

Trasformazioni di coordinate e pull back.

1. Introduzione.

Se

$$f: X \rightarrow Y$$

è un'applicazione da un aperto $X \subset \mathbb{R}^n$, la cui immagine è contenuta in un aperto $Y \subset \mathbb{R}^m$, allora ogni funzione definita su Y può essere "tirata indietro" (pulled back) a una funzione definita su X , per composizione con f . Se

$$f \in C^\infty(X \rightarrow Y)$$

(questo significa che f è un'applicazione C^∞ da X a Y), si ottiene in questa maniera un omomorfismo di spazi vettoriali

$$f^*: C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X),$$

definito da $f^*u = u \circ f$

(in cui $u \circ f$ denota la composizione di u con f), esplicitamente

$$f^*u(x) = u(f(x)).$$

Vogliamo mostrare come si possa estendere que-

sta definizione alle distribuzioni, almeno in due casi particolarmente importanti: se f è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m , o se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione.

* * *

2. Pull back di una distribuzione rispetto a un diffeomorfismo.

Un' applicazione

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

viene detta un diffeomorfismo se

1) è biettiva

2) l'applicazione inversa è anch'essa C^∞ .

Se f è un diffeomorfismo, dimostreremo con $f'(x)$ la matrice $n \times n$ i cui elementi sono

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Il determinante di f' viene detto lo "Jacobiano" di f , e viene denotato con $J(f)$:

Se f è un diffeomorfismo lo Jacobiano di f non si annulla mai, quindi $f'(x)$ è una matrice invertibile.

$$J(f) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \det f'$$

Se f è un diffeomorfismo lo Jacobiano di f non si annulla mai, quindi $f'(x)$ è una matrice invertibile.

tibile, per ogni x .

Supponiamo che u sia una distribuzione su \mathbb{R}^n ,
definiamo f^*u ponendo, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f^*u, \varphi \rangle = \langle u, g^* \varphi \cdot |\det g'| \rangle,$$

in cui abbiamo posto $g = f^{-1}$ (risolviamo che
 $g^* \varphi = \varphi \circ f^{-1}$). Si può mostrare che

1) $f^*u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

2) $f^*: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

è continua per successioni; questo significa

se $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

allora $f^*u_k \rightarrow f^*u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

3) $f^*: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è l'unica applicazione che
è continua per successioni ed estende

$$f^*: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

4) le derivate distribuzionali di f^*u possono esse-
re calcolate con la regola di derivazione delle

funzioni composte:

$$\partial_j (f^*u) = \sum_k \partial_j f_k \cdot f^*(\partial_k u).$$

La distribuzione f^*u viene detta il "pull back"
di u mediante f . Per la proprietà (3) precedente,

può essere riguardata come la "composizione di u con f ". Per questo viene denotata spesso con il simbolo $u(f(x))$.

Esempi:

1) Se $h \in \mathbb{R}^n$, è evidente che $x \mapsto x - h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

è un diffeomorfismo. Viene denotata con τ_h e quindi

se φ è una funzione definita in \mathbb{R}^n allora $\tau_h^* \varphi(x) = \varphi(x - h)$.

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la distribuzione $\tau_h^* u$ è definita da

$$\langle \tau_h^* u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-h}^* \varphi \rangle = \langle u, \varphi(\cdot + h) \rangle$$

La distribuzione $\tau_h^* u$ viene detta la "traslazione di u "; viene spesso denotata con $u(x - h)$.

2) Supponiamo che A sia una matrice reale, $n \times n$, non singolare. L'applicazione $x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

in cui $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, n$,

è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n ; viene denotata con t_A . Se φ è una funzione definita in \mathbb{R}^n , si ha

$$f_A^* \varphi(x) = \varphi(Ax).$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f_A^* u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\langle f_A^* u, \varphi \rangle = \langle u, |\det A^{-1}| f_{A^{-1}}^* \varphi \rangle$$

$$= \frac{1}{|\det A|} \langle u, \varphi(A^{-1} \cdot) \rangle$$

ci sono due casi particolari importanti.

Se $A = -I$, $f_{-I}^* u$ viene detta la "riflessione di u ".

Viene spesso denotata con \tilde{u} (o con \check{u}): si ha

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle$$

in cui $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Si dice che u è "pari" se

$\tilde{u} = u$; che u è "dispari" se $\tilde{u} = -u$.

