

Università degli Studi di Genova

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Anno Accademico 2004/2005



Appunti al corso di
Teoria dei gruppi.

**Teoria dei gruppi
e sue applicazioni alla fisica**

Versione preliminare

Gianni Cassinelli

Indice

1	Le rappresentazioni dei gruppi finiti	3
1.1	Le proprietà fondamentali delle rappresentazioni dei gruppi finiti	3
1.1.1	Le definizioni fondamentali	3
1.1.2	Azione di G su spazi di funzioni. Rappresentazioni regolari	5
1.1.3	La completa decomponibilità delle rappresentazioni di G	7
1.1.4	L'algebra di G	9
1.2	La struttura dello spazio $Hom_G(V, W)$ e le decomposizioni delle rappresentazioni di G	11
1.2.1	Decomposizione di $Hom_G(V, W)$ rispetto alle decomposizioni di V e W	11
1.2.2	Il Lemma di Schur e le sue conseguenze	12
1.2.3	La decomposizione canonica di una rappresentazione	14
1.2.4	La struttura dell'algebra $Hom_G(V, V)$	16
1.3	L'analisi della rappresentazione regolare di G	18
1.3.1	L'immersione di ogni rappresentazione irriducibile nella rappresentazione regolare	18
1.3.2	La formula delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili	20
1.3.3	Il numero delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti	20
1.4	I caratteri delle rappresentazioni di G	21
1.4.1	Le relazioni di ortogonalità tra gli elementi di matrice delle rappresentazioni	21
1.4.2	I caratteri delle rappresentazioni di G	23
1.5	Complementi di teoria dei gruppi finiti	27
1.5.1	Decomposizione delle rappresentazioni finito-dimensionali dei gruppi finiti	27
1.5.2	Il teorema di Burnside	32
2	Il gruppo simmetrico \mathcal{S}_n	35
2.1	Definizioni e notazioni	35
2.2	Le classi di coniugazione in \mathcal{S}_n	37
2.3	Esempi	40
2.4	Gli schemi di Young	40
2.5	Le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n	41
2.6	La decomposizione canonica della rappresentazione regolare e i <i>tableau</i> standard	44

2.7	Formule combinatorie e caratteri	47
3	Le rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di $Gl(V)$	51
3.1	Le azioni di \mathcal{S}_n e di $Gl(V)$ su $V^{\otimes n}$	51
3.2	La rappresentazione di $Gl(V)$ su U_λ	53
3.3	La decomposizione di $V^{\otimes n}$	54
3.4	I sottospazi irriducibili di $V^{\otimes n}$	55
3.5	Esempi.	59
3.6	Alcuni commenti finali.	63
3.7	Le dimostrazioni	65
4	Teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti	69
5	Le rappresentazioni unitarie irriducibili dei gruppi di rotazioni.	71
5.1	I gruppi $O(3)$ ed $SO(3)$. Il loro significato geometrico. Le classi coniugate e la misura invariante.	71
5.2	Il gruppo $SU(2)$. Le classi coniugate, la misura invariante e l'omomorfismo di ricoprimento $SU(2) \rightarrow SO(3)$	77
5.3	Le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, di $SO(3)$ e di $O(3)$	83
5.4	Il gruppo delle rotazioni e le armoniche sferiche	90
5.5	Sottogruppi di $O(3)$ e di $SO(3)$ formati da rotazioni assiali.	97
6	Applicazioni della teoria delle rappresentazioni dei gruppi di rotazioni e del gruppo simmetrico alla meccanica quantistica.	105
6.1	Considerazioni generali.	105
6.1.1	Molteplicità degli autovalori dell'operatore dinamico	105
6.1.2	Suddivisione di un autovalore per l'effetto di una perturbazione	109
6.2	Sistemi ad una particella	111
6.2.1	Elettrone in un campo centrale	111
6.2.2	La molteplicità degli autovalori dell'operatore dinamico, trascurando l'interazione <i>spin</i> -orbita	113
6.2.3	L'interazione <i>spin</i> -orbita e la struttura fine.	117
6.2.4	Effetto Zeeman ed effetto Stark	118
6.3	Sistemi formati da particelle identiche	124
6.3.1	La connessione <i>spin</i> statistica e l'atomo con N elettroni	124
6.3.2	Autovalori ed autospazi dell'operatore dinamico di un atomo con N elettroni indipendenti. Le configurazioni elettroniche.	127
6.3.3	I termini spettroscopici	132
6.3.4	L'interazione spin-orbita. Multipletti.	137
A	Nozioni elementari di teoria dei gruppi	139
A.1	Gruppi e sottogruppi	139
A.2	Omomorfismi ed isomorfismi di gruppi	140
A.3	Azione di un gruppo su un insieme	142
A.4	Classi laterali, classi di coniugazione	143

A.5	Sottogruppi normali.	
	Teorema degli omomorfismi.	146
A.6	Prodotti semidiretti e diretti	149

Capitolo 1

Le rappresentazioni dei gruppi finiti

1.1 Le proprietà fondamentali delle rappresentazioni dei gruppi finiti

In questo capitolo con l'espressione “un gruppo G ” intenderemo sempre (salvo esplicito avviso contrario) un “un gruppo finito G ”. Con l'espressione “uno spazio vettoriale V ” intenderemo sempre (salvo esplicito avviso contrario) “uno spazio vettoriale *complesso* V , di dimensione *finita*”.

1.1.1 Le definizioni fondamentali

1. Una *rappresentazione* di un gruppo G in uno spazio vettoriale V è un omomorfismo

$$\pi : G \rightarrow \text{Aut}(V);$$

indicheremo la rappresentazione con la coppia (π, V) ;

2. se (π, V) (ρ, W) sono due rappresentazioni di G e se

$$T : V \rightarrow W$$

è un'applicazione lineare, diremo che T è un G -*morfismo* (o, anche, che T *intreccia* π e ρ) se ha la proprietà

$$T(\pi(x)v) = \rho(x)T(v)$$

per ogni $x \in G$ e per ogni $v \in V$. L'insieme di queste applicazioni viene denotato con $\text{Hom}_G(V, W)$. $\text{Hom}_G(V, W)$ è un sottospazio di $\text{Hom}(V, W)$ e, nel caso che W coincida con V , $\text{Hom}_G(V, V)$ è una sottoalgebra di $\text{End}(V)$;

3. se (π, V) (ρ, W) sono due rappresentazioni di G , diremo che esse sono *equivalenti* se esiste un elemento T di $Hom_G(V, W)$ che sia un *isomorfismo* di spazi vettoriali;
4. se (π, V) è una rappresentazione di G e W è un sottospazio vettoriale di V , diremo che W è *stabile* (o *invariante*) per π se

$$\pi(x) w \in W$$

per ogni $w \in W$ e per ogni $x \in G$; per ogni $x \in G$ si ha

$$\pi(x) W = W;$$

inoltre, per ogni $T \in Hom_G(V, W)$ si ha

$$ker T \text{ è stabile in } V$$

$$im T \text{ è stabile in } W;$$

5. se (π, V) è una rappresentazione di G e W è un sottospazio di V , *stabile* per π , allora $(\pi|_W, W)$ è una rappresentazione di G ; viene detta la *sottorappresentazione* di (π, V) *definita* da W (a volte si dice, semplicemente, che W è la sottorappresentazione di (π, V)); si dice che (π, V) è *irriducibile* se le sue *sole* sottorappresentazioni sono quelle *banali* (cioè quelle definite dai sottospazi invarianti banali di V , che sono V stesso e $\{0\}$);
6. se (π, V) è una rappresentazione di G ed (e_1, \dots, e_n) è una base di V , allora la *matrice* $\pi_{ij}(x)$, della rappresentazione π , è data da

$$\pi(x) e_k = \sum_{j=1}^n \pi_{jk}(x) e_j,$$

per ogni $x \in G$ ed ogni $k = 1, \dots, n$;

7. se (π, V) e (ρ, W) sono rappresentazioni di G , possiamo costruire, mediante esse la rappresentazione *somma diretta*, denotata con

$$(\pi \oplus \rho, V \oplus W);$$

questa rappresentazione è definita sullo spazio vettoriale $V \oplus W$ ponendo

$$(\pi \oplus \rho)(x)(v, w) := (\pi(x)v, \rho(x)w)$$

per ogni $x \in G$ e per ogni $v \in V, w \in W$. Se fissiamo una base (e_1, \dots, e_n) in V e una base (f_1, \dots, f_p) in W , allora

$$\left((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p) \right)$$

è una base in $V \oplus W$; le matrici π_{ik} e ρ_{ik} si combinano allora nella matrice $\pi \oplus \rho$ come

$$\begin{pmatrix} \pi_{ij} & 0 \\ 0 & \rho_{ij} \end{pmatrix}$$

cioè $(\pi \oplus \rho)_{ij}$ ha la forma “diagonale a blocchi”.

1.1.2 Azione di G su spazi di funzioni. Rappresentazioni regolari

Denotiamo con M un insieme (finito) su cui è definita un'azione di G , che denotiamo

$$x, m \mapsto x[m], \quad x \in G, m \in M.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}(M)$ lo spazio vettoriale su \mathbf{C} delle funzioni definite in M , a valori complessi; per ogni $m \in M$ definiamo $\delta_m \in \mathcal{F}(M)$, ponendo

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Con queste notazioni,

$$\{\delta_m : m \in M\}$$

è una base di $\mathcal{F}(M)$; ogni $f \in \mathcal{F}(M)$ può essere espresso univocamente come

$$f = \sum_{m \in M} a_m \delta_m,$$

in cui $a_m = f(m)$. Si definisce una rappresentazione $(\pi, \mathcal{F}(M))$ di G ponendo

$$\left(\pi(x) f \right)(m) := f(x^{-1}[m]), \quad x \in G;$$

$(\pi, \mathcal{F}(M))$ è una rappresentazione in quanto:

1. per ogni fissato $x \in G$,

$$\pi(x) : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

è lineare;

2. se $x, y \in G$, si ha

$$\begin{aligned} \left(\pi(x) \pi(y) f \right)(m) &= \left(\pi(x) (\pi(y) f) \right)(m) = \\ &= \left(\pi(y) f \right)(x^{-1}[m]) = f(y^{-1}[x^{-1}[m]]) = \\ &= f((xy)^{-1}[m]) = \left(\pi(xy) f \right)(m). \end{aligned}$$

Notiamo che, scrivendo

$$f(m) = \sum_{p \in M} a_p \delta_p(m),$$

si ha, per ogni $x \in G$,

$$\begin{aligned} (\pi(x)f)(m) &= \sum_{p \in M} a_p \delta_p(x^{-1}[m]) = \\ &= \sum_{p \in M} a_p \delta_{x[p]}, \end{aligned}$$

per cui π è completamente descritta dalla sua azione sulla base $\{\delta_m : m \in M\}$:

$$\pi(x)\delta_m = \delta_{x[m]}.$$

Se si sceglie $M = G$, con l'azione di G su G data dalla moltiplicazione *a sinistra*

$$a[x] = ax \quad a, x \in G,$$

la costruzione descritta sopra porta a definire una rappresentazione $(\lambda, \mathcal{F}(G))$, che viene detta la *rappresentazione regolare sinistra* (λ sta per “left”=sinistra). Notiamo che G agisce su se stesso anche per moltiplicazione *a destra*, ponendo

$$a[x] = xa^{-1} \quad a, x \in G.$$

La costruzione precedente, anche in questo caso, definisce una rappresentazione di G , denotata $(\rho, \mathcal{F}(G))$ (ρ sta per “right”=destra); esplicitamente

$$(\lambda(a)f)(x) = f(a^{-1}x) \quad a, x \in G, f \in \mathcal{F}(G)$$

$$(\rho(a)f)(x) = f(xa) \quad a, x \in G, f \in \mathcal{F}(G)$$

sulla base $\{\delta_x : x \in G\}$ di $\mathcal{F}(G)$ le azioni di λ e ρ sono date da

$$\lambda(a)\delta_x = \delta_{ax} \quad a, x \in G$$

$$\rho(a)\delta_x = \delta_{xa^{-1}} \quad a, x \in G.$$

Infine notiamo che l'applicazione

$$f \mapsto f' : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G),$$

in cui f' è definita da

$$f'(x) := f(x^{-1}), \quad x \in G,$$

è un *isomorfismo* di spazi vettoriali che *intreccia* le rappresentazioni λ e ρ che sono, quindi, *equivalenti*.

1.1.3 La completa decomponibilità delle rappresentazioni di G

Vogliamo descrivere le rappresentazioni di G che *non* possono essere espresse come somma diretta di altre rappresentazioni; esse vengono dette *indecomponibili*. Per i gruppi finiti, tali rappresentazioni coincidono esattamente con quelle *irriducibili*; inoltre, ogni rappresentazione è somma diretta di irriducibili; questa decomposizione in somma diretta è, fino ad un certo punto da precisare, univocamente determinata. La chiave per mostrare questi fatti è il risultato seguente.

Proposizione. Se (π, V) è una rappresentazione di G , allora si può definire su V un prodotto scalare (\cdot, \cdot) , invariante rispetto all'azione di G ; tale cioè che

$$(v, w) := (\pi(x)v, \pi(x)w)$$

per ogni $x \in G$ e per tutti i $v, w \in V$.

Dimostrazione. Sia $(\cdot, \cdot)_0$ un qualunque prodotto scalare su V , definiamo

$$(v, w) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (\pi(x)v, \pi(x)w)_0;$$

allora si ha

1. $v, w \mapsto (v, w)$ è un prodotto scalare su V ;
2. $(v, w) = (\pi(x)v, \pi(x)w)$; infatti

$$\begin{aligned} (\pi(x)v, \pi(x)w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} (\pi(y)\pi(x)v, \pi(y)\pi(x)w)_0 = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} (\pi(yx)v, \pi(yx)w)_0 = \end{aligned}$$

(poiché, per ogni $x \in G$, l'applicazione $y \mapsto yx : G \rightarrow G$ è *biettiva*)

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} (\pi(y)v, \pi(y)w)_0 = (v, w).$$

□

Commenti e conseguenze

1. L'affermazione della proposizione precedente *non* è vera se G *non* è finito. Questo è un esempio: considerate \mathbf{C} come spazio vettoriale 1-dimensionale su \mathbf{C} ; per ogni $n \in \mathbf{Z}$ consideriamo l'operatore moltiplicativo

$$z \mapsto a^n z, \quad (a \in \mathbf{C}, a \neq 0);$$

questa è una rappresentazione di \mathbf{Z} , 1-dimensionale, che *non* è unitaria, rispetto all'unico prodotto scalare che si può definire su \mathbf{C} ;

2. Se W è un sottospazio non banale di V , stabile rispetto a π , allora W ha un *complementare* in V (cioè un sottospazio W' di V tale che $V = W \oplus W'$) anch'esso stabile. Infatti, fissiamo su V un prodotto scalare π -invariante, la cui esistenza ci è assicurata dalla proposizione precedente. Denotiamo

$$W^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0, \forall w \in W\};$$

allora W^\perp è π -invariante. Infatti, se $v \in W^\perp$, si avrà, per ogni $x \in G$ e per ogni $w \in W$,

$$\begin{aligned} (\pi(x)v, w) &= (\pi(x^{-1})\pi(x)v, \pi(x^{-1})w) = \\ &= (v, \pi(x^{-1})w) = 0, \end{aligned}$$

poiché $\pi(x^{-1})w \in W$ e $v \in W^\perp$; per cui $\pi(x)v \in W^\perp$.

Chiaramente si ha

$$(\pi, V) = (\pi|_W, W) \oplus (\pi|_{W^\perp}, W^\perp).$$

3. È importante capire che la proprietà precedente *non* è necessariamente posseduta da un gruppo non finito. Ad esempio, considerate il gruppo additivo \mathbf{R} e la sua rappresentazione in \mathbf{C}^2

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \longrightarrow M_2(\mathbf{C});$$

il sottospazio di \mathbf{C}^2 generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è stabile, ma *nessun* suo complementare lo è.

4. Se (π, V) non è irriducibile e quindi W è un sottospazio invariante non banale, il punto 2 ci assicura che W possiede un complementare invariante W' . A loro volta W e W' possono avere sottospazi invarianti non banali. Nel primo caso, possono essere ulteriormente decomposti e così via. Alla fine (ricordando che V è di dimensione finita) si otterrà una decomposizione di V in somma diretta di sottospazi *invarianti irriducibili*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Questa proprietà delle rappresentazioni finito-dimensionali dei gruppi finiti viene detta *completa decomponibilità*.

5. È naturale porsi il problema dell'*unicità* della decomposizione di V in sottospazi irriducibili e stabili. Considerate la rappresentazione

$$\pi(x) = I \quad \text{per ogni } x \in G,$$

in cui I è l'identità in $Aut(V)$. Evidentemente, ci sono infiniti modi di decomporre V in sottospazi 1-dimensionali, tutti irriducibili e invarianti. Quindi, in generale, la decomposizione di una rappresentazione in somma diretta si sotto rappresentazioni irriducibili *non* è unica. Tuttavia, c'è un certo grado di unicità nella decomposizione, che discuteremo più avanti.

6. Se G agisce su un insieme finito M , la rappresentazione $(\rho, \mathcal{F}(M))$ *non* è mai irriducibile, a meno che M non contenga soltanto un elemento: infatti la funzione costante, uguale a 1 su tutto M , genera un sottospazio 1-dimensionale invariante di $\mathcal{F}(M)$ su cui G agisce con la rappresentazione banale (ogni elemento di G è rappresentato dall'identità).

Il problema centrale della teoria delle rappresentazioni è descrivere esplicitamente la decomposizione della rappresentazione regolare.

7. Se (π, V) e (ρ, W) sono due rappresentazioni di G , allora

$$Hom_G(V, W) \neq \{0\}$$

se e solo se esiste una sottorappresentazione di V equivalente a una sottorappresentazione di W . Per mostrare questo fatto, possiamo assumere che su V sia definito un prodotto scalare π -invariante e su W sia definito un prodotto scalare ρ -invariante. Supponiamo, innanzi tutto, che esista un elemento $T \neq 0$ in $Hom_G(V, W)$: allora $ker T$ è π -invariante in V e $im T$ è ρ -invariante in W . Allora

$$T|_{(ker T)^\perp} \in Hom_G\left((ker T)^\perp, im T\right);$$

$T|_{(ker T)^\perp}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali che definisce l'equivalenza

$$\left(\pi|_{(ker T)^\perp}, (ker T)^\perp\right) \cong \left(\rho|_{im T}, im T\right).$$

Supponiamo che siano V_1 un sottospazio π -stabile di V e W_1 un sottospazio ρ -stabile di W , tali che esiste un isomorfismo $S : V_1 \rightarrow W_1$ che intreccia π e ρ . Ogni elemento v di V può essere espresso univocamente come $v = v_1 + v_2$, in cui $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_1^\perp$, allora definiamo $T : V \rightarrow W$, ponendo

$$T v := S v_1.$$

È immediato verificare che $T \in Hom_G(V, W)$.

1.1.4 L'algebra di G

In $\mathcal{F}(G)$ può essere definito un prodotto che lo rende un'algebra, in modo tale che G può essere immerso in maniera naturale in $\mathcal{F}(G)$, preservando le rispettive moltiplicazioni. Notiamo, innanzi tutto, che l'applicazione

$$x \mapsto \delta_x : G \longrightarrow \mathcal{F}(G)$$

è un'applicazione *iniettiva*, che permette di *identificare* G con un sottoinsieme di $\mathcal{F}(G)$. La moltiplicazione in $\mathcal{F}(G)$ può essere definita in modo naturale; se

$$f = \sum_{x \in G} f(x) \delta_x, \quad g = \sum_{x \in G} g(x) \delta_x$$

si definisce il prodotto, $f * g$, tra f e g in modo che

$$f * g = \sum_{x, y \in G} f(x) g(y) \delta_x * \delta_y$$

e si pone per definizione

$$\delta_x * \delta_y := \delta_{xy}, \quad x, y \in G.$$

Allora si avrà

$$\begin{aligned} f * g &= \sum_{x, y \in G} f(x) g(y) \delta_{xy} = \\ &= \sum_{x, y \in G} f(x) g(x^{-1}z) \delta_z = \sum_{z \in G} \left(\sum_{x \in G} f(x) g(x^{-1}z) \right) \delta_z. \end{aligned}$$

Si può quindi definire il prodotto fra elementi di $\mathcal{F}(G)$ intrinsecamente (cioè senza l'uso della base) come

$$(f * g)(y) := \sum_{x \in G} f(x) g(x^{-1}y), \quad y \in G;$$

definizione equivalente a porre

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}.$$

Il prodotto $f * g$ viene detto “prodotto di convoluzione su G ”. È immediato verificare che $\mathcal{F}(G)$ con l'operazione $*$ sopra definita è un'algebra con identità δ_e ($e =$ identità in G)

È immediato verificare che $f \in \mathcal{F}(G)$ commuta con tutti gli altri elementi di $\mathcal{F}(G)$, cioè

$$f * g = g * f \quad \text{per ogni } g \in \mathcal{F}(G),$$

se e solo se

$$f(x) = f(yxy^{-1})$$

cioè se e solo se f è *costante sulle classi coniugate di G* . Queste funzioni vengono dette “funzioni centrali” in $\mathcal{F}(G)$. (In generale, il centro di un'algebra è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri).

1.2 La struttura dello spazio $Hom_G(V, W)$ e le decomposizioni delle rappresentazioni di G

1.2.1 Decomposizione di $Hom_G(V, W)$ rispetto alle decomposizioni di V e W

Denotiamo con (π, V) e (ρ, W) due rappresentazioni (complesse, finito dimensionali) di un gruppo (finito) G . Supponiamo che

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_q$$

sia una qualunque decomposizione di W in somma diretta di sottospazi invarianti (non necessariamente irriducibili) rispetto a ρ . Denotiamo con \mathcal{Q}_j il proiettore sul sottospazio W_j ; per ogni $j = 1, \dots, q$, si ha

$$\mathcal{Q}_j \in Hom_G(W, W).$$

Infatti, per ogni $w \in W$, si ha, per ogni $x \in G$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_j \rho(x) w &= \left(\rho(x) w \right)_j \\ \rho(x) \mathcal{Q}_j w &= \rho(x) w_j;\end{aligned}$$

consideriamo

$$\rho(x) w = \left(\rho(x) w \right)_1 + \dots + \left(\rho(x) w \right)_q,$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\rho(x) w_1 + \dots + \rho(x) w_q &= \rho(x) (w_1 + \dots + w_q) = \\ &= \rho(x) w;\end{aligned}$$

per ipotesi $\rho(x) w_j \in W_j$, per ogni $j = 1, \dots, q$, allora, per la definizione stessa di somma diretta,

$$\left(\rho(x) w \right)_j = \rho(x) w_j,$$

da cui

$$\rho(x) \mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j \rho(x), \quad \text{per ogni } x \in G.$$

In maniera del tutto analoga, supponiamo che

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$$

sia una decomposizione di V in somma diretta di sottospazi stabili rispetto a π . Denotiamo con \mathcal{P}_i il proiettore sull' i -esimo addendo diretto V_i , nella decomposizione di V . Allora si ha anche

$$\mathcal{P}_i \in Hom_G(V, V), \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, p.$$

Se si riguarda, in maniera naturale, \mathcal{P}_i come applicazione da V a V_i , si ha anche

$$\mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(V, V_i), \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, p,$$

ed, analogamente,

$$\mathcal{Q}_j \in \text{Hom}_G(W, W_j), \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, q.$$

Supponiamo $T \in \text{Hom}_G(V, W)$; allora per ogni $i = 1, \dots, p$ e per ogni $j = 1, \dots, q$, si avrà

$$\mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(V, W);$$

infatti, per tutti gli $x \in G$,

$$\mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i \pi(x) = \mathcal{Q}_j T \pi(x) \mathcal{P}_i = \mathcal{Q}_j \rho(x) T \mathcal{P}_i = \rho(x) \mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i.$$

Notiamo, inoltre, i fatti seguenti:

1. ogni $\mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i$ può essere riguardato come un'applicazione lineare da V_i a W_j e

$$\mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(V_i, W_j);$$

2. $\text{Hom}_G(V_i, W_j)$ può essere identificato con un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}_G(V, W)$;

- 3.

$$T = I T I = \left(\sum_{j=1}^q \mathcal{Q}_j \right) T \left(\sum_{i=1}^p \mathcal{P}_i \right) = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p \mathcal{Q}_j T \mathcal{P}_i;$$

in questa maniera si ottiene una decomposizione di $\text{Hom}_G(V, W)$ in somma *diretta* di suoi sottospazi

$$\text{Hom}_G(V, W) = \bigoplus_{i=1}^p \bigoplus_{j=1}^q \text{Hom}_G(V_i, W_j).$$

1.2.2 Il Lemma di Schur e le sue conseguenze

L'ultima formula ottenuta nel paragrafo precedente permette di ridurre lo studio di $\text{Hom}_G(V, W)$ a quello dei sottospazi in cui si decompone in somma.

Consideriamo due rappresentazioni di G , (π, V) e (ρ, W) , entrambe *irriducibili*. In questo caso, la struttura $\text{Hom}_G(V, W)$ è completamente descritta dal seguente risultato, noto come Lemma di Schur.

Proposizione. Se (π, V) e (ρ, W) sono irriducibili e $T \in \text{Hom}_G(V, W)$, allora

1. T è un isomorfismo oppure $T = 0$

2. se $V = W$, allora $T = \lambda I$, per qualche $\lambda \in \mathbf{C}$.

Dimostrazione. (1) $\ker T$ è un sottospazio di V π -invariante; l'irriducibilità di (π, V) implica, allora, che

$$\ker T = \{0\} \text{ oppure } \ker T = V,$$

nel secondo caso è $T = 0$; se è $\ker T = \{0\}$, allora T è iniettivo. Anche $\text{im } T$ è un sottospazio di W ρ -invariante, quindi

$$\text{im } T = \{0\} \text{ oppure } \text{im } T = W;$$

nel primo caso $T = 0$; nel secondo T è surgettivo; in conclusione

$$T = 0 \text{ oppure } T \text{ è un isomorfismo.}$$

(2) T possiede almeno un autovalore λ (attenzione, questo è vero se V è uno spazio vettoriale complesso; *non* è necessariamente vero se V è uno spazio vettoriale su \mathbf{R} ; se λ è un autovalore di T , allora $\ker (T - \lambda I) \neq \{0\}$; ma $T - \lambda I \in \text{Hom}_G(V, V)$, per il punto 1 allora è $T - \lambda I = 0$, da cui $T = \lambda I$. \square)

Commenti e conseguenze

1. Se (π, V) e (ρ, W) sono due rappresentazioni *irriducibili equivalenti*, allora $\text{Hom}_G(V, W)$ è uno spazio vettoriale 1-dimensionale, generato da un qualunque isomorfismo che intrecci V e W . Infatti, per ipotesi esiste un elemento S in $\text{Hom}_G(V, W)$ che è un isomorfismo; se T è un qualunque elemento di $\text{Hom}_G(V, W)$, l'applicazione

$$T \circ S^{-1} : W \rightarrow W$$

è in $\text{Hom}_G(W, W)$; allora, per la proposizione precedente

$$T \circ S^{-1} = \lambda I \Rightarrow T = \lambda S,$$

per un qualche $\lambda \in \mathbf{C}$, univocamente determinato da S e da T .

2. Se G è *abeliano* e (π, V) è una rappresentazione *irriducibile* di G , allora V è *1-dimensionale*. Infatti, per ogni $x \in G$, $\pi(x) \in \text{Hom}_G(V, V)$:

$$\pi(x) \pi(y) v = \pi(xy) v = \pi(yx) v = \pi(y) \pi(x) v.$$

Per il Lemma di Schur $\pi(x) = \lambda I$, cioè $\pi(x)$ agisce su V moltiplicando scalarmente ogni vettore per $\lambda \in \mathbf{C}$; allora ogni sottospazio 1-dimensionale è invariante; poiché (π, V) è irriducibile, V è 1-dimensionale.

3. Denotiamo con (π, V) una *qualunque* rappresentazione di G e con

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

una *qualunque* decomposizione di V in sottospazi invarianti irriducibili. Abbiamo già notato come questa decomposizione *non* sia unica. Vogliamo mostrare, però, che qualunque sottospazio W di V che sia invariante e irriducibile è necessariamente equivalente (come rappresentazione di G) ad uno dei sottospazi \mathcal{V}_i oppure è il sottospazio banale $\{0\}$.

Per mostrare questo fatto, denotiamo con

$$\mathcal{P}_i : V \rightarrow \mathcal{V}_i$$

il proiettore sul sottospazio invariante \mathcal{V}_i , considerato nel paragrafo precedente. Abbiamo già visto che

$$\mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(V, \mathcal{V}_i) \quad i = 1 \dots m.$$

Poiché W è un sottospazio invariante, è anche

$$\mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(W, \mathcal{V}_i) \quad i = 1 \dots m.$$

Per il Lemma di Schur (W e \mathcal{V}_i sono entrambi irriducibili) si ha che \mathcal{P}_i è un isomorfismo per qualche i , e in tal caso abbiamo concluso, oppure $\mathcal{P}_i = 0$ per ogni i . Dal momento che ogni $w \in W$ è esprimibile univocamente come

$$w = \mathcal{P}_1 w + \dots + \mathcal{P}_m w,$$

se $\mathcal{P}_i = 0$ per ogni i si ha $W = \{0\}$.

1.2.3 La decomposizione canonica di una rappresentazione

Denotiamo con

$$\{(\sigma_i, U_i) : i \in \mathcal{I}\}$$

le (classi di equivalenze delle) rappresentazioni irriducibili non equivalenti di G . \mathcal{I} è un insieme di indici arbitrario; in seguito mostreremo che \mathcal{I} è finito. Denotiamo con

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

una *qualunque* decomposizione di V in sottospazi invarianti *irriducibili* e con

$$W = \mathcal{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_n$$

una *qualunque* decomposizione di W in sottospazi invarianti *irriducibili*. Per ogni $i \in \mathcal{I}$, poniamo

$$V_i = \bigoplus \left(\mathcal{V}_l : (\pi|_{\mathcal{V}_l}, \mathcal{V}_l) \cong (\sigma_i, U_i) \right)$$

$$W_i = \bigoplus (\mathcal{W}_i : (\rho|_{\mathcal{W}_i}, \mathcal{W}_i) \cong (\sigma_i, U_i)),$$

conveniamo di porre $V_i = \{0\}$ o $W_i = \{0\}$ nel caso che nessun sottospazio \mathcal{V}_i o \mathcal{W}_i sia equivalente a (σ_i, U_i) . Otteniamo in questa maniera due decomposizioni

$$V = \bigoplus (V_i : i \in \mathcal{I})$$

$$W = \bigoplus (W_i : i \in \mathcal{I}),$$

in cui soltanto per due sottoinsiemi finiti di indici gli spazi V_i e W_i sono non banali. Per quanto abbiamo visto nel punto precedente, se $T \in \text{Hom}_G(V, W)$, si avrà

$$T = \sum_{i,j} T_{ij}, \quad \text{in cui } T_{ij} = Q_j T P_i.$$

Notiamo che, se $i \neq j$, $\text{Hom}_G(V_i, W_j) = \{0\}$; infatti, nessuna sottorappresentazione di V_i (tutte equivalenti a (σ_i, U_i)) è equivalente ad una sottorappresentazione di V_j (tutte equivalenti a (σ_j, U_j)). In questa maniera, otteniamo la decomposizione in *somma diretta*

$$\text{Hom}_G(V, W) = \bigoplus (\text{Hom}_G(V_i, W_i) : i \in \mathcal{I}),$$

in cui solo un insieme finito di addendi diretti è non banale.

