |g(y-x)| dx \leq \\ &\leq \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathbf{R}} |g(y-x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2; \end{aligned}$$

3. si può mostrare che  $f * g$  è anche continua.

Una delle proprietà fondamentali dei prodotti di convoluzione è legata ai supporti. Per poterla enunciare è necessario definire con precisione la nozione di **supporto** di una funzione in  $\mathcal{L}^p$ . Si vuol definire il supporto di una funzione di  $\mathcal{L}^p$  in modo che due funzioni  $f, g$  in  $\mathcal{L}^p$  che sono uguali quasi ovunque abbiano lo **stesso** supporto, e quindi si possa parlare, senza ambiguità, del supporto di **un elemento di  $L^p$** . Evidentemente, non si può definire il supporto come per una funzione continua (si pensi, ad esempio, alla funzione identicamente nulla ed alla funzione caratteristica dell'insieme dei razionali). Con questa motivazione, effettuiamo la costruzione seguente: supponiamo che  $f$  sia una qualunque funzione definita (eventualmente quasi ovunque) su  $\mathbf{R}$ , e consideriamo la famiglia

$$(A_i: i \in I)$$

di **tutti gli aperti**  $A_i$ , tali che

$$f = 0 \quad \text{quasi ovunque su } A_i;$$

si pone

$$A = \cup(A_i: i \in I),$$

allora  $A$  è aperto (poiché qualunque unione di aperti è un aperto) e  $f = 0$  quasi ovunque su  $A$ ; questo fatto **non** è "a priori" ovvio, poiché l'insieme  $I$  non è necessariamente numerabile; ciò nonostante si può procedere come segue: si definisce

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}: \text{dist}(x, \mathbf{R} \setminus A) \geq \frac{1}{n} \text{ e } |x| \leq n\}, \quad n \geq 1$$

allora ogni  $K_n$  è **chiuso e limitato** (cioè compatto) e

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} K_n;$$

per il teorema di Heine-Borel, ogni  $K_n$  è ricoperto da un numero **finito** di  $A_i$ ,

$$K_n \subseteq \cup(A_i: i \in I_n)$$

in cui  $I_n \subset I$  è finito per ogni  $n$ ; poniamo

$$J = \cup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

allora  $J$  è numerabile e si ha

$$A = \cup(A_i: i \in J)$$

poiché  $f = 0$  quasi ovunque su ogni  $A_i$ , se ne conclude  $f = 0$  quasi ovunque su  $A$ ; se si pone

$$\text{supp } f := \mathbf{R} \setminus A$$

si hanno le proprietà:

1. se  $f = g$  quasi ovunque allora  $\text{supp } f = \text{supp } g$ ;
2. se  $f \in C(\mathbf{R})$  questa definizione di supporto coincide con quella data in precedenza.

Con questa definizione si può provare il

**Teorema 2.6** *Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  e  $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ) allora*

$$\text{supp } f * g \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}.$$

**Dimostrazione.** Se  $y \in \mathbf{R}$  è tale che  $f * g(y)$  è definito, si ha

$$f * g(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(y-x) dx = \int_{\text{supp } f \cap (y - \text{supp } g)} f(x)g(y-x) dx;$$

se  $y \notin \text{supp } f + \text{supp } g$  allora  $(y - \text{supp } g) \cap \text{supp } f = \emptyset$  e quindi  $f * g(y) = 0$ ; quindi

$$f * g(y) = 0 \quad \text{quasi ovunque su } \mathbf{R} \setminus \text{supp } f + \text{supp } g$$

e, in particolare,  $f * g$  si annulla sull'insieme dei punti interni di  $\mathbf{R} \setminus \text{supp } f + \text{supp } g$ , di conseguenza

$$\text{supp } f * g \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}. \quad \square$$

La tecnica di regolarizzazione con la convoluzione è basata sul prodotto di convoluzione di una funzione  $g \in \mathcal{L}^p$  ( $p = 1, 2$ ) con una funzione  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ; il prodotto  $f * g$  ha delle proprietà ulteriori rispetto a quelle del prodotto tra due funzioni di  $\mathcal{L}^p$ , che derivano dalle particolari regolarità della funzione  $f$ .

**Proprietà del prodotto di convoluzione tra una funzione  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  ed una funzione  $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ .**

1.  $f * g(y)$  è definita per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;  
infatti, la funzione

$$x \mapsto f(x)g(y-x)$$

è integrabile per ogni  $y \in \mathbf{R}$ , come prodotto di una funzione integrabile ( $x \mapsto g(y-x)$ , qualunque sia  $y$ ) per una funzione limitata, nel caso in cui  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ; nel caso in cui  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  per quanto visto al punto 1 della pagina precedente;

2.  $f * g \in C^\infty(\mathbf{R})$ ;

Per questo, è sufficiente mostrare che  $f * g$  è di classe  $C^1$  e che la sua derivata è data da

$$(f * g)' = f' * g.$$

Poiché  $f' \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , la tesi segue allora immediatamente per induzione.

Per ogni  $\bar{y} \in \mathbf{R}$  denotiamo con  $A$  l'intervallo aperto

$$]\bar{y} - a, \bar{y} + a[ \quad a > 0;$$

si hanno i fatti seguenti

a) per ogni  $y \in A$  la funzione

$$x \mapsto f(y-x)g(x)$$

è integrabile su tutto  $\mathbf{R}$ ; nel caso  $p = 1$ , come prodotto di una funzione integrabile per una limitata; nel caso  $p = 2$ , come prodotto di una funzione  $(x \mapsto f(y-x))$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  per un'altra funzione  $(x \mapsto g(x))$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ;

b) la funzione

$$y \mapsto f(y-x)g(x)$$

è derivabile in tutto  $A$ , per ogni  $x$ ;

c) se  $p = 1$ , la funzione

$$x \mapsto \left( \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \right) \cdot |g(x)|$$

è integrabile su tutto  $\mathbf{R}$ , e si ha

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(y-x) \right| \cdot |g(x)| \leq \left( \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \right) \cdot |g(x)|$$

per ogni  $y \in A$  e per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ;

se  $p = 2$ , denotate con  $N$  un numero positivo tanto grande che, se  $|x| > N$ ,

$$f'(y-x) = 0$$

per ogni  $y$  elemento di  $A$ ; allora se si pone

$$k = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)|,$$

si ottiene che

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(y-x) \right| \leq k \cdot \chi_{[-N,N]}(x)$$

per ogni  $y \in A$  ed ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; quindi

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(y-x) \right| \cdot |g(x)| \leq k \cdot \chi_{[-N,N]}(x) \cdot |g(x)|$$

per ogni  $y \in A$  ed ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; inoltre

$$x \mapsto k \cdot \chi_{[-N,N]}(x) \cdot |g(x)|$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , come prodotto di due funzioni in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ;

in entrambi i casi ( $p = 1, 2$ ) siamo nelle ipotesi di applicabilità del teorema di derivazione e continuità di un integrale che dipende da un parametro e si può concludere che

$$f * g \in C^1(\mathbf{R})$$

$$\frac{d}{d y} (f * g)(y) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial y} f(y-x) \cdot g(x) \, d x;$$

3.  $\text{supp } f * g \subseteq \text{supp } f + \text{supp } g$ ; infatti si può dimostrare che  $\text{supp } f + \text{supp } g$  è un insieme chiuso, come conseguenza del fatto che  $\text{supp } f$  è compatto.

**Definizione 2.7** *Chiameremo successione regolarizzante (o anche successione di Dirac) ogni successione  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  di funzioni tali che*

$$\begin{aligned} \rho_n &\in C_c^\infty(\mathbf{R}), \\ \text{supp } \rho_n &= \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ \rho_n &\geq 0 \text{ su } \mathbf{R}, \\ \int \rho_n dx &= 1; \end{aligned}$$

È bene convincersi immediatamente che **esistono** tali successioni: fissiamo una funzione<sup>2</sup>  $\rho$  tale che

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R}), \quad \text{supp } \rho = [-1, 1], \quad \rho \geq 0,$$

e poniamo

$$\rho_n(x) = Cn\rho(nx), \quad n \geq 1$$

in cui  $C = (\int \rho dx)^{-1}$ ; allora è immediato verificare che  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  è una successione regolarizzante; nel seguito denoteremo **sistematicamente** con  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  una successione regolarizzante.

L'uso delle successioni regolarizzanti permette di ottenere alcuni teoremi fondamentali di densità negli spazi  $\mathcal{L}^p$  ( $p = 1, 2$ ).

**Lemma 2.8** *Supponiamo che  $f \in \mathcal{L}^p$ , in modo che  $\rho_n * f$  sia definito; allora  $\rho_n * f \rightarrow f$  in ogni punto di continuità di  $f$ .*

**Dimostrazione.** Denotiamo  $f_n = \rho_n * f$ ; si ha

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \int f(y-x)\rho_n(x) dx \\ f(y) &= f(y) \cdot \left(\int \rho_n(x) dx\right) = \int f(y)\rho_n(x) dx; \end{aligned}$$

quindi si ha

$$f(y) - f_n(y) = \int [f(y-x) - f(y)] \rho_n(x) dx$$

e

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \int \rho_n(x) |f(y-x) - f(y)| dx = \int_{|x| < \delta} + \int_{|x| \geq \delta} \rho_n(x) |f(y-x) - f(y)| dx;$$

se  $n$  è tanto grande che  $\frac{1}{n} < \delta$ , il secondo integrale non contribuisce, poiché

$$\text{supp } \rho_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset \{x : |x| < \delta\};$$

abbiamo quindi soltanto il primo integrale; se  $y$  è punto di continuità per  $f$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|x| < \delta \implies |f(y-x) - f(y)| < \varepsilon;$$

allora in un punto  $y$  di continuità di  $f$  si avrà

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \int_{|x| < \delta} \rho_n(x) |f(y-x) - f(y)| dx \leq \varepsilon \int_{|x| < \delta} \rho_n(x) = \varepsilon$$

(se  $n$  è tanto grande che  $\text{supp } \rho_n \subset [-\delta, \delta]$ ); questo conclude la dimostrazione.  $\square$

---

<sup>2</sup>ad esempio  $\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$

**Lemma 2.9** *Se  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  allora*

$$\rho_n * f \rightarrow f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mathbf{R}).$$

**Dimostrazione.** Se  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ed  $\varepsilon > 0$ , allora esiste una funzione  $\varphi$ , step rispetto agli intervalli, tale che

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon;$$

se  $\varphi$  è step rispetto agli intervalli allora  $\varphi$  è continua quasi ovunque, limitata e si annulla al di fuori di un intervallo di lunghezza finita; allora per il lemma precedente e per la proprietà del prodotto di convoluzione, si ha  $\forall n \geq 1$

$$\begin{array}{ll} \varphi * \rho_n \rightarrow \varphi & \text{quasi ovunque punto per punto} \\ |\varphi * \rho_n| \leq \sup |\varphi| & \text{su tutto } \mathbf{R} \\ \text{supp } \varphi * \rho_n \subset \text{supp } \varphi + [-1, 1], & \end{array}$$

allora per il teorema della convergenza dominata

$$\varphi * \rho_n \rightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{L}^p;$$

si avrà

$$\begin{aligned} \|f - \rho_n * f\|_p &\leq \|f - \rho_n * \varphi + \rho_n * \varphi + \varphi - \varphi - \rho_n * f\|_p \\ &\leq \|f - \varphi\|_p + \|\rho_n * \varphi - \rho_n * f\|_p + \|\varphi - \rho_n * \varphi\|_p; \end{aligned}$$

per quanto mostrato in precedenza, prendendo  $n$  sufficientemente grande,

$$\|\varphi - \rho_n * \varphi\|_p < \varepsilon;$$

inoltre si ha

$$\|\rho_n * \varphi - \rho_n * f\|_p = \|\rho_n * (\varphi - f)\|_p \leq \|\rho_n\|_1 \|\varphi - f\|_p \leq \varepsilon;$$

in conclusione, per  $n$  sufficientemente grande,

$$\|f - \rho_n * f\|_p \leq 3\varepsilon;$$

ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Il seguente è un risultato **fondamentale**.

**Teorema 2.10** *Se  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  allora esiste una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  di funzioni di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  tale che*

$$\varphi_n \rightarrow f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mathbf{R}).$$

**Dimostrazione.** Denotiamo

$$f_n = f \cdot \chi_{[-n, n]};$$

allora, per il teorema della convergenza dominata, si avrà che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mathbf{R});$$

poniamo

$$\varphi_n = f_n * \rho_n;$$

allora  $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  e si ha

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_n\|_p &= \|f - f_n * \rho_n\|_p = \\ &= \|f - f_n * \rho_n + f * \rho_n - f * \rho_n\|_p \leq \\ &\leq \|f - f * \rho_n\|_p + \|\rho_n * (f - f_n)\|_p \leq \\ &\leq \|f - f * \rho_n\|_p + \|f - f_n\|_p \cdot \|\rho_n\|_1; \end{aligned}$$

il primo addendo tende a zero, se  $n \rightarrow \infty$ , per quanto mostrato nel teorema precedente; anche il secondo tende a zero.  $\square$

Il risultato precedente afferma la proprietà fondamentale che  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  è **denso** in  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  ( $p = 1, 2$ ); dalla dimostrazione però si ha un risultato ulteriore: supponiamo che  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ , allora esiste una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  di funzioni in  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  che tende a  $f$  **sia** in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  **che** in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ; infatti, le funzioni  $\varphi_n = f_n * \rho_n$ , che sono utilizzate nella dimostrazione, dipendono **soltanto** da  $f$  (e dalla scelta di  $(\rho_n)_{n \geq 1}$ ) **non** da  $p = 1, 2$ .

Il risultato che  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  è denso in  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  può essere esteso al caso di un qualunque sottoinsieme aperto  $\Omega$  di  $\mathbf{R}$ .

**Teorema 2.11**  $C_c^\infty(\Omega)$  è denso in  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  ( $p = 1, 2$ ).

**Dimostrazione.** Sia  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  ed  $\varepsilon > 0$ ; spezziamo la dimostrazione in due passi successivi.

Primo passo: poniamo

$$K_n = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \mathbf{R} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}, |x| \leq n\};$$

allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega,$$

$$K_n \text{ compatto } \forall n, K_{n+1} \supset K_n \text{ per ogni } n, K_n \subset \Omega \text{ per ogni } n;$$

poniamo

$$f_n := f \chi_{K_n};$$

consideriamo  $f^\Omega$  e  $f_n^\Omega$ , i prolungamenti a tutto  $\mathbf{R}$  delle  $f_n$  e di  $f$ ; si ha

$$f_n^\Omega \rightarrow f^\Omega \quad \text{punto per punto,}$$

$$|f_n^\Omega| \leq |f^\Omega| \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}) \quad \forall n;$$

per il teorema della convergenza dominata

$$f_n^\Omega \rightarrow f^\Omega \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mathbf{R});$$

allora esiste un indice  $\bar{n}$  tale che

$$\|f^\Omega - f_{\bar{n}}^\Omega\|_{\mathcal{L}^p(\mathbf{R})} < \varepsilon;$$

poichè  $\text{supp } f_{\bar{n}}^\Omega \subset K_{\bar{n}} \subset \Omega$ , si ha anche

$$f_{\bar{n}} \in \mathcal{L}^p(\Omega)$$

$$\|f - f_{\bar{n}}\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Secondo passo: per un teorema precedente

$$\begin{aligned} \rho_n * f_{\bar{n}}^\Omega &\rightarrow f_{\bar{n}}^\Omega \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mathbf{R}) \\ \text{supp } \rho_n * f_{\bar{n}}^\Omega &\subseteq K_{\bar{n}} + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]; \end{aligned}$$

è sufficiente prendere  $n > \bar{n}$  per avere

$$\rho_n * f_{\bar{n}}^\Omega|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega);$$

in questa maniera si è mostrato che esiste una funzione  $g \in C_c^\infty(\Omega)$ , data esplicitamente da  $\rho_n * f_{\bar{n}}^\Omega|_\Omega$ , per un  $n$  abbastanza grande, tale che

$$\|f_{\bar{n}} - g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} < \varepsilon;$$

allora, in conclusione, si ha

$$\|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|f - f_{\bar{n}}\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|f_{\bar{n}} - g\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

**Corollario 2.12**  $C_c(\Omega)$  è denso in  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  ( $p = 1, 2$ ).

I teoremi di densità che abbiamo ottenuto permettono di approssimare funzioni di  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  con funzioni continue o indefinitamente differenziabili a supporto compatto. Uno dei risultati classici dell'Analisi (che risale a Weierstrass) permette di approssimare **uniformemente** funzioni continue mediante **polinomi** (almeno su insiemi compatti).

Per mostrare questo teorema si può ricorrere alla tecnica di regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione, già utilizzata. Per questo occorre dare una (piccola) generalizzazione del prodotto di convoluzione e della nozione di successione approssimante che abbiamo usato in precedenza.

Supponiamo che  $f$  sia una funzione in  $C_c(\mathbf{R})$  e che  $g$  sia un elemento nello spazio  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  delle funzioni **continue e limitate su tutto  $\mathbf{R}$** .

Per ogni  $y \in \mathbf{R}$

$$(x \mapsto f(x)g(y-x)) \in C_c(\mathbf{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{R}),$$

allora per ogni  $y \in \mathbf{R}$  è definita la funzione

$$f * g(y) = \int f(x)g(y-x) dx.$$

Supponiamo che  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di funzioni tali che

1.  $\varphi_n \in C_c(\mathbf{R})$ ,  $\varphi_n \geq 0$ ,  $\forall n$
2.  $0 \in \text{supp } \varphi_n$ ,  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x) dx = 1$ ,  $\forall n$
3. dati  $\varepsilon, \delta > 0$  esiste  $N$  tale che se  $n \geq N$

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n < \varepsilon;$$

si avrà allora il seguente

**Teorema 2.13** Se  $f \in \mathcal{BC}(\mathbf{R})$  allora

$$\varphi_n * f \rightarrow f$$

uniformemente su ogni compatto  $K$  di  $\mathbf{R}$ .

**Dimostrazione.** Poniamo  $f_n = \varphi_n * f$ . Si ha

$$f_n(y) - f(y) = \int [f(y-x) - f(y)] \varphi_n(x) dx;$$

per la continuità uniforme di  $f$  su  $K$ , si ha che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che se  $|x| < \delta$  per ogni  $y \in K$  si ha  $|f(y-x) - f(y)| < \varepsilon$ ; allora

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \int |f(y-x) - f(y)| \varphi_n(x) dx = \left[ \int_{|x| < \delta} + \int_{|x| \geq \delta} \right] |f(y-x) - f(y)| \varphi_n(x) dx;$$

se  $y \in K$ , per il primo integrale si ha

$$\int_{|x| < \delta} |f(y-x) - f(y)| \varphi_n(x) dx \leq \varepsilon \int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x) dx = \varepsilon;$$

per quel che riguarda il secondo, qualunque sia  $y$ ,

$$\int_{|x| \geq \delta} |f(y-x) - f(y)| \varphi_n(x) dx \leq 2 \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \cdot \int_{|x| \geq \delta} \varphi_n(x) dx \leq 2 \sup |f| \cdot \varepsilon,$$

pur di prendere  $n$  sufficientemente grande.  $\square$

Come applicazione di quest'ultimo risultato possiamo dare una dimostrazione del teorema di Weierstrass; questo teorema afferma che se  $I$  è un **intervallo chiuso e limitato di  $\mathbf{R}$**  e se  $f \in C(I)$ , allora  $f$  è limite uniforme su  $I$  di **una successione di polinomi**; in altre parole l'insieme delle restrizioni ad  $I$  dei polinomi è **uniformemente denso** in  $C(I)$ .