L'altro caso importante è

$$A = tI, \quad t > 0.$$

Denotiamo, per semplicità,

$$u^{[t]} = f_{tI}^* u;$$

si ha

$$\langle u^{[t]}, \varphi \rangle = \langle u, f_{1/tI}^* \varphi \cdot |\det(tI)^{-1}| \rangle =$$

$$\left(f_{1/tI}^* \varphi(x) = \varphi(x/t) \right)$$

$$= t^{-n} \langle u, \varphi(x/t) \rangle.$$

$u^{[t]}$ viene detta la "dilatazione" di u .

* * *

3. Pull back di una distribuzione mediante una funzione.

Supponiamo che X sia un aperto di \mathbb{R}^n , e che f sia una funzione a valori reali, definita in X e di classe C^∞ :

$$f \in (C^\infty(X \rightarrow \mathbb{R})).$$

Definiamo

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$|f'(x)| = \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

Supponiamo

$$|f'(x)| \neq 0 \quad \text{su } X.$$

Definiamo ancora

$$V_s = \{x \in X : f(x) = s\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

su V_s l'usuale integrazione euclidea su V_s .

Se $\varphi \in C_c^\infty(X)$, si può costruire una funzione φ_f , che è definita su \mathbb{R} , ponendo

$$\varphi_f(s) = \int_{V_s} \frac{\varphi(x)}{|f'(x)|} d\sigma_s(x); \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Si può mostrare che

$$\varphi_f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \quad (\text{se } \varphi \in C_c^\infty(X)).$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, definiremo una forma lineare su $C_c^\infty(X)$, che denotiamo f^*u , ponendo

$$\langle f^*u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_f \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(X).$$

Si può dimostrare che

$$f^*u \in \mathcal{D}'(X);$$

La distribuzione f^*u viene detta il "pull back di u mediante f ". Si possono dimostrare le proprietà

seguenti per f^*u :

1) $u \mapsto f^*(u) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$
è continua per successioni:

(cioè:
se $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

allora $f^*u_n \rightarrow f^*u$ in $\mathcal{D}'(X)$)

2) l'applicazione $u \mapsto f^*u$ è l'unica applicazione
da $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}'(X)$ che è continua per
successioni ed estende

$$f^* : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(X)$$

3) le derivate distribuzionali di f^*u si calcolano
con la regola di derivazione delle funzioni
composte

$$\partial_j f^*u = \partial_j f \cdot f^*(\partial u).$$

Per le proprietà (2), la distribuzione f^*u può es-

essere riguardata come la composizione di u con f .
 Per questo, viene denotata spesso con
 $u(f(x))$.

Questa costruzione è particolarmente importante
 nel caso in cui si faccia la scelta
 $u = \delta$.

In questo caso, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(X)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle f^* \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi_f \rangle \\ &= \varphi_f(0) \\ &= \int_{V_0} \varphi(x) / |f'(x)| \, d\sigma_0(x) \\ &= \left\langle \frac{1}{|f'|} \delta_{V_0}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Otteniamo così la formula (molto importante!)

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|} \delta_{V_0}.$$

* * *

4. Casi particolari ed esempi di pull back di δ .

1). Il caso $n=1$.

In questo caso

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo che f si annulli in un insieme

finito (o numerabile) di punti di \mathbb{R} :

$$V_0 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

(eventualmente, $n = \infty$). Allora si ha

$$\int_{V_0} = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}$$

$$\frac{1}{|f'|} \int_{V_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \int_{x_i}$$

Solitamente, questa uguaglianza viene scritta come

$$\int(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \int(x - x_i)$$

2. Se l'equazione

$$f(x) = 0, \quad x \in X$$

è risolvibile rispetto a una delle variabili (per fissare le idee, supponiamo rispetto a x_1), si ha

$$x_1 = h(x_2, \dots, x_n);$$

si ottiene così la rappresentazione cartesiana di V_0

$$V_0 = \{h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n : x_2, \dots, x_n \in M\}$$

(in cui M è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n-1}).

In questo caso, si ha

$$d\sigma_0 = \sqrt{1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2} dx_2 \dots dx_n$$

Inoltre, da l'uguaglianza

$$f(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0$$

(per tutti gli $(x_2, \dots, x_n) \in M$), si ricorre

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad \text{se } j = 2, \dots, n;$$

da cui

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial h}{\partial x_n},$$

e anche

$$|f'(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left(1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In conclusione, se $\varphi \in C_c^\infty(X)$, si ha

$$\left\langle \frac{1}{|f'|} \delta_{V_0}, \varphi \right\rangle =$$

$$= \int_M \frac{\left(1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \varphi(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| (h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \left(1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_M \frac{\varphi(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| (h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n.$$

3). Consideriamo il caso $n=2$. Denotiamo le coordinate dei punti di \mathbb{R}^2 come (t, x) .