Supponiamo, a questo punto, $(\pi, V) = (\rho, W)$. In questa situazione

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m = \mathcal{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_n$$

sono *due* decomposizioni *differenti* di *una stessa* rappresentazione di G . Scegliamo $T = I$, l'identità da V a V . È evidente che $I \in \text{Hom}_G(V, V)$; in questo caso particolare si ha

$$I(V_i) = V_i, \quad \text{per ogni } i \in \mathcal{I};$$

d'altra parte, la decomposizione di un elemento di $\text{Hom}_G(V, V)$, descritta in precedenza, ci dà:

$$I(V_i) = W_i, \quad \text{per ogni } i \in \mathcal{I};$$

quindi $V_i = W_i$ per ogni $i \in \mathcal{I}$. Questo ci permette di concludere che in una *qualunque* decomposizione di V in rappresentazioni irriducibili sono *univocamente* determinati:

1. le (classi di equivalenza delle) rappresentazioni irriducibili di G che intervengono nella decomposizione in modo non banale;
2. il numero di addendi diretti corrispondenti alla rappresentazione irriducibile (σ_i, U_i) ; tale numero viene detto la *molteplicità* di (σ_i, U_i) in (π, V) . Notiamo che una qualunque sottorappresentazione di (π, V) compare in una decomposizione di V (e quindi in tutte!). In conclusione, pur

non essendo unica la decomposizione di V in sottospazi irriducibili, la decomposizione

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k,$$

ottenuta sommando tra essi i sottospazi irriducibili equivalenti, è univocamente determinata e contiene tanti addendi diretti quante le sottorappresentazioni irriducibili di V non equivalenti. Viene detta la decomposizione *canonica* (o anche *isotipica*) di V .

Fissiamo una rappresentazione irriducibile (ρ, W) ed una rappresentazione qualunque (π, V) . Mostriamo che la molteplicità m di (ρ, W) in (π, V) è uguale esattamente a

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W).$$

Infatti, consideriamo la decomposizione canonica di V

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k;$$

allora $\operatorname{Hom}_G(V, W)$ si decompone, in accordo con la decomposizione di V , come

$$\operatorname{Hom}_G(V, W) = \bigoplus_{l=1}^k \operatorname{Hom}_G(V_l, W);$$

inoltre ogni addendo $\operatorname{Hom}_G(V_l, W) = \{0\}$ eccetto che per un solo indice $i \in \{1, \dots, k\}$; per tale fissato indice

$$\operatorname{Hom}_G(V_i, W) = \bigoplus \left(\operatorname{Hom}_G(\mathcal{V}_l, W) : (\pi|_{\mathcal{V}_l}, \mathcal{V}_l) \cong (\rho, W) \right),$$

ogni $\operatorname{Hom}_G(V_i, W)$ è un sottospazio 1-dimensionale e ci sono m addendi, allora

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = m.$$

1.2.4 La struttura dell'algebra $\operatorname{Hom}_G(V, V)$

Consideriamo una qualunque rappresentazione (π, V) di G ; associata alla sua decomposizione canonica

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

c'è la decomposizione

$$\operatorname{Hom}_G(V, V) = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Hom}_G(V_i, V_i).$$

$\operatorname{Hom}_G(V, V)$ è una sottoalgebra di $\operatorname{End}(V)$ ed è chiaro che la decomposizione precedente è una decomposizione di $\operatorname{Hom}_G(V, V)$ in somma diretta di sottoalgebre. Quindi, per descrivere la struttura di algebra di $\operatorname{Hom}_G(V, V)$, è sufficiente

esaminare il caso in cui (π, V) è somma diretta di rappresentazioni equivalenti. Supponiamo che

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$$

sia una qualunque decomposizione di V in sottospazi invarianti irriducibili, tutti equivalenti tra essi. Se $T \in \text{Hom}_G(V, V)$, nella maniera usuale otteniamo la decomposizione

$$T = \sum_{i,j=1}^m P_j T P_i = \sum_{i,j=1}^m T_{i,j},$$

in cui $T_{i,j} \in \text{Hom}_G(V_i, V_j)$. Fissiamo, per ogni i e j , un operatore

$$S_{ij} : V_i \rightarrow V_j$$

che definisca l'equivalenza tra

$$(\pi|_{V_i, V_i}) \quad e \quad (\pi|_{V_j, V_j});$$

notiamo che non è restrittivo assumere che

$$S_{lj} \cdot S_{il} = S_{ij}, \quad 1 \leq i, j, l \leq m.$$

L'applicazione

$$T_{ij} \cdot S_{ij}^{-1} : V_j \rightarrow V_j$$

commuta con $\pi|_{V_j} =: \pi_j$. Infatti, per ogni $x \in G$,

$$\begin{aligned} P_j T P_i S_{ij}^{-1} \pi_j(x) &= P_j T P_i \pi_i(x) S_{ij}^{-1} = \\ &= \pi_j(x) P_j T P_i S_{ij}^{-1}. \end{aligned}$$

Poiché V_j è irriducibile, si ha, per il Lemma di Schur,

$$P_j T P_i S_{ij}^{-1} = \lambda_{ij} I \quad \Rightarrow \quad T_{ij} = \lambda_{ij} S_{ij}.$$

In questa maniera si è definita un'applicazione

$$T \mapsto \lambda : \text{Hom}_G(V, V) \rightarrow \text{Mat}_m(\mathbf{C})$$

che associa a T , elemento di $\text{Hom}_G(V, V)$, una matrice complessa $m \times m$, i cui elementi, λ_{ij} , sono definiti dalla relazione

$$T_{ij} = \lambda_{ij} S_{ij}.$$

Tale applicazione ha le proprietà seguenti:

1. è *lineare*, ovviamente;
2. è *iniettiva*, ovviamente;

3. è *surgettiva*; infatti, assegnati $m \times m$ numeri λ_{ij} , si pone

$$T = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} S_{ij} \in \text{Hom}_G(V, V);$$

è immediato verificare che la matrice λ che corrisponde a T ha come elementi i λ_{ij} assegnati;

4. è un *antiautomorfismo* di algebre; infatti, supponiamo

$$T, R \in \text{Hom}_G(V, V),$$

si avrà

$$P_j T P_i = T_{ij} = \lambda_{ij} S_{ij}$$

$$P_j R P_i = R_{ij} = \mu_{ij} S_{ij}$$

$$P_j (T R) P_i = (T R)_{ij} = \nu_{ij} S_{ij}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nu_{ij} S_{ij} &= P_j T \left(\sum_{l=1}^m P_l \right) R P_i = \sum_{l=1}^m P_j T P_l P_l R P_i = \\ &= \sum_{l=1}^m \lambda_{lj} \mu_{il} S_{lj} S_{il} = \left(\sum_{l=1}^m \mu_{il} \lambda_{lj} \right) S_{ij} \end{aligned}$$

da cui

$$\nu_{ij} S_{ij} = (\mu \lambda)_{ij} S_{ij} \quad \Rightarrow \quad \nu = \mu \lambda.$$

In conclusione, $\text{Hom}_G(V, V)$ può essere identificato, come algebra, con una *somma diretta di algebre di matrici*; gli addendi diretti sono in corrispondenza biunivoca con le (classi di equivalenza di) rappresentazioni irriducibili inequivalenti che compaiono nella decomposizione di V , e ogni algebra di matrici addendo diretto è formata di matrici di ordine uguale alla *molteplicità*, in V , della rappresentazione irriducibile di G a cui corrisponde.

1.3 L'analisi della rappresentazione regolare di G

1.3.1 L'immersione di ogni rappresentazione irriducibile nella rappresentazione regolare

Denotiamo con $(\lambda, \mathcal{F}(G))$ la rappresentazione regolare sinistra di G e con (π, V) una qualsiasi rappresentazione di G . per ogni $v \in V$, definiamo

$$T_v : \mathcal{F}(G) \rightarrow V$$

ponendo, per ogni $f \in \mathcal{F}(G)$,

$$T_v(f) := \sum_{x \in G} f(x) \pi(x) v.$$

Si hanno i fatti seguenti

1. T_v è lineare
2. $T_v \in \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$; infatti, per ogni $y \in G$, si ha

$$\begin{aligned} T_v(\lambda(y)f) &= \sum_{x \in G} (\lambda(y)f)(x) \pi(x) v = \\ &= \sum_{x \in G} f(y^{-1}x) \pi(x) v = \sum_{x \in G} f(x) \pi(yx) v = \\ &= \pi(y) \sum_{x \in G} f(x) \pi(x) v = \pi(y) T_v(f). \end{aligned}$$

Notiamo che $T_v \neq 0$; infatti, consideriamo la funzione

$$\delta_y \in \mathcal{F}, \quad y \in G;$$

si ha allora

$$T_v(\delta_y) = \sum_{x \in G} \delta_y(x) \pi(x) v = \pi(y) v \neq 0,$$

poiché $\pi(y)$ è invertibile; ciò mostra che $T_v \neq 0$. Poiché $\text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V) \neq \{0\}$, ne risulta che (π, V) ha una sottorappresentazione equivalente a una sottorappresentazione di $(\lambda, \mathcal{F}(G))$; in particolare *ogni* rappresentazione *irriducibile* di G è equivalente ad una sottorappresentazione della rappresentazione regolare. Poiché nella decomposizione canonica di $\mathcal{F}(G)$ compare ogni sua sottorappresentazione irriducibile come addendo diretto e poiché $\mathcal{F}(G)$ ha dimensione finita, se ne deduce che le rappresentazioni irriducibili non equivalenti di G sono in numero finito. Denotiamo con k questo numero e con

$$(\sigma_1, U_1), \dots, (\sigma_k, U_k),$$

k rappresentazioni irriducibili non equivalenti di G . Allora la decomposizione canonica di $\mathcal{F}(G)$ ci fornisce la formula seguente

$$|\mathcal{F}(G)| = \dim \mathcal{F}(G) = m_1 \dim U_1 + \dots + m_k \dim U_k.$$

1.3.2 La formula delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili

Mostriamo che ogni rappresentazione irriducibile di G è contenuta nella rappresentazione regolare con molteplicità uguale alla sua dimensione.

Nel punto precedente, abbiamo definito, per ogni $v \in V$, un elemento T_v di $\text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$; in questa maniera, risulta definita un'applicazione

$$v \mapsto T_v : V \rightarrow \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$$

che ha le proprietà seguenti:

1. è *lineare*;
2. è *iniettiva*; infatti, se fosse $T_v = 0$ per qualche $v \neq 0$, sarebbe $T_v(f) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{F}(G)$; nel punto precedente abbiamo mostrato che ciò non accade;
3. è *surgettiva*; infatti, se $T \in \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$ si ha, per $f = \sum_{x \in G} f(x) \delta_x \in \mathcal{F}(G)$:

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{x \in G} f(x) T(\delta_x) = \sum_{x \in G} f(x) T(\lambda(x) \delta_l) = \\ &= \sum_{x \in G} f(x) \pi(x) T(\delta_x) = T_v(f), \end{aligned}$$

avendo posto $v = T(\delta_e)$ (e =identità in G).

In conclusione

$$v \mapsto T_v : V \rightarrow \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$$

è un *isomorfismo* di spazi vettoriali. In particolare, se V è *irriducibile*, la molteplicità di (π, V) in $\mathcal{F}(G)$ è uguale alla sua *dimensione*. In conclusione, si ha la formula

$$\begin{aligned} |G| &= m_1 \dim U_1 + \dots + m_k \dim U_k = \\ &= (\dim U_1)^2 + \dots + (\dim U_k)^2. \end{aligned}$$

1.3.3 Il numero delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti

Consideriamo l'applicazione

$$v \mapsto T_v : V \rightarrow \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), V)$$

nel caso in cui (π, V) è *anche* essa la rappresentazione *regolare*. Otteniamo così un'applicazione

$$f \mapsto T_f : \mathcal{F}(G) \rightarrow \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G))$$

definita esplicitamente da

$$\begin{aligned} (T_f g)(y) &= \sum_{x \in G} g(x) (\lambda(x) f)(y) = \\ &= \sum_{x \in G} g(x) f(x^{-1}y) = (g * f)(y). \end{aligned}$$

Sappiamo che quest'applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali; vogliamo mostrare che è anche un antiomomorfismo di algebre. Infatti si ha

$$\begin{aligned} T_{f_1 * f_2}(g) &= g * f_1 * f_2 \\ (T_{f_1} \cdot T_{f_2})(g) &= T_{f_2}(g) * f_1 = g * f_2 * f_1; \end{aligned}$$

per cui

$$T_{f_1 * f_2} = T_{f_2} \cdot T_{f_1}.$$

Se componiamo questo anti-isomorfismo di algebre con l'anti-isomorfismo

$$\text{Hom}_G(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Mat}_{\dim V_i}(\mathbf{C}),$$

descritto nel paragrafo 2.4, otteniamo, in conclusione un isomorfismo di algebre

$$\mathcal{F}(G) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Mat}_{\dim V_i}(\mathbf{C}).$$

in particolare, le dimensioni dei centri delle due algebre saranno uguali. Abbiamo già visto come $f \in \mathcal{F}(G)$ commuti con ogni altro elemento in $\mathcal{F}(G)$ se e solo se f è costante sulle classi coniugate di G . Allora il centro di $\mathcal{F}(G)$ ha dimensione uguale al numero di classi di coniugazione in G ; il centro di $\bigoplus_{i=1}^k \text{Mat}_{\dim V_i}(\mathbf{C})$ ha dimensione k ; quindi, in conclusione

$$\begin{aligned} k &= \text{numero di rappresentazioni irriducibili inequivalenti di } G = \\ &= \text{numero di classi di coniugazione in } G. \end{aligned}$$

1.4 I caratteri delle rappresentazioni di G

1.4.1 Le relazioni di ortogonalità tra gli elementi di matrice delle rappresentazioni

Supponiamo che (π, V) e (ρ, W) siano due rappresentazioni di G e supponiamo che s_0 sia una trasformazione lineare da V a W ; definiamo $S \in \text{Hom}(V, W)$ ponendo

$$S := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x) S_0 \pi(x)^{-1}.$$

S , in effetti, è in $\text{Hom}_G(V, W)$; infatti, per ogni $y \in G$,

$$\begin{aligned} \rho(y) S \pi(y)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(y) \rho(x) S_0 \pi(x)^{-1} \pi(y)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(yx) S_0 \pi(yx)^{-1} = S. \end{aligned}$$

Supponiamo che (π, V) e (ρ, W) siano entrambe *irriducibili*; allora il Lemma di Schur assicura che si hanno le seguenti possibilità:

1. se (π, V) e (ρ, W) *non* sono equivalenti, allora $S = 0$,
2. se $(\pi, V) = (\rho, W)$, allora $S = \lambda I$, in cui $\lambda = \text{tr } S_0 / \dim V$.

È opportuno scrivere le relazioni precedenti in forma matriciale. Ricordiamo che la matrice della rappresentazione (π, V) è definita scegliendo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in V e ponendo, per ogni $x \in G$,

$$\pi(x) e_j = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}(x) e_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

le relazioni (a) e (b) precedenti forniscono allora facilmente (!) le relazioni

1. se (π, V) e (ρ, W) *non* sono equivalenti, allora

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \pi_{ij}(x^{-1}) \rho_{kl}(x) = 0$$

2. se $(\pi, V) = (\rho, W)$, allora

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \pi_{ij}(x^{-1}) \pi_{kl}(x) = \frac{1}{\dim V} \delta_{il} \delta_{kj}.$$

Ricordiamo che si possono sempre scegliere i prodotti scalari in V e W in modo che π e ρ siano *unitarie*; in tal caso si ha

$$\pi_{ij}(x^{-1}) = \overline{\pi_{ji}(x)},$$

e le relazioni (a) e (b) precedenti possono essere espresse come relazioni di *ortogonalità*, introducendo un prodotto scalare in $\mathcal{F}(G)$.

Si definisce un prodotto scalare in $\mathcal{F}(G)$ ponendo

$$(f, g) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x).$$

In termini di questo prodotto scalare e assumendo (cosa *sempre* possibile) π e ρ unitarie, le relazioni (a) e (b) divengono:

1. se (π, V) e (ρ, W) *non* sono equivalenti

$$(\pi_{ji}, \rho_{kl}) = 0, \quad \text{per ogni } i, j, k, l;$$

2. per gli elementi di matrice della rappresentazione (π, V) si ha

$$(\pi_{ij}, \pi_{kl}) = \frac{1}{\dim V} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad \text{per ogni } i, j, k, l;$$

1.4.2 I caratteri delle rappresentazioni di G

Definizione. Se (π, V) denota una rappresentazione di G , (denotiamo $n = \dim V$) si pone, per ogni $x \in G$

$$\chi_\pi := \text{tr} \left(\pi(x) \right) = \sum_{i=1}^n \pi_{ii}(x);$$

l'applicazione

$$x \mapsto \pi(x) : G \longrightarrow \mathbf{C}$$

viene detta il *carattere* di (π, V) . È evidente che il carattere dipende solo dalla rappresentazione e *non* dalla base di V scelta, cioè dalla realizzazione di π come matrice.

Le proprietà fondamentali dei caratteri

1. $\chi_\pi(e) = n$ ($e =$ identità di G);

2. se π è unitaria si ha

$$\chi_\pi(x) = \overline{\chi_\pi(x)}$$

3. $\chi_\pi(yxy^{-1}) = \chi_\pi(x)$ per ogni $x \in G$;
cioè χ_π è costante sulle classi coniugate di G ; in altre parole i caratteri sono elementi del centro di $\mathcal{F}(G)$;

4. se (π, V) e (ρ, W) sono rappresentazioni di G

$$\chi_{\pi \oplus \rho}(x) = \chi_\pi(x) + \chi_\rho(x)$$

5. le relazioni di ortogonalità del paragrafo precedente, scritte in termini di caratteri, forniscono le relazioni seguenti:

- (a) se (π, V) e (ρ, W) sono rappresentazioni *unitarie irriducibili, non equivalenti*, allora

$$(\chi_\pi, \chi_\rho) = 0;$$

(b) se (π, V) è *unitaria e irriducibile*, allora

$$(\chi_\pi, \chi_\pi) = 1;$$

in altre parole i caratteri delle rappresentazioni unitarie irriducibili formano un insieme ortonormale in $\mathcal{F}(G)$; in effetti i caratteri formano una *base ortonormale* del centro di $\mathcal{F}(G)$;

6. se (π, V) e (ρ, W) sono due rappresentazioni di G e (π, V) è *irriducibile*, allora la *molteplicità* di (π, V) in (ρ, W) è data da (χ_π, χ_ρ) ; per convincersene è sufficiente scrivere la decomposizione canonica di W ;
7. due rappresentazioni con lo *stesso* carattere sono *equivalenti*; infatti, per il punto precedente, contengono ogni rappresentazione irriducibile con la stessa molteplicità;
8. se (π, V) è una rappresentazione di G allora

$$(\chi_\pi, \chi_\pi)$$

è un numero *intero*, uguale a 1 se e solo se π è irriducibile; infatti, se si scrive la decomposizione canonica di V e si utilizzano le relazioni di ortogonalità si ottiene

$$(\chi_\pi, \chi_\pi) = \sum_{i=1}^k m_i^2;$$

quindi $\sum_{i=1}^k m_i^2 = 1$ se e solo se uno degli m_i è uguale a 1 e tutti gli altri sono uguali a 0;

9. denotiamo con \mathcal{C} una delle classi coniugate di G , e con χ_1, \dots, χ_k i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di G ; infine denotiamo con $\chi_i(\mathcal{C})$ il valore comune di $\chi_i(x)$, per ogni $x \in \mathcal{C}$; denotiamo con $\phi_{\mathcal{C}}$ la funzione caratteristica di \mathcal{C}

$$\phi_{\mathcal{C}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathcal{C} \end{cases};$$

allora $\phi_{\mathcal{C}}$ è nel centro di $\mathcal{F}(G)$; si ha (punto 5)

$$\phi_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{C}$$

$$\lambda_i = (\chi_i, \phi_{\mathcal{C}}) = \frac{|\mathcal{C}|}{|G|} \chi_i(\mathcal{C});$$

scrivendo esplicitamente lo sviluppo di $\phi_{\mathcal{C}}$, otteniamo le seguenti relazioni:

(a)

$$\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(\mathcal{C})} \chi_i(\mathcal{C}) = \frac{|G|}{|\mathcal{C}|}$$

(b) se \mathcal{C}' è una classe di coniugazione distinta da \mathcal{C}

$$\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(\mathcal{C})} \chi_i(\mathcal{C}') = 0;$$

10. consideriamo una qualunque rappresentazione (π, V) di G e denotiamo

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$$

la sua decomposizione *canonica*; fissiamo un addendo diretto V_i ; tutte le sottorappresentazioni irriducibili di V_i sono *equivalenti* a una *stessa* rappresentazione irriducibile, denotiamola (σ, U) , di G . Definiamo

$$\mathcal{P}_i = \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \pi(x);$$

\mathcal{P}_i è il proiettore di V sul suo sottospazio V_i . Per mostrare questo fatto, mostriamo, innanzi tutto, che $\mathcal{P}_i \in \text{Hom}_G(V, V)$; per ogni $y \in G$ si ha

$$\begin{aligned} \pi(y)^{-1} \mathcal{P}_i \pi(y) &= \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \pi(y)^{-1} \pi(x) \pi(y) = \\ &= \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \pi(y^{-1} x y) = \\ &= \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(y x y^{-1})} \pi(x) = \\ &= \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \pi(x) = \mathcal{P}_i, \end{aligned}$$

poiché il carattere χ_σ è una funzione centrale su G . Denotiamo con W un qualunque sottospazio π -invariante di V ; allora

$$\mathcal{P}_i w \in W \quad \text{per ogni } w \in W$$

quindi $\mathcal{P}_i|_W \in \text{Hom}_G(W, W)$. Se W è anche irriducibile, il Lemma di Schur ci assicura che

$$\mathcal{P}_i|_W = \lambda I|_W.$$

Calcoliamo λ calcolando le tracce dei due membri

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda I|_W) &= \lambda \dim W \\ \text{tr}(\mathcal{P}_i|_W) &= \frac{\dim U}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \text{tr}(\pi(x)|_W) = \\ &= \dim U (\chi_\sigma, \chi_{\pi|_W}) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } (\pi|_W, W) \cong (\sigma, U) \\ 1 & \text{se } (\pi|_W, W) \cong (\sigma, U). \end{cases} \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\lambda = 1 \quad \text{se } (\pi|_W, W) \text{ è equivalente a } (\sigma, U)$$

$$\lambda = 0 \quad \text{se } (\pi|_W, W) \text{ non è equivalente a } (\sigma, U).$$

In altre parole, \mathcal{P}_i è l'identità su ogni sottospazio irriducibile invariante contenuto in V_i ed è nullo sugli altri. Quindi \mathcal{P}_i è l'identità su V_i ed è nullo sugli altri sottospazi della decomposizione canonica di V ; ciò significa che \mathcal{P}_i è il proiettore da V a V_i .

1.5 Complementi di teoria dei gruppi finiti

1.5.1 Decomposizione delle rappresentazioni finito-dimensionali dei gruppi finiti.

Abbiamo mostrato come ogni rappresentazione (finito-dimensionale) (π, V) di un gruppo finito G abbia una decomposizione canonica

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

Nella decomposizione canonica ogni sottospazio V_i ($i = 1, \dots, k$) contiene soltanto rappresentazioni irriducibili di G tutte equivalenti tra loro. Vogliamo caratterizzare le possibili decomposizioni degli addendi diretti V_i .

Per risolvere questo problema, consideriamo una rappresentazione irriducibile (σ, U) di G ed una rappresentazione (π, V) , tali che:

- i) $\dim \text{Hom}_G(U, V) = m$, cioè la molteplicità di U in V sia m ,
- ii) se (ρ, W) è una rappresentazione irriducibile di G non equivalente a (σ, U)

$$\text{Hom}_G(W, V) = \{0\},$$

cioè (π, V) contiene soltanto sottorappresentazioni equivalenti a (σ, U) .

Proposizione 1 *Una decomposizione di V in sottospazi irriducibili*

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

definisce una base T_1, \dots, T_m di $\text{Hom}_G(U, V)$, tale che

$$\mathcal{V}_1 = T_1(U), \dots, \mathcal{V}_m = T_m(U).$$

Inversamente, data una base T_1, \dots, T_m di $\text{Hom}_G(U, V)$ e posto

$$\mathcal{V}_1 := T_1(U), \dots, \mathcal{V}_m := T_m(U),$$

si ha che

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

è una decomposizione di V in sottospazi invarianti irriducibili.

Prova. Supponiamo che

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$$

sia una decomposizione di V in sottospazi invarianti irriducibili. Denotiamo con

$$T_i \in \text{Hom}_G(U, \mathcal{V}_i)$$

l'isomorfismo di spazi vettoriali che definisce l'equivalenza

$$(\sigma, U) \simeq (\pi|_{\mathcal{V}_i}, \mathcal{V}_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Ogni T_i può essere riguardato, in maniera naturale, anche come elemento di $\text{Hom}_G(U, V)$. L'insieme

$$T_1, \dots, T_m$$

è una base di $\text{Hom}_G(U, V)$. Infatti si ha:

i) T_1, \dots, T_m sono linearmente indipendenti. Infatti, se

$$\sum_i \alpha_i T_i = 0,$$

si ha, per ogni $u \in U$,

$$\alpha_1 T_1 u + \dots + \alpha_m T_m u = 0;$$

$T_i u \in \mathcal{V}_i$ e $V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$, quindi si avrà

$$\alpha_i T_i u = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Dal momento che i T_i sono operatori iniettivi, si ha $T_i u \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$; allora

$$\alpha_i = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

ii) T_1, \dots, T_m generano $\text{Hom}_G(U, V)$. Infatti, supponiamo $S \in \text{Hom}_G(U, V)$; in accordo con la decomposizione $V = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$, si ha la decomposizione

$$S = S_1 + \dots + S_m,$$

in cui $S_i \in \text{Hom}_G(U, \mathcal{V}_i)$, per ogni $i = 1, \dots, m$; $\text{Hom}_G(U, \mathcal{V}_i)$ è uno spazio vettoriale unidimensionale, quindi

$$S_i = \lambda_i T_i, \quad i = 1, \dots, m$$

e

$$S = \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_m T_m.$$

Inversamente, supponiamo che

$$T_1, \dots, T_m \in \text{Hom}_G(U, V),$$

formino una base in $\text{Hom}_G(U, V)$. Fissiamo una qualunque decomposizione di V in sottospazi invarianti irriducibili

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m.$$

Se $v \in V$, $v \neq 0$, allora v può essere decomposto univocamente come

$$v = w_1 + \dots + w_m$$

in cui $w_i \in W_i$, $i = 1, \dots, m$. Per ogni indice i , esiste un elemento S_i di $\text{Hom}_G(U, V)$ che definisce l'equivalenza

$$(\sigma, U) \simeq (\pi|_{W_i}, W_i).$$

L'immagine di S_i è W_i , quindi

$$w_i = S_i e_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

in cui $e_i \in U$. Poichè T_1, \dots, T_m è una base di $\text{Hom}_G(U, V)$, si avrà

$$S_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j^i T_j;$$

da cui

$$\begin{aligned} v &= S_1(e_1) + \dots + S_m(e_m) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j^1 T_j(e_1) + \dots + \sum_{j=1}^m \alpha_j^m T_j(e_m) \\ &= \sum_{j=1}^m T_j(\alpha_j^1 e_1 + \dots + \alpha_j^m e_m). \end{aligned}$$

Definiamo

$$u_i := \alpha_i^1 e_1 + \dots + \alpha_i^m e_m, \quad i = 1, \dots, m.$$

Con questa notazione abbiamo

$$v = T_1(u_1) + \dots + T_m(u_m).$$

Ciò mostra che

$$\sum_{i=1}^m T_i(U) = V$$

D'altra parte, un confronto di dimensioni ci assicura che la somma è diretta; con ciò abbiamo mostrato che

$$V = T_1(U) \oplus \dots \oplus T_m(U).$$

□

Ricordiamo che, date le rappresentazioni (π, V) e (σ, U) di G , c'è un'azione naturale (una rappresentazione) di G su $\text{Hom}(U, V)$. Se $T \in \text{Hom}(U, V)$, l'azione di $g \in G$ su T è definita da

$$g.T = \pi(g)T\sigma(g)^{-1}.$$

Rispetto a quest'azione di G su $\text{Hom}(U, V)$, $\text{Hom}_G(U, V)$ è un sottospazio invariante e su di questo G agisce banalmente.

Consideriamo quest'azione naturale (banale) di G su $\text{Hom}_G(U, V)$, e supponiamo che (T_1, \dots, T_m) sia una base di $\text{Hom}_G(U, V)$. Allora abbiamo il seguente risultato fondamentale.

Teorema 1 (π, V) e la rappresentazione $\sigma \otimes id$ di G che agisce su $U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$ sono equivalenti.

Prova. Mostriamo, innanzitutto, che V e $U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$ sono isomorfi, come spazi vettoriali. Fissiamo una base di $\text{Hom}_G(U, V)$ Ogni $v \in V$ è decomponibile univocamente come somma

$$v = v_1 + \dots + v_m,$$

in cui

$$v_i \in T_i(U), \quad i = 1, \dots, m.$$

Inoltre

$$v_i = T_i(u_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

in cui u_i è un elemento di U univocamente determinato, per ogni $i = 1, \dots, m$. Definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow U \otimes \text{Hom}_G(U, V) \\ v = v_1 + \dots + v_m &\longmapsto u_1 \otimes T_1 + \dots + u_m \otimes T_m. \end{aligned}$$

Le proprietà di questa applicazione sono:

- i) è ovviamente lineare;
- ii) è iniettiva; infatti, supponiamo

$$u_1 \otimes T_1 + \dots + u_m \otimes T_m = 0;$$

fissiamo una base (e_1, \dots, e_d) in U ($d = \dim U$); avremo

$$u_i = \sum_{j=1}^d \lambda_j^i e_j \quad i = 1, \dots, m,$$

per cui

$$\sum_{j=1}^d \lambda_j^1 e_j \otimes T_1 + \dots + \sum_{j=1}^d \lambda_j^m e_j \otimes T_m = 0$$

implica

$$\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^m \lambda_j^i e_j \otimes T_i = 0;$$

dal momento che $(e_j \otimes T_i; 1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq m)$ è una base di $U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$, ne segue che

$$\lambda_j^i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, d;$$

da cui

$$u_i = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m$$

e quindi $v = 0$;

iii) è surgettiva; infatti V e $U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$ hanno la stessa dimensione. Il fatto che l'applicazione $V \rightarrow U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$ intrecci le azioni di G sui due spazi è del tutto evidente.

□

Notiamo che l'isomorfismo

$$V \simeq U \otimes \text{Hom}_G(U, V)$$

è invertito, sui tensori decomponibili di quest'ultimo spazio, dall'applicazione

$$u \otimes T \mapsto T(u).$$

Ciò mostra che l'isomorfismo stesso è naturale e non dipende, in effetti, dalla base che abbiamo usato per definirlo.

1.5.2 Il teorema di Burnside

Teorema 2 (Teorema di Burnside) G è un gruppo qualunque e (π, V) è una qualunque rappresentazione complessa finito-dimensionale di G . La rappresentazione (π, V) è irriducibile se e solo se

$$\text{span}\{\pi(g) : g \in G\} = \text{End}(V)$$

cioè se e solo se ogni operatore $A \in \text{End}(V)$ è combinazione lineare (finita) di operatori del tipo $\pi(g)$, $g \in G$.

Prova.