Per mostrare questo risultato possiamo, senza perdere in generalità, supporre che  $f$  sia tale che

$$f(a) = f(b) = 0,$$

denotando  $I = [a, b]$ ; prolunghiamo  $f$  al di fuori di  $[a, b]$ , ponendola uguale a zero su  $\mathbf{R} \setminus [a, b]$ ; in tal modo  $f \in \mathcal{BC}(\mathbf{R})$ ; con un cambiamento di variabili lineare possiamo sempre supporre

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2};$$

poniamo, per ogni intero  $n$ ,

$$g_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1; \end{cases}$$

poniamo

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = \int_{-1}^1 g_n(t) dt$$

$$\varphi_n = a_n^{-1} g_n;$$

si ha dunque

1.  $\varphi_n \geq 0$  e  $\varphi_n \in C_c(\mathbf{R})$
2.  $\text{supp } \varphi_n = [-1, 1]$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 1$ ;

inoltre, poiché

$$1 - x^2 \geq 1 - |x| \quad \text{se } -1 \leq x \leq 1,$$

si ha

$$a_n \geq 2 \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1};$$

$\varphi_n$  è una funzione pari e su  $[\delta, 1]$  (in cui  $0 < \delta \leq 1$ ) si ha

$$0 \leq \varphi_n \leq (n+1)(1-\delta^2)^n;$$

$(1-\delta^2) < 1$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(1-\delta^2)^{-n} = 0$$

ciò significa che  $\forall \delta > 0$

$$\int_{|x|>\delta} \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty;$$

siamo allora nelle ipotesi del teorema precedente e possiamo concludere che

$$\varphi_n * f \rightarrow f$$

uniformemente su ogni compatto di  $\mathbf{R}$ , in particolare su  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ; se  $x, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , si ha

$$g_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n;$$

per  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\varphi_n * f(x) = a_n^{-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) g_n(x-t) dt = a_n^{-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (1-(x-t)^2)^n dt,$$

è data da un polinomio (in  $x$ ) di grado minore o uguale a  $2n$ .

## 2.6 Il teorema fondamentale di annullamento

In un qualunque spazio dotato di misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  si hanno le seguenti proprietà di **annullamento**:

1. se  $A \in \mathcal{A}$  e  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora

$$\int_A |f| d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ quasi ovunque su } A$$

2. se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , allora

$$\int_A f d\mu = 0 \text{ per ogni } A \in \mathcal{A} \iff f = 0 \text{ quasi ovunque su } X$$

Per gli spazi  $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$  si ha un ulteriore, importante, teorema di annullamento il cui uso è estremamente frequente.

**Definizione 2.14** Denoteremo con  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  l'insieme delle funzioni

$$f(\Omega \rightarrow \mathbf{C})$$

tali che  $f\chi_K \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  per ogni **compatto**  $K$  contenuto in  $\Omega$ ; le funzioni in  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  vengono dette "localmente integrabili".

È evidente che  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ; in effetti anche  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ; per mostrare questo fatto, supponiamo che  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  e che  $K$  sia un compatto contenuto in  $\Omega$ ; allora  $\chi_K \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  (poiché la misura di Lebesgue di un insieme compatto è finita) allora

$$f\chi_K \in \mathcal{L}^1(\Omega)$$

e quindi  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

**Teorema 2.15** Se  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  e se

$$\int_{\Omega} f\varphi \, dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

allora

$$f = 0 \quad \text{quasi ovunque su } \Omega.$$

**Dimostrazione.** Primo passo: supponiamo, innanzi tutto,

$$|\Omega| < +\infty, \quad f \in \mathcal{L}^1(\Omega);$$

considerando separatamente la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria di  $f$ , possiamo ricondurci al caso in cui  $f$  è valori reali; consideriamo

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) > 0 \\ -1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

allora  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ; per il teorema 2.11 esiste una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ,  $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$  tale che

$$\varphi_n \rightarrow g \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\Omega);$$

dalla dimostrazione del teorema 2.11 e dalla 3 di pagina 42 si ha che

$$|\varphi_n| \leq 1 \quad \forall n;$$

passando ad una sottosuccessione  $(\varphi_{n_p})_{p \geq 1}$  si ha

$$\begin{array}{ll} \varphi_{n_p} \rightarrow g & \text{punto per punto quasi ovunque su } \Omega, \\ \varphi_{n_p} f \rightarrow gf & \text{punto per punto quasi ovunque su } \Omega, \\ |\varphi_{n_p} f| \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\Omega) : & \end{array}$$

allora per il teorema della convergenza dominata

$$\int_{\Omega} \varphi_{n_p} f \, dx \rightarrow \int_{\Omega} gf \, dx;$$

poiché  $\varphi_{n_p} \in C_c^\infty(\Omega)$ , per ogni  $p$  si ha  $\int_{\Omega} \varphi_{n_p} f \, dx = 0$ , per ipotesi; allora

$$\int_{\Omega} g f \, dx = \int_{\Omega} |f| \, dx = 0;$$

ciò implica che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\Omega$ .

Secondo passo: consideriamo il caso generale; poniamo

$$\Omega_n = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \mathbf{R} \setminus \Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n\};$$

allora si ha

$$\Omega_n \text{ aperto, } \overline{\Omega}_n \text{ compatto, } \overline{\Omega}_n \subset \Omega, \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega;$$

applicando il risultato del primo passo a  $\Omega_n$  e  $f|_{\Omega_n}$ , si ottiene che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\Omega_n$  e quindi che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\Omega$ .  $\square$

# Capitolo 3

## Gli integrali di Fourier su $L^1(\mathbf{R})$ e $L^2(\mathbf{R})$

### 3.1 L'integrale di Fourier su $L^1(\mathbf{R})$

Supponiamo  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ; per ogni  $y \in \mathbf{R}$ , la funzione

$$x \mapsto e^{-ixy} f(x)$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ; poniamo

$$\mathcal{F} f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx.$$

La funzione  $\mathcal{F} f$  è definita su tutto  $\mathbf{R}$  e viene detta l'**integrale di Fourier di  $f$**  (o, anche, la **trasformata di Fourier di  $f$** ).

Evidentemente  $\mathcal{F} f$  dipende soltanto dalla **classe di equivalenza di  $f$  in  $L^1(\mathbf{R})$**  e non da  $f$  stessa; è opportuno considerare  $\mathcal{F}$  come un'applicazione definita su  $L^1(\mathbf{R})$ .

**Proprietà dell'applicazione  $\mathcal{F}$  definita su  $L^1(\mathbf{R})$ .**

1. Poiché  $|e^{-ixy} f(x)| = |f(x)|$ , per ogni  $x \in \mathbf{R}$ , il teorema di continuità di un integrale dipendente da un parametro ci assicura che

$$\mathcal{F} f \in C(\mathbf{R})$$

2. per ogni  $y \in \mathbf{R}$ , si ha

$$|\mathcal{F} f(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1;$$

quindi è

$$\mathcal{F} f \in \mathcal{BC}(\mathbf{R});$$

3. dalla disuguaglianza stabilita in precedenza si ha

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} |\mathcal{F} f(y)| = \|\mathcal{F} f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1;$$

quindi  $\mathcal{F}$  è un'applicazione lineare continua di  $L^1(\mathbf{R})$  in  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$  se questi vengono considerati dotati della norma  $\|\cdot\|_1$  e della norma  $\|\cdot\|_\infty$ , rispettivamente; in particolare, se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbf{R})$ , allora  $\mathcal{F} f_n \rightarrow \mathcal{F} f$  uniformemente su tutto  $\mathbf{R}$ ;

4. notiamo che  $\mathcal{F} f$  non è necessariamente integrabile se  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ; ad esempio, se  $f = \chi_{[-a,a]}$ , ovviamente  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F} f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixy} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ay}{y} \quad y \neq 0 \\ \mathcal{F} f(0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} a\end{aligned}$$

e la funzione  $\mathcal{F} f$  non è in  $L^1(\mathbf{R})$ ;

5. se  $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$  e  $f' \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ , si ha

$$\mathcal{F} f'(y) = iy \mathcal{F} f(y);$$

infatti, se  $f' \in C(\mathbf{R})$  allora si ha  $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$ ; inoltre se  $f' \in L^1(\mathbf{R})$  esistono finiti i limiti  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{x_0}^x f'(t) dt$ ; allora  $f$  ammette limite se  $x \rightarrow \pm\infty$ ; poiché  $f$  è integrabile tale limite è necessariamente nullo; allora si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F} f'(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = (\text{integrando per parti}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iy) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right] = \\ &= iy \cdot \mathcal{F} f(y);\end{aligned}$$

in effetti, la proprietà descritta in questo punto è valida in ipotesi più generali di quelle che abbiamo usato; ad esempio, se  $f$  è continua e derivabile a tratti con continuità (supponiamo anche che i punti di non derivabilità siano in numero finito in ogni intervallo limitato) e se  $f'$  (che risulta così definita quasi ovunque) è in  $L^1(\mathbf{R})$ , allora la proprietà continua a valere;

6. per induzione, se  $f$  ammette derivate continue e integrabili fino all'ordine  $n$ ,

$$\mathcal{F} f^{(n)}(y) = (iy)^n \mathcal{F} f(y);$$

7. se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  e  $xf \in L^1(\mathbf{R})$ , allora  $\mathcal{F} f$  è derivabile, e si ha

$$(\mathcal{F} f)'(y) = -i \mathcal{F}(xf)(y);$$

infatti, le ipotesi fatte permettono di applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale; allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(\mathcal{F} f)(y) &= \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-ixy} f(x) dx = \\ &= -i \mathcal{F}(xf)(y);\end{aligned}$$

(deve essere sottolineato che l'ipotesi  $xf \in L^1(\mathbf{R})$  è indipendente dal supporto  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ; in altre parole, occorre supporre **sia** che  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , **sia** che  $xf \in L^1(\mathbf{R})$ );

8. per induzione, se  $x^n f$  è integrabile, allora  $\mathcal{F} f$  è  $n$  volte derivabile, e si avrà

$$(\mathcal{F} f)^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}(x^n f);$$

deve essere notato che se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  e  $x^n f \in L^1(\mathbf{R})$ , allora **anche**  $x^m f \in L^1(\mathbf{R})$  per ogni  $m \leq n$ ;

9. se  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$  allora esiste il loro prodotto di convoluzione ed è in  $L^1(\mathbf{R})$  (vedi pagina 39); si ha l'uguaglianza (di verifica immediata)

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \cdot \mathcal{F} g;$$

10. (teorema di Riemann-Lebesgue) definiamo

$$C_0(\mathbf{R}) \subset \mathcal{BC}(\mathbf{R})$$

come

$$C_0(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}): f(x) \rightarrow 0 \text{ se } |x| \rightarrow \infty\};$$

allora si ha che  $\mathcal{F} f \in C_0(\mathbf{R})$  se  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ; infatti, supponiamo innanzi tutto  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , allora, se  $y \neq 0$ , si avrà

$$\mathcal{F} f(y) = \frac{1}{iy} \mathcal{F} f'(y);$$

poiché  $\mathcal{F} f' \in \mathcal{BC}(\mathbf{R})$  ne segue

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{1}{iy} \mathcal{F} f'(y) = 0$$

e quindi  $\mathcal{F} f \in C_0(\mathbf{R})$ ; supponiamo ora  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , qualunque sia  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  si avrà

$$\begin{aligned} |\mathcal{F} f(y)| &= |\mathcal{F}(f - \varphi)(y) - \mathcal{F} \varphi(y)| \leq \\ &= |\mathcal{F}(f - \varphi)(y)| + |\mathcal{F} \varphi(y)| \leq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - \varphi\|_1 + |\mathcal{F} \varphi(y)|; \end{aligned}$$

fissato  $\varepsilon > 0$ , scegliamo  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  tale che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$$

(ciò è sempre possibile poiché  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  è denso in  $L^1(\mathbf{R})$ ); fissato  $\varphi$ , poiché  $\mathcal{F} \varphi \in C_0(\mathbf{R})$  (per quanto mostrato nella parte precedente) è possibile scegliere  $|y|$  tanto grande che

$$|\mathcal{F} \varphi(y)| < \varepsilon;$$

in conclusione, per  $y$  sufficientemente grande, si avrà

$$|\mathcal{F} f(y)| < 2\varepsilon$$

e quindi  $\mathcal{F} f \in C_0(\mathbf{R})$ ; deve essere sottolineato che  $\mathcal{F}$  **non** è surgettiva da  $L^1(\mathbf{R})$  a  $C_0(\mathbf{R})$ ;

11. se  $f(x) = e^{-x^2/2}$ , allora  $\mathcal{F} f = f$ ; infatti si ha, ponendo  $g = \mathcal{F} f$ ,

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x),$$

$$g'(y) = -i\mathcal{F}(xf)(y) = i\mathcal{F}f'(y) = i(iy)\mathcal{F}f(y) = -yg(y);$$

l'equazione differenziale  $g'(y) = -yg(y)$  ha come soluzione  $g(y) = ke^{-y^2/2}$ ; la costante  $k$  può essere determinata da

$$k = g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1;$$

12. se  $a \in \mathbf{R}$  poniamo  $f_a(x) := f(x - a)$ , se  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , poniamo  $S_a f(x) := f(\frac{x}{a})$  ed infine  $f^-(x) = f(-x)$ ; con queste notazioni si hanno le formule, di verifica immediata,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F} f_a(y) &= e^{-ia y} \mathcal{F} f(y) \\ \mathcal{F} S_a f(y) &= |a| (S_{\frac{1}{a}} \mathcal{F} f)(y) \\ \mathcal{F} f^- &= (\mathcal{F} f)^- \end{aligned} \right\} f \in L^1(\mathbf{R})$$

13. (teorema di trasferimento) se  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathcal{F} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(x) g(x) dx;$$

(notiamo che gli integrali hanno senso poiché in essi compare il prodotto di una funzione integrabile per una in  $\mathcal{BC}(\mathbf{R})$ ); per provare la relazione precedente, notiamo che la funzione

$$x, y \mapsto e^{-ixy} f(x) g(y)$$

è Lebesgue-integrabile su  $\mathbf{R}^2$  per il teorema di Tonelli; allora, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx dy e^{-ixy} f(x) g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \left( \int dy e^{-ixy} f(x) g(y) \right) = \int dx f(x) \mathcal{F} g(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy \left( \int dx e^{-ixy} f(x) g(y) \right) = \int dy g(y) \mathcal{F} f(y); \end{aligned}$$

14. se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  si annulla al di fuori di un intervallo di lunghezza finita, allora  $\mathcal{F} f$  è la restrizione all'asse reale di una funzione intera; infatti si può notare che per ogni  $z \in \mathbf{C}$  la funzione

$$(x \mapsto e^{-ixz} f(x)) \in L^1(\mathbf{R});$$

quindi è ben definita su tutto  $\mathbf{C}$  la funzione

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixz} f(x) dx$$

che, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, è olomorfa e la cui restrizione ad  $\mathbf{R}$  è  $\mathcal{F} f$ .

Un punto cruciale è quello dell'integrabilità di  $\mathcal{F}f$ ; è possibile stabilire che, almeno per un sottoinsieme denso di  $L^1(\mathbf{R})$ , si ha che anche  $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbf{R})$ ; preliminarmente, notiamo che

$$\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right) \in L^1(\mathbf{R});$$

allora, se la funzione  $f$  è tale che

$$(x \mapsto f(x)(1+x^2))$$

è limitata, allora  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ; infatti

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} f(x)(1+x^2) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

e quindi  $f \in L^1$  (come prodotto di una funzione integrabile per una limitata); con questa premessa, si ha il risultato seguente.

**Teorema 3.1** *Se  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  allora  $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ .*

**Dimostrazione.** Se  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  allora  $f^{(n)} \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  per ogni  $n$ ; da ciò segue che

$$(iy)^n \mathcal{F}f(y) = \mathcal{F}f^{(n)};$$

poiché  $f^{(n)} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , ne segue  $\mathcal{F}f^{(n)} \in \mathcal{BC}(\mathbf{R})$ , da cui si ha che  $(y)^n \mathcal{F}f$  è limitata per ogni  $n$ ; allora

$$y \mapsto (1+y^2)^n \mathcal{F}f(y)$$

è limitata per ogni  $n$ , e quindi  $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbf{R})$ ; dal risultato, ottenuto in precedenza,  $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbf{R})$ , otteniamo  $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ ; ciò implica che  $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R})$ ; infatti,  $\mathcal{F}f$  è misurabile poiché è continua, e  $|\mathcal{F}f|^2$  è integrabile come prodotto di  $|\mathcal{F}f| \in L^1(\mathbf{R})$  con  $|\mathcal{F}f| \in \mathcal{BM}(\mathbf{R})$ ; in conclusione

$$\mathcal{F}f \in C_0(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}). \quad \square$$

Si definisce  $\mathcal{F}^*$  su  $L^1(\mathbf{R})$  ponendo

$$\mathcal{F}^* f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x) dx;$$

evidentemente **tutte** le proprietà stabilite per  $\mathcal{F}$  si trasferiscono (con qualche ovvia modifica dei segni) a  $\mathcal{F}^*$ ; notiamo, in particolare, che è

$$\mathcal{F}^* f = \overline{\mathcal{F} \bar{f}};$$

dopo la definizione di  $\mathcal{F}^*$  è possibile stabilire il seguente risultato.