Consideriamo la funzione

$$f(t, x) = c^2 t^2 - x^2 \quad (c > 0)$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2c^2 t \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$

$$|f'(t, x)| = (4t^2 c^4 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} = 2(t^2 c^4 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$|f'(t, x)| = 0 \iff (t, x) = (0, 0)$$

Possiamo assumere

$$X = \mathbb{R}^2 - (0, 0);$$

si ha anche

$$V_0 = \left\{ (t, x) \in X : c^2 t^2 - x^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (t, x) \in X : \cancel{c^2 t^2 - x^2} \right\}$$

$$= V_0^+ \cup V_0^- \quad (\text{unione disgiunta})$$

$$\text{in cui } V_0^+ = \left\{ (t, x) : t = \left(\frac{x^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} |x|, x \neq 0 \right\}$$

$$V_0^- = \left\{ (t, x) : t = -\left(\frac{x^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{c} |x|, x \neq 0 \right\}$$

Inoltre

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t = \frac{1}{c} |x|} = \left| 2c^2 \left(\frac{1}{c} |x| \right) \right| = 2c |x|$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t = -\frac{1}{c} |x|} = \left| 2c^2 \left(-\frac{1}{c} |x| \right) \right| = 2c |x|$$

Per cui, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 - (0,0))$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \delta(c^2 t^2 - x^2), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R} - 0} \frac{1}{2c|x|} \varphi\left(\frac{|x|}{c}, x\right) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R} - 0} \frac{1}{2c|x|} \varphi\left(-\frac{|x|}{c}, x\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c|x|} \varphi(|x|/c, x) dx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2c|x|} \varphi(-|x|/c, x) dx. \end{aligned}$$

Notiamo che $\delta(c^2 t^2 - x^2)$ non si estende ad una distribuzione su \mathbb{R}^2 .

4). Consideriamo il caso $n=4$. Densitiamo le coordinate dei punti di \mathbb{R}^4 come

$$(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

La funzione $f(t, x)$ è definita come

$$\begin{aligned} f(t, x) &= c^2 t^2 - |x|^2 \\ (\text{in cui } |x| &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2c^2 t, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = -2x_j, \quad j=1, 2, 3;$$

ed anche

$$|f'(t, x)| = (4t^2 c^4 + 4|x|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \left(t^2 c^4 + |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$|f'(t, x)| = 0 \iff (t, x) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^4.$$

Possiamo assumere

$$X = \mathbb{R}^4 - \{0\} ;$$

e si ha

$$V_0 = \left\{ (t, x) \in X : c^2 t^2 - |x|^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (t, x) \in X : c^2 t^2 = |x|^2 \right\}$$

$$= V_0^+ \cup V_0^- \quad (\text{unione disgiunta})$$

in cui

$$V_0^+ = \left\{ (t, x) : t = \frac{1}{c} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \right\}$$

$$V_0^- = \left\{ (t, x) : t = -\frac{1}{c} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \right\}.$$

Inoltre

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t = \frac{1}{c} |x|} = \left| 2c^2 \left(\frac{1}{c} |x| \right) \right| = 2c |x|$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t = -\frac{1}{c} |x|} = \left| 2c^2 \left(-\frac{1}{c} |x| \right) \right| = 2c |x|.$$

Restano, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4 - \{0\})$, si ha

$$\langle \delta(c^2 t^2 - |x|^2), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3 - \{0\}} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{c}, x\right)}{2c |x|} d^3 x + \int_{\mathbb{R}^3 - \{0\}} \frac{\varphi\left(-\frac{|x|}{c}, x\right)}{2c |x|} d^3 x$$

E' chiaro che gli integrali sono ben definiti anche se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$; quindi, possiamo considerare $\delta(c^2 t^2 - |x|^2)$

come una distribuzione su tutto \mathbb{R}^4 , definita

come

$$\langle \delta(c^2 t^2 - |x|^2), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|/c, x)}{2c|x|} d^3x + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(-|x|/c, x)}{2c|x|} d^3x.$$