- i) Supponiamo $\text{span}\{\pi(g) : g \in G\} = \text{End}(V)$. Allora, denotando (π_{ij}) le matrici degli operatori π , per ogni scelta di una base in V , deve essere

$$\text{span}\{(\pi_{ij})(g) : g \in G\} = \text{Mat}_n(\mathbb{C}),$$

in cui $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ denota l'algebra completa delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi (n denota la dimensione di V). Supponiamo per assurdo che V possieda un sottospazio W , π -invariante. Scegliendo una base di V ottenuta estendendo una base di W , le matrici degli operatori $\pi(g)$, avranno, in questa base, la forma triangolare a blocchi

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Ma lo spazio lineare generato da matrici di questa forma non può esaurire $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

- ii) Supponiamo (π, V) irriducibile. Denotiamo con \mathcal{U} lo spazio vettoriale

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\pi(g) : g \in G\}.$$

Definiamo

$$\mathcal{A} = \{A \in \text{End}(V) : \text{tr}(AB) = 0, \forall B \in \mathcal{U}\}.$$

\mathcal{A} è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{A} = \{0\}$. Supponiamo $A \in \mathcal{A}$. Allora $\pi(g)A \in \mathcal{A}$, per ogni $g \in G$. Infatti

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi(g)AB) &= \text{tr}(AB\pi(g)) \\ \text{poichè } (B\pi(g) \in \mathcal{U}) &= 0 \end{aligned}$$

Se poniamo

$$l_\pi(g)A = \pi(g)A, \quad g \in G,$$

allora (l_π, \mathcal{A}) è una rappresentazione di G . Fissiamo $v \in V$ e definiamo la mappa

$$\begin{aligned} \alpha_v : \mathcal{A} &\longrightarrow V \\ A &\longmapsto Av. \end{aligned}$$

i) α_v è lineare:

$$\alpha_v(A+B) = (A+B)v = Av + Bv = \alpha_v(A) + \alpha_v(B) .$$

ii) α_v intreccia (π, V) con (l_π, \mathcal{A}) : infatti, per ogni $A \in \mathcal{A}$, si ha

$$\begin{aligned} \alpha_v((l_\pi(g))(A)) &= \alpha_v(\pi(g)A) \\ &= (\pi(g) \circ A)v \\ &= \pi(g)(Av) \\ &= \pi(g)(\alpha_v(A)) . \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_v l_\pi(g) = \pi(g) \alpha_v .$$

I punti *i*) e *ii*) precedenti ci assicurano che

$$\alpha_v \in \text{Hom}_G(\mathcal{A}, V) .$$

Mostriamo che $\mathcal{A} \neq \{0\}$ porta ad una contraddizione. Se \mathcal{A} è non banale allora o è irriducibile o contiene un sottospazio invariante irriducibile non banale. In ogni caso possiamo ridurci al caso $\mathcal{A} \neq \{0\}$ e irriducibile. Scegliamo $0 \neq A \in \mathcal{A}$ e $v \in V$ tale che $Av \neq 0$. Allora

$$0 \neq \alpha_v \in \text{Hom}_G(\mathcal{A}, V) ;$$

dal momento che (l_π, \mathcal{A}) e (π, V) sono irriducibili, si ha che α_v è un isomorfismo. Scegliamo una base (e_1, \dots, e_n) di V , tale che

$$e_1 = v .$$

Denotiamo, per semplicità,

$$\alpha_i = \alpha_{e_i} .$$

Allora α_1 è un isomorfismo, inoltre

$$\alpha_1^{-1} \alpha_i \in \text{End}_G(\mathcal{A}) , \quad i = 1, \dots, n .$$

Per il lemma di Schur

$$\alpha_i = \lambda_i \alpha_1 \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_1 = 1) .$$

Dal momento che $A \in \mathcal{A}$, si ha

$$\text{tr}(\pi(g)A) = 0, \quad \text{per ogni } g \in G .$$

Denotiamo

$$(e^{*1}, \dots, e^{*n})$$

la base duale di (e_1, \dots, e_n) . Si ha

$$\langle e^{*i}, e_j \rangle = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualità canonica tra V ed il suo duale. Allora

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi(g)A) &= \sum_{i=1}^n \langle e^{*i}, \pi(g)Ae_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e^{*i}, \pi(g)\alpha_i(A) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e^{*i}, \lambda_i \pi(g)\alpha_1(A) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i e^{*i}, \pi(g)\alpha_1(A) \rangle = 0, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

$Av \neq 0$ implica che l'insieme $\{\pi(g)Av : g \in G\}$ genera V , allora si ha

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{*i}, w \right\rangle = 0 \quad \forall w \in V$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{*i} = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

dal momento che (e^{*1}, \dots, e^{*n}) sono linearmente indipendenti. Questo contraddice $\lambda_1 = 1$.

□

Capitolo 2

Il gruppo simmetrico \mathcal{S}_n

2.1 Definizioni e notazioni

Definizione 1 Una **permutazione** di un insieme (non vuoto) X è un'applicazione bigettiva di X su tutto se stesso. L'insieme di tutte le permutazioni di X viene indicato con \mathcal{S}_X e viene detto il **gruppo simmetrico completo** su X .

Rispetto alla composizione tra applicazioni di insiemi \mathcal{S}_X , è un gruppo, in cui l'identità è l'applicazione

$$e(x) = x \quad \text{per ogni } x \in X.$$

L'inverso della permutazione σ in \mathcal{S}_X è esattamente l'applicazione inversa di σ , nel senso delle applicazioni tra insiemi.

Sia n un intero positivo, se

$$X = \{1, \dots, n\},$$

il gruppo \mathcal{S}_X viene denotato con \mathcal{S}_n e viene detto il **gruppo simmetrico su n** . Quindi, una permutazione di $\{1, \dots, n\}$ è un'applicazione bigettiva di $\{1, \dots, n\}$ su tutto se stesso. Denotiamo una tale permutazione, s , come

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

1 è mappato da s in p_1 , 2 in p_2 , e così via. I numeri p_1, p_2, \dots, p_n sono un riordinamento di $1, 2, \dots, n$, senza alcuna ripetizione. È evidente che l'ordine in cui sono scritte le colonne nella precedente scrittura esplicita di s è del tutto irrilevante.

La permutazione inversa, s^{-1} , della permutazione s , è

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Il prodotto della permutazione s con la permutazione t

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

è dato dalla permutazione

$$st = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

L'intero q_i è mappato da t in i , ed i è mappato da s in p_i , cos'ì che q_i è mappato in p_i da st .

La permutazione identità è ovviamente

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

L'ordine del gruppo \mathcal{S}_n è $n!$.

Una notazione conveniente per gli elementi di \mathcal{S}_n è la notazione **a cicli**, che è illustrata dall'esempio seguente. Consideriamo $s \in \mathcal{S}_8$, data da

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cominciando con 1, vediamo che s manda 1 in 5, 5 in 4, 4 in 7, 7 in 2 e 2 in 1, chiudendo cos'ì un ciclo che possiamo scrivere come (15472). Scegliamo ora un simbolo, nella riga superiore, che non compaia nel primo ciclo, ad esempio 3. La permutazione genera un secondo ciclo (36). Il solo ciclo rimasto nella riga superiore è 8, che è mappato in se stesso e genera il ciclo (8). Infine scriviamo

$$\begin{aligned} s &= (15472)(36)(8) \\ &= (15472)(36) \end{aligned}$$

Nella seconda espressione abbiamo omesso l'elemento fissato dalla permutazione; questo è possibile se è chiaro dal contesto il numero degli elementi permutati; cioè se è chiaro dal contesto che

$$(15472)(36)$$

deve essere pensato come elemento di \mathcal{S}_8 e non di \mathcal{S}_7 .

Notiamo che nello scrivere un ciclo non fa differenza l'elemento da cui si parte. Quindi

$$\begin{aligned} (36) &= (63) \\ (15472) &= (54721) = (47215) = (72154) = (21547). \end{aligned}$$

Inoltre non fa differenza in quale ordine si scrivono i cicli in una data permutazione (purchè i cicli non contengano elementi in comune), cos'ì si ha

$$(15472)(36) = (36)(15472).$$

Come esempio ulteriore diamo il prodotto di elementi in \mathcal{S}_8 , nella notazione a cicli,

$$(872)(34)(432) = (2387).$$

La tabella di moltiplicazione di \mathcal{S}_3 , con la notazione a cicli è la seguente

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
e	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	e	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	e	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	e	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	e
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	e	(123)

Ad esempio, la tavola dà

$$(13)(12) = (123).$$

(Si faccia attenzione all'ordine degli elementi!)

Un ciclo di due elementi $(i_1, i_2) \in \mathcal{S}_n$ viene detto una **trasposizione**. Se t è una qualunque trasposizione si ha $t^2 = e$. Ogni permutazione è un prodotto di trasposizioni. Infatti $s \in \mathcal{S}_n$ è un prodotto di cicli, ed ogni ciclo può essere scritto come

$$(i_1, i_2, \dots, i_p) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{p-1}, i_p).$$

Una permutazione può essere scritta in modi diversi come prodotto di trasposizioni; ad esempio

$$(13)(12) = (12)(23) = (123).$$

Anche il numero di trasposizioni necessarie per fattorizzare un ciclo non è necessariamente unico; ad esempio

$$(13)(14)(12)(34)(32) = (14)(13)(12) = (1234).$$

Si può mostrare, però, che il numero di fattori, che compaiono nelle diverse decomposizioni in prodotto di trasposizioni, di una stessa permutazione, è sempre o pari o dispari. La permutazione viene detta pari o dispari a seconda che si fattorizzi in un numero pari o in un numero dispari di trasposizioni. Definiamo una funzione

$$\epsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{1, -1\}$$

ponendo

$$\epsilon(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \text{ è pari} \\ -1, & \text{se } s \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2.2 Le classi di coniugazione in \mathcal{S}_n

Se $s, t \in \mathcal{S}_n$, si ha

$$\begin{aligned} [sts^{-1}](s(j)) &= sts^{-1}s(j) \\ &= s[t(j)], \end{aligned}$$

per cui

$$sts^{-1} = \begin{pmatrix} s(1) & \dots & s(n) \\ s(t(1)) & \dots & s(t(n)) \end{pmatrix}$$

Se leggiamo questa relazione in termini di cicli, il risultato è ancora più trasparente. Per fissare le idee, consideriamo

$$t = (13642)(57)(8), \quad \text{in } \mathcal{S}_8$$

e

$$s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 8 \\ s(1) & \dots & s(8) \end{pmatrix}.$$

Allora la relazione precedente si legge come

$$sts^{-1} = (s(1)s(3)s(6)s(4)s(2))(s(5)s(7))(s(8)).$$

Due elementi di \mathcal{S}_n sono coniugati se e solo se hanno la stessa struttura in cicli.

Elenchiamo le cinque classi di coniugazione in \mathcal{S}_4

$$\begin{aligned} & \{e\} \\ & \{(12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2)\} \\ & \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ & \{(123)(4), (124)(3), (132)(4), (134)(2), (142)(3), (143)(2), (234)(1), (243)(1)\} \\ & \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\} \end{aligned}$$

La struttura in cicli delle classi può essere descritta assegnando n numeri interi

$$[\nu_1, \dots, \nu_n],$$

in cui

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \text{numero di cicli di lunghezza uno (con un solo elemento)} \\ \nu_2 &= \text{numero di cicli di lunghezza due (con due elementi)} \\ &\vdots \\ \nu_n &= \text{numero di cicli di lunghezza } n \text{ (con } n \text{ elementi)} \end{aligned}$$

Ad esempio, la struttura in cicli della classe cui appartiene l'elemento (123)(4) è

$$[1, 0, 1, 0].$$

Ovviamente si ha la relazione

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n = n.$$

Quindi ci sono tante classe di coniugazione in \mathcal{S}_n quante sono le n -uple di interi positivi che risolvono la relazione precedente.

Notiamo, innanzi tutto, che le soluzioni

$$[n, 0, \dots, 0] \quad [0, 0, \dots, 0, 1] ,$$

sono sempre presenti.

La struttura delle soluzioni $[\nu_1, \dots, \nu_n]$ può essere compresa piú facilmente in termini degli interi positivi λ_i , definiti da

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n \\ \lambda_2 &= \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_n \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \nu_n . \end{aligned}$$

Chiaramente

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0;$$

la n -upla di interi

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

viene detta una **partizione** di n . L'insieme delle partizioni di n verrà indicato con

$$\text{Part}(n) .$$

Ogni elemento λ di $\text{Part}(n)$ è una n -upla di interi

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con le proprietà

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 .$$

Ogni $\lambda \in \text{Part}(n)$ determina la classe di coniugazione $[\nu_1, \dots, \nu_n]$ in \mathcal{S}_n , data da

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ &\vdots \\ \nu_i &= \lambda_i - \lambda_{i+1} \\ &\vdots \\ \nu_{n-1} &= \lambda_{n-1} - \lambda_n \\ \nu_n &= \lambda_n . \end{aligned}$$

Quindi il numero delle classi di coniugazione in \mathcal{S}_n è uguale al numero delle partizioni di n .

Infine si può mostrare che

$$\frac{n!}{2^{\nu_1} \nu_1! 2^{\nu_2} \nu_2! \dots 2^{\nu_n} \nu_n!}$$

è il numero di elementi contenuti nella classe di coniugazione descritta da

$$[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n] .$$

2.3 Esempi

to be written

2.4 Gli schemi di Young

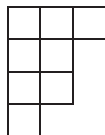
Il numero delle rappresentazioni irriducibili non equivalenti di \mathcal{S}_n , che è lo stesso numero delle classi coniugate in \mathcal{S}_n , è dato dalle partizioni n . il nostro compito è di associare (univocamente) ad ogni partizione di n una rappresentazione irriducibile.

Data una partizione $\lambda = (\lambda_i)$ di n , ad essa associamo uno **schema** (o diagramma o frame) **di Young**. Esso consiste di n quadratini sistemati in righe successive; la prima riga contiene λ_1 quadratini, la seconda riga ne contiene λ_2 , e così via.

Come esempio consideriamo la partizione

$$(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$$

di $n = 8$; a questa è associato lo schema



Indicheremo sempre con lo stesso simbolo λ lo schema e la partizione.

Da uno schema si ottiene un **tableau di Young** riempiendo gli n quadratini dello schema con le cifre $1, 2, \dots, n$ in un qualunque ordine; ogni cifra deve comparire una sola volta. Come esempi mostriamo due *tableau* associati allo schema precedente.

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

4	3	6
1	5	
8	7	
2		

Dato un *tableau*, T , definiamo due insiemi di permutazioni, associati a T , che denotiamo con $R(T)$ e $C(T)$. $R(T)$ consiste di tutti gli elementi di \mathcal{S}_n che permutano le cifre nella stessa riga, preservando le righe stesse. L'insieme $C(T)$ consiste di tutti gli elementi di \mathcal{S}_n che permutano le cifre in ciascuna colonna (preservando le colonne stesse). E' semplice verificare che $C(T)$ e $R(T)$ sono sottogruppi di \mathcal{S}_n .

Come esempio, consideriamo per \mathcal{S}_6 il seguente *tableau*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Si ha

$$\begin{aligned} R(T) &= \{(146), (164), (14), (16), (46), (146)(25), (164)(25), (14)(25), \\ &\quad (16)(25), (46)(25), (25), e\} \\ C(T) &= \{(123), (132), (12), (13), (23), (123)(45), (132)(45), (12)(45), \\ &\quad (13)(45), (23)(45), (45), e\} \end{aligned}$$

2.5 Le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n

Ricordiamo brevemente la nozione di **algebra del gruppo** \mathcal{S}_n . L'algebra di \mathcal{S}_n , che denoteremo nel seguito con \mathcal{A}_n , è l'algebra delle funzioni (a valori complessi) definite su \mathcal{S}_n , con le operazioni di somma punto per punto e di prodotto di convoluzione. Una base di \mathcal{A}_n è data dall'insieme

$$\{\delta_s : s \in \mathcal{S}_n\},$$

in cui

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = s \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ogni elemento di \mathcal{A}_n ha la forma

$$\alpha\delta_s + \dots + \beta\delta_t$$

con $\alpha, \dots, \beta \in \mathbb{C}$ e $s, \dots, t \in \mathcal{S}_n$. Ricordiamo che si ha

$$\delta_s * \delta_t = \delta_{st}.$$

Per semplicità di notazioni, scriveremo semplicemente s invece di δ_s . In questa maniera, gli elementi di \mathcal{A}_n si scrivono come

$$\alpha s + \dots + \beta t$$

ed il prodotto tra due elementi è

$$(\alpha s + \dots + \beta t)(\mu z + \dots + \nu w) = \alpha\mu st + \dots + \beta\nu tz + \dots + \alpha\nu sw + \dots + \beta\nu tw.$$

In corrispondenza col *tableau* T costruiamo due elementi dell'algebra \mathcal{A}_n , del gruppo \mathcal{S}_n :

$$P_T = \sum_{s \in R(T)} s, \quad Q_T = \sum_{s \in C(T)} \epsilon_s s,$$

Ricordiamo che $\epsilon_s = 1$ se s è una permutazione pari in \mathcal{S}_n , ed $\epsilon_s = -1$ se s è una permutazione dispari in \mathcal{S}_n . Infine, definiamo

$$E_T = Q_T P_T.$$

L'elemento E_T di \mathcal{A}_n viene detto il **simmetrizzatore di Young**, associato al *tableau* T . Come esempi, consideriamo, nel caso $n = 3$, i *tableau*

$$i) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad ii) \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad iii) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad iv) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}.$$

i) Se $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$, allora

$$C(T) = \{e\}, \quad R(T) = \mathcal{S}_3$$

$$E_T = P_T = e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132).$$

ii) Se $T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$, allora

$$C(T) = \mathcal{S}_3, \quad R(T) = \{e\}$$

$$E_T = Q_T = e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132).$$

iii) Se $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$, allora

$$C(T) = \{e, (13)\}, \quad R(T) = \{e, (12)\}$$

$$\begin{aligned} Q_T &= e - (13) & P_T &= e + (12) \\ E_T &= (e - (13))(e + (12)) = e + (12) - (13) - (123). \end{aligned}$$

iv) Se $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$, allora

$$C(T) = \{e, (12)\}, \quad R(T) = \{e, (13)\}$$

$$\begin{aligned} Q_T &= e - (12) & P_T &= e + (13) \\ E_T &= (e - (12))(e + (13)) = e - (12) + (13) - (132). \end{aligned}$$

Consideriamo l'immagine di \mathcal{A}_n , rispetto alla moltiplicazione **a destra** per E_T , cioè

$$\mathcal{A}_n \cdot E_T.$$

$\mathcal{A}_n \cdot E_T$ è un sottospazio vettoriale di \mathcal{A}_n , invariante rispetto alla rappresentazione regolare sinistra di \mathcal{S}_n su \mathcal{A}_n e irriducibile. Quindi la restrizione della rappresentazione regolare (sinistra) di \mathcal{S}_n ad $\mathcal{A}_n \cdot E_T$, definisce una rappresentazione irriducibile di \mathcal{S}_n . Se si costruiscono $\mathcal{A}_n \cdot E_T$ ed $\mathcal{A}_n \cdot E_{T'}$, in cui T e T' sono *tableau* differenti ma con lo stesso schema, si ottengono sottospazi differenti di \mathcal{A}_n ma le rappresentazioni di \mathcal{S}_n portate da questi sottospazi sono tra loro equivalenti.

Se si parte da schemi differenti si ottengono rappresentazioni irriducibili inequivalenti. Dal momento che sappiamo che ci sono tante rappresentazioni irriducibili non equivalenti quanti sono gli schemi di Young possiamo concludere che esiste una corrispondenza biunivoca tra rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n e schemi di Young λ .

Denoteremo le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n come

$$(\sigma_\lambda, F_\lambda), \quad \lambda \in \text{Part}(n).$$

Conveniamo (con un poco di arbitrarietà) di definire

$$F_\lambda = \mathcal{A}_n \cdot E_T$$

in cui T è il *tableau* ottenuto da λ in maniera “naturale” numerando consecutivamente i quadratini in λ , partendo da quello in alto a sinistra, e procedendo nell’ordine naturale di scrittura. Come esempio consideriamo

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} \quad T_{\text{nat}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \square \\ \hline 6 & 7 & \square \\ \hline 8 & & \square \\ \hline \end{array}$$

Esempi di costruzione di F_λ

i) Se $\lambda = (n, 0, \dots, 0)$, cioè

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (n \text{ quadratini}).$$

$$F_\lambda = \mathcal{A}_n \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}_n} s = \mathbb{C} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} s;$$

quindi F_λ è generato dal singolo elemento $\sum_{s \in \mathcal{S}_n} s = E_T$; è un sottospazio unidimensionale. La restrizione a F_λ della rappresentazione regolare (sinistra) è la rappresentazione banale.

ii) Se $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$, cioè

$$\lambda = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (n \text{ quadratini})$$

$$F_\lambda = \mathcal{A}_n \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \epsilon_s s = \mathbb{C} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \epsilon_s s;$$

anche in questo caso F_λ è generata dal singolo elemento E_T di \mathcal{A}_n ed è quindi uno spazio vettoriale unidimensionale. La rappresentazione di \mathcal{S}_n che definisce è, evidentemente, la rappresentazione alterna.

iii) Nel caso $n = 3$, consideriamo

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad T_{\text{nat}} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \square \\ \hline \end{array};$$

$$E_T = e + (12) - (13) - (123)$$

$\mathcal{A}_n \cdot E_T$ è generato dagli elementi:

$$\begin{aligned} e \cdot E_T &= E_T, \\ (12) \cdot E_T &= (12) + e - (132) - (23), \\ (13) \cdot E_T &= (13) + (123) - e - (12) = -E_T, \\ (23) \cdot E_T &= (23) + (132) - (123) - (13) = E_T - (12) \cdot E_T, \\ (123) \cdot E_T &= (123) + (13) - (23) - (132) = (12)E_T - E_T, \\ (132) \cdot E_T &= (132) + (23) - (12) - e = -(12)E_T. \end{aligned}$$

Quindi

$$F_\lambda = \mathbb{C} \cdot E_T + \mathbb{C} \cdot (12)E_T;$$

F_λ è di dimensione due.

Come commento finale diamo l'informazione che si ha:

$$E_T^2 = \left(\frac{n!}{\dim F_\lambda} \right) E_T$$

in cui T è un *tableau* associato a λ .

2.6 La decomposizione canonica della rappresentazione regolare e i *tableau standard*

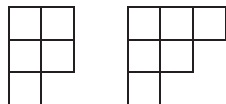
Dal momento che ci sono $n!$ *tableau* con lo stesso schema possiamo costruire $n!$ sottospazi dello spazio $n!$ -dimensionale \mathcal{A}_n , ciascuno di dimensione $f_\lambda = \dim F_\lambda$. Sappiamo dalla teoria generale della decomposizione della rappresentazione regolare che la molteplicità di F_λ in \mathcal{A}_n è uguale a f_λ , allora gli $n!$ sottospazi non possono essere linearmente indipendenti fra loro.

E' possibile selezionare f_λ *tableau* $T_1, \dots, T_{f_\lambda}$, con schema λ , in maniera che i sottospazi

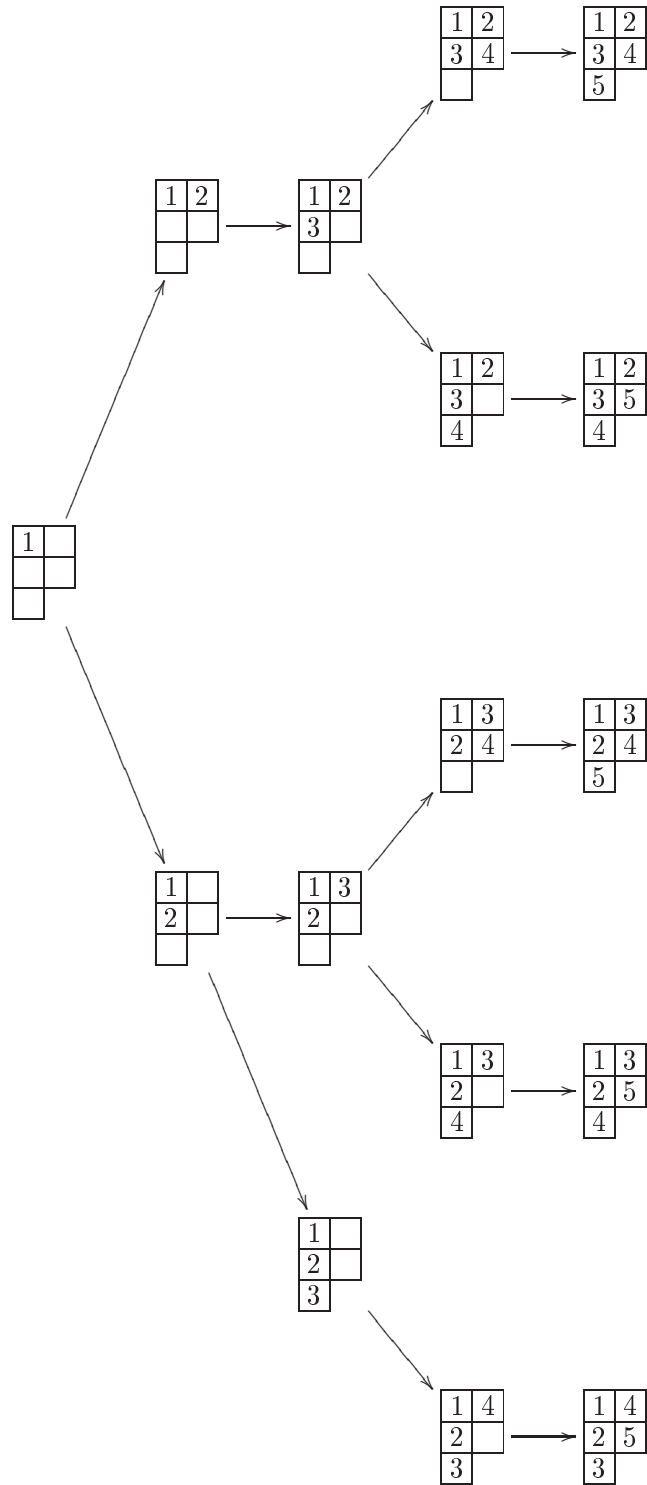
$$\mathcal{A}_n \cdot E_{T_1}, \dots, \mathcal{A}_n \cdot E_{T_{f_\lambda}}$$

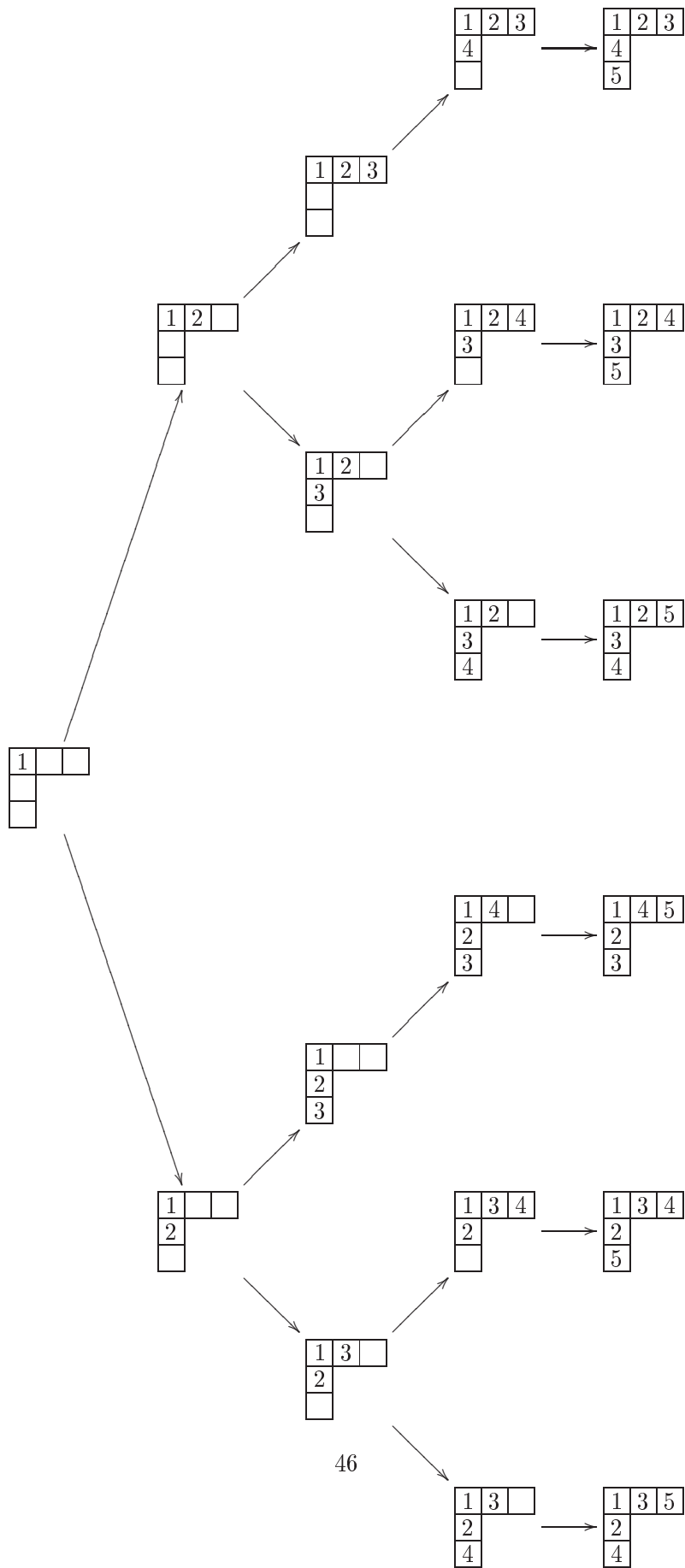
siano linearmente indipendenti.

Diremo che un *tableau* T è **standard** se le cifre in ogni riga di T crescono da sinistra a destra e le cifre in ogni colonna di T crescono dall'alto verso il basso. Come esempi, mostriamo come possono essere generati i *tableau standard* associati alle due partizioni di 5:



Gli schemi di costruzione dovrebbero essere autoesplicativi.





Ci sono cinque *tableau* standard con schema $\lambda = (2, 2, 1)$ e sei *tableau standard* con schema $\lambda = (3, 1, 1)$. Si può mostrare che si ha la seguente decomposizione di \mathcal{A}_n in somma diretta di sottospazi invarianti irriducibili:

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus_T \mathcal{A}_n \cdot E_T$$

in cui T varia su tutti i possibili *tableau standard* di \mathcal{S}_n .

Se sommiamo tra loro i sottospazi $\mathcal{A}_n \cdot E_T$ con T che varia sui *tableau standard* con lo stesso schema λ otteniamo un sottospazio W_λ di \mathcal{A}_n che non dipende dalla scelta dei *tableau* usati per costruirlo.

In altre parole

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus (W_\lambda : \lambda \in \text{Part}(n))$$

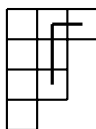
realizza la **decomposizione canonica** della rappresentazione regolare di \mathcal{S}_n . L'ulteriore decomposizione di ogni addendo

$$W_\lambda = \bigoplus_T (\mathcal{A}_n \cdot E_T : T \text{ tableau standard di } \lambda)$$

costituisce una decomposizione “quasi canonica”.

2.7 Formule combinatorie e caratteri

Esiste una formula combinatoria, che viene detta la **formula dei ganci** (*sic*), per calcolare f_λ . Per ogni quadratino in uno schema di Young λ , si definisce la **lunghezza di gancio** (del quadratino) come la somma del numero di quadratini alla sua destra più il numero dei quadratini al di sotto di esso, più uno. In altre parole è la lunghezza del gancio che attraversa il quadratino



Come esempio, poniamo in ogni quadratino dello schema precedente la sua lunghezza di gancio.

6	4	1
4	2	
3	1	
1		

Si può dimostrare che vale la formula

$$f_\lambda = \dim F_\lambda = \frac{n!}{\text{prodotto delle lunghezze dei ganci}}.$$

Come esempio, calcoliamo le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_4 . Si ha

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(4)} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(3,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(2,2)} = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(2,1,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(1,1,1,1)} = \frac{4!}{4!} = 1$$

Come esempio finale, calcoliamo la dimensione della rappresentazione $F_{(4,3,1)}$ di \mathcal{S}_8 :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \quad \dim F_{(4,3,1)} = \frac{8!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 70.$$

Esistono formule per calcolare i caratteri di tutte le rappresentazioni irriducibili di ogni gruppo \mathcal{S}_n : la formula di Frobenius e la regola di Murnaghan-Nakajama. Noi non ne avremo bisogno nel seguito. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n sono tutti **numeri interi**. Infine diamo le tabelle dei caratteri di \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}_4 , \mathcal{S}_5 . In ciascuna tabella le “ascisse” indicano le classi di coniugazione (tra parentesi quadre) e il numero di elementi in ciascuna classe, mentre le “ordinate” rappresentano le partizioni di n e quindi le rappresentazioni irriducibili.