**Teorema 3.2 (teorema di inversione di Fourier per  $C_c^\infty(\mathbf{R})$ )** *Se  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  allora si ha*

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f,$$

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^* f = f.$$

**Dimostrazione.** Supponiamo di aver mostrato che

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} f(0) = f(0) \quad \text{se } f \in C_c^\infty(\mathbf{R});$$

allora si ha anche

$$f(x) = f_{-x}(0) = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f_{-x}(0) = \mathcal{F}^*(e^{ixy} \mathcal{F} f)(0) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f)(x),$$

per definizione di  $\mathcal{F}^*$ <sup>1</sup>; siamo quindi ricondotti a mostrare che

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} f(0) = f(0) \quad \text{se } f \in C_c^\infty(\mathbf{R});$$

si ha che

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) dy,$$

quindi ciò che vogliamo mostrare è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) dy = f(0);$$

fissiamo  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ , tale che

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(0) = 1;$$

si ha che  $S_a(\varphi)(x) = \varphi(x/a)$ , per cui

$$S_a(\varphi)(x) \rightarrow 1, \quad \text{se } a \rightarrow +\infty, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R};$$

inoltre

$$0 \leq S_a \varphi \leq 1 \quad \forall a;$$

allora il teorema della convergenza dominata ci assicura che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) dy;$$

siamo quindi ricondotti a dimostrare che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy = f(0);$$

per il teorema di trasferimento, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \mathcal{F} S_a \varphi(y) dy,$$

---

<sup>1</sup>infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(e^{ixy} \mathcal{F} f)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izy} e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy, \\ \mathcal{F}^*(e^{ixy} \mathcal{F} f)(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} S_a \varphi(y) = a(S_{\frac{1}{a}} \mathcal{F} \varphi)(y) = a \mathcal{F} \varphi(ay);$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) a \mathcal{F} \varphi(ay) dy;$$

effettuando il cambiamento di variabili  $y \rightarrow \frac{y}{a}$ , si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) \mathcal{F} \varphi(y) dy;$$

se  $a \rightarrow +\infty$  allora  $f\left(\frac{y}{a}\right) \rightarrow f(0)$  per ogni  $y$ ; il teorema della convergenza dominata assicura che

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(y) S_a \varphi(y) dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) \mathcal{F} \varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \varphi(y) dy; \end{aligned}$$

se scegliamo  $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  si ha

$$\mathcal{F} \varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{e} \quad \int \mathcal{F} \varphi(y) dy = \sqrt{2\pi}. \quad \square$$

Il teorema precedente ha alcune **fondamentali** conseguenze:

1. **(teorema di inversione su  $L^1(\mathbf{R})$ )** se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  e  $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbf{R})$  allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{F}^* f &= f \quad \text{in } L^1(\mathbf{R}) \\ \mathcal{F}^* \mathcal{F} f &= f \quad \text{in } L^1(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

infatti supponiamo  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ; per questo mostrato in precedenza

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^* \varphi = \varphi,$$

allora

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \int f(x) \mathcal{F} \mathcal{F}^* \varphi(x) dx,$$

e quindi per il teorema del trasferimento, poiché  $f$ ,  $\mathcal{F} f$ ,  $\mathcal{F} \mathcal{F}^* \varphi$  e  $\mathcal{F}^* \varphi$  sono in  $L^1(\mathbf{R})$ , si ha

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \int \mathcal{F}^* \mathcal{F} f(x) \varphi(x) dx,$$

da cui

$$\int (f(x) - \mathcal{F}^* \mathcal{F} f(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$$

che implica  $f = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f$  quasi ovunque su  $\mathbf{R}$  e quindi l'uguaglianza in  $L^1(\mathbf{R})$ ; analogamente si procede per  $\mathcal{F} \mathcal{F}^*$ ;

2. se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  allora  $\mathcal{F} f = 0$  implica  $f = 0$  quasi ovunque su  $\mathbf{R}$ ; infatti, per il punto 1, essendo  $f \in L^1$  e  $\mathcal{F} f = 0 \in L^1(\mathbf{R})$  si ha

$$f = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 0 \quad \text{quasi ovunque su } \mathbf{R}.$$

La proprietà 2 precedente ci assicura che se due funzioni integrabili,  $f$  e  $g$ , hanno la stessa trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F} f = \mathcal{F} g \quad \text{su tutto } \mathbf{R},$$

allora

$$\mathcal{F}(f - g) = 0 \implies f = g \quad \text{quasi ovunque su } \mathbf{R};$$

in particolare, l'assegnazione di  $\mathcal{F} f$  individua univocamente la classe di equivalenza di  $f$  in  $L^1(\mathbf{R})$ . Ci si può, quindi, porre il problema della ricostruzione di  $f$  (o meglio, della sua classe di equivalenza) a partire dalla conoscenza di  $\mathcal{F} f$ . È questo un argomento particolarmente delicato ed importante; nel seguito ci limiteremo a riassumerne brevemente alcuni punti salienti, in particolare quelli più utili nelle applicazioni.

### Ricostruzione di una funzione integrabile $f$ a partire da $\mathcal{F} f$ .

1. Supponiamo che  $f \in L^1(\mathbf{R})$  ed **anche**  $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbf{R})$ ; allora il teorema di inversione di Fourier su  $L^1(\mathbf{R})$  ci assicura che

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f \quad \text{quasi ovunque su } \mathbf{R};$$

esplicitamente, l'uguaglianza precedente si scrive come

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx, \quad \text{per quasi ogni } y \in \mathbf{R};$$

poiché  $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbf{R})$ , il teorema della convergenza dominata ci assicura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx$$

per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ; quindi, il teorema di inversione di Fourier può essere scritto esplicitamente nella forma

$$f(y) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx, \quad \text{per quasi ogni } y \in \mathbf{R};$$

2. per una **qualunque** funzione integrabile  $f$ , la trasformata  $\mathcal{F}$  non è, in generale, integrabile, quindi il teorema di inversione di Fourier **non può** essere enunciato nella forma

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx, \quad \text{per quasi ogni } y \in \mathbf{R};$$

ciò nonostante, è "a priori" possibile pensare di interpretare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx$$

come un integrale **improprio** (convergente e **non** assolutamente convergente) e, più in particolare, come un **valore principale** ( $\int_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a$ ) sperando di poter mostrare l'uguaglianza

$$f(y) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(x) dx \quad (\text{per "qualche" } y \in \mathbf{R})$$

per una classe più vasta di quella delle funzioni integrabili con trasformata di Fourier integrabile, per le quali abbiamo visto al punto 1 che l'uguaglianza c'è per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ ;

3. se  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , allora  $\mathcal{F}f$  è una funzione continua; quindi l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F}f(x) dx$$

è ben definito per ogni  $a > 0$ ; supponiamo che  $f$  sia **anche** una funzione **liscia a tratti**; con questo intendiamo, con precisione, che  $f$  sia una funzione continua e derivabile su  $\mathbf{R}$  eccetto che in un insieme di punti (che siano o discontinuità o di non derivabilità) che sia **finito** in ogni intervallo limitato; inoltre in tali punti sia  $f$  che  $f'$  possono avere soltanto discontinuità di prima specie (cioè esistono finiti i limiti sinistri,  $f(x^-)$  e  $f'(x^-)$ , e i limiti destri,  $f(x^+)$  e  $f'(x^+)$ , della funzione e della sua derivata in ogni punto  $x$  di  $\mathbf{R}$ ); con queste ipotesi, si può dimostrare che

$$\frac{1}{2}[f(y^+) + f(y^-)] = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F}f(x) dx \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{R};$$

notiamo che il risultato precedente non è il migliore possibile di questo tipo che si possa dimostrare; in altre parole è possibile avere l'uguaglianza per una classe più vasta di quella delle funzioni lisce a tratti; il risultato precedente è però molto utile in pratica, e la sua dimostrazione è del tutto elementare. Proveremo questo fatto spezzando la dimostrazione in passi successivi.

**I passo.**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{iyx} \mathcal{F}f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{iyx} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} f(t) dt \right] dy;$$

per il teorema di Tonelli, la funzione

$$y, t \mapsto \chi_{[-a,a]}(y) e^{iy(x-t)} f(t)$$

è in  $\mathcal{L}^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ ; allora, usando il teorema di Fubini, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{iyx} \mathcal{F}f(y) dy &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-a}^a e^{iy(x-t)} dy \right] dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2i \frac{\sin[a(x-t)]}{i(x-t)} dt = \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(at)}{t} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt. \end{aligned}$$

(Nell'ultimo passaggio  $t \rightarrow -t$ )

**II passo.**

Poiché  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , per ogni  $\epsilon > 0$  possiamo trovare  $b > 0$ , tale che

$$\int_{|t| \geq b} |f(x+t)| dt \leq \epsilon;$$

allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt &= \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{-b} \dots + \int_{-b}^0 \dots + \int_0^b \dots + \int_b^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right]; \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right] \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^b + \int_b^{+\infty} |f(x+t)| dy \right) = \frac{\epsilon}{\pi}, \end{aligned}$$

**indipendentemente da  $a$**  ; cio' mostra che

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right] \right\} = 0$$

**uniformemente rispetto ad  $a$**  ; quindi

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right] \right\} &= \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right] \right\} &= 0; \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right)$$

### III passo.

Vogliamo mostrare che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2} f(x^+)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2} f(x^-);$$

occupiamoci del primo soltanto; il secondo é del tutto analogo. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt - \frac{\pi}{2} f(x^+) &= \\ \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt - \frac{\pi}{2} f(x^+) + f(x^+) \int_0^b \frac{\sin(at)}{t} dt - f(x^+) \int_0^b \frac{\sin(at)}{t} dt &= \\ \int_0^b (f(x+t) - f(x^+)) \frac{\sin(at)}{t} dt + f(x^+) \left[ \int_0^b \frac{\sin(at)}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right] & \end{aligned}$$

si ha anche, ponendo  $at = y$

$$\int_0^b \frac{\sin(at)}{t} dt = \int_0^{ab} \frac{\sin(y)}{y} dy$$

per cui

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin(at)}{t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{ab} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{\pi}{2};$$

siamo così ricondotti a dimostrare che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin(at)}{t} (f(x+t) - f(x^+)) dt = 0 ;$$

si ha

$$\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

e

$$\frac{\sin(at)}{t} (f(x+t) - f(x^+)) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right) ;$$

la funzione

$$t \mapsto \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right)$$

è **limitata** nell'intervallo chiuso  $[0, b]$ , per le ipotesi fatte su  $f$ ; allora la funzione  $g$ , definita da

$$g(t) = \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right) \chi_{[0,b]}$$

è **integrabile** su  $\mathbf{R}$ ; allora

$$\int_0^b \frac{\sin(at)}{t} (f(x+t) - f(x^+)) dt = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iat} - e^{-iat}) g(t) dt =$$

$$\frac{1}{2i} \sqrt{2\pi} (\mathcal{F} g(-a) - \mathcal{F} g(a)) ;$$

poiché  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , si ha

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F} g(-a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F} g(a) = 0 ,$$

per il lemma di Riemann-Lebesgue.

**IV passo.**

Nel secondo passo avevamo ottenuto che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right)$$

nel passo precedente abbiamo mostrato

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \int_{-b}^0 + \int_0^b f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt \right) = \frac{\pi}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

in conclusione

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \mathcal{F} f(y) dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} (f(x^+) + f(x^-)) \right] = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) .$$

### 3.2 Gli operatori di Fourier-Plancherel su $L^2(\mathbf{R})$

Se  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ , ma  $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ , **non** è possibile definire

$$\mathcal{F} f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

poiché la funzione

$$x \mapsto f(x) e^{-ixy}$$

**non** è integrabile; ciò nonostante, è possibile definire su  $L^2(\mathbf{R})$  una trasformazione lineare che coincide con l'integrale di Fourier su  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ .

Se  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$  è anche  $\mathcal{F} f \in L^2(\mathbf{R})$ , come abbiamo visto in precedenza; si ha il seguente

**Lemma 3.3** *Se  $f, g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  allora*

$$(f, g)_2 = (\mathcal{F} f, \mathcal{F} g)_2.$$

**Dimostrazione.**  $(f, g)_2 = \int \overline{f(x)} g(x) dx =$  (per il teorema di inversione su  $C_c^\infty(\mathbf{R})$ )  $= \int \overline{f(x)} \mathcal{F}^* \mathcal{F} g(x) dx =$  (per il teorema di trasferimento applicato a  $\mathcal{F}^*$ , notando che  $\overline{f}, \mathcal{F} g \in L^1(\mathbf{R})$ )  $= \int \mathcal{F}^* \overline{f(x)} \cdot \mathcal{F} g(x) dx = \int \overline{\mathcal{F} f(x)} \cdot \mathcal{F} g(x) dx = (\mathcal{F} f, \mathcal{F} g)_2. \square$

Evidentemente, il lemma precedente implica che, se  $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\|f\|_2 = \|\mathcal{F} f\|_2$ ; è questo il risultato che permette il **prolungamento** dell'applicazione  $\mathcal{F}$  da  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  a  $L^2(\mathbf{R})$ ; i punti essenziali di questa costruzione sono i seguenti:

1. se  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , esiste una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi_n &\in C_c^\infty(\mathbf{R}) && \text{per ogni } n \geq 1 \\ \varphi_n &\rightarrow f && \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

2. poiché  $\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbf{R})$ , la successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy, rispetto alla norma  $\|\cdot\|_2$ ; anche la successione  $(\mathcal{F} \varphi_n)_{n \geq 1}$  è di Cauchy in  $L^2(\mathbf{R})$ , infatti si ha, per ogni coppia di interi  $n, p$ ,

$$\|\mathcal{F} \varphi_p - \mathcal{F} \varphi_n\|_2 = \|\mathcal{F}(\varphi_p - \varphi_n)\|_2 = \|\varphi_p - \varphi_n\|_2;$$

per la completezza di  $L^2(\mathbf{R})$ , la successione  $(\mathcal{F} \varphi_n)_{n \geq 1}$  converge, in  $L^2(\mathbf{R})$ , ad un (unico) elemento di  $L^2(\mathbf{R})$ ; si **definisce**, allora,

$$\tilde{\mathcal{F}} f := \|\cdot\|_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F} \varphi_n;$$

(questa definizione di  $\tilde{\mathcal{F}}$  spiega il perché si operi a livello di  $L^2(\mathbf{R})$  e non di  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ :  $\tilde{\mathcal{F}} f$  è definito come un limite nella norma  $\|\cdot\|_2$ ; tale limite è **unico** in  $L^2(\mathbf{R})$  e **non** in  $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ );

3. l'elemento  $\tilde{\mathcal{F}} f$  di  $L^2(\mathbf{R})$  **non** dipende dalla scelta della successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  usata per approssimare  $f$  in  $L^2(\mathbf{R})$ ; infatti, se anche  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  tale che

$$\psi_n \rightarrow f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}),$$

si ha

$$\|\varphi_n - \psi_n\|_2 = \|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}\psi_n\|_2 \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow \infty;$$

inoltre

$$\|\tilde{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}\psi_n\|_2 \leq \|\tilde{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}\varphi_n\|_2 + \|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}\psi_n\|_2;$$

il membro di destra della disuguaglianza tende a 0 se  $n \rightarrow \infty$ ; ciò mostra che le successioni  $(\mathcal{F}\varphi_n)_{n \geq 1}$  e  $(\mathcal{F}\psi_n)_{n \geq 1}$  tendono allo stesso limite,  $\tilde{\mathcal{F}}f$ , in  $L^2(\mathbf{R})$ ;

4. si è così definita un'applicazione

$$\tilde{\mathcal{F}}(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$$

che è, in maniera ovvia, **lineare**;

5. l'applicazione

$$\tilde{\mathcal{F}}(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$$

lascia **invariante** il prodotto scalare di  $L^2(\mathbf{R})$ ; cioè esplicitamente,

$$(f, g)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}f, \tilde{\mathcal{F}}g)_2 \quad \text{per ogni } f, g \in L^2(\mathbf{R});$$

infatti, scegliamo due successioni  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  e  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$ , tali che

$$\begin{aligned} \varphi_n &\rightarrow f && \text{in } L^2(\mathbf{R}) \\ \psi_n &\rightarrow g && \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

allora si avrà

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\varphi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}f && \text{in } L^2(\mathbf{R}) \\ \mathcal{F}\psi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}g && \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

per ogni  $h \in L^2(\mathbf{R})$ , si ha

$$|(f, h)_2 - (\varphi_n, h)_2| = |(f - \varphi_n, h)_2| \leq \|f - \varphi_n\|_2 \cdot \|h\|_2;$$

ciò mostra che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n, h)_2 = (f, h)_2 \quad \text{per ogni } h \in L^2(\mathbf{R});$$

analogamente si può mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h, \psi_n)_2 = (h, g)_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{F}\varphi_n, h)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}f, h)_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h, \mathcal{F}\psi_n)_2 = (h, \tilde{\mathcal{F}}g)_2$$

per ogni  $h \in L^2(\mathbf{R})$ ; da queste uguaglianze si ha che

$$(\tilde{\mathcal{F}}f, \tilde{\mathcal{F}}g)_2 = \lim_{n, p \rightarrow \infty} (\mathcal{F}\varphi_n, \mathcal{F}\psi_p)_2 = \lim_{n, p \rightarrow \infty} (\varphi_n, \psi_p)_2 = (f, g)_2$$

per ogni  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ ;

6. dal punto precedente deriva che  $\tilde{\mathcal{F}}$  mantiene **invariata la norma** di  $L^2(\mathbf{R})$ ; infatti

$$\|f\|_2^2 = (f, f)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}f, \tilde{\mathcal{F}}f)_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}f\|_2^2$$

per ogni  $f \in L^2(\mathbf{R})$ ; da questo si ha la proprietà **fondamentale di continuità** di  $\tilde{\mathcal{F}}$  su  $L^2(\mathbf{R})$ ; esplicitamente se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una qualunque successione di  $L^2(\mathbf{R})$  tale che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

allora

$$\|\tilde{\mathcal{F}}f - \tilde{\mathcal{F}}f_n\|_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}(f - f_n)\|_2 = \|f - f_n\|_2$$

e ciò mostra che anche

$$\tilde{\mathcal{F}}f_n \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

in altri termini, si ha

$$\|\cdot\|_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{F}}f_n = \tilde{\mathcal{F}}(\|\cdot\|_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n);$$

7.  $\tilde{\mathcal{F}}(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$  **prolunga** l'applicazione  $\mathcal{F}$ , ristretta a  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ ; infatti, se  $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  è possibile definire, simultaneamente,  $\tilde{\mathcal{F}}f$  e  $\mathcal{F}f$ ; scegliamo una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  che converga ad  $f$  **sia** in  $L^1(\mathbf{R})$  **che** in  $L^2(\mathbf{R})$  (vedi teorema 2.10 e commento successivo); allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\varphi_n &\rightarrow \mathcal{F}f \quad \text{uniformemente su } \mathbf{R}; \\ \mathcal{F}\varphi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

ciò implica che

$$\tilde{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f \quad \text{quasi ovunque, cioè in } L^2(\mathbf{R});$$

8. evidentemente,  $\tilde{\mathcal{F}}(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$  è l'**unica** trasformazione lineare di  $L^2(\mathbf{R})$  in sé che sia continua e che, ristretta a  $C_c^\infty(\mathbf{R})$ , coincida con  $\mathcal{F}$ ;

9. si può definire **anche** una trasformazione lineare

$$\tilde{\mathcal{F}}^*(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$$

che estende  $\mathcal{F}^*$  su  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ ; tutto quanto visto in precedenza per  $\tilde{\mathcal{F}}$  vale anche per  $\tilde{\mathcal{F}}^*$ ;

10. (**teorema di inversione su  $L^2(\mathbf{R})$** ) per ogni  $f \in L^2(\mathbf{R})$  si hanno le seguenti uguaglianze, **nel senso di  $L^2(\mathbf{R})$** ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^* \tilde{\mathcal{F}}f &= f, \\ \tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{F}}^*f &= f; \end{aligned}$$

infatti, se la successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  converge a  $f$  in  $L^2(\mathbf{R})$ , si avrà

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\varphi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}) \\ \mathcal{F}^*\varphi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^*f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

allora la continuità di  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^*$  su  $L^2(\mathbf{R})$  implica che

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^* \mathcal{F}\varphi_n &= \mathcal{F}^* \mathcal{F}\varphi_n = \varphi_n \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^* \tilde{\mathcal{F}}f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}) \\ \tilde{\mathcal{F}} \mathcal{F}^*\varphi_n &= \mathcal{F} \mathcal{F}^*\varphi_n = \varphi_n \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{F}}^*f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

in particolare, le relazioni precedenti assicurano che  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^*$  sono due trasformazioni lineari **l'una l'inversa dell'altra** su  $L^2(\mathbf{R})$ , e che entrambe sono **surgettive**;

11. si hanno le uguaglianze

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathcal{F}}^* f, g)_2 &= (f, \tilde{\mathcal{F}} g)_2 \\(\tilde{\mathcal{F}} f, g)_2 &= (f, \tilde{\mathcal{F}}^* g)_2\end{aligned}$$

per tutti gli  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ ; infatti, per verificare la prima, ad esempio (l'altra è del tutto analoga), si ha

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathcal{F}}^* f, g)_2 &= (\text{per il punto precedente}) = \\&= (\tilde{\mathcal{F}}^* f, \tilde{\mathcal{F}}^* \tilde{\mathcal{F}} g)_2 = \\&= (\text{per il punto 5}) = \\&= (f, \tilde{\mathcal{F}} g)_2\end{aligned}$$

La discussione precedente può essere sintetizzata nell'enunciato di un teorema; la sua importanza è fondamentale ed esso costituisce, senza esagerazioni, una delle pietre angolari dell'Analisi Funzionale:

**Teorema 3.4 (di Plancherel)** *Le due applicazioni  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^*$ , ristrette a  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ , si prolungano univocamente a due trasformazioni lineari continue  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^*$ , definite su tutto  $L^2(\mathbf{R})$ , mutuamente inverse l'una dell'altra, che mantengono invariante prodotto scalare e norma di  $L^2(\mathbf{R})$ , e tali che*

$$\begin{aligned}(f, \tilde{\mathcal{F}} g)_2 &= (\tilde{\mathcal{F}}^* f, g)_2 \\(f, \tilde{\mathcal{F}}^* g)_2 &= (\tilde{\mathcal{F}} f, g)_2\end{aligned}$$

per tutti gli  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ .

Le trasformazioni lineari  $\tilde{\mathcal{F}}(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^*(L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}))$  vengono dette **operatori di Fourier-Plancherel** su  $L^2(\mathbf{R})$ .

**Proprietà degli operatori  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^*$ .**

1. Le proprietà di  $\tilde{\mathcal{F}}$  e di  $\tilde{\mathcal{F}}^*$  di estendere la definizione di  $\mathcal{F}$  ed  $\mathcal{F}^*$  su  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  è alla base di un metodo **pratico** per il calcolo di  $\tilde{\mathcal{F}}^* f$  e  $\tilde{\mathcal{F}} f$ . Se  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , per ogni  $a > 0$ , la funzione

$$f_a := \chi_{[-a, a]} \cdot f$$

è in  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ ; per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_a = f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

allora, per la **continuità** di  $\tilde{\mathcal{F}}$ , si ha

$$\tilde{\mathcal{F}} f = \lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{F}} f_a = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F} f_a;$$

esplicitamente, quest'ultima uguaglianza è

$$\tilde{\mathcal{F}} f = \|\cdot\|_2 - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixy} f(x) dx;$$

ovviamente, si ha la formula analoga per  $\tilde{\mathcal{F}}^*$

$$\tilde{\mathcal{F}}^* f = \|\cdot\|_2 - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} f(x) dx;$$

queste formule non sono molto piú convenienti, per il calcolo di  $\tilde{\mathcal{F}} f$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^* f$ , rispetto all'uso della definizione, poiché ne riconducono il calcolo ad un limite nella norma  $\|\cdot\|_2$ , che non è molto maneggevole; **nel caso che il limite**

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixy} f(x) dx$$

**esista finito**, almeno per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$ , allora tale limite **coincide** con (la classe di equivalenza di)  $\tilde{\mathcal{F}} f$  (vedi teorema 1.31, a pagina 23); è questo il metodo **pratico** per il calcolo esplicito di  $\tilde{\mathcal{F}} f$  e  $\tilde{\mathcal{F}}^* f$ : si studia l'esistenza, **punto per punto**, del limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{\pm ixy} f(x) dx;$$

deve essere sottolineato, però, che **può** esistere il limite, per  $a \rightarrow \infty$ , di  $\mathcal{F}_a f$  nella norma  $\|\cdot\|_2$ , **senza** che ci sia convergenza punto per punto quasi ovunque);

2. si hanno le uguaglianze, che devono essere **intese nel senso di  $L^2(\mathbf{R})$** ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f) &= (\tilde{\mathcal{F}} f)_a && \text{per ogni } a \in \mathbf{R} \\ \tilde{\mathcal{F}} f_a &= e^{-iax} \tilde{\mathcal{F}} f && \text{per ogni } a \in \mathbf{R} \\ \tilde{\mathcal{F}} f^- &= (\tilde{\mathcal{F}} f)^- \\ \tilde{\mathcal{F}}(S_a f) &= a(S_{\frac{1}{a}} \tilde{\mathcal{F}} f) && \text{per ogni } a \neq 0 \text{ in } \mathbf{R}; \end{aligned}$$

ad esempio, mostriamo la prima; le altre sono del tutto simili: per ogni  $a \in \mathbf{R}$  la funzione

$$x \mapsto e^{iax} f(x) \in L^2(\mathbf{R}),$$

quindi, per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , si ha

$$\begin{aligned} (\varphi, \tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f))_2 &= (\mathcal{F}^* \varphi, e^{iax} f)_2 = (e^{-iax} \mathcal{F}^* \varphi, f)_2 = (\mathcal{F}^* \varphi_{-a}, f)_2 = \\ &= (\varphi_{-a}, \tilde{\mathcal{F}} f)_2 = \int \overline{\varphi(x+a)} \tilde{\mathcal{F}} f(x) dx = \int \overline{\varphi(x)} \tilde{\mathcal{F}} f(x-a) dx = \\ &= (\varphi, (\tilde{\mathcal{F}} f)_a)_2; \end{aligned}$$

quindi, per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , si ha

$$\int \overline{\varphi(x)} (\tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f)(x) - (\tilde{\mathcal{F}} f)_a(x)) dx = 0;$$

la funzione

$$x \mapsto \tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f)(x) - (\tilde{\mathcal{F}} f)_a(x)$$

è in  $L^2(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R})$ , quindi, per il teorema fondamentale di annullamento (teorema 2.15 di pagina 52),

$$\tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f) = (\tilde{\mathcal{F}} f)_a \quad \text{quasi ovunque}$$

e

$$\tilde{\mathcal{F}}(e^{iax} f) = (\tilde{\mathcal{F}} f)_a \quad \text{in } L^2(\mathbf{R})$$

3. se  $f, xf \in L^2(\mathbf{R})$  e  $\tilde{\mathcal{F}} f \in C^1(\mathbf{R})$ , allora si ha l'uguaglianza, in  $L^2(\mathbf{R})$ ,

$$(\tilde{\mathcal{F}} f)' = -i \tilde{\mathcal{F}}(xf);$$

infatti, per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , si ha

$$(\varphi, \tilde{\mathcal{F}}(xf))_2 = (\mathcal{F}^* \varphi, xf)_2;$$

notiamo che  $x \mathcal{F}^* \varphi \in L^2(\mathbf{R})$  (infatti, se  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  anche  $\varphi' \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  e  $(\mathcal{F}^* \varphi')(x) = -ix \mathcal{F}^* \varphi$ , da cui  $x \mathcal{F}^* \varphi \in L^2(\mathbf{R})$ ); allora si ha

$$\begin{aligned} (\varphi, \tilde{\mathcal{F}} xf)_2 &= (x \mathcal{F}^* \varphi, f)_2 = (\mathcal{F}^* \varphi', -if)_2 = (\varphi', -i \tilde{\mathcal{F}} f)_2 = \\ &= \int \left( \frac{d}{dx} \varphi(x) \right) (-i \tilde{\mathcal{F}} f)(x) dx = \text{(integrando per parti)} \\ &= - \int \overline{\varphi(x)} \frac{d}{dx} (-i \tilde{\mathcal{F}} f)(x) dx; \end{aligned}$$

per il teorema di annullamento

$$(\tilde{\mathcal{F}} f)' = -i \tilde{\mathcal{F}}(xf) \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

4. se  $f \in L^2(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$  e  $f' \in L^2(\mathbf{R})$  allora

$$\tilde{\mathcal{F}} f' = ix \tilde{\mathcal{F}} f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

infatti, per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ , si ha

$$\begin{aligned} (\varphi, \tilde{\mathcal{F}} f')_2 &= (\mathcal{F}^* \varphi, f')_2 = \text{(integrando per parti)} \\ &= -((\mathcal{F}^* \varphi)', f)_2 = -(i \mathcal{F}^*(x\varphi), f)_2 = (x\varphi, i \tilde{\mathcal{F}} f)_2; \end{aligned}$$

si ricava allora

$$\int \overline{\varphi(x)} (\tilde{\mathcal{F}} f'(x) - ix \tilde{\mathcal{F}} f(x)) dx = 0$$

per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ; per il teorema di annullamento, si può concludere che

$$\tilde{\mathcal{F}} f' = ix \tilde{\mathcal{F}} f \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

anche a questo punto può essere fatto lo stesso commento fatto alla fine del punto 5 di pagina 56; la proprietà vale in ipotesi più generali; in particolare, si possono usare per  $f$  ipotesi uguali a quelle descritte a pagina 56, punto 5 (cambiando  $L^1$  con  $L^2$ );

5. se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  e  $g \in L^2(\mathbf{R})$  allora si ha  $f * g \in L^2(\mathbf{R})$  e

$$\tilde{\mathcal{F}}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

per mostrare questo fatto scegliamo una successione  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $C_c^\infty(\mathbf{R})$  tali che

$$\psi_n \rightarrow g \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

si ha  $f * \psi_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  e

$$f * \psi_n \rightarrow f * g \quad \text{in } L^2(\mathbf{R});$$

infatti

$$\begin{aligned} \|f * \psi_n - f * g\|_2 &= \|f * (\psi_n - g)\|_2 \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \|\psi_n - g\|_2 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

da questo si deduce

$$\tilde{\mathcal{F}}(f * \psi_n) = \mathcal{F}(f * \psi_n) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(f * g) \text{ in } L^2(\mathbf{R});$$

d'altra parte

$$\mathcal{F}(f * \psi_n) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \cdot \mathcal{F} \psi_n \rightarrow \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g \text{ in } L^2(\mathbf{R});$$

infatti

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F} f \cdot \mathcal{F} \psi_n - \mathcal{F} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g\|_2 &\leq \|\mathcal{F} f\|_\infty \cdot \|\mathcal{F} \psi_n - \tilde{\mathcal{F}} g\|_2 \\ &= \|\mathcal{F} f\|_\infty \cdot \|\psi_n - g\|_2 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\tilde{\mathcal{F}}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g \text{ in } L^2(\mathbf{R}).$$

6. se  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ , allora

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}^*(\tilde{\mathcal{F}} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g) = f * g;$$

notiamo, innanzi tutto, che  $\tilde{\mathcal{F}} f$  e  $\tilde{\mathcal{F}} g$  sono in  $L^2(\mathbf{R})$  quindi il loro prodotto è in  $L^1(\mathbf{R})$  ed il primo membro è ben definito; d'altra parte, avevamo già visto come il prodotto di convoluzione tra elementi di  $L^2(\mathbf{R})$  sia definito (vedi pagina 43); deve essere sottolineato come entrambi i membri dell'uguaglianza siano funzioni **continue**, quindi l'uguaglianza stessa può essere interpretata come un'usuale uguaglianza **punto per punto** di due funzioni continue, **su tutto  $\mathbf{R}$** ; come ultimo commento, notiamo che sarebbe “più bello” scrivere

$$\sqrt{2\pi} \tilde{\mathcal{F}} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g = \mathcal{F}(f * g);$$

il secondo membro risulterebbe, però, non definito in quanto  $f * g$ , che è una funzione continua e limitata, **non** è, in generale, **né** in  $L^1(\mathbf{R})$  **né** in  $L^2(\mathbf{R})$  (in effetti, è possibile dare senso all'uguaglianza precedente nell'ambito della teoria delle “distribuzioni temperate”); ciò detto, per mostrare l'uguaglianza

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}^*(\tilde{\mathcal{F}} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} f) = f * g$$

si può procedere come segue: per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f * g \varphi \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) g(x-y) \\ &= (\text{per il teorema di Fubini}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) g(x-y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) (\varphi * g^-)(y) \\ &= (\overline{\varphi * g^-}, f)_{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{(per il teorema di Plancherel)} \\
&= \left( \overline{\tilde{\mathcal{F}}^* \varphi * g^-}, \tilde{\mathcal{F}} f \right)_{L^2} \\
&= \text{(per il punto precedente)} \\
&= \sqrt{2\pi} \left( \overline{\mathcal{F}^* \varphi \cdot \tilde{\mathcal{F}}^* g^-}, \tilde{\mathcal{F}} f \right)_{L^2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{F}^* \varphi \cdot \tilde{\mathcal{F}} g \cdot \tilde{\mathcal{F}} f \\
&= \text{(per il teorema del trasferimento su } L^1(\mathbf{R})) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{F}^* (\tilde{\mathcal{F}} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g) \cdot \varphi;
\end{aligned}$$

usando il teorema di annullamento in  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$  si ottiene

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}^* (\tilde{\mathcal{F}} f \cdot \tilde{\mathcal{F}} g) = f * g \text{ in } L^2(\mathbf{R}).$$



# Capitolo 4

## Basi hilbertiane negli spazi $L^2(\Omega)$

### 4.1 Definizione e proprietà delle basi hilbertiane negli spazi $L^2(\Omega)$

In questo capitolo studieremo particolari successioni di funzioni negli spazi  $L^2(\Omega)$  che **generalizzano** la nozione algebrica di base di uno spazio vettoriale.

Useremo ripetutamente piú avanti i risultati del lemma seguente; essi esprimono le fondamentali proprietà di **continuità** della norma e del prodotto scalare in  $L^2(\Omega)$ .

**Lemma 4.1** *Se  $(f_n)_{n \geq 1}$  è una successione di elementi di  $L^2(\Omega)$  ed  $f$  è un elemento di  $L^2(\Omega)$ , tali che*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

*allora*

1.  $\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2,$

2. per ogni  $g \in L^2(\Omega)$

$$(g, f)_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (g, f_n)_2.$$

**Dimostrazione.**

1. Se  $f$  e  $g$  sono due qualunque elementi di  $L^2(\Omega)$  si ha

$$\|f\|_2 = \|f - g + g\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g\|_2,$$

$$\|g\|_2 = \|g - f + f\|_2 \leq \|g - f\|_2 + \|f\|_2,$$

da cui

$$\|f\|_2 - \|g\|_2 \leq \|f - g\|_2,$$

$$\|g\|_2 - \|f\|_2 \leq \|f - g\|_2;$$

si ottiene così la disuguaglianza

$$|\|f\|_2 - \|g\|_2| \leq \|f - g\|_2;$$

per ogni  $n \geq 1$  si avrà, utilizzando questa disuguaglianza,

$$|\|f\|_2 - \|f_n\|_2| \leq \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty;$$

2. si ha  $|(g, f)_2 - (g, f_n)_2| = |(g, f - f_n)_2| = \left| \int_{\Omega} \overline{g(x)}(f(x) - f_n(x)) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |g(x)| \cdot |f(x) - f_n(x)| \, dx \leq$  (per la disuguaglianza di Hölder)  $\leq \|g\|_2 \cdot \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Definizioni.**

1. Data una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $L^2(\Omega)$ , diremo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  è **convergente in  $L^2(\Omega)$**  se esiste una funzione  $f \in L^2(\Omega)$  tale che

$$f = \|\cdot\|_2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n;$$

in altre parole,  $f$  è il **limite in  $L^2(\Omega)$**  della successione delle somme parziali ridotte della serie;  $f$  viene detta la **somma** della serie;

2. una successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $L^2(\Omega)$  viene detta **ortonormale** quando

$$(f_n, f_p)_2 = \delta_{np}, \quad \text{per ogni } n, p \geq 1;$$

3. una successione  $(e_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $L^2(\Omega)$  viene detta **base hilbertiana** di  $L^2(\Omega)$  quando

- (a)  $(e_n)_{n \geq 1}$  è una successione ortonormale,  
 (b) la successione  $(e_n)_{n \geq 1}$  è **totale** in  $L^2(\Omega)$ , cioè

$$(e_n, f)_2 = 0 \quad \forall n \geq 1 \implies f = 0 \text{ in } L^2(\Omega).$$

**Proprietà delle serie convergenti e delle basi hilbertiane in  $L^2(\Omega)$ .**

1. Supponiamo che  $(e_n)_{n \geq 1}$  sia una successione ortonormale in  $L^2(\Omega)$ , e che  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di numeri complessi; allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ è convergente in } L^2(\Omega) \iff \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty;$$

infatti, se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  è convergente in  $L^2(\Omega)$ , il punto 1 del lemma 4.1 ci assicura che

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ciò mostra che la serie (a termini positivi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

è convergente; inversamente, per ogni coppia di interi,  $p$  e  $q$  (per fissare le idee, supponiamo  $q \geq p$ ), si ha

$$\left\| \sum_{n=p}^q \alpha_n e_n \right\|_2^2 = \left( \sum_{n=p}^q \alpha_n e_n, \sum_{k=p}^q \alpha_k e_k \right)_2 = \sum_{n,k=p}^q \bar{\alpha}_n \alpha_k (e_n, e_k)_2 = \sum_{n=p}^q |\alpha_n|^2;$$

4.1. *DEFINIZIONE E PROPRIETÀ DELLE BASI HILBERTIANE NEGLI SPAZI  $L^2(\Omega)$*  77

poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  è convergente, per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\sum_{n=p}^q |\alpha_n|^2 < \varepsilon$$

purché  $p$  e  $q$  siano sufficientemente grandi; ciò mostra che la successione delle ridotte

$$\left( \sum_{n=1}^p \alpha_n e_n \right)_{p \geq 1}$$

è di Cauchy in  $L^2(\Omega)$ , e quindi converge in  $L^2(\Omega)$ ;

2. se  $(e_n)_{n \geq 1}$  è una successione ortonormale in  $L^2(\Omega)$  e  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  è una successione in  $\mathbf{C}$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  sia convergente in  $L^2(\Omega)$  ad un elemento  $f$ , allora

$$\|f\|_2^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

e per ogni  $n \geq 1$

$$\alpha_n = (e_n, f)_2;$$

infatti, entrambe le uguaglianze discendono immediatamente dal lemma 4.1 e dalla definizione di serie convergente in  $L^2(\Omega)$ ;

3. supponiamo che  $(e_n)_{n \geq 1}$  sia una **base hilbertiana** in  $L^2(\Omega)$ , allora ogni  $f \in L^2(\Omega)$  può essere espressa come somma di una serie convergente in  $L^2(\Omega)$ , nella maniera seguente:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_2 e_n;$$

