# La formula di Taylor.

Supponiamo che $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$; consideriamo l'integrale

$$\int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt =$$

$$= f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dt =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x f^{(n-1)}(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dt =$$

(continuando ad integrare per parti)

$$= -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) - \cdots\cdots - x f'(0) + \int_0^x f'(t)\, dt =$$

$$= -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-2)}(0) - \cdots\cdots - x f'(0) + f(x) - f(0)$$

Da cui si ottiene che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) +$$

$$+ \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt .$$

Si ha anche

$$\int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt =$$

(ponendo $t = xs$)

$$= \frac{x^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-s)^{k-1} f^{(k)}(xs)\, ds .$$

Per cui si ha la "formula di Taylor"

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{x^k}{k!} r_f^k(x)$$

in cui

$$r_f^k(x) = k \int_0^1 (1-s)^{k-1} f^{(k)}(xs)\, ds$$

Le proprietà della funzione $r_f^k$ sono:

1) $r_f^k$ è continua su $\mathbb{R}$, per il teorema di continuità di un integrale dipendente da un parametro; se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ allora $r_f^k \in C^\infty(\mathbb{R})$, per il teorema di derivazione di un integrale dipendente da un parametro ("derivazione sotto il segno di integrale");

2) $|r_f^k(x)| \leq k \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$,

dal momento che

$$0 \leq (1-s)^{k-1} \leq 1 , \quad \text{se } 0 \leq s \leq 1 ;$$

3) più in generale, se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$|\partial^n r_f^k(x)| \leq k \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k+n)}(x)| ,$$

dal momento che

$$0 \leq s^n (1-s)^{k-1} \leq 1 , \quad \text{se } 0 \leq s \leq 1 .$$