		[1, 1, 1], 1	[2, 1], 3	[3], 2
$n = 3$	$\lambda = (3)$	1	1	1
	(2, 1)	2	0	-1
	(1, 1, 1)	1	-1	1

		[1, 1, 1, 1], 1	[2, 1, 1], 6	[3, 1], 8	[2, 2], 3	[4], 6
$n = 4$	$\lambda = (4)$	1	1	1	1	1
	(3, 1)	3	1	0	-1	-1
	(2, 2)	2	0	-1	2	0
	(2, 1, 1)	3	-1	0	-1	1
	(1, 1, 1, 1)	1	-1	1	1	-1

$n = 5$

	$[1, 1, 1, 1, 1], 1$	$[2, 1, 1, 1], 10$	$[3, 1, 1], 20$	$[2, 2, 1], 15$	$[4, 1], 30$	$[3, 2], 20$	$[5], 2$
(5)	1	1	1	1	1	1	1
$(4, 1)$	4	2	1	0	0	-1	-1
$(3, 2)$	5	1	-1	1	-1	1	0
$(3, 1, 1)$	6	0	0	-2	0	0	1
$(2, 2, 1)$	5	-1	-1	1	1	-1	0
$(2, 1, 1, 1)$	4	-2	1	0	0	1	-1
$(1, 1, 1, 1, 1)$	1	-1	1	1	-1	-1	1

Capitolo 3

Le rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di $Gl(V)$

3.1 Le azioni di \mathcal{S}_n e di $Gl(V)$ su $V^{\otimes n}$

In tutto il seguito, V denota uno spazio vettoriale complesso, di dimensione finita. Denotiamo

$$V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V, \quad n \text{ fattori.} \quad (3.1)$$

Ricordiamo che $V^{\otimes n}$ è generato dai tensori decomponibili, cioè dai tensori della forma

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n, \quad v_i \in V, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Il gruppo \mathcal{S}_n agisce sui tensori decomponibili:

$$s. (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(n)}, \quad s \in \mathcal{S}_n; \quad (3.3)$$

ad esempio, per $n = 3$

$$(123). (u \otimes v \otimes w) = w \otimes u \otimes v \quad (3.4)$$

E' chiaro che l'azione di \mathcal{S}_n sui tensori decomponibili si estende per linearità a dare una rappresentazione di \mathcal{S}_n in $V^{\otimes n}$.

Se $A \in Gl(V)$, definiamo $A^{\otimes n}$ su $V^{\otimes n}$, ponendo

$$A^{\otimes n}.(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = Av_1 \otimes \dots \otimes Av_n \quad (3.5)$$

sui tensori decomponibili, ed estendendo la definizione per linearità a tutto $V^{\otimes n}$. E' chiaro che si ha

$$\begin{aligned} A^{\otimes n} &\in Gl(V^{\otimes n}) \\ (A \circ B)^{\otimes n} &= A^{\otimes n} \circ B^{\otimes n} \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo una rappresentazione di $Gl(V)$ su $V^{\otimes n}$.

E' del tutto ovvio, ma di importanza fondamentale, notare che le azioni di $Gl(V)$ e di \mathcal{S}_n su $V^{\otimes n}$ commutano tra loro.

Vogliamo mostrare che la rappresentazione

$$A \mapsto A^{\otimes n} : Gl(V) \rightarrow Gl(V^{\otimes n})$$

è completamente decomponibile, e descriverne la decomposizione in rappresentazioni irriducibili.

Deve essere sottolineato che $\text{Gl}(V)$ non è un gruppo finito, quindi non è possibile attribuire alle sue rappresentazioni le proprietà delle rappresentazioni dei gruppi finiti.

D'altra parte, $V^{\otimes n}$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita su cui agisce linearmente il gruppo finito \mathcal{S}_n . Considereremo innanzitutto, la decomposizione di $V^{\otimes n}$ rispetto a questa azione.

Denotiamo con $\text{Part}(n)$ l'insieme delle partizioni di n ; denoteremo con $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ una partizione di n :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$$

Denotiamo con

$$(\sigma_\lambda, F_\lambda), \quad \lambda \in \text{Part}(n),$$

l'insieme delle rappresentazioni irriducibili non equivalenti di \mathcal{S}_n . Ricordiamo che F_λ può essere realizzato come il sottospazio vettoriale di \mathcal{A}_n ¹ ottenuto per moltiplicazione a destra per il simmetrizzatore di Young E_T (T è un qualunque *tableau* associato a λ):

$$F_\lambda = \mathcal{A}_n \cdot E_T$$

Consideriamo la decomposizione canonica di $V^{\otimes n}$, come rappresentazione di \mathcal{S}_n :

$$V^{\otimes n} = \bigoplus (W_\lambda : \lambda \in \text{Part}(n))$$

I W_λ sono sottospazi di $V^{\otimes n}$, invarianti rispetto all'azione di \mathcal{S}_n . Ciascuno di loro è l'immagine di un operatore di proiezione P_λ , la cui azione su $V^{\otimes n}$ è data da

$$P_\lambda w = \frac{\dim F_\lambda}{n!} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \overline{\chi_\lambda(s)} s.w, \quad w \in V^{\otimes n}$$

Ogni P_λ commuta con l'azione di $\text{Gl}(V)$ su $V^{\otimes n}$ e ciò mostra che ogni W_λ è invariante anche rispetto all'azione di $\text{Gl}(V)$.

Dalla teoria della decomposizione delle rappresentazioni dei gruppi finiti, abbiamo i fatti seguenti:

i Per ogni $\lambda \in \text{Part}(n)$, si ha l'isomorfismo di spazi vettoriali

$$F_\lambda \otimes \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(F_\lambda, W_\lambda) \simeq W_\lambda$$

(Nel seguito, per semplicità, useremo la notazione

$$U_\lambda = \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(F_\lambda, W_\lambda)$$

). L'isomorfismo è definito, sui tensori decomponibili di $F_\lambda \otimes U_\lambda$, da

$$f \otimes \phi \mapsto \phi(f)$$

ii L'isomorfismo intreccia la rappresentazione

$$(\sigma_\lambda \otimes \text{id}, F_\lambda \otimes U_\lambda)$$

con la rappresentazione naturale di \mathcal{S}_n su $V^{\otimes n}$, ristretta a W_λ .

¹ \mathcal{A}_n denota l'algebra del gruppo \mathcal{S}_n .

3.2 La rappresentazione di $\text{Gl}(V)$ su U_λ

Definiamo una rappresentazione $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$, ponendo

$$(\rho_\lambda(A)\phi)(f) := A^{\otimes n} \cdot (\phi(f)),$$

in cui $A \in \text{Gl}(V)$, $\phi \in U_\lambda$ ed $f \in F_\lambda$. La definizione è ben posta; in altre parole, $\rho_\lambda(A)\phi$ cos'è definito è un elemento di U_λ . Infatti, si ha:

i $\rho_\lambda(A)\phi$ è evidentemente una trasformazione lineare da F_λ a W_λ ,

ii $\rho_\lambda(A)$ intreccia le azioni di \mathcal{S}_n su F_λ e su $V^{\otimes n}$: per ogni $f \in F_\lambda$, si ha

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(A)\phi(\sigma_\lambda(s))(f) &= A^{\otimes n} \cdot (\phi(\sigma_\lambda(s)(f))) \\ &\quad (\text{poichè } \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(F_\lambda, W_\lambda)) \\ &= A^{\otimes n} \cdot (s \cdot \phi(f)) \\ &= s \cdot (A^{\otimes n} \cdot (\phi(f))) = s \cdot (\rho_\lambda(A)\phi(f)). \end{aligned}$$

E' importante notare che la rappresentazione $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$ non è altro che una maniera equivalente di considerare l'azione naturale di $\text{Gl}(V)$ su $V^{\otimes n}$. Infatti si ha:

Lemma 1 *La rappresentazione $(\text{id} \otimes \rho_\lambda, F_\lambda \otimes U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$ è equivalente alla rappresentazione ottenuta restringendo a W_λ l'azione naturale di $\text{Gl}(V)$ su $V^{\otimes n}$.*

Prova. Sui tensori decomponibili di $F_\lambda \otimes U_\lambda$ si ha:

$$(\text{id} \otimes \rho_\lambda)(A)(f \otimes \phi) = f \otimes \rho_\lambda(A)\phi$$

Inoltre si ha, nell'isomorfismo $F_\lambda \otimes U_\lambda \simeq W_\lambda$,

$$f \otimes \rho_\lambda(A)\phi \mapsto (\rho_\lambda(A)\phi)(f) = A^{\otimes n} \cdot (\phi(f)) \quad \square$$

Le proprietà fondamentali della famiglia di rappresentazioni $(\rho_\lambda, U_\lambda)$, $\lambda \in \text{Part}(n)$, di $\text{Gl}(V)$ sono le seguenti:

i Per ogni λ , la rappresentazione $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$ è irriducibile.

ii Se $\lambda \neq \mu$, le due rappresentazioni di $\text{Gl}(V)$

$$(\rho_\lambda, U_\lambda), \quad (\rho_\mu, U_\mu)$$

sono inequivalenti.

La dimostrazione di tali proprietà, che è inevitabilmente tecnica, viene posposta ad un paragrafo finale, per non interrompere l'esposizione.

3.3 La decomposizione di $V^{\otimes n}$

Consideriamo W_λ come spazio su cui agiscono sia il gruppo finito \mathcal{S}_n che il gruppo $Gl(V)$. Queste due azioni commutano fra di loro; allora è possibile definire un'azione di $\mathcal{S}_n \times Gl(V)$ su W_λ . Infatti, se $A, B \in Gl(V)$ e $s, t \in \mathcal{S}_n$, si ha:

$$\begin{aligned} (s, A) \cdot ((t, B) \cdot w) &= s \cdot (A \cdot (t \cdot (Bw))) \\ &= s \cdot (t \cdot (A \cdot (Bw))) \\ &= (st) \cdot ((AB) \cdot w) \\ &= ((s, A) \cdot (t, B)) \cdot w \end{aligned}$$

per ogni $w \in W_\lambda$.

Lemma 2 *L'azione naturale di $\mathcal{S}_n \times Gl(V)$ su W_λ è equivalente al prodotto diretto esterno delle rappresentazioni $(\sigma_\lambda, F_\lambda)$ di \mathcal{S}_n e $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $Gl(V)$.*

Prova. Si ha

$$\sigma_\lambda \boxtimes \rho_\lambda(s, A)(f \otimes \phi) = \sigma_\lambda(s)f \otimes \rho_\lambda(A)\phi.$$

Inoltre nell'isomorfismo $F_\lambda \otimes U_\lambda \simeq W_\lambda$

$$\sigma_\lambda(s)f \otimes \rho_\lambda(A)\phi \longmapsto A^{\otimes n} \cdot \phi(\sigma_\lambda(s)f).$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} A^{\otimes n} \cdot (\phi(\sigma_\lambda(s)f)) &= \\ & \text{(poichè } \phi \in U_\lambda = Hom_{\mathcal{S}_n}(F_\lambda, W_\lambda) \text{)} \\ &= A^{\otimes n} \cdot (s \cdot \phi(f)) \\ &= (s, A) \cdot \phi(f). \end{aligned}$$

□

Per dimostrare il lemma seguente, utilizzeremo il teorema di Burnside (vedi ??). Ricordiamo che tale teorema afferma che una rappresentazione finito-dimensionale (π, V) di un gruppo qualunque (non necessariamente finito) è irriducibile se e solo se

$$\text{span} \{ \pi(g) : g \in G \} = \text{End}(V).$$

Lemma 3 *La rappresentazione*

$$(\sigma_\lambda \otimes \rho_\lambda, F_\lambda \otimes U_\lambda)$$

di $\mathcal{S}_n \times Gl(V)$ è irriducibile

Prova. Mostriamo che ogni elemento in $End(F_\lambda \otimes U_\lambda)$ è combinazione lineare di elementi della forma $\sigma_\lambda \otimes \rho_\lambda(A)$. Supponiamo $T \in End(F_\lambda \otimes U_\lambda)$. Dal momento che

$$End(F_\lambda) \otimes End(U_\lambda) \simeq End(F_\lambda \otimes U_\lambda),$$

T sarà scrivibile come combinazione lineare di elementi della forma $B \otimes C$, in cui

$$B \in End(F_\lambda), \quad C \in End(U_\lambda)$$

Ma $(\sigma_\lambda, F_\lambda)$ e $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ sono rappresentazioni finite dimensionalmente irriducibili, quindi $B \in End(F_\lambda)$ sarà combinazione lineare finita di elementi $\sigma_\lambda(s)$ e $C \in End(U_\lambda)$ sarà combinazione lineare di elementi $\rho_\lambda(A)$. In conclusione, T è combinazione lineare di elementi $\sigma_\lambda(s) \otimes \rho_\lambda(A)$. \square

Riconsideriamo la decomposizione

$$V^{\otimes n} = \bigoplus (W_\lambda : \lambda \in \text{Part}(n))$$

e, per ogni λ , l'isomorfismo

$$W_\lambda \simeq F_\lambda \otimes U_\lambda$$

L'isomorfismo precedente è compatibile con le azioni (sui due membri) sia di \mathcal{S}_n , che di $\text{Gl}(V)$, che di $\mathcal{S}_n \times \text{Gl}(V)$. Inoltre W_λ è irriducibile per l'azione di $\mathcal{S}_n \times \text{Gl}(V)$. Allora si ha che

$$V^{\otimes n} = \bigoplus W_\lambda$$

è la decomposizione canonica in rappresentazioni irriducibili (tutte compaiono con molteplicità uno) di $\mathcal{S}_n \times \text{Gl}(V)$.

Gli isomorfismi

$$\begin{aligned} V^{\otimes n} &\simeq \bigoplus_{\lambda} (F_\lambda)^{\oplus \dim U_\lambda} \\ V^{\otimes n} &\simeq \bigoplus_{\lambda} (U_\lambda)^{\oplus \dim F_\lambda} \end{aligned}$$

mostrano come $V^{\otimes n}$ sia decomponibile in somma diretta di rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_n e di $\text{Gl}(V)$, rispettivamente. In particolare otteniamo che la rappresentazione naturale di $\text{Gl}(V)$ su $V^{\otimes n}$ è completamente decomponibile.

A questo punto, si pone naturalmente il problema di identificare U_λ con un sottospazio di $V^{\otimes n}$, in modo che $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ sia equivalente alla rappresentazione di $\text{Gl}(V)$ ottenuta restringendo $A^{\otimes n}$ a questo sottospazio. Inoltre vogliamo ottenere un modello della decomposizione $V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} (U_\lambda)^{\oplus \dim F_\lambda}$ mediante sottospazi di $V^{\otimes n}$.

3.4 I sottospazi irriducibili di $V^{\otimes n}$

Fissiamo un qualunque elemento non nullo f in F_λ ; notiamo che si ha l'ovvio isomorfismo

$$U_\lambda \simeq f \otimes U_\lambda;$$

inoltre si ha la mappa iniettiva naturale

$$\begin{aligned} f \otimes U_\lambda &\hookrightarrow W_\lambda \\ f \otimes \phi &\mapsto \phi(f) \end{aligned}$$

Componendo le due applicazioni, si ottiene l'isomorfismo

$$\begin{aligned} U_\lambda &\simeq \{\phi(f) : \phi \in U_\lambda\} \subset W_\lambda \\ \phi &\mapsto \phi(f), \end{aligned}$$

in cui f è un fissato (*a priori*) elemento di F_λ .

Notiamo che se A è in $\text{Gl}(V)$ e ϕ è in U_λ , allora $\rho_\lambda(A)\phi$ è in U_λ , e l'immagine di questo elemento di U_λ , rispetto all'isomorfismo appena descritto, è data da $((\rho_\lambda(A))\phi)(f)$. D'altra parte

$$(\rho_\lambda(A)\phi)(f) = A^{\otimes n} \cdot (\phi(f))$$

Quest'uguaglianza mostra che l'isomorfismo intreccia le azioni di $\text{Gl}(V)$ su U_λ e su $V^{\otimes n}$. Quindi definisce un'equivalenza tra $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ e la restrizione a $\{\phi(f) : \phi \in U_\lambda\}$ della rappresentazione

$$A \mapsto A^{\otimes n} : \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(V^{\otimes n})$$

Il punto è descrivere esplicitamente il sottospazio $\{\phi(f) : \phi \in U_\lambda\}$ di $V^{\otimes n}$. Per questo, notiamo che su $V^{\otimes n}$ è definita l'azione non solo di \mathcal{S}_n ma di tutta l'algebra \mathcal{A}_n , di \mathcal{S}_n ; quindi, in particolare, di tutti gli elementi di F_λ . Se T è un qualunque *tableau* associato allo schema $\lambda \in \text{Part}(n)$, fissiamo l'elemento E_T in F_λ . Allora E_T agisce su $V^{\otimes n}$, e denotiamo

$$V_T = E_T [V^{\otimes n}] = \{E_T \cdot w : w \in V^{\otimes n}\}$$

Proposizione 2 *Si ha*

$$V_T = \{\phi(E_T) : \phi \in U_\lambda\}$$

Prova. Supponiamo, innanzi tutto, $\phi \in U_\lambda$ e poniamo

$$\phi(E_T) = v \in W_\lambda$$

Ricordiamo che

$$E_T \cdot E_T = \frac{n!}{\dim F_\lambda} E_T;$$

avremo allora

$$\begin{aligned} E_T \cdot v &= E_T \cdot \phi(E_T) = \phi(\sigma_\lambda(E_T) E_T) \\ &= \phi(E_T \cdot E_T) = \frac{n!}{\dim F_\lambda} \phi(E_T) \end{aligned}$$

Quindi

$$v = \phi(E_T) = E_T \cdot \left(\frac{\dim F_\lambda}{n!} v \right)$$

Con ciò abbiamo mostrato che

$$\{\phi(E_T) : \phi \in U_\lambda\} \subset V_T$$

Inversamente, supponiamo che

$$w = E_T.v, \quad v \in V^{\otimes n}$$

Definiamo $\bar{\phi} : F_\lambda \rightarrow W_\lambda$, ponendo

$$\bar{\phi}(f \cdot E_T) = (f \cdot E_T).w, \quad f \in \mathcal{A}_n$$

Allora $\bar{\phi} \in U_\lambda$; infatti, per ogni $s \in \mathcal{S}_n$, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\sigma_\lambda(s)(f \cdot E_T)) &= \bar{\phi}(s \cdot f \cdot E_T) \\ &= (s \cdot f \cdot E_T).w = s.((f \cdot E_T).w) \\ &= s.\bar{\phi}(f \cdot E_T) \end{aligned}$$

Inoltre, per definizione,

$$\bar{\phi}(E_T) = E_T.w = v$$

Ciò mostra che

$$V_T \subset \{\phi(E_T) : \phi \in U_\lambda\} \quad \square$$

La proposizione precedente mostra come tutti i sottospazi V_T di W_λ , al variare di T tra i *tableau* associati allo schema λ , siano sottospazi invarianti rispetto all'azione di $\text{Gl}(V)$ su $V^{\otimes n}$, e come le restrizioni di queste azioni a tali sottospazi costituiscano tante copie isomorfe della rappresentazione irriducibile $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$.

Ci sono due casi semplici ed importanti che meritano una discussione separata. Sono i casi

$$\lambda = (n), \quad \lambda = (1, \dots, 1)$$

In entrambi i casi E_T non dipende dalla scelta del *tableau* T associato a λ , ma è intrinseco a λ . Questo è coerente con il fatto che $F_{(n)}$ e $F_{(1, \dots, 1)}$ hanno entrambi dimensione uno (come rappresentazioni di \mathcal{S}_n). In entrambi i casi si ha

$$V_T = W_\lambda \simeq U_\lambda$$

Si usano le notazioni speciali

$$S^n V = W_{(n)} = V_{(n)} \quad \Lambda^n V = W_{(1, \dots, 1)} = V_{(1, \dots, 1)}$$

Denotiamo con

$$T_1, \dots, T_{f_\lambda} \quad f_\lambda = \dim F_\lambda$$

i *tableau standard* associati a λ ; inoltre denotiamo

$$V_i = E_{T_i} [V^{\otimes n}], \quad i = 1, \dots, f_\lambda$$

Allora si ha la decomposizione

$$W_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{f_\lambda} V_i,$$

che costituisce una realizzazione concreta, mediante sottospazi di $V^{\otimes n}$, della decomposizione

$$W_\lambda \simeq \bigoplus (U_\lambda)^{\oplus \dim F_\lambda}$$

Se consideriamo l'azione di \mathcal{S}_n su W_λ , questa agisce trasversalmente rispetto alla decomposizione

$$W_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{f_\lambda} V_i$$

Il significato di questa frase dovrebbe essere chiarito dagli esempi seguenti.

3.5 Esempi.

Consideriamo i casi $\dim V = 2, 3$ e $n = 2, 3$.

1 Il caso $\dim V = 2, n = 2$.

In questo caso particolarmente semplice le varie azioni possono essere seguite esplicitamente.

Fissiamo una base (e_1, e_2) di V . Si ha:

$$\begin{aligned} V^{\otimes 2} &= \text{span} \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\} \\ &= \text{span} \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\} \\ &\quad \oplus \text{span} \{e_1, e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\}. \end{aligned}$$

Se $A \in Gl(V)$, si ha

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A_{11}e_1 + A_{12}e_2 \\ Ae_2 &= A_{12}e_1 + A_{22}e_2 \end{aligned}$$

E' facile controllare esplicitamente, usando le uguaglianze precedenti, che

$$\text{span} \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$$

è $Gl(V)$ -invariante e irriducibile, e che

$$\text{span} \{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\}$$

è $Gl(V)$ -invariante (e ovviamente irriducibile, essendo unidimensionale).

D'altra parte, se consideriamo l'azione di $\mathcal{S}_2 = \{e, (12)\}$ su $V^{\otimes 2}$, è immediato vedere che i vettori $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ e $e_2 \otimes e_2$ sono lasciati invariati da \mathcal{S}_2 , quindi ognuno di essi genera una rappresentazione unidimensionale banale. Nello stesso modo, il vettore $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ genera la rappresentazione unidimensionale alterna. Quindi $V^{\otimes 2}$ si decompone nella somma della rappresentazione unidimensionale alterna di \mathcal{S}_2 e di tre copie della rappresentazione unidimensionale banale di \mathcal{S}_2 .

Chiaramente, queste semplici considerazioni possono essere ritrovate anche alla luce della teoria esposta nei paragrafi precedenti.

Ci sono due partizioni di 2

$$\lambda = (2) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \lambda = (1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Per quel che riguarda le rappresentazioni di \mathcal{S}_2 , si ha:

$$\dim F_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = 1, \quad \dim F_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} = 1.$$

Si ha la decomposizione canonica:

$$V^{\otimes 2} = W_{(2)} \oplus W_{(1,1)},$$

in cui

$$W_{(2)} = S^2V, \quad W_{(1,1)} = \Lambda^2V.$$

$V^{\otimes 2}$ è somma diretta di due rappresentazioni irriducibili di $Gl(V)$: una di dimensione tre, l'altra di dimensione uno. Le azioni di $Gl(V)$ e di \mathcal{S}_2 sulle basi di questi sottospazi sono mostrate, simbolicamente, nello schema seguente

$$\begin{array}{ccc}
 & W_{(1,1)} & \\
 & \begin{array}{|c|} \hline e_1 \otimes e_1 \\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \\ e_2 \otimes e_2 \\ \hline \end{array} & \downarrow Gl(V) \\
 & \xrightarrow{\mathcal{S}_2} & \begin{array}{|c|} \hline W_{(2)} \\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \\ \hline \end{array} \downarrow Gl(V) \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{S}_2}
 \end{array}$$

$V^{\otimes 2}$ si decompone in quattro sottospazi unidimensionali invarianti rispetto a \mathcal{S}_2 : su tre di essi agisce la rappresentazione identica, sull'altro quella alterna.

2 Il caso $\dim V = 2, n = 3$.

Si ha $\dim V^{\otimes 3} = 8$. Ci sono tre partizioni di 3:

$$\lambda = (3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \lambda = (2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad \lambda = (1, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Come rappresentazioni di \mathcal{S}_3 , si ha

$$\dim F_{(3)} = 1, \quad \dim F_{(2,1)} = 2, \quad \dim F_{(1,1,1)} = 1.$$

Lo spazio $V^{\otimes 3}$ ha la decomposizione canonica

$$V^{\otimes 3} = W_{(3)} \oplus W_{(2,1)} \oplus W_{(1,1,1)},$$

in cui :

$$\begin{aligned}
 W_{(3)} &= S^3(V) = (e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)) \cdot V^{\otimes 3} \\
 &= \text{span} \{e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \\
 &\quad + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \otimes e_2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(1,1,1)} &= \Lambda^3(V) = (e - (12) - (13) - (23) + (123) - (132)) \cdot V^{\otimes 3} \\
 &= \{0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(2,1)} &= E_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \cdot V^{\otimes 3} \oplus E_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \cdot V^{\otimes 3} \\
 &= (e - (13))(e + (12)) \cdot V^{\otimes 3} \oplus (e - (12))(e + (13)) \cdot V^{\otimes 3} \\
 &= \text{span} \{e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1\} \\
 &\quad \oplus \text{span} \{e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1\}.
 \end{aligned}$$

Quindi la decomposizione canonica di $V^{\otimes 3}$ è data da

$$V^{\otimes 3} = S^3V \oplus W_{(2,1)}$$

in cui

- i) S^3V è irriducibile rispetto a $Gl(V)$ ed ha dimensione quattro;
- ii) $W_{(21)}$ è somma diretta di due rappresentazioni irriducibili 2-dimensionali di $Gl(V)$.

Consideriamo, a questo punto, l'azione di \mathcal{S}_3 sui sottospazi $S^3(V)$ e $W_{(21)}$. E' evidente come tutti gli elementi di $S^3(V)$ siano lasciati invariati da tutti gli elementi di \mathcal{S}_3 , quindi S^3V si decompone nella somma diretta di quattro repliche della rappresentazione identica di \mathcal{S}_3 .

Consideriamo il sottospazio di $W_{(21)}$ definito come

$$\text{span} \{e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1\}.$$

Notiamo che il vettore $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \in V_{\downarrow \begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \end{smallmatrix}}$, mentre il vettore $e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \in V_{\downarrow \begin{smallmatrix} 13 \\ 2 \end{smallmatrix}}$.

Per semplicità denotiamo

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \\ w_2 &= e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \end{aligned}$$

Allora si calcola rapidamente

$$\begin{aligned} (12).w_1 &= w_1 - w_2, & (12).w_2 &= -w_2 \\ (13).w_1 &= -w_1, & (13).w_2 &= w_1 - w_2 \\ (23).w_1 &= w_2, & (23).w_2 &= w_1 \\ (123).w_1 &= -w_2, & (123).w_2 &= w_1 - w_2 \\ (132).w_1 &= w_2 - w_1, & (132).w_2 &= -w_1 \end{aligned}$$

Quindi $\text{span} \{w_1, w_2\}$ è un sottospazio di $W_{(21)}$ invariante rispetto a \mathcal{S}_3 . Usando le formule precedenti è facile vedere che l'azione di \mathcal{S}_3 su questo spazio è isomorfa a $F_{(21)}$.

Nello stesso modo, si può vedere come

$$\text{span} \{e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2\}$$

sia \mathcal{S}_3 invariante, e sia un'altra realizzazione della rappresentazione irriducibile $F_{(21)}$ di \mathcal{S}_3 .

In conclusione, le azioni di $Gl(V)$ e di \mathcal{S}_3 su $V^{\otimes 3}$ sono sintetizzate dallo schema seguente

$$\begin{array}{c} W_{(3)} \\ \boxed{\begin{array}{c} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \\ e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \\ e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 \end{array}} \downarrow Gl(V) \\ \xrightarrow{\mathcal{S}_3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
W_{(12)} \\
\boxed{\begin{array}{cc}
e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \\
e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2
\end{array}} \quad \downarrow Gl(V) \\
\longrightarrow \\
\mathcal{S}_3
\end{array}$$

3 Il caso $\dim V = 3, n = 2$.

Si ha $\dim V^{\otimes 2} = 9$. Inoltre

$$\lambda = (2) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \lambda = (1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Entrambe le rappresentazioni di \mathcal{S}_2 sono unidimensionali. La decomposizione di $V^{\otimes 2}$ è chiara, a questo punto:

$$V^{\otimes 2} = S^2V \oplus \Lambda^2V.$$

In cui:

$$S^2V = W_{(2)} = \text{span} \{e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1, e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2\}$$

$$\Lambda^2V = W_{(11)} = \text{span} \{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1, e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2\}$$

S^2V è una rappresentazione irriducibile 6-dimensionale di $Gl(V)$. $S^2(V)$ è somma diretta di sei copie della rappresentazione identica di \mathcal{S}_2 . $\Lambda^2(V)$ è somma diretta di tre copie della rappresentazione alterna di \mathcal{S}_2 . Simbolicamente

$$\begin{array}{ccc}
S^2(V) & & \Lambda^2(V) \\
\boxed{\begin{array}{c}
e_1 \otimes e_1 \\
e_2 \otimes e_2 \\
e_3 \otimes e_3 \\
e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \\
e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 \\
e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2
\end{array}} & \downarrow Gl(V) & \boxed{\begin{array}{c}
e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \\
e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 \\
e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2
\end{array}} \quad \downarrow Gl(V) \\
\longrightarrow & & \longrightarrow \\
\mathcal{S}_2 & & \mathcal{S}_2
\end{array}$$

4 Il caso $\dim V = 3, n = 3$.

Si ha $\dim V^{\otimes 3} = 27$. Inoltre, se $n = 3$,

$$\lambda = (3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \lambda = (2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \lambda = (1, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Le tre rappresentazioni irriducibili di \mathcal{S}_3 corrispondenti, hanno dimensioni uno, due e uno rispettivamente. $V^{\otimes 3}$ ha decomposizione canonica

$$V^{\otimes 3} = S^3V \oplus \Lambda^3V \oplus W_{(21)}$$

in cui:

i) S^3V ha dimensione dieci;

ii) Λ^3V ha dimensione uno; è generato dal vettore

$$e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_1.$$

iii) $W_{(21)} = V_{\begin{smallmatrix} \underline{12} \\ \underline{3} \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \underline{13} \\ \underline{2} \end{smallmatrix}}$, è somma diretta di due sottospazi di dimensione otto.

S^3V è una rappresentazione irriducibile di $Gl(V)$. Si decompone in dieci sottospazi unidimensionali \mathcal{S}_3 invarianti, su cui agisce la rappresentazione identica di \mathcal{S}_3 .

Λ^3V è $Gl(V)$ e \mathcal{S}_3 invariante. Genera la rappresentazione alterna di \mathcal{S}_3 .

Sia $V_{\begin{smallmatrix} \underline{12} \\ \underline{3} \end{smallmatrix}}$ che $V_{\begin{smallmatrix} \underline{13} \\ \underline{2} \end{smallmatrix}}$ sono $Gl(V)$ -irriducibili. Il gruppo \mathcal{S}_3 agisce su $W_{(21)}$ mescolando i vettori di $V_{\begin{smallmatrix} \underline{12} \\ \underline{3} \end{smallmatrix}}$ con quelli di $V_{\begin{smallmatrix} \underline{13} \\ \underline{2} \end{smallmatrix}}$. La somma diretta $V_{\begin{smallmatrix} \underline{12} \\ \underline{3} \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \underline{13} \\ \underline{2} \end{smallmatrix}}$ si decompone nella somma diretta di otto spazi bidimensionali, \mathcal{S}_3 -irriducibili, tutti isomorfi alla rappresentazione $(\sigma_{(12)}, F_{(21)})$ di \mathcal{S}_3 .