è necessario sottolineare che l'uguaglianza precedenza deve essere intesa in  $L^2(\Omega)$ ; per mostrare questa proprietà, mostriamo, innanzi tutto, che la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, f)_2|^2$$

è convergente; si tratta, infatti, di una serie a termini positivi le cui somme parziali sono limitate da  $\|f\|_2^2$ ;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{n=1}^N (e_n, f)_2 e_n \right\|_2^2 = \left( f - \sum_{n=1}^N (e_n, f)_2 e_n, f - \sum_{n=1}^N (e_n, f)_2 e_n \right)_2 = \\ &= - \sum_{n=1}^N \overline{(e_n, f)_2} (e_n, f)_2 - \sum_{n=1}^N (e_n, f)_2 (f, e_n)_2 + (f, f)_2 + \sum_{k,n=1}^N \overline{(e_k, f)_2} (e_n, f)_2 (e_k, e_n)_2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^N |(e_n, f)_2|^2, \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^N |(e_n, f)_2|^2 \leq \|f\|_2^2;$$

allora, per quanto visto al punto 1, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_2 e_n$  converge in  $L^2(\Omega)$ ; mostriamo, inoltre che

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_2 e_n$$

in  $L^2(\Omega)$ ; per l'ipotesi che  $(e_n)_{n \geq 1}$  è totale, è sufficiente mostrare che

$$f - \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_2 e_n \in L^2(\Omega)$$

è ortogonale agli  $e_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); si ha, per ogni  $n \geq 1$ , utilizzando il punto 2 del lemma 4.1,

$$\begin{aligned} \left( e_n, f - \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f)_2 e_k \right)_2 &= (e_n, f)_2 - \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f)_2 (e_n, e_k)_2 = \\ &= (e_n, f)_2 - \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f)_2 \delta_{nk} = 0; \end{aligned}$$

4. utilizzando il punto 2 del lemma 4.1, per ogni coppia  $f, g \in L^2(\Omega)$  si ha

$$\begin{aligned} (f, g)_2 &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f)_2 e_k, \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, g)_2 e_n \right)_2 = \\ &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \overline{(e_k, f)_2} (e_n, g)_2 \delta_{kn} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_2 (e_n, g)_2; \end{aligned}$$

l'ultima serie converge assolutamente, poiché si ha<sup>1</sup>

$$\left| \overline{(e_n, f)_2} (e_n, g)_2 \right| \leq \frac{1}{2} \left( |(e_n, f)_2|^2 + |(e_n, g)_2|^2 \right)$$

nel caso particolare  $f = g$  si ricava

$$\|f\|_2^2 = (f, f)_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, f)_2|^2;$$

5. supponiamo che  $(e_n)_{n \geq 1}$  sia una successione ortonormale in  $L^2(\Omega)$ ; denotiamo con  $F$  l'insieme di tutte le **combinazioni lineari finite** (a coefficienti in  $\mathbf{C}$ ) degli elementi della successione  $(e_n)_{n \geq 1}$ ; in altre parole  $F$  è il sottospazio vettoriale di  $L^2(\Omega)$  generato **algebricamente** dagli  $(e_n)$ ; allora sono tra essi equivalenti

(a)  $(e_n, f)_2 = 0 \ \forall n \geq 1 \implies f = 0$  in  $L^2(\Omega)$ ,

(b)  $F$  è **denso** in  $L^2(\Omega)$ ;

---

<sup>1</sup>se  $a$  e  $b$  sono due qualunque numeri complessi  $(|a| - |b|)^2 \geq 0 \implies |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \geq 0 \implies \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) \geq |a| \cdot |b|$ .

infatti, per mostrare che (a) implica (b) è sufficiente notare che per il punto 3 ogni  $f \in L^2(\Omega)$  è scrivibile come  $f = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_2 e_n$ ; cioè ogni  $f$  è limite in  $L^2(\Omega)$  di una successione di elementi di  $F$ ; inversamente, se  $F$  è denso in  $L^2(\Omega)$  allora ogni  $g \in L^2(\Omega)$  è limite in  $L^2(\Omega)$  di una successione  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  di elementi di  $F$ ,

$$\varphi_n \rightarrow g \quad \text{in } L^2(\Omega);$$

se  $(e_k, f)_2 = 0 \quad \forall k \geq 1$  allora  $(\varphi, f)_2 = 0$  per ogni  $\varphi \in F$ , e si ha, per ogni  $g \in L^2(\Omega)$ ,

$$(f, g)_2 = (f, \lim \varphi_n)_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n)_2 = 0 \implies f = 0.$$

Nel seguito utilizzeremo anche una generalizzazione delle proprietà descritte in questo paragrafo.

Supponiamo che  $(f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  sia una famiglia di  $L^2(\Omega)$  indicizzata dagli interi relativi  $\mathbf{Z}$ ; una tale famiglia verrà anche chiamata **successione bilaterale**.

Le definizioni di successione bilaterale ortonormale e di successione bilaterale totale si generalizzano in maniera ovvia dalle corrispondenti definizioni per le successioni.

Data una successione bilaterale  $(f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  in  $L^2(\Omega)$  diremo che la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n$$

converge in  $L^2(\Omega)$  a  $f \in L^2(\Omega)$  se

$$f = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} f_n,$$

cioè se  $f$  è il limite in  $L^2(\Omega)$  della successione delle somme parziali

$$\left( \sum_{n=-N}^{n=N} f_n \right)_{N \geq 0}.$$

Con questa definizione, si possono ripetere, parola per parola, i ragionamenti fatti per le successioni; si ottengono le seguenti conclusioni:

1. una successione bilaterale  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  di elementi di  $L^2(\Omega)$  viene detta una base Hilbertiana di  $L^2(\Omega)$  quando è ortonormale e totale;
2. se  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una successione bilaterale ortonormale di elementi di  $L^2(\Omega)$  e se  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una successione bilaterale di numeri complessi allora la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n e_n$$

converge in  $L^2(\Omega)$  se e solo se la serie  $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\alpha_n|^2$  è convergente (nel senso che  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |\alpha_n|^2$  esiste finito);

3. se  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una base Hilbertiana di  $L^2(\Omega)$ , allora, per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  si ha

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (e_n, f) e_n,$$

nel senso che la serie al membro di destra converge ad  $f$  in  $L^2(\Omega)$ ; inoltre

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |(e_n, f)|^2$$

e, se anche  $g \in L^2(\Omega)$ ,

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (f, e_n) (e_n, g);$$

4. se  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una successione bilaterale ortonormale di elementi di  $L^2(\Omega)$ , allora  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una base Hilbertiana di  $L^2(\Omega)$  se e solo se lo spazio vettoriale di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è denso in  $L^2(\Omega)$ .

## 4.2 Le basi trigonometriche

Consideriamo il sottoinsieme di  $C([-\pi, \pi])$  formato dalle funzioni  $f$  che sono **periodiche agli estremi**, tali cioè che

$$f(\pi) = f(-\pi);$$

denoteremo tale insieme con  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ ; evidentemente ogni funzione in  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$  può essere prolungata su tutto  $\mathbf{R}$  ad una funzione **periodica di periodo  $2\pi$** ; infatti si ha per ogni  $x \in \mathbf{R}$

$$x = y + 2k\pi,$$

in cui  $y \in [-\pi, \pi]$  e  $k$  è un opportuno elemento di  $\mathbf{Z}$ ; si definisce allora

$$\tilde{f}(x) = f(y);$$

è del tutto chiaro che  $\tilde{f}$  così ottenuta è una **funzione continua su  $\mathbf{R}$ , periodica di periodo  $2\pi$** ; denoteremo l'insieme di queste funzioni con

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbf{R});$$

inversamente, data una funzione continua su  $\mathbf{R}$ , periodica di periodo  $2\pi$ , la sua restrizione a  $[-\pi, \pi]$  è una funzione continua su  $[-\pi, \pi]$  che assume uguali valori agli estremi dell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

In questa maniera si ottiene una corrispondenza 1-1 naturale tra  $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbf{R})$  e  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ .

**Definizione 4.2** *Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni seno e coseno, della forma*

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad t \in \mathbf{R},$$

in cui  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbf{C}$ ; si può scrivere, equivalentemente

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int};$$

ogni polinomio trigonometrico è in  $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbf{R})$ .

Si ha il risultato seguente, che è una generalizzazione del teorema di Weierstrass.

**Teorema 4.3** *Supponiamo  $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ , allora esiste una successione di polinomi trigonometrici che converge ad  $f$  uniformemente su  $[-\pi, \pi]$ .*

**Dimostrazione.** Consideriamo  $f$  prolungata su tutto  $\mathbf{R}$  per periodicità;  $\tilde{f}$  così ottenuta è continua e limitata su tutto  $\mathbf{R}$ ; mostriamo che esiste una successione  $(Q_k)_{k \geq 1}$  di funzioni con le proprietà

1.  $Q_k \in C(\mathbf{R})$ ,  $Q_k \geq 0$  e  $\text{supp } Q_k = [-\pi, \pi]$ ,  $\forall k \geq 1$ ;
2.  $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(x) dx = 1$  per ogni  $k \geq 1$ ;
3. per ogni  $\varepsilon, \delta > 0$  esiste un intero  $N$  tale che per ogni  $k > N$  si ha

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} Q_k(x) dx < \varepsilon;$$

4. ogni  $Q_k$  è la restrizione a  $[-\pi, \pi]$  di un polinomio trigonometrico;

se si pone

$$Q_k(x) = \begin{cases} c_k \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k & \text{su } [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora le proprietà 1 e 4 precedenti sono evidenti, inoltre il coefficiente  $c_k$  può essere sempre scelto in modo che la proprietà di normalizzazione 2 sia soddisfatta; per quel che riguarda la condizione 3, si può ragionare come segue:  $Q_k$  è una funzione pari ( $Q_k(x) = Q_k(-x)$ ) e si ha

$$1 = 2c_k \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k dx \geq 2c_k \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k \sin x dx = 4 \frac{c_k}{k+1};$$

in  $[0, \pi]$ ,  $Q_k$  è decrescente, allora

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{k+1}{4} \left(\frac{1+\cos \delta}{2}\right)^k$$

per ogni  $t$  tale che  $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$ ; ciò implica la proprietà 3, dal momento che  $1 + \cos \delta < 2$ , se  $0 < \delta < \pi$ .

Per il teorema 2.13

$$\tilde{f} * Q_k \rightarrow \tilde{f}$$

uniformemente su ogni intervallo compatto  $[a, b]$ ; in particolare

$$\tilde{f} * Q_k \rightarrow f \quad \text{uniformemente su } [-\pi, \pi]$$

mostriamo che, se  $y \in [-\pi, \pi]$ ,  $\tilde{f} * Q_k$  è un polinomio trigonometrico; si ha

$$\tilde{f} * Q_k(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) Q_k(y-x) dx$$

e poiché  $\text{supp } Q_k = [-\pi, \pi]$

$$\tilde{f} * Q_k(y) = \int_{y-\pi}^{y+\pi} \tilde{f}(x) Q_k(y-x) dx;$$

se  $y \in [-\pi, \pi]$  ed  $x \in [y-\pi, y+\pi]$ , allora

$$y-x \in [-\pi, \pi],$$

quindi per i valori di  $y$  e di  $x$  considerati,  $Q_k(y-x)$  è dato da un polinomio trigonometrico; si ha

$$\tilde{f} * Q_k(y) = \int_{y-\pi}^{y+\pi} \tilde{f}(x) \left( \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{iny} e^{-inx} \right) dx = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{iny} \left( \int_{y-\pi}^{y+\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx} dx \right);$$

poiché  $\tilde{f}$  è periodica di periodo  $2\pi$ , l'integrale è in effetti indipendente da  $y$  e si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{y-\pi}^{y+\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx} dx;$$

ciò mostra che per  $y \in [-\pi, \pi]$

$$\tilde{f} * Q_k(y) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{iny} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right)$$

è un polinomio trigonometrico.  $\square$

**Corollario 4.4** *Ogni  $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbf{R})$  è limite uniforme, su tutto  $\mathbf{R}$ , di una successione di polinomi trigonometrici.*

Naturalmente non c'è nulla di "magico" nel considerare l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e funzioni periodiche con periodo  $2\pi$ ; in completa analogia con quanto fatto in precedenza, denoteremo

$$C_{\text{per}}([a, b]), \quad a, b \in \mathbf{R}$$

l'insieme delle funzioni di  $C([a, b])$  tali che

$$f(b) = f(a);$$

denoteremo

$$C_{T\text{-per}}(\mathbf{R})$$

L'insieme delle funzioni continue su  $\mathbf{R}$  periodiche di periodo  $T$ ; il teorema precedente fornisce immediatamente i corollari seguenti.

**Corollario 4.5** Ogni  $f \in C_{\text{per}}([a, b])$  è limite uniforme su  $[a, b]$  di una successione di polinomi trigonometrici  $(Q_k)_{k \geq 1}$  della forma

$$Q_k(x) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{2\pi i n \frac{x}{b-a}}.$$

**Corollario 4.6** Ogni funzione  $f \in C_{\text{T-per}}(\mathbf{R})$  è limite uniforme su  $\mathbf{R}$  di una successione  $(Q_k)_{k \geq 1}$  di polinomi trigonometrici della forma

$$Q_k(x) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{2\pi i n \frac{x}{T}}.$$

Per ogni intero relativo  $n \in \mathbf{Z}$ , poniamo

$$e_n(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{inx};$$

per ogni  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $e_n \in L^2(-\pi, \pi)$ , inoltre  $\bar{e}_n = e_{-n}$ ; è immediato verificare che le funzioni  $e_n$  formano una famiglia ortonormale in  $L^2(-\pi, \pi)$ ; in effetti esse formano una **base hilbertiana** in  $L^2(-\pi, \pi)$ ; per convincersi di questo, è sufficiente osservare che l'insieme delle combinazioni lineari (finite) di funzioni  $e_n$  coincide con l'insieme dei polinomi trigonometrici; per mostrare che la successione bilaterale

$$(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è una base hilbertiana dello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$ , basta mostrare il seguente

**Teorema 4.7** L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso in  $L^2(-\pi, \pi)$ ; esplicitamente, per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio trigonometrico  $Q$  tale che

$$\|f - Q\|_{L^2(-\pi, \pi)} < \varepsilon.$$

**Dimostrazione.** Dati  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  ed  $\varepsilon > 0$  sappiamo che esiste  $\varphi \in C_c([- \pi, \pi])$  tale che  $\|f - \varphi\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \varepsilon$ ; prolunghiamo  $\varphi$  a  $\tilde{\varphi} \in C_{\text{per}}([- \pi, \pi])$  ponendo

$$\tilde{\varphi}(-\pi) = \varphi(\pi) = 0;$$

per quanto mostrato in precedenza esiste un polinomio trigonometrico  $Q$  tale che

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\tilde{\varphi}(x) - Q(x)| < \varepsilon;$$

quindi “a fortiori”

$$\sup_{x \in ]-\pi, \pi[} |\varphi(x) - Q(x)| < \varepsilon;$$

allora

$$\|\varphi - Q\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - Q(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 \cdot 2\pi;$$

in conclusione

$$\|f - Q\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \|f - \varphi\|_{L^2(-\pi, \pi)} + \|\varphi - Q\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}). \quad \square$$

Usando la formula di Eulero e l'osservazione che, per ogni  $n \in \mathbf{Z}$ , si ha  $\bar{e}_n = e_{-n}$ , è facile mostrare che anche la famiglia di funzioni

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \left( \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos nx \right)_{n \geq 1}, \left( \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nx \right)_{n \geq 1};$$

è una base hilbertiana di  $L^2(-\pi, \pi)$ ; se  $f$  è un elemento di  $L^2(-\pi, \pi)$ ,  $f$  può essere sviluppata su questa base e si ottiene

$$f(x) = a_0 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

purché si intenda il segno “=” in questo **senso preciso**: “la serie al membro di destra converge, nel senso di  $L^2(-\pi, \pi)$ , all'elemento  $f$  di  $L^2(-\pi, \pi)$ ” (una discussione sulla convergenza puntuale della serie, ovunque, quasi ovunque, o uniforme, sar' a trovata nel paragrafo successivo); i coefficienti dello sviluppo sono

$$a_0 = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

$$b_n = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  è una funzione **dispari**, ossia

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[,$$

è facile vedere che tutti i coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

dello sviluppo di  $f$  si annullano; infatti si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \int_{-\pi}^0 f(t) \cos nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ &= \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt - \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt = 0; \end{aligned}$$

quindi è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

lo sviluppo è convergente in  $L^2(-\pi, \pi)$ , e si ha

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt;$$

possiamo quindi scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right) \sin nx;$$

l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \left\| f - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right|^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right|^2 dx = \\ &= 2 \left\| f - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \right\|_{L^2(0, \pi)}^2 \end{aligned}$$

mostra che lo sviluppo precedente è convergente **anche** in  $L^2(0, \pi)$ ; possiamo concludere allora, dal momento che  $f$  è arbitraria in  $]0, \pi[$ , che la successione

$$\left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right)_{n \geq 1}$$

è **una base hilbertiana** in  $L^2(0, \pi)$ ; se  $f \in L^2(0, \pi)$ ,  $f$  può essere sviluppata su questa base e si ha

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

in cui lo sviluppo di  $f$  è convergente in  $L^2(0, \pi)$ .

Analogamente, se  $f$  è una funzione **pari**, cioè

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[,$$

si annullano i coefficienti

$$b_1, \dots, b_n, \dots$$

dello sviluppo di  $f$  sulla base di  $L^2(-\pi, \pi)$  formata da seni e coseni; nella stessa maniera del caso precedente, si mostra che, per l'arbitrarietà di  $f$  su  $]0, \pi[$ , la successione

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right)_{n \geq 1},$$

è una base hilbertiana in  $L^2(0, \pi)$ . Se  $f \in L^2(0, \pi)$  avremo dunque, **oltre** allo sviluppo in seni, **anche**

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} a_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^\pi f(t) dt, \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(t) \cos nt dt.$$

Consideriamo ora un qualunque intervallo  $]a, b[$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ ) e lo spazio di Hilbert  $L^2(a, b)$ ; per ogni  $n \in \mathbf{Z}$  poniamo

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \frac{x-c}{b-a}},$$

in cui  $c$  è un qualunque elemento di  $\mathbf{R}$ ; è immediato verificare che la successione di funzioni  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una successione bilaterale ortonormale in  $L^2(a, b)$ ; deve essere sottolineato il fatto che l'ortonormalità delle  $(e_n)$  è indipendente dalla scelta di  $c$ ; per convincersene basta scrivere

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \frac{x}{b-a}} \cdot e^{-2\pi i n \frac{c}{b-a}}$$

ed osservare che il secondo fattore è un numero complesso di modulo 1 (si potrebbe addirittura scegliere un  $c_n$  diverso per ogni  $n$ ); da questa osservazione è evidente che l'eventuale proprietà delle  $e_n$  di formare una base hilbertiana di  $L^2(a, b)$  è indipendente dalla scelta di  $c$ ; in particolare, scegliendo  $c = 0$ , si può riprodurre passo per passo la dimostrazione fatta in precedenza per l'intervallo  $]-\pi, \pi[$ , e dimostrare che la successione bilaterale di funzioni

$$\left( \sqrt{\frac{1}{b-a}} e^{2\pi i n \frac{x-c}{b-a}} \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è **una base hilbertiana di  $L^2(a, b)$** , qualunque sia  $c \in \mathbf{R}$ . Usando la formula di Eulero e l'osservazione che, per ogni  $n \in \mathbf{Z}$ , si ha  $\bar{e}_n = e_{-n}$ , discende immediatamente che anche la famiglia di funzioni

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos 2\pi n \frac{x-c}{b-a} \right)_{n \geq 1}, \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin 2\pi n \frac{x-c}{b-a} \right)_{n \geq 1};$$

è **una base hilbertiana di  $L^2(a, b)$  per ogni  $c \in \mathbf{R}$** .

