

Le coordinate sferiche e l'integrazione in \mathbb{R}^n

1. Proprietà elementari della funzione Γ .

La funzione Γ (di Eulero) è definita da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \alpha > 0;$$

notiamo che la funzione

$$x \mapsto e^{-x} x^{\alpha-1}, \quad x > 0,$$

è (continua) e integrabile su $]0, +\infty[$.

Vogliamo studiare alcune proprietà elementari della funzione Γ .

1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, $\Gamma(\alpha) > 0$, $\forall \alpha > 0$

2) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, per ogni $\alpha > 1$;
infatti, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = - \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} d e^{-x} = \\ &= - \left[e^{-x} x^{\alpha-1} \right]_0^{+\infty} + (\alpha-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-2} dx = \\ &= (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1) \end{aligned}$$

3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, se n è un intero ^{strictamente} positivo;

infatti:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$$

$$\dots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

Per il teorema del cambiamento di variabili negli inte-
grali, si ha che

$f(x_1, x_2)$ è integrabile su \bar{U}

se e solo se

$z f(z \cos \theta, z \sin \theta)$ è integrabile su R

e si ha l'uguaglianza

$$\int_{\bar{U}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_R z f(z \cos \theta, z \sin \theta) dz d\theta.$$

Dal momento che

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bar{U} = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \geq 0\}$$

è trascurabile in \mathbb{R}^2 , ne segue che si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_R z f(z \cos \theta, z \sin \theta) dz d\theta.$$

Questa uguaglianza viene scritta nelle forme simboliche

$$d^2x = z dz d\theta$$

2.2 Consideriamo il caso $n=3$.

Il passaggio alle coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 è defi-
nito da

$$x_1 = z \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = z \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = z \cos \theta,$$

in cui

$$z \in]0, \infty[, \theta \in]0, \pi[, \varphi \in]0, 2\pi[.$$

L'applicazione

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (z \sin \theta \cos \varphi, z \sin \theta \sin \varphi, z \cos \theta)$$

è un diffeomorfismo (biunivoco, e di classe C^∞ con la sua inversa) tra gli aperti:

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{ (\lambda, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \geq 0, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$R =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$$

(U è il semispazio in \mathbb{R}^3 che contiene l'asse x_3 e il semiasse positivo x_1). La Jacobiana della trasformazione

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin \theta.$$

Per il teorema sul cambiamento di variabili negli integrali, si ha che

$f(x_1, x_2, x_3)$ è integrabile su U

se e solo se

$r^2 \sin \theta f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ è integrabile su R ,

e si ha (per tali funzioni) l'uguaglianza

$$\int_U f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int_R \rho^2 \sin \theta f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\varphi.$$

Del momento che

$$\mathbb{R}^3 \setminus U = \{(\lambda, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

è trascurabile in \mathbb{R}^3 , ne segue che si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int_R \rho^2 \sin \theta f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\varphi.$$

Quest'ultima uguaglianza viene scritta di solito nelle forme simboliche

$$d^3x = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

2.3. Consideriamo, infine, il caso di n qualunque.

Il passaggio alle coordinate sferiche in \mathbb{R}^n è definito da

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}$$

$$x_n = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

in cui

$$\rho \in]0, +\infty[, \varphi_1 \in]0, \pi[, \dots, \varphi_{n-2} \in]0, \pi[, \varphi_{n-1} \in]0, 2\pi[.$$

L'applicazione

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1})$$

è un diffeomorfismo (applicazione biunivoca, di classe C^∞ con le sue inverse), tra gli aperti:

$$U = \mathbb{R}^n \setminus \{ (x_1, \dots, x_{n-2}, \lambda, 0) \in \mathbb{R}^n : \lambda \geq 0 \}$$

$$R =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times \dots \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[.$$

Si può calcolare lo Jacobiano delle trasformazioni

$$J = r^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} (\sin \varphi_2)^{n-3} \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

In maniera esattamente analoga ai casi $n=2, 3$, si ha che gli integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_R f(r \cos \varphi_1, \dots, r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}) r^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} \dots \sin \varphi_{n-2} dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

sono simultaneamente definiti, e sono uguali.

2.4. Le proprietà precedenti possono essere interpretate geometricamente in maniera intuitiva.

Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si ha

$$x = |x| \cdot x/|x|$$

(in cui denotiamo con $|x|$ la norma euclidea

di $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}});$$

esistentemente, si ha

$$\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1.$$

Per ogni $r > 0$, denotiamo

$$S_r = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = r \}$$

(S_r è la sfera di raggio r , in \mathbb{R}^n); con queste notazioni, si ha che ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ può essere scritto univocamente come

$$x = |x| \cdot w, \quad |x| > 0, \quad w \in S_1;$$

queste uguaglianze non è altro che la rappresentazione di x in coordinate sferiche

$$x = r (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}).$$

In effetti, possiamo parametrizzare S_r usando le coordinate sferiche di \mathbb{R}^n ; si ha che

$$\begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi_1 \in]0, \pi[\\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \in]0, \pi[\\ \varphi_{n-1} \in]0, 2\pi[\end{array}$$

sono le equazioni parametriche di una (iper-)superficie in \mathbb{R}^n che è esattamente S_r eccetto il "mezzo cilindro di Greenwich".