Le azioni di \mathcal{S}_3 e di $Gl(V)$ sono descritte, simbolicamente, dallo schema seguente;

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} S^3(V) \\ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \end{array} \\ 10 \quad \downarrow Gl(V) \\ \xrightarrow{\mathcal{S}_2} \end{array} & & \begin{array}{c} \Lambda^3(V) \\ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \\ \xrightarrow{\mathcal{S}_3} \downarrow Gl(V) \end{array} & & \begin{array}{c} W_{(21)} \\ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \hline \end{array} \\ 8+8 \quad \downarrow Gl(V) \\ \xrightarrow{\mathcal{S}_2} \end{array}
 \end{array}$$

3.6 Alcuni commenti finali.

1 Riconsideriamo la decomposizione canonica

$$V^{\otimes n} = \bigoplus (W_\lambda : \lambda \in \text{part}(n)).$$

La somma diretta viene fatta su tutte le partizioni di n . Nell'esempio 3.5 precedente abbiamo visto come alcuni dei sottospazi W_λ siano ridotti al solo $\{0\}$. Dal momento che F_λ è non banale, qualunque sia λ , dobbiamo chiederci per quali $\lambda \in \text{Part}(n)$ sia $U_\lambda = \{0\}$. Noi abbiamo visto come

$$U_\lambda \simeq E_T[V^{\otimes n}]$$

in cui T è un qualunque *tableau* associato a λ . Dal momento che si ha

$$E_T = P_T Q_T,$$

ogni tensore della forma $E_T w$, $w \in V^{\otimes n}$, cambierà segno per ogni trasposizione degli indici che corrispondono agli indici che appaiono nelle righe di T . Allora, è

facile convincersi che, se T ha almeno una colonna più lunga di $\dim V$, $E_T w = 0$. D'altra parte si costruiscono rapidamente esempi, nel caso T ha meno righe di $\dim V$, di tensori non nulli, della forma $E_T w$. In conclusione

$$U_\lambda \neq \{0\}$$

se e solo se λ ha al più $\dim V$ righe. Tutti i λ con un numero di righe maggiore della dimensione di V , non compaiono nella decomposizione

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda} W_{\lambda}.$$

2 E' possibile ottenere una formula combinatoria, abbastanza semplice, che fornisce la dimensione di U_λ . La costruzione è la seguente: dato lo schema di Young λ , ad ogni quadratino dello schema si associa il numero

$$d + j - i,$$

in cui

$$\begin{aligned} d &= \dim V \\ j &= \text{colonna cui appartiene il quadratino} \\ i &= \text{riga cui appartiene il quadratino} \end{aligned}$$

Ad esempio, supponiamo $n = 8$, $\dim V = 3$ e

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

per ogni quadratino abbiamo

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

ricordiamo che ad ogni quadratino di uno schema di Young è associata la sua lunghezza di gancio; nell'esempio precedente

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Con queste premesse, si ha la formula

$$\dim U_\lambda = \frac{\text{prodotto dei numeri associati ai quadratini}}{\text{prodotto delle lunghezze di gancio}}$$

Nell'esempio

$$\dim U_\lambda = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 15$$

3.7 Le dimostrazioni

In questo paragrafo finale diamo le dimostrazioni delle due proprietà fondamentali:

- a) per ogni $\lambda \in \text{Part}(n)$, la rappresentazione $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $\text{Gl}(V)$ è irriducibile;
- b) se $\lambda, \mu \in \text{Part}(n)$ e $\lambda \neq \mu$, le rappresentazioni $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ e (ρ_μ, U_μ) di $\text{Gl}(V)$ sono inequivalenti.

Per dimostrare questi due fatti faremo ancora uso (oltre che di alcune proprietà elementari dei prodotti tensoriali di spazi vettoriali di dimensione finita) del teorema di Burnside (vedi ?? e ??).

Stabiliamo preliminarmente alcuni lemmi.

Lemma 4

$$\text{span} \{A^{\otimes n} : A \in \text{Gl}(V)\} = \text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$$

Prova. Preliminarmente, osserviamo che esiste un isomorfismo naturale:

$$\text{End}(V^{\otimes n}) \simeq [\text{End}(V)]^{\otimes n}$$

Inoltre l'azione di \mathcal{S}_n su $\text{End}(V^{\otimes n})$ (ricordiamo che \mathcal{S}_n agisce su $V^{\otimes n}$, quindi agisce in maniera naturale su $\text{End}(V^{\otimes n})$) coincide, in questa identificazione, con l'azione di \mathcal{S}_n su $[\text{End}(V)]^{\otimes n}$. Per convincersi di questo è sufficiente calcolare:

$$\begin{aligned} (s(A_1 \otimes \dots \otimes A_n) s^{-1})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= s((A_1 \otimes \dots \otimes A_n)v_{s(1)} \otimes \dots \otimes v_{s(n)}) \\ &= (A_1 v_{s(1)} \otimes \dots \otimes A_n v_{s(n)}) \\ &= A_{s^{-1}(1)} v_1 \otimes \dots \otimes A_{s^{-1}(n)} v_n \\ &= (A_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes A_{s^{-1}(n)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \end{aligned}$$

Supponiamo $B \in \text{End}(V^{\otimes n})$; per quanto appena visto l'azione di B su $V^{\otimes n}$ commuta con l'azione di \mathcal{S}_n (cioè $B \in \text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$) se e solo se B , visto come elemento di $[\text{End}(V)]^{\otimes n}$, è fissato dall'azione di \mathcal{S}_n su quest'ultimo spazio. Cioè se e solo se $B \in S^n[\text{End}(V)]$. E' un fatto elementare che $S^n[\text{End}(V)]$ è generato dagli elementi della forma

$$A^{\otimes n}, \quad A \in \text{End}(V)$$

Con questo, abbiamo mostrato che

$$\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n}) = \text{span} \{A^{\otimes n} : A \in \text{End}(V)\}$$

Poichè $\text{Gl}(V) \subset \text{End}(V)$, si avrà che

$$\text{span} \{A^{\otimes n} : A \in \text{Gl}(V)\}$$

è un sottospazio di $\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$. D'altra parte $\text{Gl}(V)$ è denso in $\text{End}(V)$, e ciò implica che $\text{span} \{A^{\otimes n} : A \in \text{Gl}(V)\}$ è denso in $\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$. Ma $\text{span} \{A^{\otimes n} : A \in \text{Gl}(V)\}$ è finito-dimensionale, quindi chiuso. Ciò mostra il lemma.

Lemma 5 *L'applicazione*

$$Q \mapsto I \otimes Q : \text{End}(U_\lambda) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_n}(W_\lambda)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Prova. Gli elementi della forma

$$P \otimes Q, \quad P \in \text{End}(F_\lambda), \quad Q \in \text{End}(U_\lambda)$$

generano linearmente tutto $\text{End}(W_\lambda)$. $P \otimes Q$ commuta con l'azione di \mathcal{S}_n su W_λ se e solo se P commuta con l'azione di \mathcal{S}_n su F_λ (che è irriducibile) e Q commuta con l'azione di \mathcal{S}_n su U_λ (che è l'azione banale).

Lemma 6 *Se $R \in \text{End}(V^{\otimes n})$ commuta con tutti gli elementi di $\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$, allora R è una combinazione lineare di elementi di \mathcal{S}_n .*

Prova. Se consideriamo la decomposizione

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda} W_\lambda$$

allora R può essere scritto nella forma “a blocchi”

$$R = (R_{\lambda\mu}),$$

in cui $R_{\lambda\mu}$ appartiene a $\text{Hom}(W_\lambda, W_\mu)$. Si ha

$$\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n}) = \bigoplus_{\lambda} \text{End}_{\mathcal{S}_n}(W_\lambda)$$

e, per il lemma precedente,

$$\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n}) = \bigoplus_{\lambda} (I \otimes \text{End}_{\mathcal{S}_n}(U_\lambda))$$

L'ipotesi che R commuta con ogni elemento di $\text{End}_{\mathcal{S}_n}(V^{\otimes n})$ implica che

$$R_{\lambda\mu}(I \otimes Q_\mu) = (I \otimes Q_\lambda)R_{\lambda\mu}$$

Scegliendo $Q_\lambda = I$ e $Q_\mu = 0$, otteniamo

$$R_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{se } \lambda \neq \mu$$

Inoltre $R_{\lambda\lambda}$ commuta con $I \otimes Q_\lambda$ su W_λ . Ciò implica

$$R_{\lambda\lambda} = R_\lambda \otimes I \quad \text{su } W_\lambda$$

in cui $R_\lambda \in \text{End}(F_\lambda, F_\lambda)$. Poichè F_λ è irriducibile, si ha che R_λ è combinazione lineare di elementi di \mathcal{S}_n . In conclusione, R è combinazione lineare di elementi di \mathcal{S}_n . \square

Proposizione 3 *La rappresentazione $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ di $Gl(V)$ è irriducibile.*

Prova. Mostriamo che $(\rho_\lambda, U_\lambda)$ è irriducibile mostrando che $\text{span}\{\rho_\lambda(A) : A \in Gl(V)\}$ genera linearmente tutto $End(U_\lambda)$. Dato $Q \in End(U_\lambda)$, si ha, per il lemma 5,

$$I \otimes Q \in End_{S_n}(W_\lambda)$$

Per il lemma 4, si avrà:

$$I \otimes Q = A_1^{\otimes n} + \dots + A_k^{\otimes n}, \quad A_1, \dots, A_k \in Gl(V)$$

Allora, per ogni $\phi \in U_\lambda$ e per ogni $f \in F_\lambda$, si ha:

$$\begin{aligned} (Q\phi)(f) &= I \otimes Q(f \otimes \phi) \\ &= A_1^{\otimes n}(\phi(f)) + \dots + A_k^{\otimes n}(\phi(f)) \\ &= (\rho_\lambda(A_1)\phi)(f) + \dots + (\rho_\lambda(A_k)\phi)(f) \\ &= ((\rho_\lambda(A_1)\phi) + \dots + (\rho_\lambda(A_k)\phi))(f) \end{aligned}$$

da cui

$$Q = \rho_\lambda(A_1)(\phi) + \dots + \rho_\lambda(A_k)(\phi) \quad \square$$

Proposizione 4 *Se $\lambda \neq \mu$, le rappresentazioni*

$$(\rho_\lambda, U_\lambda), \quad (\rho_\mu, U_\mu)$$

di $Gl(V)$ sono inequivalenti.

Prova. Supponiamo

$$Q \in Hom_{Gl(V)}(U_\lambda, U_\mu)$$

Per ogni $P \in Hom(F_\lambda, F_\mu)$, si avrà

$$P \otimes Q \in Hom(W_\lambda, W_\mu)$$

Mostriamo che $P \otimes Q$ commuta con tutti gli elementi di $End_{S_n}(V^{\otimes n})$. Sia $T \in End_{S_n}(V^{\otimes n})$; per il lemma 4, sarà

$$T = A_1^{\otimes n} + \dots + A_k^{\otimes n}, \quad A_1, \dots, A_k \in Gl(V)$$

Allora, per mostrare che $P \otimes Q$ commuta con T , è sufficiente mostrare che, per ogni $\phi \in U_\lambda$, per ogni $f \in F_\lambda$ ed ogni $A \in Gl(V)$, si ha:

$$A^{\otimes n}((P \otimes Q)(f \otimes \phi)) = P \otimes Q(A^{\otimes n}(\phi(f)))$$

Per questo, si ha:

$$\begin{aligned} A^{\otimes n}(P \otimes Q)(f \otimes \phi) &= A^{\otimes n}(Pf \otimes Q\phi) \\ &= A^{\otimes n}(Q\phi(Pf)) \\ &= (\rho_\mu(A)(Q\phi))(Pf) \\ &= (Q(\rho_\mu(A)\phi))(Pf) \\ &= (P \otimes Q)(f \otimes \rho_\lambda(A)) \\ &= (P \otimes Q)(A^{\otimes n}(\phi(f))) \end{aligned}$$

Per il lemma 6, $P \otimes Q$ è combinazione lineare di elementi di \mathcal{S}_n . Ma W_λ è stabile rispetto all'azione di \mathcal{S}_n ; quindi $P \otimes Q = 0$. Dal momento che P è arbitrario, si ha $Q = 0$. \square

Capitolo 4

Teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti

to be written

Capitolo 5

Le rappresentazioni unitarie irriducibili dei gruppi di rotazioni.

5.1 I gruppi $O(3)$ ed $SO(3)$. Il loro significato geometrico. Le classi coniugate e la misura invariante.

1.1 Denotiamo con $M_3(\mathbb{R})$ l'algebra delle matrici 3×3 , ad elementi reali. Denoteremo con $O(3)$ (talvolta viene usata la notazione più completa $O(3, \mathbb{R})$) il sottoinsieme di $M_3(\mathbb{R})$ definito come

$$O(3) := \{(T_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) : T^t = T^{-1}\}$$

in cui T^t denota la matrice trasposta di T . Evidentemente $O(3)$ é un gruppo rispetto alla moltiplicazione fra matrici; l'inverso dell'elemento T di $O(3)$ é la matrice inversa di T e l'identità in $O(3)$ é la matrice

$$I_3 = \text{diag}(1, 1, 1).$$

Dal momento che $\det T^t = \det T$ si ha che

$$\det(T^t T) = \det(I_3) = 1 = (\det T)^2,$$

per cui

$$\det T = \pm 1, \quad \text{se } T \in O(3).$$

Notiamo che $-I_3 \in O(3)$ e che $\det(-I_3) = -1$, quindi in $O(3)$ ci sono matrici con determinante -1 .

L'applicazione¹

$$T \mapsto \det T : O(3) \rightarrow \{1, -1\}$$

é un omomorfismo di gruppi. Ne segue che

$$SO(3) := \{T \in O(3) : \det T = 1\}$$

¹ $\{1, -1\}$ é riguardato come gruppo moltiplicativo di due elementi.

é un sottogruppo normale di $O(3)$, poiché é il kernel di questo omomorfismo. Notiamo che $SO(3)$ ha soltanto due classi laterali in $O(3)$ che sono

$$SO(3), \quad (-I_3) \cdot SO(3);$$

quindi ogni elemento di $O(3)$, o é in $SO(3)$, oppure é scrivibile unicamente come prodotto di $-I_3$ per un elemento di $SO(3)$.

1.2 Vogliamo chiarire il significato geometrico dei gruppi $O(3)$ ed $SO(3)$. Questo viene fatto identificandoli con particolari gruppi di operatori lineari su \mathbb{R}^3 . Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 e denotiamo con (e_1, e_2, e_3) la sua base canonica. Denoteremo con

$$x, y \mapsto x \cdot y$$

il prodotto scalare naturale in \mathbb{R}^3 , e denoteremo con

$$x \mapsto |x|$$

la norma associata a questo prodotto scalare. Denotiamo con $End(\mathbb{R}^3)$ l'algebra delle trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La scelta della base (e_1, e_2, e_3) definisce un isomorfismo di algebre

$$T \mapsto (T_{ij}) : End(\mathbb{R}^3) \rightarrow M_3(\mathbb{R}),$$

in cui la matrice (T_{ij}) di T é definita da

$$T e_j = \sum_{i=1}^3 T_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Nell'isomorfismo precedente si ha che T é invertibile in $End(\mathbb{R}^3)$ se e solo se la matrice (T_{ij}) é invertibile come matrice. Con queste premesse, consideriamo l'insieme di trasformazioni lineari di \mathbb{R}^3 in sè

$$\{T \in End(\mathbb{R}^3) : Tx \cdot Ty = x \cdot y; x, y \in \mathbb{R}^3\}.$$

Questo insieme é un gruppo. Infatti:

a) $I \in End(\mathbb{R}^3)$ é elemento dell'insieme;

b) se T é nell'insieme, in particolare si ha

$$|Tx| = |x|$$

quindi T é invertibile in $End(\mathbb{R}^3)$; se T^{-1} é l'inverso di T , allora

$$T^{-1}x \cdot T^{-1}y = T(T^{-1}x) \cdot T(T^{-1}y) = x \cdot y;$$

quindi anche T^{-1} é nell'insieme;

c) se T_1 e T_2 sono nell'insieme anche la loro composizione lo é, evidentemente.

Mostriamo che nell' isomorfismo di gruppi

$$T \mapsto (T_{ij}) : Aut(\mathbb{R}^3) \rightarrow \{ \text{matrici invertibili} \}$$

l'insieme

$$\{ T \in Aut(\mathbb{R}^3) : Tx \cdot Ty = x \cdot y \}$$

é mappato esattamente su tutto $O(3)$. Per mostrare questo fatto, notiamo che si ha

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} x_j \quad (Ty)_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} y_j,$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} Tx \cdot Ty &= \sum_{i=1}^3 (Tx)_i (Ty)_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 T_{ij} x_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 T_{ik} y_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j \left(\sum_{i=1}^3 T_{ij} T_{ik} \right) y_k, \end{aligned}$$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^3 x_i y_i;$$

per cui $Tx \cdot Ty = x \cdot y$ se e solo se $\sum_{i=1}^3 T_{ij} T_{ik} = \delta_{jk}$, cioè se e solo se

$$(T_{ij}) \in O(3).$$

Infine si ha che nell'isomorfismo di gruppi

$$T \mapsto (T_{ij}) : Aut(\mathbb{R}^3) \rightarrow \{ \text{matrici invertibili} \}$$

T é mappato in un elemento di $SO(3)$ se e solo se T preserva l'orientazione della base, cioè se e solo se la base

$$(Te_1, Te_2, Te_3)$$

di \mathbb{R}^3 appartiene allo stesso orientamento della base canonica.

In questa maniera i gruppi $O(3)$ ed $SO(3)$ sono identificati con i gruppi di trasformazione lineari su \mathbb{R}^3 il cui significato geometrico é chiaro e trasparente.

2.1 Vogliamo definire un insieme di parametri in modo tale che ogni matrice $R \in SO(3)$ sia unicamente individuata da un solo insieme di loro valori.

Consideriamo la sfera unitaria S^2 in \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{ \vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{n}|^2 = 1 \}.$$

Dati $\vec{n} \in S^2$ ed un angolo $\phi \in [0, \pi]$, definiamo una matrice N come

$$N = n_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e definiamo $R(\vec{n}, \phi)$ come

$$R(\vec{n}, \phi) := e^{N\phi}$$

Esplicitamente si può calcolare, tenendo conto che $N^3 = -N$,

$$R(\vec{n}, \phi) = I_3 + N \sin \phi + N^2(1 - \cos \phi).$$

Si ha che $R(\vec{n}, \phi) \in SO(3)$, per ogni $\vec{n} \in S^2$ e per ogni $\phi \in [0, \pi]$. E' evidente, dalla formula esplicita che è

$$R(\vec{n}, 0) = I_3, \text{ per ogni } \vec{n} \in S^2$$

e che

$$R(\vec{n}, \pi) = R(-\vec{n}, \pi), \text{ per ogni } \vec{n} \in S^2.$$

Inversamente, supponiamo sia assegnata $R \in SO(3)$ e determiniamo $\vec{n} \in S^2$ e $\phi \in [0, \pi]$ che risolvono la relazione

$$R = I_3 + N \sin \phi + N^2(1 - \cos \phi).$$

Se si calcola la traccia dei due membri si trova

$$Tr(R) = 3 + Tr N^2(1 - \cos \phi);$$

si può calcolare

$$N^2 = \begin{pmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_3^2 - n_1^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned} Tr(R) &= 3 - 2(1 - \cos \phi) = 1 + 2 \cos \phi \\ \cos \phi &= \frac{Tr R - 1}{2}. \end{aligned}$$

Dal momento che per ogni $R \in SO(3)$ si ha

$$-1 \leq Tr R \leq 3,$$

l'equazione precedente ha un'unica soluzione per $\phi \in [0, \pi]$, che denotiamo con $\phi(R)$. Consideriamo a questi punti l'equazione

$$R = I_3 + \sin \phi(R)N + (1 - \cos \phi(R))N^2;$$

da essa otteniamo

$$n_i \sin \phi(R) = -(R_{jk} - R_{kj}), \quad ij k \text{ ciclici.}$$

Se $\phi(R) \neq 0, \pi$, cioè se $TrR \neq -1, 3$ l'equazione precedente permette di determinare $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Questa soluzione viene denotata con $\vec{n}(R)$.

Si verifica facilmente che si ha

$$\begin{aligned} R(\vec{n}(R), \phi(R)) &= R, & \forall R \text{ tale che } TrR \neq -1, 3 \\ \vec{n}(R(\vec{n}, \phi)) &= \vec{n}, \quad \phi(R(\vec{n}, \phi)) = \phi, & \text{ se } \phi \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso $\phi(R) = 0$, cioè $TrR = 3$. Per una matrice $R \in SO(3)$ si ha che $TrR = 3$ se e solo se $R = I_3$, in qual caso dunque l'equazione per determinare $\vec{n}(R)$ si riduce a

$$I_3 = I_3.$$

Ogni $\vec{n} \in S^2$ è "soluzione" di questa equazione. A $R = I_3$ possiamo associare

$$\phi(R) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{n}(R) \text{ qualunque in } S^2.$$

Consideriamo, infine, il caso $\phi(R) = \pi$ (equivalentemente $TrR = -1$). L'equazione per \vec{n} è

$$R = I_3 + 2N^2,$$

esplicitamente

$$R = \begin{pmatrix} 2n_1^2 - 1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_1n_2 & 2n_2^2 - 1 & n_2n_3 \\ n_1n_3 & n_2n_3 & 2n_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Questa equazione ha due soluzioni per \vec{n} :

$$\begin{aligned} n_i(R) &= \varepsilon_i \left(\frac{1 + R_{ii}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, & \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \text{sgn}R_{12}, \varepsilon_3 = \text{sgn}R_{13} \\ n'_i(R) &= -\varepsilon_1 \left(\frac{1 + R_{ii}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tutta la discussione precedente può essere riformulata come segue.

Esiste una corrispondenza biunivoca e bicontinua tra le coppie

$$(\vec{n}, \phi) \quad \vec{n} \in S^2, \quad \phi \in [0, \pi]$$

e le matrici di $SO(3)$, definita dall'applicazione

$$\vec{n}, \phi \mapsto R(\vec{n}, \phi),$$

purché si identifichino tra esse tutte le coppie

$$(\vec{n}, 0)$$

e si identifichino tra esse le coppie

$$(\vec{n}, \pi), \quad (-\vec{n}, \pi).$$

In questo modo, $SO(3)$ é identificato topologicamente con la palla chiusa di raggio π in \mathbb{R}^3 , in cui i punti diametralmente opposti sulla sfera di raggio π (che é la frontiera di questa palla) sono identificati.

L'interpretazione geometrica di questa parametrizzazione é abbastanza trasparente. Ogni rotazione é una rotazione in senso antiorario di un angolo $\phi \in [0, \pi]$ intorno ad un asse la cui direzione e il cui verso sono individuati da \vec{n} . Ovviamente la rotazione di un angolo uguale a zero attorno ad un qualunque asse é la rotazione identità. Inoltre, bisogna tener conto del fatto che la rotazione di π attorno a \vec{n} e la rotazione di π attorno a $-\vec{n}$ sono la stessa rotazione.

2.2 Una delle proprieta fondamentali della parametrizzazione degli elementi di $SO(3)$ mediante le coppie \vec{n}, ϕ é la seguente relazione

$$R R(\vec{n}, \phi) R^{-1} = R(R\vec{n}, \phi)$$

per ogni $R \in SO(3)$, per ogni $\vec{n} \in S^2$ e $\phi \in [0, \pi]$. Questo mostra che due elementi R ed R' di $SO(3)$ sono coniugati se e solo se si ha

$$\phi(R) = \phi(R').$$

L'interpretazione geometrica di questo fatto é che le rotazioni di uno stesso angolo attorno ad un asse qualunque sono tra esse conigate. In altre parole, le rotazioni attorno ad un fissato asse possono essere usate come rappresentative delle classi di coniugazione in $SO(3)$. Se si sceglie l'asse $\vec{n} = (0, 0, 1)$ (scelta che rende alcune espressioni esplicite particolarmente semplici), si ha che gli elementi di $SO(3)$ della forma

$$R((0, 0, 1), \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

parametrizzano le classi di coniugazione. Denoteremo, nel seguito, questi elementi come R_ϕ . Nella parametrizzazione \vec{n}, ϕ di $SO(3)$, la misura di Haar (normalizzata all'unita) é data esplicitamente da

$$d\mu(\vec{n}, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} d\sigma(\vec{n}) d\frac{\phi}{2},$$

in cui $d\sigma(\vec{n})$ rappresenta l'elemento d'area (non normalizzato) della sfera unitaria S^2 .

5.2 Il gruppo $SU(2)$. Le classi coniugate, la misura invariante e l'omomorfismo di ricoprimento $SU(2) \rightarrow SO(3)$

3.1 Si denota con $SU(2)$ l'insieme delle matrici 2×2 , ad elementi complessi, unitarie² e con determinante uguale a uno:

$$SU(2) := \{h \in M_2(\mathbb{C}) : h^{-1} = h^*, \det(h) = 1\}$$

E' ovvio che $SU(2)$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione tra matrici e che l'identità in $SU(2)$ è la matrice $I = \text{diag}(1, 1)$. E' immediato verificare che gli elementi di $SU(2)$ sono tutte e sole le matrici della forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

3.2 Le classi di coniugazione in $SU(2)$ possono essere descritte nella maniera seguente. Ogni matrice unitaria h è diagonalizzabile con una trasformazione unitaria, quindi esiste una matrice unitaria 2×2 , U , tale che :

$$UhU^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$$

in cui α e β sono gli autovalori di h . Se h è elemento di $SU(2)$ allora $\beta = \bar{\alpha}$ per cui

$$UhU^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & \\ & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

per qualche $\phi \in [0, 2\pi]$. Dal momento che U può essere moltiplicata per un qualunque numero complesso di modulo unitario, si può assumere $\det U = 1$, e quindi che sia $U \in SU(2)$. Da questo segue che ogni $h \in SU(2)$ è coniugato ad un elemento della forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} & \\ & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

e che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & \\ & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & \\ & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

si può concludere allora che ogni $h \in SU(2)$ è coniugato esattamente ad una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} & \\ & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

In altre parole ciascuna classe di coniugazione in $SU(2)$ è rappresentata da una matrice di questa forma, che verrà denotata in seguito con h_ϕ .

²Questo significa che l'inversa della matrice è uguale all'hermitiana coniugata.

3.3 Ogni elemento h di $SU(2)$ può essere scritto nella forma:

$$h = \begin{pmatrix} \alpha_0 - i\alpha_3 & -i\alpha_1 - \alpha_2 \\ -i\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_0 + i\alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_0 \sigma_0 - i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j$$

in cui:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici di Pauli e

$$\alpha_0, \alpha_j \in \mathbf{R}; \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Gli elementi di $SU(2)$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti della sfera unitaria S^3 in \mathbb{R}^4 . Ciò mostra che $SU(2)$ è connesso e semplicemente connesso. Ogni $h \in SU(2)$ può essere individuato univocamente anche assegnando un angolo ed un vettore unitario \vec{n} , $\vec{n} \in S^2$, in maniera simile ad $SO(3)$:

$$h = h(\vec{n}, \phi) = \sigma_0 \cos \phi - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \phi = e^{i\phi(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})}$$

(in cui l'ultima uguaglianza si prova usando la relazione $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \sigma_0$). L'insieme dei punti

$$\{(\cos \phi, \vec{n} \sin \phi), \vec{n} \in S^2, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

copre la sfera S^3 esattamente una volta. L'espressione della misura di Haar di $SU(2)$ (normalizzata a 1) in questa parametrizzazione è:

$$d\mu(\vec{n}, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} d\sigma(\vec{n}) \sin^2 \phi d\phi \quad ^3$$

in cui $d\sigma(\vec{n})$ denota l'elemento d'area della sfera S^2 . Lo spazio $L^2(SU(2))$ viene identificato con lo spazio delle funzioni:

$$\vec{n}, \phi \longrightarrow f(\vec{n}, \phi) : S^2 \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

che sono:

a) misurabili rispetto alla misura prodotto della misura σ su S^2 con la misura di Lebesgue su $[0, \pi]$

b)

$$\int_{S^2} \int_0^\pi |f(\vec{n}, \phi)| \sin^2 \phi d\sigma(\vec{n}) d\phi < \infty.$$

In questa identificazione, le funzioni centrali, ossia le funzioni costanti sulle classi di coniugazione di $SU(2)$, sono le funzioni che dipendono soltanto da ϕ .

$$^3 \int_{SU(2)} d\mu(\vec{n}, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^2} d\sigma(\vec{n}) \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{2\pi^2} 4\pi \frac{\pi}{2} = 1$$

4.1 Denotiamo con \mathbb{H} lo spazio vettoriale reale costituito da tutte le matrici 2×2 complesse, hermitiane, a traccia nulla. Le tre matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

sono una base di \mathbb{H} . Vogliamo definire un isomorfismo lineare tra \mathbb{H} ed \mathbb{R}^3 . Sia $x = (x_1, x_2, x_3)$ un elemento di \mathbb{R}^3 . Denoteremo con $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ la sua norma euclidea. Definiamo

$$\sigma(x) := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

Ovviamente si ha che

$$\sigma(x) \in \mathbb{H}$$

ed inoltre è

$$\det\sigma(x) = -|x|^2$$

L'applicazione

$$x \mapsto \sigma(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{H}$$

è ovviamente lineare; dal momento che

$$\sigma(e_1) = \sigma_1, \quad \sigma(e_2) = \sigma_2, \quad \sigma(e_3) = \sigma_3$$

(in cui e_1, e_2, e_3 è la base canonica di \mathbb{R}^3), è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ricordiamo le proprietà delle matrici σ

$$Tr(\sigma_i\sigma_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$Tr(\sigma_i\sigma_i) = 2 \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Usando queste proprietà si ha che l'isomorfismo sopra definito è invertito dall'applicazione :

$$A \mapsto \left(\frac{1}{2}Tr(A\sigma_1), \frac{1}{2}Tr(A\sigma_2), \frac{1}{2}Tr(A\sigma_3)\right) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Vogliamo definire un'azione di $SU(2)$ su \mathbb{H} . Se $h \in SU(2)$ ed $A \in \mathbb{H}$, si ha

$$hAh^{-1} \in \mathbb{H}.$$

Infatti

$$(hAh^{-1})^* = (h^{-1})^*A^*h^* = hAh^{-1}$$

e

$$Tr(hAh^{-1}) = Tr(h^{-1}hA) = Tr(A) = 0.$$

Per ogni fissato $h \in SU(2)$, l'applicazione

$$A \mapsto hAh^{-1} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

è lineare. Inoltre l'applicazione

$$A, h \mapsto hAh^{-1} : SU(2) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

definisce chiaramente un'azione di $SU(2)$ su \mathbb{H} , tramite operatori lineari. L'isomorfismo lineare

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$$

permette di trasferire l'azione di $SU(2)$ da \mathbb{H} a \mathbb{R}^3 . Esplicitamente, ogni $h \in SU(2)$ induce una trasformazione lineare

$$R(h) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita dalle relazioni

$$(R(h)x)_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(h\sigma(x)h^{-1}\sigma_i), \text{ per ogni } i=1,2,3 \text{ e per ogni } x \in \mathbb{R}^3;$$

oppure, equivalentemente, dalle relazioni:

$$\sigma(R(h)x) = h\sigma(x)h^{-1}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^3.$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} \det(\sigma(R(h)x)) &= - |R(h)x|^2 \\ \det(h\sigma(x)h^{-1}) &= - |x|^2 \end{aligned}$$

ne segue che è

$$R(h) \in O(3) \quad \text{per ogni } h \in SU(2)$$

Vogliamo mostrare che si ha, più precisamente

$$R(h) \in SO(3)$$

L'argomento è il seguente. Gli elementi della matrice $R(h)$ sono definiti dalle relazioni

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij}(h)x_j = \frac{1}{2} \text{Tr}(h\sigma(x)h^{-1}\sigma_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Se si tiene presente che $\det(h) = 1$, se ne deduce che $R_{ij}(h)$ è una funzione polinomiale dei parametri che determinano h . Se si scrive

$$h = \alpha_0\sigma_0 - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}, \quad \alpha_0^2 + |\vec{\alpha}|^2 = 1$$

abbiamo che gli elementi di matrice R_{ij} sono funzioni polinomiali delle variabili $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Allora si ha che la funzione

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mapsto \det R(h) : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua. Dal momento che $\det R(h) = \pm 1$ (poichè $R(h) \in O(3)$ per ogni $h \in SU(2)$), se ne deduce che $\det(R(h))$ ha segno costante (se cambiasse segno dovrebbe annullarsi in un punto, poichè S^3 è semplicemente connesso). Siccome $R(I_2) = I_3$, in un punto $R(h)$ ha determinante 1, allora ha determinante 1 per ogni $h \in SU(2)$; quindi

$$R(h) \in SO(3), \text{ per ogni } h \in SU(2).$$

4.2 Vogliamo mostrare che l'applicazione

$$h \longmapsto R(h) : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

è un omomorfismo di gruppi, che è surgettiva e che il suo kernel è $(I_2, -I_2)$. a)

R è un omomorfismo di gruppi.