In precedenza abbiamo visto come sia possibile, partendo dalla base hilbertiana di seni e coseni in  $L^2(-\pi, \pi)$ , costruire basi hilbertiane o di soli seni o di soli coseni nello spazio di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$ , definito sull'intervallo "metà" dell'intervallo di partenza; questo procedimento è generalizzabile ad un qualunque intervallo. Consideriamo  $L^2(2a-b, b)$  e consideriamo la base formata di seni e coseni in questo spazio; notiamo che  $]2a-b, b[$  è un intervallo di ampiezza  $2(b-a)$ , centrato intorno al punto  $a$ ; supponiamo che  $f \in L^2(2a-b, b)$  sia una funzione "dispari rispetto ad  $a$ ", tale cioè che

$$f(a+x) = -f(a-x) \quad \forall x \in ]a, b[;$$

è facile vedere che, **pur di scegliere**  $c = a$ , tutti i coefficienti  $a_n$ , nello sviluppo di  $f$  sulla base di  $L^2(2a-b, b)$  formata da seni e coseni, si annullano; ragionando nella stessa maniera del caso precedente (intervalli  $]-\pi, \pi[$  e  $]0, \pi[$ ) possiamo concludere che la successione

$$\left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin n\pi \frac{x-a}{b-a} \right)_{n \geq 1}$$

è una base hilbertiana in  $L^2(a, b)$ ; analogamente si mostra che **anche** la successione

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \left( \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos n\pi \frac{x-a}{b-a} \right)_{n \geq 1}$$

è una base hilbertiana in  $L^2(a, b)$ ; deve essere sottolineato che per le basi di soli seni o di soli coseni non c'è la libertà di scelta di  $c$ , come nel caso della base che contiene sia i seni che i coseni.

### 4.3 Il teorema del sampling

Denotiamo con  $\Omega$  l'intervallo

$$]-\omega, \omega[, \quad \omega > 0;$$

la discussione del punto 9 pagina 38, ci assicura che lo spazio di Hilbert  $L^2(\Omega)$  può essere identificato, canonicamente, mediante l'applicazione

$$f \mapsto f^\Omega (L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbf{R})),$$

con un sottospazio chiuso (e completo) di  $L^2(\mathbf{R})$ , che abbiamo denotato con  $\mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R}))$ ; la successione di funzioni

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i\frac{\pi nx}{\omega}} \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è una base hilbertiana di  $L^2(\Omega)$ ; è del tutto ovvio che anche la successione di funzioni

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\frac{\pi nx}{\omega}} \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è una base hilbertiana di  $L^2(\Omega)$ . L'identificazione precedente ci assicura che, definendo

$$s_n(x) = \chi_\Omega(x) \sqrt{\frac{2}{\omega}} e^{-i\frac{\pi nx}{\omega}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

la successione  $(s_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una base hilbertiana di  $\mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R}))$ .

Diremo che una funzione  $f \in L^2(\mathbf{R})$  è **a banda limitata** se

$$\tilde{\mathcal{F}} f \in \mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R})),$$

cioè se la trasformata di Fourier-Plancherel di  $f$  si annulla al di fuori di  $\Omega$ . Lo spazio delle funzioni a banda limitata può essere descritto equivalentemente come  $\tilde{\mathcal{F}}^*(\mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R})))$ . Poiché l'operatore di Fourier-Plancherel  $\tilde{\mathcal{F}}^*$  è un isomorfismo isometrico di  $L^2(\mathbf{R})$  in sé, lo spazio delle funzioni a banda limitata è un sottospazio chiuso (e completo) di  $L^2(\mathbf{R})$ .

Deve essere notato un fatto estremamente importante: poiché  $\mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R})) \subseteq L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ , le funzioni a banda limitata sono **funzioni continue** (anche restrizioni ad  $\mathbf{R}$  di funzioni intere). Si può descrivere esplicitamente una base hilbertiana del sottospazio delle funzioni a banda limitata nella maniera seguente: poiché  $(s_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  è una base hilbertiana di  $\mathcal{N}_\Omega(L^2(\mathbf{R}))$ , ne segue che

$$(\tilde{\mathcal{F}}^* s_n)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è una base hilbertiana per lo spazio delle funzioni a banda limitata; dal momento che

$$s_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$$

$\tilde{\mathcal{F}}^* s_n$  può essere calcolato esplicitamente come  $\mathcal{F}^* s_n$ ; si ha

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^* s_n)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \mathcal{F}^* \left( e^{-i\frac{\pi n x}{\omega}} \chi_\Omega \right) (y) = \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\sin(\omega y - n\pi)}{\omega y - n\pi}; \end{aligned}$$

quindi la successione

$$\left( \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\sin(\omega y - n\pi)}{\omega y - n\pi} \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

è una base hilbertiana del sottospazio chiuso di  $L^2(\mathbf{R})$  formato dalle funzioni la cui immagine rispetto a  $\tilde{\mathcal{F}}$  si annulla al di fuori di  $]-\omega, \omega[$ ; sia  $f$  una tale funzione (ricordiamo che  $f$  è **continua**), si avrà:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\sin(\omega y - n\pi)}{\omega y - n\pi}$$

in cui

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (\tilde{\mathcal{F}}^* s_n, f)_{L^2(\mathbf{R})} = (s_n, \tilde{\mathcal{F}} f)_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\Omega(x) e^{i\frac{\pi n x}{\omega}} \tilde{\mathcal{F}} f(x) dx = \\ &\text{(poiché } \tilde{\mathcal{F}} f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \text{ e si annulla al di fuori di } \Omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi n x}{\omega}} \tilde{\mathcal{F}} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} (\mathcal{F}^* \tilde{\mathcal{F}} f) \left( \frac{\pi n}{\omega} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} f \left( \frac{\pi n}{\omega} \right); \end{aligned}$$

in conclusione

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f \left( \frac{\pi n}{\omega} \right) \frac{\sin(\omega y - n\pi)}{\omega y - n\pi};$$

questo sviluppo di una funzione a banda limitata viene detto “teorema del sampling”.

## 4.4 Discussione sulla convergenza della serie di Fourier

### Convergenza puntuale.

1) Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  la serie di Fourier di  $f$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

converge ad  $f$  nel senso di  $L^2$ . Per molte applicazioni, però, è utile avere informazioni sulla convergenza punto per punto della serie, sulla sua (eventuale) convergenza uniforme e sulla sua derivabilità termine a termine.

Nel seguito discuteremo alcuni dei risultati su queste questioni; non sono i più generali possibili, ma sono utili per la maggior parte delle situazioni concrete che si incontrano nelle applicazioni. La nostra analisi sarà basata sul seguente teorema

**Teorema:** Supponiamo che  $f$  sia una funzione definita su  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -periodica e **liscia a tratti**. Denotiamo

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

allora si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)),$$

per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

**Dimostrazione:** Spezziamo la dimostrazione in passi successivi. Primo passo.

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} e^{inx} dt =$$

(sostituendo  $-n$  a  $n$ )

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{in(t-x)} dt =$$

(effettuando la sostituzione  $y = t - x$ )

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y+x) e^{iny} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) e^{iny} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \left( \sum_{n=-N}^N e^{iny} \right) dy. \end{aligned}$$

Secondo passo.

Definiamo

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{iny} = \frac{1}{2\pi} e^{-iNy} \sum_{n=0}^{2N} e^{iny}.$$

Se  $y = 0$ , si ha  $D_N(0) = \frac{1}{2\pi}(2N+1)$ ;

se  $y \neq 0$ , si ha (Ricordando  $\sum_{n=0}^k r^n = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$ )

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-iNy} \frac{e^{i(2N+1)y} - 1}{e^{iy} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}}{e^{iy} - 1};$$

moltiplicando numeratore e denominatore per  $e^{-i\frac{y}{2}}$ , otteniamo

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})y} - e^{-i(N+\frac{1}{2})y}}{e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin(\frac{1}{2}y)};$$

notiamo che  $D_N$  é **continua** in 0 ; inoltre si ha

$$\int_{-\pi}^0 D_N(y) dy = \int_0^{\pi} D_N(y) dy = \frac{1}{2};$$

infatti, usando la formula di Eulero,

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{iny} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos(ny);$$

da cui

$$\int_0^{\pi} D_N(y) dy = \left[ \frac{y}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(ny)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Terzo passo.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) &= \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y) dy - f(x^+) \int_0^{\pi} D_N(y) dy - f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy &= \\ \int_{-\pi}^0 [f(x+y) - f(x^+)] D_N(y) dy + \int_0^{\pi} [f(x+y) - f(x^-)] D_N(y) dy; \end{aligned}$$

usando l'espressione di  $D_N$

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}}{e^{iy} - 1}, \quad y \neq 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left[ \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} \right] (e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) dy + \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} \right] (e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) dy. \end{aligned}$$

Definiamo:

$$\begin{aligned} &\nearrow \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} \quad -\pi < y < 0 \\ g(y) &= \rightarrow \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} \quad 0 < y < \pi \\ &\searrow 0 \quad y \in \mathbf{R} \setminus (-\pi, \pi) \end{aligned}$$

allora  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$  (Perché ?) e si ha:

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) (e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) dy &= \frac{1}{2\pi} [\mathcal{F}g(-(N+1)) - \mathcal{F}g(N)]; \end{aligned}$$

per il Lemma di Riemann-Lebesgue, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}g[-(N+1)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}g(N) = 0 \quad \bullet$$

Il teorema precedente implica immediatamente la seguente proprietà, la cui applicabilità è molto vasta in pratica : supponiamo che  $f$  sia una funzione definita in  $] - \pi, \pi[$ , tale che:

a)  $f \in C^1(] - \pi, \pi[)$ , **eccetto che in un numero finito di punti** che sono o di non continuità o di non derivabilità.

b) in ogni punto esistono **finiti** i limiti destro e sinistro della funzione e della derivata

c) in  $-\pi$  esistono finiti i limiti destri della funzione e della sua derivata, in  $\pi$  esistono finiti i limiti sinistri della funzione e della sua derivata.

Una tale funzione verrà detta **liscia a tratti** in  $] - \pi, \pi[$ . (Notate che una tale  $f$  è in  $L^2(-\pi, \pi)$ .) Allora si ha:

a)  $S_N(x)$  converge a  $f(x)$  in ogni punto  $x$  in cui  $f$  è continua,

b) in ogni punto  $x \in ] - \pi, \pi[$ , che non sia di continuità per  $f$ ,  $S_N(x)$  converge a  $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ,

c) nei punti  $x = -\pi$  e  $x = \pi$ ,  $S_N(x)$  converge a  $\frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-))$ .

Si può dimostrare (Ma non ne diamo la dimostrazione in queste note) che (nelle ipotesi precedenti per  $f$ ) se  $I$  è un intervallo **chiuso** contenuto in  $] - \pi, \pi[$ , tale che  $f$  è continua in **ogni** punto di  $I$ , allora  $S_N(x)$  converge a  $f(x)$ , **uniformemente su  $I$** .

### Derivabilità termine a termine.

Consideriamo il problema della derivabilità termine a termine della serie di Fourier. Il risultato seguente discende in maniera molto semplice dal teorema iniziale.

**Proposizione:** Supponiamo che  $f$  sia una funzione definita su  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -periodica, **continua** e liscia a tratti e che la sua derivata  $f'$  sia una funzione liscia a tratti; allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} (f'(x^+) + f'(x^-))$$

per ogni  $x \in \mathbf{R}$  (Dove i " $c_n$ " denotano i coefficienti di Fourier di  $f$ ).

**Dimostrazione:** Poiché  $f'$  è  $2\pi$ -periodica e liscia a tratti, il teorema iniziale ci assicura che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} (f'(x^+) + f'(x^-)) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

in cui abbiamo denotato con  $c'_n$  i coefficienti di Fourier di  $f'$ :

$$c'_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt;$$

integrando per parti otteniamo

$$c'_n = inc_n \quad \bullet$$

La dimostrazione precedente é basata sul fatto di poter calcolare i coefficienti di Fourier di  $f'$  integrando per parti. É **essenziale** che vi convinciate che l'integrazione per parti é lecita (benché  $f$  **non sia** di classe  $C^1$ ) e che apprezziate il ruolo dell'ipotesi che  $f$  sia una funzione  $2\pi$ -periodica e **continua**.

La proposizione precedente può essere riformulata (come al solito) per funzioni definite in  $[-\pi, \pi]$ ; supponiamo che  $f$  abbia le proprietà

- a)  $f$  é **continua** in  $[-\pi, \pi]$  e  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,
- b)  $f$  é liscia a tratti in  $] - \pi, \pi[$ ,
- c) anche  $f'$  é liscia a tratti in  $] - \pi, \pi[$ ,

allora la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

(ottenuta dalla serie di Fourier di  $f$  derivando termine a termine) converge a

$$\frac{1}{2} (f'(x^+) + f'(x^-)) \quad \text{per ogni } x \in ] - \pi, \pi[,$$

$$\frac{1}{2} (f'(-\pi^+) + f'(\pi^-)) \quad \text{in } x = \pm\pi.$$

### Convergenza uniforme.

Alla fine del punto 1 abbiamo ricordato (senza dimostrarlo) un risultato sulla convergenza uniforme della serie di Fourier. A questo punto possiamo mostrare un risultato un pò più debole

**Proposizione :** Supponiamo che  $f$  sia una funzione definita su  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -periodica, continua e liscia a tratti; allora

$$S_N(x) \rightarrow f(x)$$

**uniformemente** su  $\mathbf{R}$ .

**Dimostrazione:** Nelle ipotesi per  $f$  in cui ci siamo posti,  $S_N \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$ ; allora

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{|n| > N} \left| c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| > N} |c_n|;$$

denotiamo con  $c'_n$  i coefficienti di Fourier di  $f'$ ; sono calcolabili dai coefficienti di Fourier di  $f$  integrando per parti (Perché ?) e si ha

$$c_n = (in)^{-1} c'_n \quad \text{se } n \neq 0 ;$$

d'altra parte la restrizione di  $f'$  a  $] - \pi, \pi[$  é in  $L^2(-\pi, \pi)$  (Perché ?) e, poiché  $\left( \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{n \in \mathbf{Z}}$  é una base Hilbertiana in  $L^2(-\pi, \pi)'$ , si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 = \|f'\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 ;$$

allora, usando la disuguaglianza di Holder in  $l^2$ , si ottiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = c_0 + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{c'_n}{n} \right| \leq |c_0| + \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Per le funzioni definite in  $[-\pi, \pi]$ , la proposizione precedente ha la seguente riformulazione: supponiamo che  $f$  sia una funzione in  $C_{per}([-\pi, \pi])$  e liscia a tratti in  $]-\pi, \pi[$ , allora

$$S_N \rightarrow f(x)$$

uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ .

### Derivate successive.

Torniamo al punto 2. Se  $f$  ha molte derivate, la proposizione mostrata in quel punto può essere applicata varie volte in successione per calcolare la serie di Fourier di  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ , ... A ciascun ordine di derivazione, i coefficienti di Fourier  $c_n$  vengono moltiplicati per  $in$ ; ciò significa che le serie derivate convergono più lentamente della serie originale. Detto in altre parole, se la serie derivata converge, allora la serie originale deve convergere in maniera "abbastanza rapida". C'è una connessione (importante!) tra le proprietà di derivabilità di una funzione e la velocità di convergenza della sua serie di Fourier. Queste considerazioni intuitive possono essere rese un pò più precise nella maniera seguente.

**Proposizione:** supponiamo che  $f$  sia una funzione definita su  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -periodica, e di classe  $C^{k-1}$ ; se la derivata  $f^{(k-1)}$  è liscia a tratti allora i coefficienti di Fourier di  $f$  soddisfano

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2 < \infty \quad ;$$

in particolare

$$n^k c_n \rightarrow 0$$

se  $n \rightarrow \infty$ . D'altra parte, supponiamo  $f$   $2\pi$ -periodica e integrabile su  $[-\pi, \pi]$ , tale che i coefficienti

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

soddisfino la condizione

$$|c_n| \leq C |n|^{-(k+\alpha)} \quad (n \neq 0)$$

per qualche  $C > 0$  e  $\alpha > 1$ ; allora  $f$  è di classe  $C^k$ .

**Dimostrazione:** Per quel che riguarda la prima parte, con  $k$  integrazioni per parti (Perché si possono fare?) si può concludere che i coefficienti di Fourier,  $c_n^{(k)}$  di  $f^{(k)}$  sono dati da

$$c_n^{(k)} = (in)^k c_n ;$$

la restrizione di  $f^{(k)}$  a  $]-\pi, \pi[$  é in  $L^2(-\pi, \pi)$  (Perché ?) quindi si avrà

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^k c_n|^2 = \|f^{(k)}\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 .$$

Per quel che riguarda la seconda parte, osserviamo, innanzi tutto, che si ha

$$\sum_{n \neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n \neq 0} |n|^{-(k-j+\alpha)} \leq 2C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$$

se  $j \leq k$ . L'ultima affermazione é dovuta al fatto che  $\alpha > 1$ . Questo implica che, per ogni  $j \leq k$ , le serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

siano uniformemente convergenti; esse convergono a funzioni continue, che sono le derivate  $f^{(j)}$  di  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ .

### Somme alla Cesaro.

É facile vedere che se una successione  $(a_k)_{k \geq 1}$  (di numeri complessi) converge ad  $a$ , allora **anche le medie**

$$\frac{1}{K} \sum_{n=1}^K a_n$$

dei primi  $K$  termini della successione convergono ad  $a$ , se  $K \rightarrow \infty$ . Queste medie, però, possono convergere anche se la successione originale **non** converge. Ad esempio, la successione

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

é divergente; la media dei primi  $K$  termini é  $\frac{K+1}{2K}$  se  $K$  é dispari,  $\frac{1}{2}$  se  $K$  é pari, quindi la successione delle medie tende a  $\frac{1}{2}$  se  $K \rightarrow \infty$

Data una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , con somme parziali  $S_N = \sum_{n=0}^N b_n$ , la media delle sue prime  $K+1$  somme parziali

$$\frac{1}{K+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_K)$$

viene detta la sua **K-esima media di Cesaro**; si dice che la serie é **sommabile "alla Cesaro"**, al numero  $S$ , se le sue medie di Cesaro (e **non** le sue somme parziali) convergono a  $S$ . Il teorema di Fejer ha la sua formulazione originale nella forma

Se  $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ , allora le medie di Cesaro della serie di Fourier di  $f$  convergono ad  $f$  **uniformemente** su  $[-\pi, \pi]$ .