$$\mathbb{R}^n \setminus \left\{ (x_1, \dots, x_{n-2}, \lambda, 0) : \lambda \geq 0; x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 + \lambda^2 = r^2 \right\}.$$

L'elemento d'area euclideo su S_r è dato da

con $d\sigma_2$; in questa parametrizzazione, è dato da

$$d\sigma_2 = r^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} (\sin \varphi_2)^{n-3} \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1};$$

esistentemente, si ha

$$d\sigma_2 = r^{n-1} d\sigma_1,$$

inoltre

se $x \in S_2$, allora $x = r \cdot \omega$, in cui $\omega \in S_1$.

L'elemento di area $d\sigma_2$ viene a volte indicato con dw . Abbiamo così le formule

$$d\sigma_2(x) = d\sigma_2(r \cdot \omega) = r^{n-1} d\sigma_1(\omega) = r^{n-1} dw;$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x &= \int_0^{+\infty} dr \int_{S_2} d\sigma_2(r \cdot \omega) f(r \cdot \omega) \\ &= \int_0^{+\infty} dr r^{n-1} \int_{S_1} d\sigma_1(\omega) f(r\omega); \end{aligned}$$

simbolicamente si scrive

$$d^n x = dr d\sigma_2 = r^{n-1} dr d\sigma_1.$$

Denoteremo

$$c_n = \int_{S_1} d\sigma_1(\omega);$$

c_n è l'area delle sfere unitarie in \mathbb{R}^n .

È chiaro che si ha

$$\int_{S_2} d\sigma_2(\omega) = r^{n-1} c_n.$$

$r^{n-1} c_n$ è l'area delle sfere di raggio r in \mathbb{R}^n .

3. Il calcolo di alcuni importanti integrali.

Se f è una funzione di una variabile, la funzione

$$x \mapsto f(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

viene detta una funzione radiale su \mathbb{R}^n ; le formule del paragrafo precedente ci portano a concludere che per tali funzioni si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) d^n x = c_n \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr.$$

Nel seguito del paragrafo, vogliamo calcolare c_n ottenendo così una formula più esplicita per il calcolo dell'integrale di una funzione radiale.

Prima del calcolo di c_n , vogliamo ricordare due casi particolari delle formule per l'integrale di una funzione radiale che sono utili per determinare se integrali multipli sono convergenti oppure no:

se $0 < a < \infty$, $0 < c < \infty$

$$\int_{|x| < c} |x|^{-a} d^n x = c_n \int_0^c r^{n-1-a} dr < \infty \iff a < n$$

$$\int_{|x| > c} |x|^{-a} d^n x = c_n \int_c^\infty r^{n-1-a} dr < \infty \iff a > n.$$

A questo punto, possiamo scrivere l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d^n x$$

(in tutto il seguito supponiamo $n \geq 2$). Calcolando l'integrale come integrale iterato, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d^n x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^n.$$

Se calcoliamo l'integrale usando la formula per l'integrazione di una funzione radiale, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d^n x = c_n \int_0^{+\infty} e^{-z^2} z^{n-1} dz =$$

(con il cambio di variabili
 $z^2 = t$)

$$= \frac{1}{2} c_n \int_0^{+\infty} e^{-z^2} 2z z^{n-2} dz =$$

$$= \frac{1}{2} c_n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} c_n \Gamma(n/2);$$

quindi

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^n = \frac{1}{2} c_n \Gamma(n/2).$$

Fissiamo, innanzi tutto, il caso $n=2$. In questo caso, sappiamo che $c_2 = 2\pi$; inoltre

$$\Gamma(2/2) = \Gamma(1) = 1;$$

allora si ha

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{1}{2} c_2 = \frac{1}{2} (2\pi) = \pi.$$

Otteniamo come primo risultato l'integrale di

Poisson

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi};$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

ed anche ($a > 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt =$$

(con il cambio di variabile
 $\sqrt{a} t = s$)

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Fissiamo ora il caso $n=3$. Noi sappiamo $c_3 = 4\pi$;

inoltre

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^3 = (\sqrt{\pi})^3 = \frac{1}{2} (4\pi) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

allora si ha

$$2 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$

Introduciamo la notazione

$$B_z = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < z \}, \quad z > 0;$$

B_z è la palla di raggio z in \mathbb{R}^n ; dimostreremo anche

$$C'_m = \int_{B_1} d^m x;$$

C'_m è il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^n . Si ha

$$\int_{B_z} d^m x = C'_m \int_0^z dp p^{n-1} = \frac{C'_m}{n} p^n \Big|_0^z = z^n \frac{C'_m}{n}$$

$$C'_m = \int_{B_1} d^m x = C'_m \int_0^1 dp p^{n-1} = \frac{C'_m}{n}.$$

Per cui

~~$C'_m = C'_m/n$~~ $C'_m = C'_m/n$

$$\int_{B_z} d^m x = z^n C'_m.$$