$R(h)$ è definito dalla relazione

$$\sigma(R(h)x) = h\sigma(x)h^{-1}$$

per cui

$$\sigma(R(h_1h_2)x) = h_1h_2\sigma(x)h_2^{-1}h_1^{-1} = h_1\sigma(R(h_2)x)h_1^{-1} = \sigma(R(h_1)R(h_2)x),$$

da cui si ha

$$R(h_1h_2) = R(h_1)R(h_2);$$

b) R è surgettivo.

Supponiamo che R sia un elemento di $SO(3)$. Se x è un qualunque elemento di \mathbb{R}^3 , poniamo $y = Rx$ e consideriamo

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad \sigma(Rx) = \begin{pmatrix} y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1 + iy_2 & -y_3 \end{pmatrix}$$

$\sigma(x)$ e $\sigma(Rx)$ hanno entrambe traccia nulla, inoltre

$$\det\sigma(x) = -|x|^2 = -|Rx|^2 = \det(\sigma(y)).$$

Ciò implica che $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ hanno gli stessi autovalori. Allora esiste una matrice unitaria U tale che

$$\sigma(y) = U\sigma(x)U^{-1}.$$

Se U è unitaria si ha

$$U = h \cdot \det U$$

in cui $h \in SU(2)$. Allora si ha

$$\sigma(y) = h\sigma(x)h^{-1}$$

da cui

$$R = R(h);$$

c) $\text{Ker}(R) = \{I_2, -I_2\}$.

Supponiamo che $R(h) = I_3$. Ciò significa

$$\sigma(R(h)x) = \sigma(x) = h\sigma(x)h^{-1},$$

da cui

$$\sigma(x)h = h\sigma(x), \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^3.$$

Allora h commuta con tutte le matrici in \mathbb{H} , quindi con tutte le matrici ed è cos' \mathbf{I} un multiplo dell'identità. Ciò mostra che

$$h = \pm I_2$$

L'omomorfismo surgettivo

$$h \longmapsto R(h) : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

viene detto *l'omomorfismo di ricoprimento di $SO(3)$* .

4.3 Nel seguito vogliamo dare la forma esplicita dell'omomorfismo di ricoprimento nelle parametrizzazioni di $SU(2)$ descritte in precedenza. Se parametrizziamo gli elementi h di $SU(2)$ come

$$h = \alpha_0 \sigma_0 - i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

si ottiene per $R(h)$

$$R(h) = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_0\alpha_3 & 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_3 & \alpha_0^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2 & 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_0\alpha_1 \\ 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_0\alpha_2 & 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_1 & \alpha_0^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora la parametrizzazione di $SU(2)$ in termini di $\vec{n} \in S^2$ e di $\phi \in [0, \pi]$. Per rendere esplicita la relazione tra $h(\vec{n}, \phi) \in SU(2)$ e $R(h(\vec{n}, \phi)) \in SO(3)$, dividiamo la sfera S^3 in due emisferi aperti:

$$\left\{ (\cos \phi, \vec{n} \sin \phi) : 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}; \vec{n} \in S^2 \right\},$$

$$\left\{ (\cos(\pi - \phi), \vec{n} \sin(\pi - \phi)) : 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}; \vec{n} \in S^2 \right\}$$

più l'equatore (che si identifica con la sfera S^2) che è la frontiera (comune) dei due emisferi. La coppia di elementi di $SU(2)$

$$h(\vec{n}, \phi), h(-\vec{n}, \pi - \phi) = -h(\vec{n}, \phi), \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$$

corrisponde ad un punto nel primo emisfero ed al punto diametralmente opposto nel secondo emisfero, entrambe questi elementi sono mappati da R nella rotazione parametrizzata da \vec{n} e dall'angolo 2ϕ

$$R(h(\vec{n}, \phi)) = R(h(-\vec{n}, \pi - \phi)) = R(\vec{n}, 2\phi).$$

Ogni elemento dell'equatore di $SU(2)$, che è parametrizzato da \vec{n} e $\phi = \frac{\pi}{2}$, viene mappato da R nella rotazione parametrizzata da \vec{n} e $\phi = \pi$

$$R\left(h\left(\vec{n}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = R(\vec{n}, \pi);$$

bisogna tenere conto, però, che le rotazioni

$$R(\vec{n}, \pi) \quad \text{e} \quad R(-\vec{n}, \pi)$$

sono tra esse identificate. In particolare si ha, per i rappresentativi delle classi di coniugazione in $SO(3)$ e $SU(2)$, la relazione

$$R\left(\pm h_{\frac{\phi}{2}}\right) = R_{\phi}, \quad \phi \in [0, \pi].$$

5.3 Le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, di $SO(3)$ e di $O(3)$.

5.1 Consideriamo $SU(2)$ come gruppo che agisce, in maniera lineare, su \mathbb{C}^2 . Ricordiamo che, in $SU(2)$, gli elementi della forma:

$$h_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

parametrizzano le classi di coniugazione.

Denotiamo con (e_1, e_2) la base canonica di \mathbb{C}^2 ed osserviamo che questa base diagonalizza simultaneamente tutti gli elementi h_φ

$$h_\varphi e_1 = e^{i\varphi} e_1, \quad h_\varphi e_2 = e^{-i\varphi} e_2.$$

Per ogni intero $r \geq 0$ consideriamo $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$. Su questo spazio agiscono in maniera naturale il gruppo simmetrico \mathcal{S}_r ed il gruppo $GL(2, \mathbb{C})$, con i suoi sottogruppi, tra cui $SU(2)$.

Consideriamo il sottogruppo di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$ formato dai tensori completamente simmetrici (rispetto all'azione di \mathcal{S}_r). Denotiamo con $S^r(\mathbb{C}^2)$ questo sottospazio. Ricordiamo alcuni fatti:

1. $w \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$ è in $S^r(\mathbb{C}^2)$ se e solo se

$$s \cdot w = w, \quad \text{per ogni } s \in \mathcal{S}_r;$$

2. $S^r(\mathbb{C}^2)$ è l'immagine del proiettore

$$\frac{1}{r!} \sum_{s \in \mathcal{S}_r} s$$

definito su $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$;

3. la dimensione di $S^r(\mathbb{C}^2)$ è $r + 1$;
4. una base di $S^r(\mathbb{C}^2)$ si ottiene nella maniera seguente: notiamo che il tensore

$$\frac{1}{r!} \sum_{s \in \mathcal{S}_r} s \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})$$

non cambia rispetto ad una permutazione degli indici; allora possiamo usare come notazione canonica per tali tensori simmetrici la notazione

$$e_1^{a_1} e_2^{a_2}$$

in cui a_1 e a_2 sono due interi ≥ 0 , tali che $a_1 + a_2 = r$, e indicano quante volte i vettori di base e_1 e e_2 appaiono in $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$, rispettivamente, con questa restrizione, i tensori

$$e_1^{a_1} e_2^{a_2} \in S^r(\mathbb{C}^2), \quad a_1 + a_2 = r, \quad a_i \geq 0$$

formano una base di $S^r(\mathbb{C}^2)$;

5. $S^r(\mathbb{C}^2)$ è invariante (ed irriducibile) rispetto all'azione di $GL(2, \mathbb{C})$ su $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$, quindi è invariante "a fortiori" per l'azione di $SU(2)$ su $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$.

5.2 Vogliamo mostrare che gli spazi

$$S^r(\mathbb{C}^2)$$

sono tutte le possibili rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$. Per mostrare questo fatto, calcoliamo il carattere delle rappresentazioni di $SU(2)$ su $S^r(\mathbb{C}^2)$. Dal momento che i caratteri sono costanti sulle classi di coniugazione, è sufficiente calcolare la traccia della matrice che rappresenta l'azione di h_φ su $S^r(\mathbb{C}^2)$. L'azione di h_φ sui vettori della base di $S^r(\mathbb{C}^2)$ descritta nel paragrafo precedente è data da:

$$h_\varphi e_1^{a_1} e_2^{a_2} = e^{ia_1\varphi} e^{-ia_2\varphi} e_1^{a_1} e_2^{a_2} = e^{i(a_1-a_2)\varphi} e_1^{a_1} e_2^{a_2} = e^{i(r-2m)\varphi}$$

in cui abbiamo posto

$$a_1 = r - m, \quad a_2 = m, \quad 0 \leq m \leq r.$$

Se denotiamo con $\chi_r(\varphi)$ il carattere dell'azione di h_φ su $S^r(\mathbb{C}^2)$, abbiamo ⁴:

$$\begin{aligned} \chi_r(\varphi) &= \sum_{m=0}^r e^{i(r-2m)\varphi} = e^{ir\varphi} \sum_{m=0}^r e^{2im\varphi} = \\ &= \frac{e^{-i(r+1)\varphi} - e^{i(r+1)\varphi}}{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}} = \frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

Mostriamo che i caratteri χ_r hanno norma 1 in $L^2(SU(2))$, per ogni $r \geq 0$. Se usiamo la parametrizzazione di $SU(2)$ mediante $\vec{n} \in S^2$ e $\varphi \in [0, \pi]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \|\chi_r\|_{L^2(SU(2))} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^2} \int_0^\pi \frac{\sin^2[(r+1)\varphi]}{\sin^2\varphi} \sin^2\varphi \, d\sigma(\vec{n}) \, d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{2\pi^2} \int_0^\pi \sin^2[(r+1)\varphi] \, d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Per mostrare che gli spazi $S^r(\mathbb{C}^2)$ esauriscano tutte le possibili rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, mostriamo che i caratteri $\{\chi_r, r \geq 0\}$ formano una

⁴Ricordiamo che la formula per la somma di una progressione geometrica è

$$\sum_{n=1}^r z^n = \frac{z^r - 1}{z - 1}, \quad |z| < 1$$

base hilbertiana nel sottospazio chiuso di $L^2(SU(2))$ delle funzioni centrali. Supponiamo che $f \in L^2(SU(2))$ sia centrale e che sia:

$$(f, \chi_r)_{L^2(SU(2))} = 0, \text{ per ogni } r \geq 0,$$

mostriamo che si ha:

$$f = 0 \text{ in } L^2(SU(2)).$$

Usando, al solito, la parametrizzazione con \vec{n} e φ di $SU(2)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\chi_r, f)_{L^2(SU(2))} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^2} \frac{\sin[(r+1)\varphi]}{\sin \varphi} f(\varphi) \sin^2 \varphi d\sigma(\vec{n}) d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin[(r+1)\varphi] \sin \varphi f(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Dal momento che le funzioni

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\varphi, n \geq 1 \right)$$

formano una base hilbertiana in $L^2(0, \pi)$, si ha che se $(\chi_r, f)_{L^2} = 0$ per ogni $r \geq 0$, allora è:

$$f \cdot \sin \varphi = 0 \text{ in } L^2(0, \pi).$$

Poichè $\sin \varphi$ non si annulla mai in $]0, \pi[$, ne segue che $f = 0$ in $L^2(0, \pi)$, per cui $(\chi_r)_{r \geq 0}$ è una base hilbertiana nel sottospazio chiuso delle funzioni centrali.

Questo mostra che le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono tutte e sole quelle definite da sottospazi $S^r(\mathbb{C}^2)$ di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$.

Usualmente l'indice r che denota le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ viene scritto come :

$$r = 2j, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Le rappresentazioni stesse vengono denotate come D^j e l'indice j viene detto "spin" della rappresentazione; il carattere di D^j è indicato con χ_j ed è dato da:

$$\chi_j(\varphi) = \frac{\sin[(2j+1)\varphi]}{\sin \varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

La rappresentazione D^j agisce nello spazio $S^{2j}(\mathbb{C}^2)$.

Il prodotto scalare in \mathbb{C}^2 induce un prodotto scalare in $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2j}$ nella maniera seguente: tra i tensori decomponibili di $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2j}$ il prodotto scalare è definito da:

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j}, w_1 \otimes \dots \otimes w_{2j})_{(\mathbb{C}^2)^{2j}} = (v_1, w_1)_{\mathbb{C}^2} \dots (v_{2j}, w_{2j})_{\mathbb{C}^2}$$

e viene poi esteso a $(\mathbb{C}^2)^{2j}$ per linearità.

Si può calcolare che i vettori:

$$\frac{e_1^{2j-m} e_2^m}{\sqrt{(2j-m)! m!}} \quad 0 \leq m \leq 2j$$

sono una base ortonormale in $S^{2j}(\mathbb{C}^2)$.

In questo modo \mathbb{C}^{2j+1} può essere considerato come lo spazio in cui agisce D^j , come rappresentazione unitaria.

5.3 Se D^j e $D^{j'}$ sono rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, consideriamo la rappresentazione prodotto tensore $D^j \otimes D^{j'}$. La sua dimensione è:

$$(2j+1)(2j'+1)$$

ed il suo carattere è:

$$\chi_j \otimes \chi_{j'}(\varphi) = \chi_j(\varphi)\chi_{j'}(\varphi).$$

Possiamo determinare la decomposizione di $D^j \otimes D^{j'}$ in somma diretta di rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, esprimendo $\chi_j \otimes \chi_{j'}$ come somma di caratteri di rappresentazioni irriducibili. Per fare questo calcolo è utile notare che è possibile riscrivere i caratteri nella forma:

$$\chi_j(\varphi) = \sum_{m=0}^{2j} e^{i(j-m)2\varphi} = \sum_{m'=-j}^j e^{im'2\varphi}$$

Si ha quindi, supponendo per fissare le idee $j \geq j'$,

$$\chi_j \otimes \chi_{j'}(\varphi) = \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j'}^{j'} e^{i(m+m')\varphi} = \sum_{l=j-j'}^{j+j'} \sum_{k=-l}^l e^{ik\varphi} = \sum_{l=j-j'}^{j+j'} \chi_l(\varphi).$$

In generale

$$\chi_j \otimes \chi_{j'}(\varphi) = \sum_{l=|j-j'|}^{j+j'} \chi_l(\varphi)$$

Quindi

$$D^j \otimes D^{j'} \cong D^{j+j'} \oplus D^{j+j'-1} \oplus \dots \oplus D^{|j-j'|}.$$

Questa espressione è nota come **formula (o serie) di Clebsh-Gordan**. Deve essere sottolineato come ciascuna rappresentazione irriducibile, che compare al membro di destra della formula, ha molteplicità 1. Quindi la decomposizione è canonica.

6.1 Supponiamo che (π, V) sia una rappresentazione unitaria di $SO(3)$. Dal momento che:

$$R : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

è un omomorfismo di gruppi, è evidente che $(\pi \cdot R, V)$ è una rappresentazione unitaria di $SU(2)$.

Notiamo che se (π, V) è irriducibile, lo è anche $(\pi \cdot R, V)$. Infatti, supponiamo che l'operatore

$$T : V \rightarrow V$$

commuti con tutti gli operatori

$$\pi \cdot R(h), \quad h \in SU(2);$$

dal momento che $R(h)$, al variare di h in $SU(2)$, ricopre tutti gli elementi di $SO(3)$, questo implica che T commuta con tutti gli operatori

$$\pi(R), \quad R \in SO(3).$$

Allora T è un multiplo dell'identità, e ciò mostra che $(\pi \cdot R, V)$ è irriducibile.

Ciò mostra che ogni rappresentazione irriducibile (π, V) di $SO(3)$ induce una rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ della forma $(\pi \cdot R, V)$

Il lemma seguente caratterizza quali tra le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ è della forma $\pi \cdot R$, per una qualche rappresentazione irriducibile π di $SO(3)$.

Lemma 7 *Una rappresentazione (σ, V) di $SU(2)$ è della forma $\sigma = \pi \cdot R$, in cui (π, V) è una rappresentazione di $SO(3)$, se e solo se $\sigma(-I_2) = id_V$*

Dimostrazione. Se è $\sigma = \pi \cdot R$, allora

$$\sigma(-I_2) = \pi \cdot R(-I_2) = \pi(I_3) = id_V.$$

Inversamente, supponiamo $\sigma(-I_2) = id_V$. Allora si può definire una rappresentazione (π, V) di $SO(3)$ ponendo:

$$\pi(R) := \sigma(h),$$

in cui h è un qualunque elemento tale che $R(h) = R$. Infatti, se anche h' è tale che $R(h') = R$ deve essere $h' = -h$, e si ha:

$$\sigma(h') = \sigma(-I_2 h) = \sigma(-I_2) \sigma(h) = id_V \sigma(h) = \sigma(h)$$

Quindi (π, V) può essere definita, senza ambiguità, come rappresentazione di $SO(3)$. È immediato verificare che $\sigma = \pi \cdot R$. ■

Le (classi di equivalenza delle) rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono (rappresentate da):

$$(D^j, \mathbb{C}^{2j+1}) \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots ;$$

si ha

$$D^j(-I_2) e_1^{2j-m} e_2^m = (-1)^{2j} e_1^{2j-m} e_2^m$$

per cui $D^j(-I_2) = I_{2j+1}$ se e solo se j è intero.

La discussione precedente conduce al seguente enunciato.

Le rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo $SO(3)$ sono tutte e sole quelle della forma:

$$R \rightarrow D^j(h) , \text{ con } R(h) = R \quad e \ j \text{ intero.}$$

Esse agiscono in \mathbb{C}^{2j+1} . Con un piccolo abuso esse vengono usualmente denotate con il simbolo D^j , come quelle di $SU(2)$; nel caso di $SO(3)$, però, j assume solo valori interi.

Per calcolare i caratteri, si può procedere nella maniera seguente. Le classi di coniugazione in $SO(3)$ sono parametrizzate dagli elementi R_φ , $\varphi \in [0, \pi]$ (vedi paragrafo 2), e si ha:

$$R\left(h_{\frac{\varphi}{2}}\right) = R_\varphi , \quad \varphi \in [0, \pi]$$

(vedi paragrafo 4), per cui il carattere della rappresentazione in $SO(3)$ parametrizzata da j è dato (denotando con χ_j i caratteri di $SU(2)$) da:

$$\chi_j\left(h_{\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{\sin[(2j+1)\varphi/2]}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Quindi il carattere della rappresentazione (D^j, \mathbb{C}^{2j+1}) di $SO(3)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) è dato da:

$$\frac{\sin(j + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

E' chiaro che la formula di Clebsh-Gordan per $SO(3)$ assume la forma:

$$D^j \otimes D^{j'} \cong \sum_{l=|j-j'|}^{j+j'} \oplus D^l,$$

in cui l può assumere soltanto valori interi.

6.2 Le rappresentazioni irriducibili del gruppo compatto $O(3)$ possono essere ottenute facilmente da quelle di $SO(3)$. Infatti, $SO(3)$ è un sottogruppo normale di indice 2 in $O(3)$. La decomposizione di $O(3)$ in classi laterali sinistre è:

$$O(3) = \{SO(3), -I_3 \cdot SO(3)\}.$$

Supponiamo che (D, V) sia una rappresentazione unitaria irriducibile di $O(3)$. Dal momento che $-I_3$ commuta con tutti gli elementi di $O(3)$, $D(-I_3)$ deve essere un multiplo, αid_V , dell'operatore identità su V . Ma $D\left((-I_3)^2\right) = D(-I_3)^2 = D(I_3) = id_V$ per cui $\alpha = \pm 1$. Poichè D è irriducibile e $D(-I_3) = \pm id_V$, ne segue che $D \upharpoonright SO(3)$ è irriducibile. Allora si ha:

$$D \upharpoonright SO(3) \cong D^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Possiamo concludere affermando che ci sono due famiglie, D_+^j , D_-^j , di rappresentazioni irriducibili di $O(3)$. Esse sono definite da:

$$D_+^j(-I_3 \cdot R) = D_+^j(R) = D^j(R)$$

$$D_-^j(-I_3 \cdot R) = -D_-^j(R) = -D^j(R), \quad R \in SO(3).$$

Si ha $\dim D_+^j = \dim D_-^j = 2j + 1$.

5.4 Il gruppo delle rotazioni e le armoniche sferiche

7.1 Consideriamo la sfera unitaria S^2 in \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{\vec{n} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{n}|^2 = 1\}.$$

Dal momento che si ha

$$|\mathcal{R}\vec{n}| = |\vec{n}|, \quad \text{per ogni } \mathcal{R} \in SO(3),$$

ne risulta che $SO(3)$ agisce su S^2 ; più precisamente, è facile vedere che $SO(3)$ agisce transitivamente su S^2 .

L'azione di $SO(3)$ su S^2 induce, in maniera naturale, un'azione sulle funzioni definite su S^2 ; l'azione di $\mathcal{R} \in SO(3)$ su una funzione su S^2 viene denotata con $\ell(\mathcal{R})$; cioè

$$(\ell(\mathcal{R})f)(\vec{n}) := f(\mathcal{R}^{-1}\vec{n}), \quad \mathcal{R} \in SO(3).$$

Denotiamo con σ l'elemento d'area normalizzato su S^2

$$\int_{S^2} d\sigma(\vec{n}) = 1;$$

la misura σ su S^2 è invariante rispetto all'azione di $SO(3)$ su S^2 . Consideriamo lo spazio $L^2(\sigma)$ delle (classi di equivalenza di) funzioni su S^2 , a quadrato integrabile rispetto a σ .

Allora

$$(\ell, L^2(\sigma))$$

è una rappresentazione unitaria di $SO(3)$. Per mostrare questo fatto, osserviamo che, se $f \in L^2(\sigma)$, si ha

$$\int_{S^2} |f(\mathcal{R}^{-1}\vec{n})|^2 d\sigma(\vec{n}) = \int_{S^2} |f(\vec{n})|^2 d\sigma(\vec{n})^5.$$

Ciò mostra che $\ell(\mathcal{R})$ è isometrico su $L^2(\sigma)$. Dal momento che S^2 è compatto, lo spazio, $C(S^2)$, delle funzioni continue su S^2 è denso in $L^2(\sigma)$. Inoltre, per ogni $\mathcal{R} \in SO(3)$, si ha

$$\ell(\mathcal{R})[C(S^2)] \supset C(S^2);$$

ciò implica che $\ell(\mathcal{R})$ è unitario su $L^2(\sigma)$.

La proprietà fondamentale della rappresentazione $(\ell, L^2(\sigma))$ è che contiene, esattamente una sola volta, ogni rappresentazione irriducibile di $SO(3)$. Più precisamente, esiste una decomposizione

$$L^2(\sigma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$$

in somma hilbertiana di sottospazi, tale che

$$(\ell, H_n) \cong (D^n, \mathbb{C}^{2n+1})$$

⁵Si tratta della proprietà di invarianza della misura σ

come rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$. Si può dire che $(\ell, L^2(\sigma))$ costituisce un modello geometrico naturale per tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni.

Inoltre, si può dare una descrizione molto esplicita degli spazi H_n in termini dell'azione del laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

sui polinomi nelle variabili x, y, z .

7.2 Denotiamo con P_n lo spazio vettoriale complesso dei polinomi omogenei di grado n nelle variabili x, y, z . Una base per P_n è costituita dai monomi

$$\begin{aligned} & x^n, \\ & x^{n-1}y, x^{n-1}z, \\ & x^{n-2}y^2, x^{n-2}yz, x^{n-2}z^2, \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & y^n, y^{n-1}z, \dots, z^n. \end{aligned}$$

Il numero di elementi di questa base è

$$\begin{aligned} \dim P_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \\ &= \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Notiamo che, se $p \in P_n$, si ha

$$p'(x, y, z) := p(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}) \in P_n$$

Ogni P_n è una rappresentazione finito-dimensionale di $SO(3)$.

Dal momento che ogni polinomio può essere scritto come somma delle sue componenti omogenee, abbiamo che

$$\mathbb{C}[x, y, z] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n,$$

come somma diretta (algebraica) di spazi vettoriali.

Denoteremo con M_n la restrizione di P_n a S^2 :

$$M_n = \{p|_{S^2} : p \in P_n\}, \quad n \geq 0.$$

E' chiaro che ogni M_n è uno spazio vettoriale e che è sottospazio di $L^2(\sigma)$; infatti, gli elementi di M_n sono funzioni continue su S^2 che è compatto, quindi sono funzioni limitate, inoltre σ è finita su S^2 .

E' anche chiaro che

$$\varphi \in M_n \Rightarrow \ell(\mathcal{R})\varphi \in M_n, \text{ se } \mathcal{R} \in SO(3)$$

in altre parole,

$$(\ell, M_n)$$

è una rappresentazione di $SO(3)$, sottorappresentazione di $(\ell, L^2(\sigma))$.

Gli spazi M_n e P_n sono isomorfi linearmente. Infatti, se $p \in P_n$, poniamo

$$\varphi_p := p|_{S^2};$$

esplicitamente

$$\varphi_p(n_x, n_y, n_z) = p \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Inversamente, se $\varphi \in M_n$, definiamo

$$p_\varphi(x, y, z) = r^n \varphi \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

Allora le applicazioni

$$\begin{aligned} p &\mapsto \varphi_p : P_n \rightarrow M_n \\ \varphi &\mapsto p_\varphi : M_n \rightarrow P_n \end{aligned}$$

sono lineari, l'una l'inversa dell'altra e definiscono un isomorfismo lineare

$$P_n \xrightarrow{\sim} M_n$$

che commuta con le azioni di $SO(3)$.

Quindi si ha, in particolare,

$$\dim M_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Supponiamo $\varphi \in M_n$, allora è $\varphi = \varphi_p$, con $p \in P_n$. Definiamo

$$p'(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)p(x, y, z);$$

allora $p' \in P_{n+2}$, ed inoltre si ha

$$\varphi = p'|_{S^2}.$$

Ciò mostra che

$$M_n \subset M_{n+2} \subset L^2(\sigma), \quad n \geq 0.$$

Definiamo H_n come il complemento ortogonale (in $L^2(\sigma)$) di M_{n-2} in M_n :

$$M_n = H_n \oplus M_{n-2},$$

come somma ortogonale di sottospazi (chiusi) in $L^2(\sigma)$.

Notiamo che

$$H_n \perp H_p \quad \text{se } n \neq p$$

e che

$$\begin{aligned} \dim H_n &= \dim M_n - \dim M_{n-2} = \\ &= \frac{1}{2} [(n+1)(n+2) - n(n-1)] = \\ &= 2n+1 . \end{aligned}$$

Lo spazio H_n viene detto lo spazio delle armoniche sferiche di grado n su S^2 . Vogliamo mostrare come la rappresentazione $(\ell, L^2(\sigma))$ di $SO(3)$, quando è ristretta ad $H_n \subset L^2(\sigma)$, sia irriducibile.

A questo scopo, consideriamo S^2 come l'orbita, rispetto all'azione di $SO(3)$ su \mathbb{R}^3 , di

$$\vec{k} = (0, 0, 1) \in S^2 .$$

Lo stabilizzatore K del punto \vec{k} è formato dalle matrici di $SO(3)$ della forma

$$K = \{ \mathcal{R} \in SO(3) : \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi \} .$$

Lemma 8 *Ogni sottospazio, V , non banale, ℓ -invariante in $L^2(\sigma)$ contiene un qualche vettore non nullo lasciato fisso dall'azione di K :*

$$V^K := \{ f \in L^2(\sigma) : \ell(\mathcal{R})f = f, \mathcal{R} \in K, f \in V \} \neq \{0\}$$

Prova. Fissiamo una qualunque funzione

$$f \neq 0 \quad \text{in } V .$$

Non perdiamo in generalità assumendo che⁶

$$f(\vec{k}) \neq 0$$

□

Definiamo f^K ponendo

$$f^K(\vec{n}) = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta n_x - \sin \theta n_y, \sin \theta n_x + \cos \theta n_y, n_z) \frac{d\theta}{2\pi} .$$

E' facile controllare che

$$f^K \in V, f^K \in V^K .$$

Inoltre $f^K(\vec{k}) = f(\vec{k}) \neq 0$. Per cui $f^K \neq 0$. □

Proposizione 5 *Le rappresentazioni (ℓ, H_n) sono sottorappresentazioni irriducibili di $(\ell, L^2(\sigma))$.*

⁶Nel caso in cui sia $f(\vec{k}) = 0$, possiamo sostituire f con $\ell(\mathcal{R})f$, con un opportuno $\mathcal{R} \in SO(3)$.

Prova. In ogni decomposizione in somma ortogonale di sottospazi ℓ -invarianti

$$H_n = V_n \oplus W_n$$

dobbiamo avere

$$H_n^K = V_n^K \oplus W_n^K$$

Se possiamo provare che H_n^K ha dimensione uno, necessariamente ne deduciamo che

$$V_n^K = \{0\}, \text{ oppure } W_n^K = \{0\}.$$

Per il Lemma precedente, ne segue

$$V_n = \{0\}, \text{ oppure } W_n = \{0\}$$

cioè che H_n è irriducibile. Dimostriamo allora che H_n^K ha dimensione uno. In generale, le funzioni definite su S^2 che sono fissate da K sono quelle che dipendono solo da n_z . In M_n tali polinomi sono combinazioni lineari di

$$n_z^n, n_z^{n-2}(n_x^2 + n_y^2) = n_z^{n-2}(1 - n_z^2), \dots$$

Una base di M_n^K , allora, è data da

$$\begin{aligned} n_z^n, n_z^{n-2}, \dots, 1 & \text{ se } n \text{ è pari,} \\ n_z^n, n_z^{n-2}, \dots, n_z & \text{ se } n \text{ è dispari,} \end{aligned}$$

In entrambi i casi

$$\dim H_n^K = \dim M_n^K - \dim M_{n-2}^K = 1$$

□

Proposizione 6 *Si ha*

$$L^2(\sigma) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k,$$

come somma hilbertiana di sottospazi chiusi.

Prova. Poichè S^2 è compatto, lo spazio $C(S^2)$ delle funzioni continue su S^2 è denso in $L^2(\sigma)$. Allora è sufficiente mostrare che

$$\bigoplus_{k \geq 0} H_k \quad (\text{somma diretta algebrica})$$

è denso in $C(S^2)$.

Dal momento che S^2 è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^3 , le restrizioni ad S^2 dei polinomi su \mathbb{R}^3 sono dense uniformemente, e quindi anche nella norma di $L^2(\sigma)$, in $C(S^2)$. Abbiamo visto in precedenza che

$$\mathbb{C}[x, y, z] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n;$$

allora si ha

$$\mathbb{C}[x, y, z]_{|S^2} = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_n;$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} M_n &= H_n \oplus M_{n-2} = H_n \oplus H_{n-2} \oplus M_{n-4} = \\ &= H_n \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-4} \oplus \dots, \end{aligned}$$

per cui

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \quad (\text{somma diretta algebrica})$$

Ciò mostra che

$$\mathbb{C}[x, y, z]_{|S^2} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_n,$$

e quindi che $\bigoplus_{k=0}^{\infty} H_n$ è $L^2(\sigma)$ -denso in $C(S^2)$. \square

7.3 Consideriamo l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

come una trasformazione lineare definita su P_n , per ogni $n \geq 0$. Evidentemente

$$\Delta : P_n \rightarrow P_{n-2}, \quad n \geq 0,$$

inoltre Δ commuta con l'azione di $SO(3)$ su P_n e su P_{n-2} . La diagnosi di questa applicazione ci conduce ad un'importante caratterizzazione degli spazi H_n .