## 4.5 Funzioni peso e polinomi ortogonali

Supponiamo che  $]a, b[$  sia un qualunque intervallo **aperto** di  $\mathbf{R}$ , limitato o no; denotiamo con  $w$  una funzione definita in  $]a, b[$ , **continua**, a valori **strettamente positivi** e tale che le funzioni

$$x \mapsto x^n w(x)$$

siano (Lebesgue-)integrabili su  $]a, b[$ , per **ogni intero**  $n \geq 0$ ; una tale funzione  $w$  viene detta **peso** su  $]a, b[$ ; con queste premesse, si possono dimostrare i fatti seguenti:

1. esiste una successione  $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 0}$  di **polinomi** tale che

(a)  $\mathcal{P}_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$ ,

(b)  $\int_a^b \mathcal{P}_m(x)\mathcal{P}_n(x)w(x) dx = 0$  se  $n \neq m$ ;

2. le proprietà (a) e (b) precedenti individuano univocamente i polinomi  $\mathcal{P}_n$ , **a meno** di un fattore moltiplicativo arbitrario; precisamente se  $(\mathcal{Q}_n)_{n \geq 0}$  è un'altra successione di polinomi con le proprietà (a) e (b) precedenti, allora esiste una successione  $(c_n)_{n \geq 0}$  di numeri diversi da 0, tale che

$$\mathcal{Q}_n(x) = c_n \mathcal{P}_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

3. ogni polinomio di grado  $k = 0, 1, 2, \dots$  è una combinazione lineare dei

$$\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k;$$

in altre parole, il sottospazio vettoriale generato da  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k$ , nello spazio vettoriale di tutti i polinomi (in una indeterminata, a coefficienti complessi) coincide con il sottospazio generato dai monomi

$$1, x, \dots, x^k,$$

ed i  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k$  costituiscono una base di questo sottospazio;

4. la proprietà 2 precedente ci assicura che i polinomi  $\mathcal{P}_n$  possono essere **fissati** da **una** sola condizione ausiliaria, oltre la (a) e la (b) del punto 1; esempi di come possa essere imposta una tale condizione sono i seguenti:

(c<sub>1</sub>) il coefficiente del termine  $x^n$  (in  $\mathcal{P}_n$ ) è 1,

(c<sub>2</sub>)  $\int_a^b (\mathcal{P}_n(x))^2 w(x) dx = 1$ ;

(c<sub>3</sub>)  $\mathcal{P}_n(x_0) = 1$ , in cui  $x_0 \in [a, b]$ ;

5.  $\mathcal{P}_n$  ha esattamente  $n$  zeri distinti, tutti contenuti nell'intervallo  $]a, b[$ ; questo fatto indica che  $\mathcal{P}_n$  diviene sempre più oscillante su  $]a, b[$ , quanto più  $n$  cresce (e che i  $\mathcal{P}_n$  sono a coefficienti reali).

I polinomi  $\mathcal{P}_n$  sono ottenuti a partire dalla successione (linearmente indipendente) di monomi

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

ed applicando ad essa il classico procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, usando come definizione di ortogonalità tra polinomi quella indotta dal peso  $w$ ; esplicitamente, una

formula ricorsiva per la determinazione dei polinomi  $\mathcal{P}_n$  è la seguente (si ottengono in questo modo polinomi che soddisfano la condizione  $c_1$  del punto 4)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{P}_1(x) &= x - \frac{\int_a^b xw(x) dx}{\int_a^b w(x) dx} \\ &\vdots \\ \mathcal{P}_n(x) &= x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_k(x) \int_a^b \frac{x^n \mathcal{P}_k(x) w(x)}{\int_a^b (\mathcal{P}_k(x))^2 w(x) dx} dx \\ &\vdots \end{aligned}$$

qualunque sia la condizione usata per fissare i polinomi, le proprietà del peso  $w$  ci assicurano che le funzioni

$$x \mapsto \mathcal{P}_n(x) \sqrt{w(x)}$$

sono in  $L^2(a, b)$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e che esse costituiscono una successione **ortogonale** di funzioni in  $L^2(a, b)$ ; esse sono **completamente individuate** (come già discusso in precedenza, a meno di un fattore moltiplicativo inessenziale) dall'intervallo  $]a, b[$  e dal peso  $w$ ; alcuni esempi classici sono i seguenti (i primi due verranno discussi piú in dettaglio in seguito)

1. se  $]a, b[ = ]-1, 1[$  e  $w(x) = 1$ , si ottiene la successione dei **polinomi di Legendre**,
2. se  $]a, b[ = ]-\infty, +\infty[$  e  $w(x) = e^{-x^2}$  si ottengono le **funzioni di Hermite**,
3. se  $]a, b[ = ]0, +\infty[$  e  $w(x) = e^{-x}$  si ottengono le **funzioni di Laguerre**.

## 4.6 Polinomi e funzioni di Hermite

1. L' $n$ -esimo polinomio di Hermite  $H_n(x)$  è definito come

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2};$$

esplicitamente, si può calcolare che

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 8, H_3(x) = 8x^3 - 12x, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \dots;$$

2. in generale si ha

$$\begin{aligned} e^{-x^2} H_n(x) &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = -\frac{d}{dx} [e^{-x^2} H_{n-1}(x)] = \\ &= e^{-x^2} [2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)]; \end{aligned}$$

da cui si ricava la fondamentale **relazione di ricorrenza** tra i polinomi di Hermite

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x);$$

questa formula permette di calcolare  $H_n$  per induzione su  $n$ ; in particolare, segue da essa che il termine di grado piú alto di  $H_n(x)$  è  $2x$  moltiplicato per il termine di grado piú alto di  $H_{n-1}(x)$ ; quindi  $H_n(x)$  è un polinomio **di grado**  $n$ , il cui termine di grado piú alto è  $(2x)^n$ ; inoltre, dal momento che  $e^{-x^2}$  è una funzione pari,  $H_n$  è pari o dispari a seconda che  $n$  sia pari o dispari;

3. si hanno relazioni di **ortogonalità**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

e di **normalizzazione**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi};$$

infatti, se  $f$  è un qualunque polinomio si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-x^2} f(x) dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) f(x) dx = \\ &\quad \text{(integrando } n \text{ volte per parti, e notando} \\ &\quad \text{che } \mathcal{P}(x)e^{-x^2} \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow \pm\infty, \text{ per ogni polinomio } \mathcal{P}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^{(n)}(x) dx; \end{aligned}$$

se  $f$  è un polinomio di grado minore di  $n$ , in particolare se  $f = H_m$ , con  $m < n$ , allora  $f^{(n)} = 0$  e ciò prova la relazione di ortogonalità; d'altra parte,  $f = H_n$  si ha  $f(x) = (2x)^n + \dots$ , e quindi  $f^{(n)} = 2^n n!$ ; allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi};$$

4. la relazione di ortogonalità del punto precedente, ed il fatto che ogni polinomio  $H_n(x)$  ha grado esattamente  $n$ , ci assicurano che i polinomi di Hermite sono i polinomi associati univocamente (a meno di un fattore moltiplicativo) al peso  $w(x) = e^{-x^2}$  sull'intervallo  $]-\infty, +\infty[$ , mediante il procedimento descritto nel paragrafo 4.3;

5. definiamo la funzione  $F$  di  $x$  e  $t$  come

$$F(x, t) = e^{x^2 - (t-x)^2} = e^{2tx - t^2};$$

si ha

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{t=0} = (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} e^{-k^2} \Big|_{k=x} = e^{-x^2} H_n(x)$$

per cui si ha lo sviluppo di Taylor convergente su  $]-\infty, +\infty[$

$$F(x, t) = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n;$$

la funzione  $F(x, t)$  viene detta **funzione generatrice** dei polinomi di Hermite; si ha

$$F'_x = 2tF, \quad F''_{xx} = 4t^2 F, \quad F'_t = 2(x-t)F,$$

per cui si ha l'identità

$$F''_{xx} - 2xF'_x + 2tF'_t = 0;$$

scrivendo questa identità in termini dello sviluppo della funzione  $F$  ed eguagliando i coefficienti delle potenze  $t^n$ , si deduce che gli  $H_n(x)$  **soddisfano l'equazione differenziale**

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0,$$

che può essere anche scritta nella forma

$$\left[ e^{-x^2} H'_n(x) \right]' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0;$$

6. definiamo le **funzioni di Hermite** come

$$h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x);$$

ogni  $h_n \in L^2(\mathbf{R})$ , ed inoltre si ha

$$(h_m, h_n)_{L^2(\mathbf{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x)h_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{se } m \neq n;$$

quindi la successione  $(h_n)_{n \geq 0}$  è una successione **ortogonale** in  $L^2(\mathbf{R})$ ; inoltre

$$\|h_n\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi};$$

denotiamo con  $\tilde{h}_n$  le funzioni di Hermite **normalizzate**; esplicitamente

$$\tilde{h}_n(x) = \frac{h_n(x)}{\|h_n\|_{L^2(\mathbf{R})}} = (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2});$$

si verifica facilmente che le  $\tilde{h}_n$  soddisfano l'equazione differenziale (di Hermite)

$$-\tilde{h}_n'' + x^2 \tilde{h}_n = (2n + 1) \tilde{h}_n$$

e la relazione di ricorrenza

$$\tilde{h}_{n+1}(x) = (2n + 2)^{-\frac{1}{2}} (x \tilde{h}_n(x) - \tilde{h}'_n(x));$$

7. la successione  $(\tilde{h}_n)_{n \geq 0}$  delle funzioni di Hermite normalizzata è una **base hilbertiana** di  $L^2(\mathbf{R})$ ; per mostrare questo fatto, mostriamo che se  $f$  è un'elemento di  $L^2(\mathbf{R})$  tale che

$$(\tilde{h}_n, f)_{L^2(\mathbf{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_n(x) f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

allora  $f = 0$  in  $L^2(\mathbf{R})$ , vale a dire  $f = 0$  quasi ovunque; per ogni intero  $k > 0$ ,  $x^k$  può essere scritto come combinazione lineare dei primi  $k$  polinomi di Hermite e quindi  $e^{-\frac{x^2}{2}} x^k$  può essere scritto come combinazione lineare delle prime  $k$  funzioni di Hermite normalizzate

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^k = \sum_{i=0}^k c_i \tilde{h}_i(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

allora per la linearità del prodotto scalare si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se  $f \in L^2(\mathbf{R})$ ; poiché

$$\left( x \mapsto e^{|tx|} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \in L^2(\mathbf{R}) \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

ne segue che

$$\left( x \mapsto |f(x)| e^{|tx|} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \in L^1(\mathbf{R}) \quad \forall t \in \mathbf{R};$$

si ha

$$e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!}$$

e la serie converge, per ogni  $t$ , su tutto  $\mathbf{R}$ ; si ha

$$\begin{aligned} \left| f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^N \frac{(itx)^n}{n!} \right| &\leq |f(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|tx|^n}{n!} \\ &= |f(x)| e^{|tx|} e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbf{R}); \end{aligned}$$

allora per il teorema della convergenza dominata

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^N \frac{(itx)^n}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

per ogni  $t \in \mathbf{R}$ ; ciò significa (notando che  $e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbf{R})$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* \left( e^{-\frac{x^2}{2}} f \right) = 0 &\implies e^{-\frac{x^2}{2}} f = 0 \text{ quasi ovunque} \implies \\ &\implies f = 0 \text{ quasi ovunque;} \end{aligned}$$

8. le funzioni di Hermite normalizzate  $(\tilde{h}_n)_{n \geq 0}$  sono le **autofunzioni** dell'operatore di Fourier-Plancherel su  $L^2(\mathbf{R})$ ; infatti si ha

$$\tilde{h}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

per cui

$$(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_0)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \tilde{\mathcal{F}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \tilde{h}_0(x),$$

supponiamo che sia

$$\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_{n-1} = (-i)^{n-1} \tilde{h}_{n-1},$$

allora, utilizzando la relazione di ricorrenza per le  $\tilde{h}_n$ , si ha

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_n)(y) &= (2(n-1) + 2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \tilde{\mathcal{F}}(x\tilde{h}_{n-1})(y) - (\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}'_{n-1})(y) \right] = \\
 &= (2(n-1) + 2)^{-\frac{1}{2}} \left( i (\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_{n-1})'(y) - (iy) (\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_{n-1})(y) \right) = \\
 &= (2(n-1) + 2)^{-\frac{1}{2}} \left( i(-i)^{n-1} \tilde{h}'_{n-1} - i(-i)^{n-1} y \tilde{h}_{n-1}(y) \right) = \\
 &= (2(n-1) + 2)^{-\frac{1}{2}} (-i)^n \left[ y \tilde{h}_{n-1}(y) - \tilde{h}'_{n-1}(y) \right] = \\
 &= (-i)^n \tilde{h}_n(y);
 \end{aligned}$$

in conclusione, procedendo per induzione, abbiamo mostrato che

$$\tilde{\mathcal{F}} \tilde{h}_n(x) = (-i)^n \tilde{h}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## 4.7 I polinomi di Legendre

1. L' $n$ -simo **polinomio di Legendre**, denotato con  $P_n$ , è definito da

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

per ogni **intero**  $n \geq 0$ ; la funzione  $(x^2 - 1)^n$  è un polinomio di grado  $2n$ , con termine di grado piú alto  $x^{2n}$ , quindi  $P_n$  è un polinomio di **grado**  $n$ , per ogni  $n$ : esplicitamente, è facile calcolare

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \dots;$$

il coefficiente del termine di grado piú alto del polinomio  $P_n$  è calcolabile da

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} + \dots) = \frac{1}{2^n n!} [2n(2n-1) \dots (n+1)x^n + \dots] = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots;$$

2. si ha la proprietà di **ortogonalità**

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n;$$

infatti, l'osservazione fondamentale è che se  $f$  è una qualunque funzione di classe  $C^k$  su  $] -1, 1[$ , si ha

$$\begin{aligned}
 2^n n! \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x) dx &= \int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n f(x) dx = \\
 &\quad \text{(integrando per parti)} \\
 &= \left[ f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n f'(x) dx;
 \end{aligned}$$

il primo termine si annulla poiché la funzione  $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$  ha zeri di ordine  $n$  in  $x = \pm 1$  e quindi le sue prime  $(n - 1)$  derivate si annullano tutte in  $x \pm 1$ ; con  $n$  integrazioni per parti, allora, si ha

$$2^n n! \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx;$$

se  $f$  è un polinomio di grado minore di  $n$  allora  $f^{(n)} = 0$  e quindi

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) f^{(n)}(x) dx = 0;$$

in particolare ciò è vero per  $P_0 \dots P_{n-1}$ , e quindi

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{se } m < n;$$

con lo stesso ragionamento, scambiando i ruoli di  $m$  e di  $n$  si ha anche

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{se } m > n,$$

e quindi i polinomi  $P_n$  sono ortogonali;

3. poiché ogni  $P_n$  ha grado  $n$  e si ha

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n;$$

se ne deduce che i polinomi  $P_n$  sono i polinomi associati (quasi) univocamente al peso  $w = 1$  sull'intervallo  $] -1, 1[$ ;

4. al punto 2 abbiamo ottenuto la formula

$$2^n n! \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx;$$

scegliendo  $f = P_n$ , si ha

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n!)}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1),$$

e quindi

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx;$$

ed anche

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \\ &\quad \text{(con la sostituzione } x = \sqrt{y}) \\ &= \int_0^1 (1 - y)^n y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma(n + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} = \\ &= \frac{n!}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (n + \frac{1}{2})} = \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)}; \end{aligned}$$

in conclusione si ha l'importante formula di normalizzazione

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n + 1};$$

5. per ogni  $n$ , si ha  $P_n(1) = 1$  e  $P_n(-1) = (-1)^n$ ; infatti, per la formula di Leibnitz si ha

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n(x+1)^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x+1)^n;$$

nel punto  $x = 1$  il solo termine con  $k = n$  non si annulla e quindi

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \right]_{x=1} [(x+1)^n]_{x=1} = \frac{1}{2^n n!} \cdot 1 \cdots n! \cdot 2^n = 1;$$

analogamente, si può provare la formula per  $P_n(-1)$ ;

6. i polinomi di Legendre sono soluzione di un'equazione differenziale; infatti, per ogni  $n \geq 0$  si ha

$$[(1-x^2)(P_n'(x))]' + n(n+1)P_n(x) = 0;$$

per verificare questa uguaglianza si può procedere come segue: denotiamo  $g(x) = [(1-x^2)(P_n'(x))]'$ ; dal momento che  $P_n'$  è un polinomio di grado  $n-1$ ,  $x^2 P_n'$  è di grado  $n+1$ , e quindi  $g$  è di grado  $n$ ; il suo termine di grado più alto è dato da

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{d}{dx} [(-x)^2 (nx^{n-1})] = -n(n+1) \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n;$$

allora  $g + n(n+1)P_n$  è un polinomio di grado  $n-1$ , e quindi è una combinazione lineare di  $P_0, \dots, P_{n-1}$ :

$$g(x) + n(n+1)P_n(x) = [(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j(x);$$

i coefficienti  $c_j$  possono essere calcolati usando le relazioni di ortogonalità tra i  $P_n$ , quindi

$$c_j = \frac{(g + n(n+1)P_n, P_j)_{L^2(-1,1)}}{\|P_j\|_{L^2(-1,1)}^2} = \frac{(g, P_j)_{L^2(-1,1)} + n(n+1)(P_n, P_j)_{L^2(-1,1)}}{\|P_j\|_{L^2(-1,1)}^2},$$

$(P_n, P_j)_{L^2(-1,1)} = 0$  per  $j < n$  e

$$(g, P_j)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{+1} [(1-x^2)P_n'(x)]' P_j(x) dx;$$

dopo due integrazioni per parti, si ha

$$(g, P_j)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{+1} P_n(x) [(1-x^2)P_j'(x)]' dx;$$

$((1-x^2)P_j'(x))'$  è un polinomio di grado  $j$ , quindi è una combinazione lineare dei  $P_0, \dots, P_j$  e quindi è ortogonale a  $P_n$ ; ciò mostra che  $c_j = 0$  se  $j < n$ , e conclude la dimostrazione;

7. si ha la proprietà **fondamentale** che la successione di funzioni

$$\left( \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} P_n \right)_{n \geq 0}$$