Denotiamo con F_n la preimmagine di H_n nell'isomorfismo $P_n \xrightarrow{\sim} M_n$. Allora F_n è un sottospazio di P_n irriducibile rispetto ad $SO(3)$. Notiamo che in corrispondenza con la decomposizione

$$M_n = H_n \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-4} \oplus \dots$$

si ha anche

$$P_n = F_n \oplus r^2 F_{n-2} \oplus r^4 F_{n-4} \oplus \dots;$$

ciò implica che

$$\Delta[F_n] = \{0\},$$

per il lemma di Schur, dal momento che il sottospazio irriducibile F_n non compare in P_{n-2} . Mostriamo che si ha

$$F_n = \ker \Delta$$

e quindi anche

$$\Delta : P_n \rightarrow P_{n-2}$$

è surgettiva.

Per mostrare questo fatto, si può calcolare esplicitamente che

$$p \in P_n \Rightarrow \Delta(r^2 p) = 2(3 + 2n)r^{2s-2}p + r^2 \Delta p;$$

quindi induttivamente:

$$p \in P_{n-2s} \Rightarrow \Delta(r^2 p) = 2s(1 + 2n - 2s)p + r^2 \Delta p,$$

se $s > 0$. Se $p \in F_n$, si ha $\Delta p = 0$; allora

$$p \in F_{n-2s} \Rightarrow \Delta(r^2 p) = 2s(1 + 2n - 2s)r^{2s-2}p.$$

Quest'ultima formula ci assicura che

$$\Delta : r^{2s} F_{n-2s} \xrightarrow{\sim} r^{2s-2} F_{n-2s}, \quad s > 0$$

è un'isomorfismo. Quindi

$$\begin{aligned} F_n &= \ker \Delta \\ \Delta : P_n &\rightarrow P_{n-2} \end{aligned}$$

è surgettivo.

Abbiamo ottenuto cos'ì una fondamentale caratterizzazione degli spazi H_n . Sono le restrizioni a S^2 dei polinomi armonici omogenei di grado n :

$$\varphi \in H_n \Leftrightarrow \varphi = p|_{S^2}, p \in P_n, \Delta p = 0.$$

In termini di coordinate polari su \mathbb{R}^3 , possiamo scrivere

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$$

in cui

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

è il laplaciano sferico su S^2 . In particolare Δ_{S^2} commuta con l'azione di $SO(3)$; allora Δ_{S^2} lascia invariato ciascuno dei sottospazi H_n ed agisce su H_n come moltiplicazione per uno scalare. Dal momento che $\Delta(r^2 \varphi) = 0$ se $\varphi \in H_n$, possiamo calcolare

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(r^2 \varphi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \right) (r^2 \varphi) = \\ &= (n(n-1) + 2n + \Delta_{S^2}) r^{n-2} \varphi \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta_{S^2} \varphi = -n(n-1) \varphi \quad \varphi \in H_n.$$

Ogni $H_n \subset L^2(\sigma)$ è autospazio di Δ_{S^2} con autovalore $-n(n-1)$, ed ha dimensione $2n+1$.

5.5 Sottogruppi di $O(3)$ e di $SO(3)$ formati da rotazioni assiali.

8.1 Definiamo $SO(2)$ (o, più precisamente, $SO(2, \mathbb{R})$) come il gruppo delle matrici 2×2 , a coefficienti reali, ortogonali (tali, cioè, che per esse la matrice inversa e la trasposta sono uguali), con determinante uguale a 1. E' del tutto evidente come $SO(2)$ formi un gruppo rispetto alla moltiplicazione tra matrici, in cui l'identità è la matrice $I_2 = \text{diag}(1, 1)$.

Seguendo la traccia della discussione del paragrafo 1, è facile convincersi che $SO(2)$ può essere identificato col gruppo di tutte le trasformazioni lineari di \mathbb{R}^2 in sé che preservano il prodotto scalare naturale di \mathbb{R}^2 (cioè, in particolare, implica che siano invertibili) e l'orientazione della base canonica di \mathbb{R}^2 .

Un calcolo molto semplice ed immediato porta a concludere che gli elementi di $SO(2)$ sono tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$$

Una maniera (non l'unica !) per parametrizzare le soluzioni della relazione precedente è:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[\text{ mod } 2\pi .$$

Se si parametrizzano gli elementi di $SO(2)$ in quest'ultima forma, si ottiene un isomorfismo

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \quad \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow SO(2),$$

in cui \mathbb{T} viene detto il *gruppo del toro* (unidimensionale) ed ha l'interpretazione geometrica di gruppo additivo degli angoli sul cerchio unitario. Evidentemente anche l'applicazione

$$\theta \mapsto e^{i\theta} : \mathbb{T} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

è un isomorfismo di gruppi, che identifica \mathbb{T} , ed $SO(2)$, con il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1⁷.

Si hanno quindi gli isomorfismi

$$U(1) \cong \mathbb{T} \cong SO(2)$$
$$e^{i\theta} \mapsto \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nel seguito useremo, per brevità, la notazione

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

⁷Si tratta del gruppo denotato con $U(1)$; a volte viene anche detto il gruppo del cerchio e denotato con S^1 .

E' evidente che $SO(2)$ può essere immerso (non univocamente) in $SO(3)$, per esempio identificando gli elementi di $SO(2)$ con le rotazioni intorno al (celebre!) asse z in \mathbb{R}^3 . Precisamente, definiamo l'immersione

$$r_\theta \mapsto R((0, 0, 1), \theta) = R_\theta \quad \text{se } \theta \in [0, \pi]$$

$$r_\theta \mapsto R((0, 0, -1), 2\pi - \theta) = R_{2\pi - \theta} \quad \text{se } \theta \in [\pi, 2\pi[.$$

A volte, quando $SO(2)$ viene identificato con un sottogruppo di $SO(3)$, si usa per $SO(2)$ anche la notazione C_∞ .

Topologicamente, $SO(2)$ è un cerchio; infatti i suoi elementi sono in corrispondenza biunivoca con i punti del cerchio unitario. La misura di Haar invariante di $SO(2)$ (normalizzata ad 1) è data da

$$\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Il gruppo $SO(2)$ è abeliano, quindi le sue rappresentazioni irriducibili sono tutte 1-dimensionali e coincidono con i caratteri del gruppo. Per determinare i caratteri di $SO(2)$ si può procedere come segue. L'esistenza dell'isomorfismo

$$SO(2) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

implica che i caratteri di $SO(2)$ sono tutti e soli i caratteri di \mathbb{R} che sono banali quando sono ristretti al sottogruppo $2\pi\mathbb{Z}$.

I caratteri di \mathbb{R} sono le applicazioni

$$\chi : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

che sono continue e che hanno le proprietà

$$\begin{aligned} \chi(x+y) &= \chi(x)\chi(y) \\ \chi(1) &= 1 \end{aligned}$$

E' ben noto che le soluzioni di questa equazione funzionale sono tutte e sole della forma

$$\chi_a(x) = e^{iax}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Se si restringe χ_a al sottogruppo $2\pi\mathbb{Z}$, e si impone che questa restrizione sia banale, si ottiene la condizione sulle possibili scelte di a :

$$\chi_a(2\pi in) = e^{2\pi ian} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Quest'ultima relazione è risolta da

$$a \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, in conclusione, i caratteri di $SO(2)$ sono tutti e soli della forma

$$\chi_k(\theta) = e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \bmod 2\pi,$$

al variare di k in \mathbb{Z} .

Una maniera alternativa (ed equivalente !) di determinare i caratteri di $SO(2)$ è anche la seguente. E' chiaro che le funzioni χ_k , definite per ogni $k \in \mathbb{Z}$ come

$$\chi_k(\theta) = e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ mod } 2\pi,$$

sono tutti caratteri di $SO(2)$. Bisogna mostrare allora che sono tutti i caratteri di $SO(2)$. Per mostrare questo fatto è sufficiente mostrare che la famiglia di funzioni

$$\{\chi_k : k \in \mathbb{Z}\}$$

è una base hilbertiana del sottospazio di $L^2(SO(2))$ formato dalle funzioni centrali. Dal momento che $SO(2)$ è abeliano, tutte le funzioni in $L^2(SO(2))$ sono centrali e si ha l'identificazione

$$L^2(SO(2)) \cong L^2(\mathbb{T}) \cong L^2(]0, 2\pi[, \frac{d\theta}{2\pi}).$$

E' ben noto che le funzioni

$$\chi_k(\theta) = e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sono una base hilbertiana in $L^2(]0, 2\pi[, \frac{d\theta}{2\pi})$.

8.2 Consideriamo il gruppo definito astrattamente come

$$SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \quad (\text{prodotto diretto}).$$

Questo gruppo *non* ha una realizzazione mediante matrici 2×2 . In particolare è sbagliato pensarlo come l'analogo 2-dimensionale di $O(3)$ (benchè sia vero che $O(3) \cong SO(3) \times \mathbb{Z}_2$). Può essere identificato, però, con un sottogruppo di $O(3)$, quindi ha una realizzazione mediante matrici 3×3 , che ne suggerisce anche l'interpretazione geometrica.

Innanzitutto si ha l'ovvia identificazione

$$SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \cong C_\infty \times \{I_3, -I_3\};$$

inoltre si ha

$$\begin{cases} (R_\theta, I_3) \mapsto R_\theta \\ (R_\theta, -I_3) \mapsto -R_\theta \end{cases} : C_\infty \times \{I_3, -I_3\} \rightarrow \{\pm R_\theta\} \subset O(3).$$

Il sottogruppo $\{\pm R_\theta\}$ di $O(3)$ viene denotato con $C_{\infty h}$. L'interpretazione geometrica di questo gruppo è molto semplice: è il gruppo generato dalle rotazioni attorno all'asse z e dalla riflessione attraverso il piano x, y (questa riflessione viene indicata con $-R_\pi$).

Il gruppo

$$SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \cong C_{\infty h}$$

è abeliano, come prodotto diretto di gruppi abeliani. Tutte le sue rappresentazioni irriducibili sono 1 - dimensionali. Esse sono il prodotto tensore delle rappresentazioni irriducibili di $SO(2)$ con quelle di \mathbb{Z}_2 .

Quindi $C_{\infty h}$ ha due famiglie

$$\chi_k^{(+)} \quad , \quad \chi_k^{(-)} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

di rappresentazioni irriducibili. Per esse si ha

$$\begin{aligned} \chi_k^{(+)}(R_\theta) &= e^{ik\theta} \quad , \quad \chi_k^{(+)}(-R_\theta) = e^{ik\theta} \\ \chi_k^{(-)}(R_\theta) &= e^{ik\theta} \quad , \quad \chi_k^{(-)}(-R_\theta) = -e^{ik\theta} \end{aligned}$$

8.3 Denotiamo con $O(2)$ il gruppo di tutte le matrici reali, 2×2 , ortogonali. Necessariamente tali matrici hanno determinante ± 1 . Un calcolo molto semplice e veloce porta a concludere che gli elementi di $O(2)$ con determinante -1 sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

D'altra parte, abbiamo già visto come gli elementi di $SO(2)$ siano tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Topologicamente, $O(2)$ è l'unione di due cerchi disgiunti.

La struttura di gruppo di $O(2)$ può essere studiata come segue. Consideriamo, innanzi tutto, l'applicazione

$$\det : O(2) \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Poiché è un omomorfismo, ne risulta che $SO(2)$ è un sottogruppo normale (e abeliano) di $O(2)$, e si ha che

$$O(2)/SO(2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Ogni elemento di $O(2)$ con determinante -1 ha come quadrato l'identità; infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Ne segue che

$$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\},$$

(con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$) è un sottogruppo di due elementi di $O(2)$ e la restrizione di \det a questo sottogruppo definisce un isomorfismo

$$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Queste considerazioni assicurano che $O(2)$ è il prodotto semidiretto del suo sottogruppo

$$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$$

con il suo sottogruppo normale $SO(2)$.

Per ogni

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in SO(2)$$

si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}^{-1}.$$

Quest'ultima relazione rende esplicita la struttura di prodotto semidiretto di $O(2)$; in particolare, mostra che il prodotto semidiretto non é banale (cioé non degenera in prodotto diretto). Dal momento che $O(2)$ é un prodotto semidiretto, ne risulta che ogni elemento di $O(2)$ può essere scritto in due modi:

- come r_θ , se appartiene a $SO(2)$;
- come

$$r_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} r_{-\theta}$$

se non appartiene a $SO(2)$.

Gli elementi $r_{\pm\theta}$ formano una classe di coniugazione, gli elementi con determinante -1 sono tutti tra essi coniugati.

Una volta fissata una base in \mathbb{R}^2 , si ottiene un isomorfismo tra l'algebra delle matrici reali 2×2 e l'algebra delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^2 in se stesso. Rispetto a questo isomorfismo, $SO(2)$ corrisponde bigettivamente con il gruppo delle trasformazioni lineari (necessariamente invertibili) che lasciano invariato il prodotto scalare naturale di \mathbb{R}^2 .

Il gruppo $O(2)$ può essere realizzato geometricamente mediante tutte le rotazioni nel piano Oxy , attorno al punto O , e mediante tutte le riflessioni nel piano attraverso le rette che passano per il punto O . Quando ha questa realizzazione geometrica, il gruppo $O(2)$ viene denotato con D_∞ (é l'analogo continuo dei gruppi diedrali del piano).

$O(2)$ può essere immerso in $O(3)$. Innanzi tutto fissiamo un elemento di $O(2)$ con determinante -1 ; ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo un'applicazione da $O(2)$ a $O(3)$, ponendo

$$\begin{aligned} r_\theta &\rightarrow R_\theta = R((0, 0, 1), \theta) && \text{se } \theta \in [0, \pi] \\ r_\theta &\rightarrow R((0, 0, -1), 2\pi - \theta) && \text{se } \theta \in [\pi, 2\pi] \\ \sigma &\rightarrow -I_3 R_\theta((0, 1, 0), \pi); \end{aligned}$$

queste corrispondenze si estendono, in maniera naturale, ad una immersione di $O(2)$ in $O(3)$. Quando $O(2)$ è identificato come un sottogruppo di $O(3)$, viene denotato anche con $C_\infty v$. Esso consiste, geometricamente, di tutte le rotazioni

attorno all'asse z , di tutte le riflessioni attraverso i piani che contengono l'asse z (notate che $-I_3 R_\theta = ((0, 1, 0), \pi)$ è la riflessione attraverso il piano x, z).

Per determinare le rappresentazioni irriducibili di $O(2)$ si può procedere nella maniera seguente. Supponiamo che (γ, V) sia una rappresentazione irriducibile di $O(2)$. La restrizione

$$\gamma|_{SO(2)}$$

si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili (1-dimensionali) di $SO(2)$:

$$V = \oplus_{\mu} \mathbb{C} \cdot v_{\mu}$$

Per ogni μ , il gruppo $SO(2)$ agisce irriducibilmente su $\mathbb{C} \cdot v_{\mu}$, quindi si avrà:

$$\gamma(r_{\theta}) v_{\mu} = e^{i m_{\mu} \theta} v_{\mu}, \quad m_{\mu} \in \mathbb{Z}$$

1. Supponiamo μ tale che $m_{\mu} = 0$. Allora

$$\gamma(r_{\theta}) v_{\mu} = v_{\mu},$$

inoltre

$$\gamma(\sigma) v_{\mu} = \gamma(\sigma) \gamma(r_{-\theta}) v_{\mu} = \gamma(r_{\theta}) \gamma(\sigma) v_{\mu},$$

cioè $\gamma(\sigma) v_{\mu}$ è autovettore di $\gamma(r_{\theta})$ con autovalore 1. Allora:

$$\gamma(\sigma) v_{\mu} = \lambda v_{\mu}$$

e, dal momento che $\gamma(\sigma^2) = id_V$, ne segue che $\lambda = \pm 1$. Poichè $\mathbb{C} \cdot v_{\mu}$ è stabile rispetto all'azione di $\gamma(r_{\theta})$ e di $\gamma(\sigma)$, e r_{θ} con σ genera tutto $O(2)$, ne segue che $\mathbb{C} \cdot v_{\mu}$ è irriducibile.

2. Supponiamo μ tale che $m_{\mu} \neq 0$. Allora si ha:

$$\gamma(r_{\theta}) v_{\mu} = e^{i m_{\mu} \theta} v_{\mu}, \quad m_{\mu} \in \mathbb{Z}, \quad m_{\mu} \neq 0.$$

Inoltre, come nel punto precedente,

$$\gamma(\sigma) v_{\mu} = \gamma(\sigma) \gamma(r_{-\theta}) e^{-i m_{\mu} \theta} v_{\mu} = \gamma(r_{\theta}) \gamma(\sigma) e^{-i m_{\mu} \theta} v_{\mu};$$

da cui si ottiene che

$$\gamma(r_{\theta}) [\gamma(\sigma) v_{\mu}] = e^{-i m_{\mu} \theta} [\gamma(\sigma) v_{\mu}].$$

Allora i vettori

$$v_{\mu}, \quad \gamma(\sigma) v_{\mu}$$

sono linearmente indipendenti (in effetti, ortogonali rispetto al prodotto scalare su V rispetto al quale γ può essere resa unitaria). Dal momento che

$$\gamma(\sigma)[\gamma(\sigma)v_\mu] = \gamma(\sigma)^2 v_\mu = v_\mu ,$$

ne segue che v_μ e $\gamma(\sigma)v_\mu$ generano un sottospazio 2-dimensionale invariante di V . Dal momento che abbiamo supposto V irriducibile, V deve essere 2-dimensionale con base

$$\{v_\mu, \gamma(\sigma)v_\mu\}$$

In conclusione, abbiamo mostrato che se (γ, V) è una rappresentazione irriducibile di $O(2)$, necessariamente ha una delle forme seguenti

1. V è 1-dimensionale e γ è la rappresentazione banale.
2. V è 1-dimensionale e

$$\begin{aligned} \gamma(r_\theta) &= 1 \quad \text{per ogni } \theta \\ \gamma(\sigma) &= -1 . \end{aligned}$$

3. V è 2-dimensionale e γ agisce su V come

$$\begin{aligned} \gamma(r_\theta) &= \begin{pmatrix} e^{im\theta} & \\ & e^{-im\theta} \end{pmatrix} \quad m \neq 0, m \in \mathbb{Z} \\ \gamma(\sigma) &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

è unitaria, e si ha

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{im\theta} & \\ & e^{-im\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-im\theta} & \\ & e^{im\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} ,$$

ne segue che le rappresentazioni 2-dimensionali, γ e γ' , definite come

$$\begin{aligned} \gamma(r_\theta) &= \begin{pmatrix} e^{im\theta} & \\ & e^{-im\theta} \end{pmatrix}, \quad \gamma(\sigma) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \\ \gamma'(r_\theta) &= \begin{pmatrix} e^{-im\theta} & \\ & e^{im\theta} \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\sigma) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, sono equivalenti. Allora, a meno di equivalenze, le rappresentazioni irriducibili di $O(2)$ sono:

1. le due rappresentazioni 1-dimensionali descritte sopra;
2. una famiglia γ_m di rappresentazioni 2-dimensionali, con $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\gamma_m(r_\theta) = \begin{pmatrix} e^{im\theta} & \\ & e^{-im\theta} \end{pmatrix}, \quad \gamma_m(\sigma) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

La “tabella dei caratteri” è data da

	$r_{\pm\theta}$	σ
γ_0^+	1	1
γ_0^-	1	-1
γ_m	$2\cos m\theta$	0

8.4 Si denota come $D_{\infty h}$ il sottogruppo di $O(3)$ definito come

$$C_{\infty v} \times \{I_3, -I_3\} \quad \text{prodotto diretto}$$

Le classi di coniugazione in questo gruppo sono rappresentate dagli elementi

$$r_{\pm\theta}, \quad \sigma, \quad -I_3, \quad r_{\pm\theta}(-I_3), \quad \sigma(-I_3).$$

Le sue rappresentazioni irriducibili sono dedotte immediatamente da quelle di $C_{\infty v}$, studiate nel punto precedente.

$D_{\infty h}$ ha quattro rappresentazioni 1-dimensionali, che denotiamo

$$\gamma_0, \quad \gamma_0', \quad \gamma_0'', \quad \gamma_0'''$$

e due famiglie infinite di rappresentazioni 2-dimensionali:

$$\gamma_m^+, \quad \gamma_m^- \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

La tabella dei caratteri é

	$r_{\pm\theta}$	σ	$-I_3$	$r_{\pm\theta}(-I_3)$	$\sigma(-I_3)$
γ_0	1	1	1	1	1
γ_0'	1	1	-1	-1	-1
γ_0''	1	-1	1	1	-1
γ_0'''	1	-1	-1	-1	1
γ_m^+	$2\cos m\theta$	0	2	$2\cos m\theta$	0
γ_m^-	$2\cos m\theta$	0	-2	$-2\cos m\theta$	0

Capitolo 6

Applicazioni della teoria delle rappresentazioni dei gruppi di rotazioni e del gruppo simmetrico alla meccanica quantistica.

6.1 Considerazioni generali.

6.1.1 Molteplicità degli autovalori dell'operatore dinamico

L'assunzione di base di tutta la meccanica quantistica è che ad ogni sistema fisico venga associato uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H} , che viene detto lo spazio degli stati del sistema. Le variabili dinamiche (o osservabili) e gli stati del sistema quantistico vengono descritti da oggetti matematici definiti in termini dello spazio di Hilbert \mathcal{H} . In queste note assumeremo la conoscenza dei fatti di base di questa descrizione.

In particolare, in \mathcal{H} è assegnato un operatore autoaggiunto H (non necessariamente limitato) che viene detto l'operatore dinamico del sistema. Il suo significato fisico è che il gruppo ad un parametro di operatori unitari

$$(e^{-itH} : t \in \mathbb{R}) \quad (6.1)$$

è il gruppo dinamico del sistema.

L'equazione agli autovalori per H ,

$$Hv = Ev, \quad v \in \text{dom } H, \quad E \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

viene detta l'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo. Uno dei problemi di base della meccanica quantistica è quello di descrivere il più esplicitamente possibile gli autovalori di H e la loro molteplicità (naturalmente, nelle situazioni fisiche in cui H è assegnato esplicitamente come operatore su \mathcal{H}). Vogliamo mostrare nel seguito come la teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti possa essere usata nella soluzione di questo problema.

L'assunzione che facciamo da questo punto in poi è che in \mathcal{H} agisca una rappresentazione unitaria, che denotiamo con U , di un gruppo compatto G , e che H commuti con tutta la rappresentazione U . Ciò significa, con precisione: H commuta con $U(g)$, per ogni $g \in G$. Si dice, in questo caso, che G è un gruppo di simmetria per H .

Denoteremo con

$$(\pi_1, \mathcal{V}_1), (\pi_2, \mathcal{V}_2), \dots, (\pi_l, \mathcal{V}_l), \dots \quad (6.3)$$

le rappresentazioni unitarie irriducibili (necessariamente finite dimensional) di G . Consideriamo la decomposizione canonica di \mathcal{H} rispetto all'azione di G :

$$\mathcal{H} = \bigoplus (V_l : l \geq 1) \quad (6.4)$$

(somma hilbertiana di sottospazi chiusi di \mathcal{H}). Riconsideriamo alcuni fatti fondamentali della decomposizione canonica:

i per ogni $l \geq 1$, V_l è un sottospazio chiuso (non necessariamente di dimensione finita) di \mathcal{H} ed è l'immagine del proiettore hilbertiano

$$P_l = (\dim \mathcal{V}_l) \int_G \overline{\chi_l(g)} U(g) d\mu(g), \quad (6.5)$$

in cui μ è la misura invariante di G (normalizzata ad uno) e χ_l è il carattere di (π_l, \mathcal{V}_l) .

ii \mathcal{V}_l è invariante rispetto ad U , e si ha l'isomorfismo di rappresentazioni di G

$$V_l \cong \mathcal{V}_l \otimes \text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H}), \quad (6.6)$$

in cui G agisce su V_l tramite U , su \mathcal{V}_l tramite π_l ed agisce banalmente su $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$; ricordiamo che $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$ ha una struttura naturale di spazio di Hilbert complesso e separabile;

iii i punti precedenti ci assicurano che V_l è somma hilbertiana (eventualmente infinita) di sottospazi di \mathcal{H} irriducibili rispetto ad U , tutti isomorfi a (π_l, \mathcal{V}_l) , come rappresentazioni di G .

Dalla forma esplicita di P_l e dall'ipotesi che H commuta con $U(g)$, per ogni $g \in G$, discende immediatamente che H commuta con ogni P_l . In particolare, V_l è un sottospazio chiuso invariante rispetto ad H . La restrizione, $H|_{V_l}$ di H a V_l è un operatore autoaggiunto su V_l .

Proposizione 7 *Nell'isomorfismo di spazi di Hilbert*

$$V_l \cong \mathcal{V}_l \otimes \text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H}), \quad (6.7)$$

l'operatore autoaggiunto $H|_{V_l}$ si trasporta in

$$\text{Id}_{\mathcal{V}_l} \otimes K_l \quad (6.8)$$

in cui K_l è un operatore autoaggiunto su $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$.

Prova. Denotiamo con

$$E \mapsto Q(E) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow B(V_l)$$

la PVM spettrale di $H|_{V_l}$. Dal fatto che $U(g)|_{V_l}$ commuta con $H|_{V_l}$, discende che $Q(E)$ commuta con $U(g)|_{V_l}$ per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ed ogni $g \in G$. Consideriamo l'isomorfismo unitario di rappresentazioni di G

$$(U, V_l) \cong (\pi_l \otimes \text{Id}, \mathcal{V}_l \otimes \text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})); \quad (6.9)$$

ogni proiettore spettrale $Q(E)$ quando è trasportato su $\mathcal{V}_l \otimes \text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$ è necessariamente della forma

$$\text{Id}_{V_l} \otimes Q(E)' \quad (6.10)$$

in cui $Q(E)'$ è un operatore (limitato) su $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$. E' facile vedere che

$$E \mapsto Q(E)' : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow B(\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})) \quad (6.11)$$

è una PVM, che agisce in $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$. Allora la PVM spettrale di $H|_{V_l}$ si trasporta a $\text{Id}_{V_l} \otimes Q(E)'$ in cui $Q(E)'$ è una PVM. Per il teorema spettrale $H|_{V_l}$ si trasporta a

$$\text{Id}_{V_l} \otimes K_l \quad (6.12)$$

in cui K_l è un operatore autoaggiunto su $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$. \square

Nei casi che tratteremo in queste note, ciascuno degli operatori autoaggiunti (non necessariamente limitati) K_l ha uno spettro formato da autovalori non degeneri. Con questo intendiamo:

i per ogni $l \geq 1$, esiste una successione di numeri reali

$$(E_{ln})_{n \in \mathcal{J}_l},$$

in cui \mathcal{J}_l è un insieme numerabile di indici, che dipende da l , tali che

$$E_{ln} \neq E_{ln'} \quad \text{se } n \neq n';$$

ii per ogni $l \geq 1$, esiste una base hilbertiana di $\text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H})$,

$$(v_n^l)_{n \in \mathcal{J}_l},$$

costituita da autovettori di K_l

$$K_l v_n^l = E_{ln} v_n^l.$$

In termini della base $(v_n^l)_{n \in \mathcal{J}_l}$, possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\mathcal{V}_l, \mathcal{H}) &= \bigoplus \left(\mathbb{C} \cdot v_n^l : n \in \mathcal{J}_l \right) \\ V_l &\cong \bigoplus \left(\mathcal{V}_l \otimes \mathbb{C} \cdot v_n^l : n \in \mathcal{J}_l \right) \\ \mathcal{H} &\cong \bigoplus \left(\mathcal{V}_l \otimes \mathbb{C} \cdot v_n^l : l \geq 1, n \in \mathcal{J}_l \right) \end{aligned}$$

Notiamo che G agisce su \mathcal{V}_l tramite π_l e banalmente su $\mathbb{C}v_n^l$. Inoltre, H agisce moltiplicativamente per E_{ln} su ogni $\mathcal{V}_l \otimes \mathbb{C}v_n^l$. Ciò mostra che se almeno una delle rappresentazioni irriducibili di G , ad esempio \mathcal{V}_k , ha dimensione maggiore di uno, gli autovalori E_{kn} , $n \in \mathcal{J}_k$, sono necessariamente degeneri. La simmetria di H (nel senso che H commuta con tutta la rappresentazione U del gruppo compatto G) è causa di degenerazione per gli autovalori di H . Per ogni fissato l , si ha, per ipotesi

$$E_{ln} \neq E_{ln'}, \quad \text{se } n \neq n' \quad (6.13)$$

A priori, è possibile che sia

$$E_{ln} = E_{ln'}$$

per qualche $n, n' \in \mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'}$ (eventualmente coincidenti). In tal caso si usa dire che si è in presenza di degenerazione accidentale nello spettro di H . Se questo non è il caso, cioè se

$$E_{ln} \neq E_{ln'}$$

purchè almeno uno dei due indici sia diverso, si dice che non c'è degenerazione accidentale.

In assenza di degenerazione accidentale, la decomposizione

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus \left(\mathcal{V}_l \otimes \mathbb{C}v_n^l : l \geq 1, n \in \mathcal{J}_l \right) \quad (6.14)$$

coincide con la decomposizione di \mathcal{H} in autospazi di H . Inoltre la molteplicità di ogni autovalore è esibita esplicitamente, in termini delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G .

6.1.2 Suddivisione di un autovalore per l'effetto di una perturbazione

Supponiamo che E sia autovalore dell'operatore dinamico H e che W_E sia l'autospazio corrispondente:

$$Hv = Ev, \quad v \in W_E.$$

Se denotiamo con P_E il proiettore hilbertiano

$$P_E : \mathcal{H} \rightarrow W_E,$$

il teorema spettrale ci assicura che P_E commuta con ogni operatore $U(g)$, $g \in G$. Quindi W_E è un sottospazio invariante rispetto ad U . Supponiamo che a H venga aggiunto un termine H' , che può essere trattato come una piccola perturbazione (viene dato per scontato che si abbia chiaro il significato preciso di questa frase). La conclusione essenziale della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo per un autovalore degenere è che le correzioni all'autovalore E sono date, al primo ordine perturbativo, dagli autovalori dell'operatore

$$P_E H' P_E$$

che è visto, in maniera naturale, come operatore su W_E .

Supponiamo che esista un sottogruppo chiuso G' di G (necessariamente compatto) tale che

$$U(g')H' = H'U(g'), \quad \text{per ogni } g' \in G'.$$

Esaminiamo quali conseguenze ha questa ipotesi, per il problema della diagonalizzazione di $P_E H' P_E$. Il fatto fondamentale è che si ha, per ogni $g' \in G'$,

$$\begin{aligned} P_E H' P_E U(g') &= \\ & \text{(poiché } U(g) \text{ commuta con } P_E \text{ e } G' \subset G) \\ &= P_E H' U(g') P_E \\ & \text{(poiché } U(g') \text{ commuta con } H') \\ &= U(g') P_E H' P_E \end{aligned}$$

Denotiamo, per semplicità,

$$\begin{aligned} (P_E H' P_E)|_{W_E} &= H'_E \\ U(g')|_{W_E} &= U'_E(g') \end{aligned}$$

La relazione precedente ci assicura che su W_E l'operatore H'_E commuta con tutta la rappresentazione U'_E di G' .