è una base **hilbertiana** di  $L^2(-1, 1)$ ; infatti, abbiamo già visto (punti 2 e 4) l'ortonormalità della successione; poiché lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari finite di polinomi di Legendre coincide con lo spazio vettoriale di tutti i polinomi, è sufficiente mostrare che l'insieme delle restrizioni dei polinomi a  $] -1, 1[$  è **denso** in  $L^2(-1, 1)$ ; per questo, supponiamo  $f \in L^2(-1, 1)$  ed  $\varepsilon > 0$ ; allora, poiché  $C_c(]-1, 1[)$  è denso in  $L^2(-1, 1)$ , esiste una  $\varphi \in C_c(]-1, 1[)$ , tale che

$$\|f - \varphi\|_{L^2(-1,1)} < \varepsilon;$$

prolungiamo  $\varphi$  ad una funzione  $\tilde{\varphi} \in C([-1, 1])$  ponendo

$$\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}(-1) = 0;$$

allora, per il teorema di Weierstrass, esiste un polinomio  $P$  tale che

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x) - \tilde{\varphi}| < \varepsilon$$

e quindi, "a fortiori",

$$\sup_{x \in ]-1, 1[} |P(x) - \varphi(x)| < \varepsilon;$$

allora si ha anche

$$\|P - \varphi\|_{L^2(-1,1)} = \left( \int_{-1}^{+1} |P(x) - \varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\varepsilon$$

in conclusione, abbiamo che, data  $f$  ed  $\varepsilon$ , esiste un polinomio  $P$  tale che

$$\|f - P\|_{L^2(-1,1)} \leq \|f - \varphi\|_{L^2(-1,1)} + \|\varphi - P\|_{L^2(-1,1)} \leq (1 + \sqrt{2})\varepsilon;$$

8. ogni  $f \in L^2(-1, 1)$  può essere sviluppato sulla base dei polinomi di Legendre come<sup>2</sup>

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n,$$

in cui  $\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x) dx$ ; si potrebbe mostrare che la serie  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n$  converge punto per punto purché  $f$  sia **liscia a tratti**;

9. nella stessa maniera in cui siamo passati dalla base trigonometrica in seni e coseni su  $]-\pi, \pi[$  alle basi di soli seni o di soli coseni su  $]0, \pi[$ , si può passare dalla serie di polinomi di Legendre su  $] -1, 1, [$  alla serie di polinomi di Legendre pari o dispari su  $]0, 1[$ ; le successioni

$$(P_{2n})_{n \geq 0}, \quad (P_{2n+1})_{n \geq 0}$$

---

<sup>2</sup>la convergenza della serie e l'uguaglianza tra i due membri devono essere interpretate nel senso di  $L^2(-1, 1)$

sono **entrambe ortogonali** in  $L^2(0, 1)$ ; la norma di  $P_n$  in  $L^2(0, 1)$  è  $(2n + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ; le successioni

$$\left( \frac{P_{2n}}{\|P_{2n}\|_{L^2(0,1)}} \right)_{n \geq 0}, \quad \left( \frac{P_{2n+1}}{\|P_{2n+1}\|_{L^2(0,1)}} \right)_{n \geq 0}$$

sono **entrambe basi hilbertiane** di  $L^2(0, 1)$ ; in conclusione, ricordiamo che anche per i polinomi di Legendre si può scrivere una funzione generatrice, come per i polinomi di Hermite; si potrebbe mostrare che

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n;$$

infine, riportiamo un'**utile** formula di integrazione

$$\int P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] + c,$$

in cui il membro di sinistra indica l'insieme delle **primitive** di  $P_n$ , e la formula è valida per ogni  $n$  se si pone  $P_{-1}(x) = 0$ ; la sua verifica è elementare ed è lasciata per esercizio.

## 4.8 Le armoniche sferiche

Consideriamo in  $\mathbf{R}^2$  il rettangolo **aperto**  $R$

$$\begin{aligned} R &= ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \\ &= \{ \theta, \varphi \in \mathbf{R}^2 : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi \}; \end{aligned}$$

denotiamo con  $\mathcal{B}(]0, \pi[)$  la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di Borel di  $\mathbf{R}$  **contenuti** in  $]0, \pi[$ ; definiamo su questa  $\sigma$ -algebra una misura  $\mu_\theta$ , ponendo

$$\mu_\theta(E) = \int_E \sin \theta d\theta, \quad E \in \mathcal{B}(]0, \pi[);$$

è immediato verificare che  $\mu_\theta$  così definita sia una misura su  $\mathcal{B}(]0, \pi[)$ ; la sua proprietà fondamentale è la seguente

$$f \in L^1(\mu_\theta) \iff (\theta \mapsto f(\theta) \sin \theta) \in L^1(0, \pi)$$

e, **in tal caso**,

$$\int_0^\pi f(\theta) d\mu_\theta = \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta;$$

analogamente, consideriamo la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$  degli insiemi di Borel di  $\mathbf{R}$  **contenuti** in  $]0, 2\pi[$ ; definiamo una misura  $\mu$  su questa  $\sigma$ -algebra ponendo

$$\mu(E) = |E|, \quad E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \quad E \subset ]0, 2\pi[;$$

è immediato verificare che  $\mu$  è una misura su  $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$ ;

la  $\sigma$ -algebra prodotto  $\mathcal{B}(]0, \pi[) \otimes \mathcal{B}(]0, 2\pi[)$  **coincide** con la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(R)$  degli insiemi di Borel di  $\mathbf{R}^2$  **contenuti** in  $R$ ; si può allora definire una misura  $\sigma$  su  $(R, \mathcal{B}(R))$  ponendo

$$\sigma := \mu_\theta \otimes \mu;$$

la proprietà fondamentale di  $\sigma$  è la seguente:

$$f(R \rightarrow \mathbf{C}) \in L^1(\sigma) \iff (\theta, \varphi \mapsto f(\theta, \varphi) \sin \theta) \in L^1(R)$$

e, **in tal caso**,

$$\int_R f(\theta, \varphi) d\sigma(\theta, \varphi) = \int_R f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Vogliamo definire una base Hilbertiana dello spazio  $L^2(\sigma)$ ; a questo scopo, dobbiamo costruire una **famiglia** di basi Hilbertiane per lo spazio  $L^2(\mu_\theta)$ ; per ogni coppia  $m, n$  di **interi positivi** definiamo la **funzione associata di Legendre**,  $P_n^m$ , come

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &:= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \\ &= \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n; \end{aligned}$$

evidentemente, dal momento che  $P_n$  è un polinomio di grado  $n$ , si ha che

$$P_n^m(x) \equiv 0 \quad \text{se } m > n,$$

quindi si suppone sempre implicitamente  $n \geq m$  quando si considerano le funzioni  $P_n^m$ ; evidentemente, si ha

$$P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0;$$

infine, si può verificare con un calcolo esplicito, usando le proprietà dei polinomi di Legendre, che

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{m+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_n(x) \right] = -(n-m)(n+m+1)(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Per **ogni** intero positivo  $m$ , la successione

$$(P_n^m)_{(n \geq m)}$$

è ortogonale in  $L^2(-1, 1)$ ; innanzi tutto, si ha, per ogni  $m$

$$\begin{aligned} (P_n^m, P_{n'}^m)_{L^2(-1,1)} &= \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \frac{d^m}{dx^m} P_{n'}(x) dx \\ &= (1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_{n'}(x) \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_{n'}(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right] dx \\ &= (n-m+1)(n+m) \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_{n'}(x) (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) dx \\ &= (n+m)(n+m-1)(n-m+1)(n-m+2) (P_n^{m-2}, P_{n'}^{m-2})_{L^2(-1,1)} \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (P_n, P_{n'})_{L^2(-1,1)} \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}. \end{aligned}$$

Per ogni  $m \geq 0$  la successione

$$(P_n^m)_{n \geq m}$$

è **totale** in  $L^2(-1, 1)$ ; cioè esplicitamente se  $f \in L^2(-1, 1)$  e  $(P_n^m, f)_{L^2(-1,1)} = 0$  per ogni  $n \geq m$  allora  $f = 0$  in  $L^2(-1, 1)$ ; infatti si ha

$$(P_n^m, f)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) f(x) dx,$$

a questo punto si possono fare due osservazioni

1. se  $f \in L^2(-1, 1)$  anche  $h$ , definito da

$$h(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} f(x),$$

è in  $L^2(-1, 1)$ ;

2.  $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$  è un polinomio di grado  $n - m$ , con  $m$  fissato ed  $n \geq m$ ; ogni polinomio di grado  $k$  può allora essere espresso come combinazione lineare di

$$\frac{d^m}{dx^m} P_m(x), \frac{d^m}{dx^m} P_{m+1}(x), \dots, \frac{d^m}{dx^m} P_{m+k}(x);$$

quindi, l'ipotesi che

$$(P_n^m, f)_{L^2(-1,1)} = 0$$

implica che

$$(q_k, h)_{L^2(-1,1)} = 0$$

per ogni polinomio  $q_k$  di grado  $k$  e per ogni  $k \geq 0$ ;

poiché l'insieme dei polinomi è **denso** in  $L^2(-1, 1)$  se ne deduce che  $h = 0$  in  $L^2(-1, 1)$ ;

quindi

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} f(x) &= 0 && \text{quasi ovunque in } ]-1, 1[ \\ f(x) &= 0 && \text{quasi ovunque in } ]-1, 1[ ; \end{aligned}$$

ciò mostra che la successione  $(P_n^m)_{n \geq m}$  è totale in  $L^2(-1, 1)$ .

Poiché si ha

$$\|P_n^m\|_{L^2(-1,1)}^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1},$$

se ne deduce che, per ogni  $m \geq 0$ , la successione

$$\left( \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m \right)_{n \geq m}$$

è una base Hilbertiana di  $L^2(-1, 1)$ .

L'applicazione

$$\theta \mapsto \cos \theta( ]0, \pi[ \rightarrow ]-1, 1[ )$$

è biiettiva, bicontinua e derivabile con continuità a tutti gli ordini con la sua inversa; il suo Jacobiano

$$|J(\theta)| = \sin \theta$$

è strettamente positivo in  $]0, \pi[$ ; per il teorema sul cambiamento di variabili negli integrali si ha

$$\begin{aligned} f \in L^1(-1, 1) &\iff (\theta \rightarrow f(\cos \theta) \sin \theta) \in L^1(0, \pi) \\ &\iff (\theta \rightarrow f(\cos \theta)) \in L^1(\mu_\theta) \end{aligned}$$

e, in tal caso,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi f(\cos \theta) d\mu_\theta(\theta);$$

l'applicazione  $f \mapsto f(\cos(\cdot))$  ( $L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(\mu_\theta)$ ) è un isomorfismo lineare di spazi vettoriali che conserva i prodotti scalari (e le norme); allora, per ogni  $m \geq 0$  la successione

$$\left( \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos(\cdot)) \right)_{n \geq m}$$

è una base Hilbertiana di  $L^2(\mu_\theta)$ .

Consideriamo la famiglia di funzioni

$$Y_{mn}(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta), \quad \theta, \varphi \in R$$

dove  $n = 0, 1, \dots$ ; e  $|m| \leq n$ ;

le  $Y_{mn}$  vengono dette **armoniche sferiche**; evidentemente le  $Y_{mn}$  sono in  $L^2(\sigma)$  e sono una famiglia **ortogonale** in questo spazio; infatti

$$\begin{aligned} (Y_{mn}, Y_{m'n'})_{L^2(\sigma)} &= \int_R e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta) P_{n'}^{|m'|}(\cos \theta) d\sigma(\theta, \varphi) \\ &= \int_R e^{i(m'-m)\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta) P_{n'}^{|m'|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &\quad \text{(usando il teorema di Fubini)} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) P_{n'}^{|m'|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \delta_{mm'} \cdot \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) P_{n'}^{|m'|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \delta_{mm'} \cdot \int_{-1}^1 P_n^{|m|}(x) P_{n'}^{|m'|}(x) dx \\ &= 2\pi \delta_{mm'} \delta_{nn'} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \frac{2}{2n+1}; \end{aligned}$$

inoltre, l'insieme delle armoniche sferiche è **totale** in  $L^2(\sigma)$ ; per questo supponiamo che  $f \in L^2(\sigma)$  e  $(Y_{mn}, f)_{L^2(\sigma)} = 0$  per ogni  $n \geq 0$  e  $|m| \leq n$ ; si ha

$$\begin{aligned} (Y_{mn}, f)_{L^2(\sigma)} &= \int_R \overline{Y_{mn}(\theta, \varphi)} f(\theta, \varphi) d\sigma(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^\pi d\theta \left( P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \cdot \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(\theta, \varphi) d\varphi \right); \end{aligned}$$

per ogni  $m \in \mathbf{Z}$  la funzione

$$\theta \mapsto \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(\theta, \varphi) d\varphi =: h_m(\theta)$$

è in  $L^2(\mu_\theta)$  (vedi l'inserito *infra*); usando questo fatto otteniamo che

$$\int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) h_m(\theta) \sin \theta d\theta = 0$$

per ogni  $n \geq |m|$ ; poichè  $P_n^{|m|}(\cos \cdot)$  è totale in  $L^2(\mu_\theta)$ , questo implica che per ogni  $m \in \mathbf{Z}$  si ha

$$h_m(\theta) = 0 \quad \text{quasi ovunque in } ]0, \pi[;$$

per ogni fissato  $\theta$  la funzione

$$\varphi \mapsto f(\theta, \varphi)$$

è in  $L^2(0, 2\pi)$ , quindi, per quasi ogni  $\theta \in ]0, \pi[$ ,

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(\theta, \varphi) d\varphi = 0$$

per ogni  $m \in \mathbf{Z}$  e ciò implica che, per quasi ogni  $\theta \in ]0, \pi[$ , la funzione

$$(\varphi \mapsto f(\theta, \varphi)) = 0$$

quasi ovunque in  $]0, 2\pi[$ ; questo implica che  $f = 0$  in  $L^2(\sigma)$ , infatti

$$\|f\|_{L^2(\sigma)}^2 = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta, \varphi)|^2 = 0$$

(poichè per quasi ogni  $\theta \in ]0, \pi[$  la funzione  $(\varphi \mapsto |f(\theta, \varphi)|^2)$  è uguale a zero quasi ovunque in  $]0, 2\pi[$ , allora  $\int_0^{2\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 d\varphi = 0$  per quasi ogni  $\theta$  e

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta, \varphi)|^2 = 0);$$

ciò implica  $f = 0$  in  $L^2(\sigma)$  e quindi che  $(Y_{mn})_{m \in \mathbf{Z}, n \geq |m|}$  è **totale** in  $L^2(\sigma)$ ;

**Inserito:** nella dimostrazione precedente abbiamo usato questa proprietà: se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  sono due spazi dotati di misura, entrambi  $\sigma$ -finiti, e

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$$

è il loro prodotto, data una funzione

$$k \in L^2(\mu \otimes \nu)$$

allora, per ogni  $f \in L^2(\nu)$ , la funzione

$$\left( x \mapsto \int_Y k(x, y) f(y) d\nu(y) \right) \in L^2(\mu);$$

per la disuguglianza di Hölder, si ha, per ogni  $x \in X$ ,

$$\left| \int_Y k(x, y) f(y) d\nu(y) \in L^2(\mu) \right|^2 \leq \int_Y |k(x, y)|^2 d\nu(y) \cdot \int_Y |f(y)|^2 d\nu(y);$$

dal momento che

$$(x, y \mapsto |k(x, y)|^2) \in L^1(\mu \otimes \nu),$$

il teorema di Fubini ci assicura che

$$\left(x \mapsto \int_Y |k(x, y)|^2 d\nu(y)\right) \in L^1(\mu)$$

e la proprietà è provata. **Fine inserto.**

In conclusione il sistema di funzioni

$$\left( \left( \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{mn} \right)_{m \in \mathbf{Z}, n \geq |m|}$$

è una **base Hilbertiana** di  $L^2(\sigma)$ ; ogni funzione  $f \in L^2(\sigma)$  può essere sviluppata come

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{mn} Y_{mn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{mn} e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos(\cdot)) \end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \frac{(Y_{mn}, f)_{L^2(\sigma)}}{\|Y_{mn}\|_{L^2(\sigma)}^2} \\ &= \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Denoteremo con  $S$  il sottoinsieme **chiuso** di  $\mathbf{R}^3$ , definito da

$$S := \{x \in \mathbf{R}^3 : |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\};$$

$S$  viene detta la **sfera (unitaria)** in  $\mathbf{R}^3$ ;  $S$ , come sottoinsieme chiuso in  $\mathbf{R}^3$ , è un sottoinsieme di Borel di  $\mathbf{R}^3$ ; si può mostrare che la sua misura di Lebesgue (come sottoinsieme di  $\mathbf{R}^3$ ) è **nulla**; nonostante questo fatto, è possibile definire una misura naturale su  $S$ ; questa misura è definibile poichè  $S$  è una superficie in  $\mathbf{R}^3$  e viene detta l'**elemento d'area** della sfera; ovviamente essa **non** è la misura indotta su  $S$  dalla misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^3$ ; la descrizione esplicita della misura elemento d'area della sfera è legata alla possibilità di coordinatizzare i punti della sfera mediante **coordinate sferiche**; consideriamo l'applicazione  $\psi (R \rightarrow \mathbf{R}^3)$  definita da

$$\theta, \varphi \mapsto \psi(\theta, \varphi) = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi);$$

$\psi$  così definita è un'applicazione **biiettiva, indefinitamente differenziabile**, con la sua inversa, tra  $R$  ed il sottoinsieme aperto  $S'$  di  $S$  dato da

$$S' = S \setminus \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_3 = 0, x_2 \geq 0\},$$

cioè la sfera unitaria meno il “meridiano di Greenwich”; l'applicazione  $\psi$  definisce le coordinate sferiche su  $S$ ;

si definisce la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(S)$  dei sottoinsiemi di Borel di  $S$  come l'insieme dei sottoinsiemi di Borel di  $\mathbf{R}^3$  contenuti in  $S$ ;

si definisce una misura  $\omega$  su  $\mathcal{B}(S)$  ponendo

$$\begin{aligned}\omega(E) &:= \sigma(\{\theta, \varphi \in R : \psi(\theta, \varphi) \in E \cap S'\}) \\ &= \sigma(\psi^{-1}(E \cap S')) \quad E \in \mathcal{B}(S);\end{aligned}$$

tale misura  $\omega$  è l'elemento d'area della sfera; la sua proprietà **fondamentale** è la seguente: supponiamo che

$$p \mapsto f(p)(S \rightarrow \mathbf{C})$$

sia una funzione **definita sulla sfera**  $S$ , allora

$$\begin{aligned}f \in L^1(\omega) &\iff (\theta, \varphi \mapsto f(\psi(\theta, \varphi))) \in L^1(\sigma) \\ &\iff (\theta, \varphi \mapsto \sin \theta f(\psi(\theta, \varphi))) \in L^1(R)\end{aligned}$$

e, **in tal caso**,

$$\begin{aligned}\int_S f(p) d\omega(p) &= \int_R f(\psi(\theta, \varphi)) d\sigma(\theta, \varphi) \\ &= \int_R f(\psi(\theta, \varphi)) \sin \theta d\theta d\varphi;\end{aligned}$$

risulta, quindi, completamente definito lo spazio  $L^2(S)$ ; mediante il sistema di coordinate  $\psi$  le funzioni definite su  $S$  possono essere identificate con le funzioni definite su  $R$ ; in particolare  $L^2(S)$  viene identificato con  $L^2(\sigma)$ ; in effetti questi due spazi non vengono distinti; è questo un piccolo abuso logico ampiamente ammesso ed accettato nell'uso pratico.