Decomponiamo W_E rispetto all'azione di G' . Denotiamo

$$(\sigma_1, \mathcal{Z}_1), (\sigma_2, \mathcal{Z}_2), \dots, (\sigma_i, \mathcal{Z}_i), \dots$$

le rappresentazioni unitarie irriducibili (finito dimensionali) di G' . Facciamo l'ipotesi semplificatrice che ogni rappresentazione irriducibile di G' entri nella decomposizione senza molteplicità. Avremo

$$W_E = \bigoplus W_E^i$$

$$W_E^i \simeq \mathcal{Z}_i,$$

come rappresentazioni di G' .

Dal momento che H'_E ed U'_E commutano su W_E , ne risulta che ogni W_E^i è un sottospazio invariante per H'_E . Ciò significa che H'_E commuta, su W_E^i , con una rappresentazione irriducibile di G' ; allora H'_E agisce su W_E^i come uno scalare. Ogni W_E^i è autospazio di H'_E ; la decomposizione di W_E rispetto all'azione del gruppo compatto G' effettua la diagonalizzazione di H'_E .

Ciò mostra che ogni autovalore E di H si divide, per l'azione della perturbazione H' , in tanti livelli quante sono le rappresentazioni irriducibili di G' contenute in W_E . Ogni tale livello ha molteplicità pari alla dimensione di \mathcal{Z}_i .

In particolare, se G' ha qualche rappresentazione $(\sigma_i, \mathcal{Z}_i)$ non unidimensionale, la degenerazione dell'autovalore E non può essere completamente rimossa dalla perturbazione H' . Solo una perturbazione con gruppo di simmetria abeliano (per il quale tutti gli spazi \mathcal{Z}_i sono unidimensionali) ha la possibilità di rimuovere completamente la degenerazione.

6.2 Sistemi ad una particella

6.2.1 Elettrone in un campo centrale

In tutto il seguito denoteremo sistematicamente con

$$(D^j, V_j) \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

le rappresentazioni unitarie irriducibili di $SU(2)$. Ricordiamo che

$$V_j \simeq \mathbb{C}^{2j+1}$$

e che per $j = 0, 1, 2, \dots$ esse definiscono le rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ e di $O(3)$. Consideriamo il sistema quantistico formato da un singolo elettrone nello spazio fisico \mathbb{R}^3 . Una delle assunzioni di base della meccanica quantistica non relativistica è che lo spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H} , associato a questo sistema, è

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}.$$

In questa fattorizzazione di \mathcal{H} , lo spazio $L^2(\mathbb{R}^3)$ viene detto lo spazio dei gradi di libertà traslazionali, mentre $V_{\frac{1}{2}}$ è detto lo spazio dei gradi di libertà di *spin*.

Se l'elettrone è sottoposto ad un campo di forze centrale, il cui potenziale è

$$r \mapsto V(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

l'operatore dinamico del sistema è

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

in cui:

- i) $\text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$ è l'identità su $V_{\frac{1}{2}}$;
- ii) H è un'estensione autoaggiunta dell'operatore differenziale formale

$$f \mapsto - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f + V(r)f,$$

- iii) H' descrive l'accoppiamento tra il momento magnetico associato allo *spin* ed il momento magnetico associato al moto orbitale dell'elettrone; la forma esplicita di H' è data (formalmente) da

$$H' = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{m^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \left(\vec{L} \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} \right) \left(\text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \otimes \vec{S} \right);$$

nell'espressione precedente $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ denota l'operatore (vettoriale) di momento angolare orbitale e $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ l'operatore di *spin*.

Per il seguito non è tanto importante la forma precisa dell'operatore H' quanto notare che accoppia i gradi di libertà traslazionali e di *spin* dell'elettrone. Nello spirito della teoria quantistica delle perturbazioni, il termine H' deve essere considerato piccolo rispetto a $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$.

Nel prossimo paragrafo descriveremo la struttura di molteplicità degli autovalori di

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$$

facendo delle ipotesi fisicamente plausibili sul potenziale V . Nel paragrafo successivo descriveremo come l'interazione *spin*-orbita modifica questi autovalori e la loro molteplicità. Infine considereremo l'effetto di un campo esterno non centrale. La discussione che segue deve essere confrontata con la discussione generale della sezione 6.1.

6.2.2 La molteplicità degli autovalori dell'operatore dinamico, trascurando l'interazione *spin* -orbita

In questo paragrafo vogliamo discutere la molteplicità degli autovalori dell'operatore dinamico

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}},$$

agente nello spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

Il primo passo è la discussione del gruppo di simmetria di $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$.

In tutto il seguito, denoteremo

$$A, \vec{r} \longmapsto A \cdot \vec{r}: O(3) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

l'azione naturale di $O(3)$ su \mathbb{R}^3 . Quest'azione induce, in maniera geometrica, un'azione unitaria di $O(3)$ su $L^2(\mathbb{R}^3)$; esplicitamente, denoteremo

$$(U(A)f)(\vec{r}) = f(A^{-1} \cdot \vec{r}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

$(U, L^2(\mathbb{R}^3))$ è una rappresentazione unitaria di $O(3)$. D'altra parte $SU(2)$ agisce su $V_{\frac{1}{2}}$ tramite la rappresentazione $D^{\frac{1}{2}}$. Ricordiamo che questa non è altro che l'azione di $SU(2)$ (visto come gruppo di matrici) su \mathbb{C}^2 .

Il potenziale centrale $V(r)$, che compare in H , è ovviamente invariante rispetto all'azione di $O(3)$:

$$V(r) = V(A \cdot \vec{r}), \quad \text{per ogni } A \in O(3)$$

Da questo si deduce che la rappresentazione

$$(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}, L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}})$$

commuta con $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$; quindi $O(3) \times SU(2)$ è gruppo di simmetria per $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$.

In accordo con la discussione del paragrafo 6.1.1, è necessario ottenere la decomposizione canonica di

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

rispetto all'azione di $O(3) \times SU(2)$. È chiaro che per questo è sufficiente ottenere la decomposizione canonica di

$$(U, L^2(\mathbb{R}^3))$$

rispetto ad $O(3)$.

Introducendo in \mathbb{R}^3 coordinate sferiche, si ha l'identificazione (tra spazi dotati di misura)

$$\mathbb{R}^3 \simeq S^2 \times \mathbb{R}_+^*$$

in cui

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^* &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\ S^2 &= \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{r}| = 1\}\end{aligned}$$

Si ottiene cos'ì l'identificazione

$$L^2(\mathbb{R}^3) \simeq L^2(S^2) \otimes L^2(\mathbb{R}_+^*)$$

(prodotto tensore di spazi di Hilbert). In questa fattorizzazione, la rappresentazione U di $O(3)$ si trasporta ad $U' \otimes \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}$, in cui la rappresentazione U' di $O(3)$ su $L^2(S^2)$ è definita come

$$(U'f)(\vec{r}) = f(A^{-1}.\vec{r}), \quad f \in L^2(S^2)$$

(è chiaro che $O(3)$ agisce su S^2). Siamo cos'ì ricondotti alla decomposizione di $(U', L^2(S^2))$.

Consideriamo la decomposizione

$$L^2(S^2) = \bigoplus (H_l : l \geq 0, l \text{ intero})$$

(somma hilbertiana di sottospazi finito- dimensionali (quindi chiusi)). Ogni H_l (lo spazio delle armoniche sferiche di grado l) è $2l + 1$ dimensionale ed è invariante rispetto all'azione di $O(3)$ su $L^2(S^2)$. La restrizione di U' ad H_l è un modello della rappresentazione irriducibile

$$(D_{(-1)^l}^l, V_l) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

di $O(3)$. Il segno $(-1)^l$ viene detto la *parità* della rappresentazione.

In conclusione, la decomposizione canonica della rappresentazione

$$(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}, L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}})$$

di $O(3) \times SU(2)$ è data da

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}} \simeq \bigoplus (H_l \otimes L^2(\mathbb{R}_+^*) \otimes V_{\frac{1}{2}} : l \geq 1, l \text{ intero})$$

Su ogni addendo agisce la rappresentazione

$$D_{(-1)^l}^l \boxtimes D^{\frac{1}{2}}$$

con molteplicità infinita, data la presenza del fattore $L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Inoltre, ogni addendo è invariante rispetto all'operatore dinamico $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$. Se consideriamo la restrizione di questo operatore a

$$H_l \otimes L^2(\mathbb{R}_+^*) \otimes V_{\frac{1}{2}},$$

e teniamo conto che $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$ commuta con la rappresentazione $U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}$ di $O(3) \times SU(2)$ segue che tale restrizione ha la forma

$$\text{Id}_{H_l} \otimes \mathcal{R}_l \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}},$$

in cui \mathcal{R}_l è un'operatore autoaggiunto che agisce in $L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Si può trovare la forma esplicita di \mathcal{R}_l scegliendo coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 ed esprimendo H in termini delle coordinate sferiche. Calcoli abbastanza semplici, e ben noti a qualunque studente di meccanica quantistica, portano a concludere che \mathcal{R}_l è (per ogni $l \geq 0$) un'estensione autoaggiunta dell'operatore differenziale formale

$$f \longmapsto -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f + V(r)f$$

A questo punto è necessaria la conoscenza della decomposizione spettrale di \mathcal{R}_l . Per i potenziali centrali $V(r)$ che sono di interesse per la modellizzazione matematica dell'elettrone nell'atomo, si possono assumere le conclusioni seguenti:

i) per ogni $l \geq 0$, esiste una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R}_+^*)$, che denotiamo

$$\left(e_n^l \right)_{n \geq l+1},$$

formata da autovettori di \mathcal{R}_l ,

$$\mathcal{R}_l e_n^l = E_{nl} e_n^l;$$

ii) l'autovalore E_{nl} ha la forma

$$E_{nl} = -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n + x_{n,l}} \right),$$

in cui il termine $x_{n,l}$ viene detto la correzione di Rydberg;

iii) il termine $x_{n,l}$ è assente se $V(r)$ è il potenziale coulombiano; è compreso tra 0 e $\frac{1}{2}$; dipende da l ed è quasi costante rispetto ad n ; tende a 0 per grandi l ;

iv) l'assenza della correzione di Rydberg è equivalente al fatto che per il potenziale coulombiano è presente degenerazione accidentale rispetto al gruppo $O(3) \times SU(2)$.

Dal punto i), si ha

$$L^2(\mathbb{R}_+^*) = \bigoplus \left(\mathbb{C} \cdot e_n^l : n \geq l+1 \right);$$

quindi

$$H_l \otimes L^2(\mathbb{R}_+^*) \otimes V_{\frac{1}{2}} = \bigoplus \left(H_l \otimes \mathbb{C} \cdot e_n^l \otimes V_{\frac{1}{2}} : n \geq l+1 \right),$$

(come somma hilbertiana di sottospazi).

Introduciamo la notazione

$$H_l \otimes \mathbb{C} \cdot e_n^l = V_l^n \quad (n \geq l+1, l \geq 0).$$

Ogni V_l^n è un sottospazio $2l + 1$ dimensionale di $L^2(\mathbb{R}^3)$. L'operatore H agisce su di esso moltiplicativamente per E_{nl} . Inoltre V_l^n è invariante rispetto all'azione geometrica naturale di $O(3)$ su $L^2(\mathbb{R}^3)$. Questa azione, ristretta a V_l^n , è un modello della rappresentazione irriducibile

$$\left(D_{(-1)^l}^l, V_l \right)$$

di $O(3)$.

La decomposizione di

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

rispetto all'azione del gruppo $O(3) \times SU(2)$ ed all'azione dell'operatore dinamico

$$\mathcal{H} \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$$

è realizzata esplicitamente da

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{l=0}^{n-1} V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

6.2.3 L'interazione *spin* -orbita e la struttura fine.

Consideriamo l'operatore dinamico

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

sullo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}.$$

Vogliamo studiare come si divide l'autovalore E_{nl} dell'operatore dinamico $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$ (la cui molteplicità è stata studiata nel paragrafo precedente) per l'azione della perturbazione H' , che descrive l'accoppiamento *spin* -orbita.

Il primo passo è determinare il gruppo di simmetria di H' . per questo, è più chiaro effettuare l'identificazione

$$O(3) \simeq \mathbb{Z}_2 \times SO(3).$$

Il gruppo di simmetria di $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$ può essere quindi identificato con

$$(\mathbb{Z}_2 \times SO(3)) \times SU(2).$$

il termine H' accoppia tra loro i gradi di libertà traslazionali e di *spin*. Quindi, il gruppo di simmetria G' di $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$ è il sottogruppo "diagonale" di

$$(\mathbb{Z}_2 \times SO(3)) \times SU(2).$$

definito da

$$G' = \{(\omega, \mathcal{R}(h), h) : \omega \in \mathbb{Z}_2, h \in SU(2)\}$$

ove \mathcal{R} è l'isomorfismo di ricoprimento di $SU(2)$ su $SO(3)$ definito in 5.2. E' evidente come l'applicazione

$$(\omega, \mathcal{R}(h), h) \mapsto (\omega, h) : G' \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times SU(2)$$

definisca un'isomorfismo di gruppi compatti.

In accordo con con la discussione generale del paragrafo 6.1.1, dobbiamo decomporre la rappresentazione

$$\left(D_{(-1)^l}^l \boxtimes D^{\frac{1}{2}}, V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

di $SO(3) \times SU(2)$ in rappresentazioni irriducibili di G' . Questo problema è del tutto elementare. La restrizione a G' della rappresentazione $D^l \boxtimes D^{\frac{1}{2}}$ è esattamente la rappresentazione

$$(-1)^l \otimes D^l \otimes D^{\frac{1}{2}}$$

di $G' \simeq \mathbb{Z}_2 \times SU(2)$. La decomposizione di questa rappresentazione in rappresentazioni irriducibili è data dalla serie di Clebsh-Gordan per $SU(2)$:

$$D^l \otimes D^{\frac{1}{2}} \simeq \begin{cases} D^{l+\frac{1}{2}} \otimes D^{l-\frac{1}{2}}, & l = 1, 2, 3, \dots \\ D^{\frac{1}{2}}, & l = 0 \end{cases}$$

Notiamo che nella decomposizione le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ entrano ciascuna senza molteplicità.

Allora, per $l \geq 1$, l'autovalore E_{nl} di $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$, che è $2(2l+1)$ degenere, si spezza in due autovalori di degenerazione

$$\begin{aligned} 2 \left(l + \frac{1}{2} \right) + 1 &= 2l + 2 \\ 2 \left(l - \frac{1}{2} \right) + 1 &= 2l \end{aligned}$$

rispettivamente. Per $l = 0$ il livello due volte degenere non si separa.

Queste previsioni sono completamente differenti dalle corrispondenti previsioni per le particelle senza *spin* (cioè supponendo $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$). La loro verifica sperimentale consiste nell'osservazione degli spettri dei metalli alcalini e degli atomi ionizzati in cui le transizioni che danno luogo alle righe spettrali siano effettuate da un singolo elettrone, accoppiato al campo centrale generato dal nucleo e dagli altri elettroni. Particolarmente importanti storicamente, e molto chiare dal punto di vista sperimentale, sono state le osservazioni dei doppietti nello spettro del sodio e dello ione calcio.

6.2.4 Effetto Zeeman ed effetto Stark

Effetto Zeeman

L'effetto Zeeman consiste nella separazione di una riga spettrale in più righe, quando l'atomo è immerso in un campo magnetico. In termini matematici, l'effetto Zeeman è la suddivisione di un autovalore dell'operatore dinamico

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

quando a quest'ultimo viene aggiunto un termine che descrive l'interazione con un campo magnetico esterno.

I momenti magnetici associati allo *spin* ed al momento angolare orbitale dell'elettrone si accoppiano con il campo magnetico. Se facciamo l'ipotesi semplificatrice che il campo magnetico sia costante ed uniforme ed abbastanza debole, questa interazione può essere descritta matematicamente aggiungendo all'operatore dinamico

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

un termine

$$H'' = c \left(\vec{L} \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + 2\text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \otimes \vec{S} \right) \cdot \vec{B}$$

(in cui \vec{B} è il vettore costante (nello spazio e nel tempo) che descrive il campo esterno, e c è una costante (dimensionata) opportuna).

Nel seguito supporremo H'' piccolo rispetto a H' , nel senso della teoria delle perturbazioni in meccanica quantistica. Ciò significa fisicamente che il campo \vec{B} è tanto debole che la sua energia di interazione con i momenti magnetici è

piccola rispetto alla differenza di energia tra due livelli dovuta all'interazione *spin*-orbita. Un caso sperimentalmente molto chiaro di questa situazione è lo studio dell'effetto Zeeman sulla famosa riga gialla doppia del sodio.

Il primo punto da chiarire è quale sottogruppo di $G' \simeq \mathbb{Z}_2 \times SU(2)$ sia il gruppo di simmetria di H'' . Il sottogruppo di $O(3)$ che lascia invariato il campo magnetico \vec{B} è $C_{\infty h}$. Per convincersene, basta pensare che il campo magnetico costante è descritto da uno pseudovettore \vec{B} (diretto, per fissare le idee, lungo l'asse z) o, equivalentemente, da una spirale orientata, giacente nel piano xy . Il sottogruppo di $O(3)$ che fissa una spirale orientata, giacente nel piano xy è $C_{\infty h}$. Il gruppo di simmetria, G'' , di H'' è dato dalla preimmagine di $C_{\infty h}$ rispetto all'omomorfismo

$$\text{Id} \times \mathcal{R} : \mathbb{Z}_2 \times SU(2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times SO(3) \simeq O(3)$$

Quindi si ha

$$G'' = \{(\omega, h) \in \mathbb{Z}_2 \times SU(2) : (\omega, \mathcal{R}(h)) \in C_{\infty h}\}$$

Dal momento che è

$$C_{\infty h} \simeq \mathbb{Z}_2 \times C_{\infty},$$

si ha

$$G'' \simeq \mathbb{Z}_2 \times C_{\infty}^*,$$

in cui abbiamo definito

$$C_{\infty}^* = \{h \in SU(2) : \mathcal{R}(h) \in C_{\infty}\}.$$

In accordo con il programma descritto nel paragrafo 6.1.2, dobbiamo decomporre una rappresentazione irriducibile di G' in rappresentazioni irriducibili di G'' . Dal momento che

$$G' \simeq \mathbb{Z}_2 \times SU(2), \quad G'' \simeq \mathbb{Z}_2 \times C_{\infty}^*,$$

è sufficiente decomporre le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ in rappresentazioni irriducibili di C_{∞}^* .

Ricordiamo che C_{∞}^* è un gruppo abeliano che può essere realizzato mediante matrici 2×2 come

$$C_{\infty}^* = \left\{ \pm \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & \\ & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} : 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}.$$

Le sue rappresentazioni irriducibili (caratteri irriducibili) possono essere parametrizzate da

$$\sigma_j, \quad j = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$$

ed esplicitamente sono date da

$$\begin{aligned}\sigma_j \left(\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & \\ & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) &= e^{ij\phi} \\ \sigma_j \left(- \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & \\ & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) &= (-1)^{2j} e^{ij\phi}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}0 &\leq \phi < 2\pi \\ j &= 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots\end{aligned}$$

La rappresentazione irriducibile

$$(D^j, V_j) \quad j = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

di $SU(2)$ si decompone come

$$D_{|C_\infty}^j \simeq \sigma_j \oplus \sigma_{j-1} \oplus \dots \oplus \sigma_{-j+1} \oplus \sigma_{-j}.$$

Dal momento che ogni rappresentazione irriducibile di C_∞^* appare in questa decomposizione senza molteplicità, la decomposizione stessa è canonica.

Notiamo che l'autovalore che era associato alla rappresentazione

$$D_{(-1)^l}^{l+\frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad D_{(-1)^l}^{l-\frac{1}{2}} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

di degenerazione $2l+2$ o $2l$ rispettivamente viene diviso in $2l+2$ o $2l$ autovalori separati sotto l'azione della perturbazione H'' . La degenerazione viene completamente rimossa. Ciò è dovuto al fatto che il gruppo di simmetria di H'' , cioè G'' è abeliano.

Effetto Stark

L'effetto Stark è la suddivisione delle righe spettroscopiche quando l'atomo è posto in un campo elettrico esterno. Per semplicità, supponiamo il campo elettrico costante ed uniforme, diretto lungo l'asse z . La carica dell'elettrone si accoppia con il campo elettrico ed all'operatore dinamico

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

deve essere aggiunto un termine

$$H'' = cz \left| \vec{E} \right|$$

in cui c è una costante opportuna dimensionata ed $\left| \vec{E} \right|$ è il modulo del campo elettrico esterno. Supporremo $\left| \vec{E} \right|$ sufficientemente piccolo, in modo che l'energia di interazione tra la carica e il campo esterno sia piccola rispetto alla

separazione dovuta alla struttura fine. In questa situazione, possiamo trattare H'' come una perturbazione.

Evidentemente, il sottogruppo di $O(3)$ che fissa l'asse z (con la sua orientazione) è $C_{\infty v}$. Il gruppo di simmetria di H'' , che denotiamo G'' , è la preimmagine di $C_{\infty v}$ rispetto all'omomorfismo

$$\text{Id} \times \mathcal{R} : \mathbb{Z}_2 \times SU(2) \longrightarrow O(3)$$

Ricordiamo che

$$C_{\infty v} \simeq SO(2) \times' \mathbb{Z}_2$$

(prodotto semidiretto). Quindi si ha

$$G'' = SO(2)^* \times' \mathbb{Z}_2;$$

l'azione di \mathbb{Z}_2 su $SO(2)^*$ che definisce il prodotto semidiretto è data da

$$\begin{aligned} 1.h &= h, & h \in SO(2)^* \\ (-1).h &= h^{-1}, & h \in SO(2)^* \end{aligned}$$

Le rappresentazioni irriducibili di G'' possono essere descritte come segue:

i) due rappresentazioni unidimensionali,

$$\alpha_1, \quad \alpha_{-1},$$

definite come

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= 1, & \forall h \in SO(2)^* \\ \alpha_1(\omega) &= 1, & \omega \in (1, -1) = \mathbb{Z}_2 \\ \alpha_{-1}(h) &= 1, & \forall h \in SO(2)^* \\ \alpha_{-1}(\omega) &= \omega, & \omega \in (1, -1) = \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

ii) una famiglia di rappresentazioni bidimensionali,

$$\beta_j, \quad j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

definita come

$$\begin{aligned} \beta_j \left(\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} e^{ij\phi} & 0 \\ 0 & e^{-ij\phi} \end{pmatrix} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ \beta_j \left(- \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) &= (-1)^{2j} \begin{pmatrix} e^{ij\phi} & 0 \\ 0 & e^{-ij\phi} \end{pmatrix} \quad 0 \neq \phi \leq 2\pi, \\ \beta(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \beta(-1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La rappresentazione irriducibile

$$\left(D_{(\pm)}^j, V_j \right)$$

di $\mathbb{Z}_2 \times SU(2)$ si decompone in maniera differente a seconda che j sia intero ($j = 0, 1, 2, \dots$) o semintero ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$). Supponiamo, innanzi tutto, che j sia un intero. E' necessario trattare separatamente i due casi $D_{(+)}^j$ e $D_{(-)}^j$. Si ha

$$D_{(+)}^j |_{SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2} \simeq \beta_j \oplus \beta_{j-1} \oplus \dots \oplus \beta_1 \oplus \alpha_k,$$

in cui:

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad \text{se } j \text{ è pari,} \\ k = -1 & \quad \text{se } j \text{ è dispari;} \end{aligned}$$

$$D_{(-)}^j |_{SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2} \simeq \beta_j \oplus \beta_{j-1} \oplus \dots \oplus \beta_1 \oplus \alpha_k,$$

in cui:

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad \text{se } j \text{ è dispari,} \\ k = -1 & \quad \text{se } j \text{ è pari.} \end{aligned}$$

Infine, se j è semintero si ha

$$D_{(\pm)}^j |_{SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2} \simeq \beta_j \oplus \beta_{j-1} \oplus \dots \oplus \beta_{\frac{1}{2}},$$

Abbiamo visto nel precedente paragrafo come l'interazione *spin-orbita* divida l'autospazio con autovalore E_{nl} (dell'operatore $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$) in due autospazi di dimensioni

$$2l + 1, 2l,$$

rispettivamente, se $l \neq 0$, e lasci inalterato l'autospazio E_{n0} . Ricordiamo che, nel caso $l \neq 0$, i due autospazi sono equivalenti alle rappresentazioni

$$D_{(-1)^l}^{l+\frac{1}{2}}, \quad D_{(-1)^l}^{l-\frac{1}{2}}$$

di $\mathbb{Z}_2 \times SU(2)$. L'autospazio E_{n0} è equivalente alla rappresentazione

$$D_{+}^{\frac{1}{2}}$$

di $\mathbb{Z}_2 \times SU(2)$. Si ha

$$D_{+}^{\frac{1}{2}} |_{SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2} \simeq \beta_{\frac{1}{2}},$$

quindi l'autospazio E_{n0} non si suddivide per l'effetto Stark. Il campo elettrico separa l'autospazio equivalente a $D_{(-1)^l}^{l\pm\frac{1}{2}}$ in tanti livelli quante sono le rappresentazioni irriducibili di $SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2$ contenute in $D_{(-1)^l}^{l\pm\frac{1}{2}}$. Si ha:

$$D_{(-1)^l}^{l\pm\frac{1}{2}} |_{SO(2)^* \times \mathbb{Z}_2} \simeq \beta_{(l\pm\frac{1}{2})} \oplus \beta_{(l\pm\frac{1}{2})-1} \oplus \dots \oplus \beta_{\frac{1}{2}}.$$

Consideriamo un esempio concreto, anche per mettere in luce la differenza tra effetto Zeeman ed effetto Stark. L'elettrone più esterno in un atomo di sodio è un esempio molto chiaro fisicamente di un elettrone che è sottoposto ad un campo esterno centrale ma non coulombiano. Tenendo conto dell'interazione *spin-orbita* i livelli energetici più bassi dell'elettrone esterno dell'atomo di sodio sono, in ordine di energia crescente

$${}^2S_{\frac{1}{2}}, \quad {}^2P_{\frac{1}{2}}, \quad {}^2P_{\frac{3}{2}}$$

Un (debole) campo magnetico esterno separa

$${}^2P_{\frac{3}{2}} \text{ in quattro livelli,}$$

$${}^2P_{\frac{1}{2}} \text{ in due livelli,}$$

$${}^2S_{\frac{1}{2}} \text{ in due livelli.}$$

Un (debole) campo elettrico esterno esterno fa s`I che

$${}^2P_{\frac{3}{2}} \text{ si separi in due livelli,}$$

$${}^2P_{\frac{1}{2}} \text{ non sia separato,}$$

$${}^2S_{\frac{1}{2}} \text{ non sia separato.}$$

In accordo con le osservazioni sperimentali.

6.3 Sistemi formati da particelle identiche

6.3.1 La connessione *spin* statistica e l'atomo con N elettroni

Consideriamo un sistema formato da N elettroni. Lo spazio degli stati di ciascun elettrone è

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

Qual è lo spazio degli stati che viene assegnato dalle regole della meccanica quantistica al sistema composto formato dagli N elettroni?

Consideriamo il prodotto tensore di spazi di Hilbert

$$\mathcal{H}^{\otimes N} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \quad (N \text{ fattori})$$

$\mathcal{H}^{\otimes N}$ è uno spazio di Hilbert complesso e separabile. È definita un'azione naturale del gruppo delle permutazioni \mathcal{S}_N su $\mathcal{H}^{\otimes N}$: ogni $s \in \mathcal{S}_N$ agisce sui tensori decomponibili di $\mathcal{H}^{\otimes N}$ come

$$s.(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) = v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(N)};$$

questa azione viene estesa a tutto $\mathcal{H}^{\otimes N}$ per linearità e continuità. Si definisce

$$\Lambda^N(\mathcal{H}) = \{ \phi \in \mathcal{H}^{\otimes N} : s.\phi = (\text{signs}) \phi, \forall s \in \mathcal{S}_N \}$$

$\Lambda^N(\mathcal{H})$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}^{\otimes N}$. Uno dei postulati fondamentali della meccanica quantistica è la connessione tra *spin* e statistica. Afferma che lo spazio degli stati \mathcal{H}_N del sistema composto dagli N elettroni è esattamente la parte antisimmetrica di $\mathcal{H}^{\otimes N}$

$$\mathcal{H}_N = \Lambda^N(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}^{\otimes N}$$

Può essere opportuno, prima di procedere, ricordare alcune proprietà degli spazi $\Lambda^N(\mathcal{H})$.

Denotiamo

$$\mathcal{A}_N = \frac{1}{N!} \sum ((\text{signs}) s. : s \in \mathcal{S}_N);$$

\mathcal{A}_N è il proiettore hilbertiano

$$\mathcal{A}_N : \mathcal{H}^{\otimes N} \longrightarrow \Lambda^N(\mathcal{H})$$

Se $v_1, \dots, v_N \in \mathcal{H}$, definiamo

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_N = \sqrt{N!} \mathcal{A}_N(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)$$

Il fattore $\sqrt{N!}$ è scelto in modo che si abbia

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_N, v_1 \wedge \dots \wedge v_N)_{\Lambda^N(\mathcal{H})} := (u_1 \wedge \dots \wedge u_N, v_1 \wedge \dots \wedge v_N)_{\mathcal{H}^{\otimes N}} = \det((u_i, v_j)_{\mathcal{H}})$$

Usando queste proprietà si può provare che, se

$$(e_i)_{i \geq 1}$$

è una base hilbertiana di \mathcal{H} , allora

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N} : i_1 < i_2 < \dots < i_N)$$

è una base hilbertiana di $\Lambda^N(\mathcal{H})$. In particolare, se \mathcal{H} ha dimensione finita d , si ha

$$\begin{aligned} \dim \Lambda^N(\mathcal{H}) &= \binom{d}{N}, \quad \text{se } N \leq d \\ \dim \Lambda^N(\mathcal{H}) &= 0, \quad \text{se } N > d \end{aligned}$$

In un atomo gli N elettroni sono posti in un campo esterno centrale, ed interagiscono tra loro. La modellizzazione matematica di questo sistema è implementata descrivendone l'operatore dinamico.

Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$ (lo spazio degli stati di un singolo elettrone) consideriamo l'operatore dinamico $H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$ che abbiamo introdotto nel paragrafo ???. Nel seguito, per semplicità, denoteremo questo operatore con H_{sing} . Definiamo un operatore su $\mathcal{H}^{\otimes N}$, che denotiamo $H^{(0)}$, ponendo

$$H^{(0)} = \sum_{i=1}^N \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \dots \otimes H_{\text{sing}} \otimes \dots \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}}$$

in cui $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ è l'identità su \mathcal{H} e, nell' i -esimo addendo, H_{sing} compare come fattore nell' i -esimo fattore. È evidente come $H^{(0)}$ commuti con l'azione di \mathcal{S}_N su $\mathcal{H}^{\otimes N}$; quindi $\Lambda^N(\mathcal{H})$ è un sottospazio invariante per $H^{(0)}$. L'operatore dinamico $H^{(0)}$, ristretto a $\Lambda^N(\mathcal{H})$, descrive l'interazione tra gli elettroni ed il campo centrale esterno, il cui potenziale compare in H_{sing} . Se consideriamo l'evoluzione dinamica indotta dal solo operatore $H^{(0)}$, ogni singolo elettrone evolve indipendentemente dai restanti. Il fatto che stiamo trattando il sistema composto entra però, in maniera essenziale nel ridurre lo spazio degli stati del sistema da $\mathcal{H}^{\otimes N}$ a $\Lambda^N(\mathcal{H})$.

Consideriamo la parte dell'operatore dinamico dovuta all'interazione coulombiana tra gli elettroni. Può essere più chiaro, per descriverla, effettuare l'identificazione

$$\mathcal{H}^{\otimes N} = \left(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes N} \simeq L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes V_{\frac{1}{2}} \otimes \dots \otimes V_{\frac{1}{2}};$$

gli elementi di $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ sono funzioni delle $3N$ variabili

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N$$

che rappresentano le $3N$ coordinate degli N elettroni. L'operatore dinamico $H^{(1)}$, che descrive l'interazione fra gli elettroni, opera banalmente sulla parte $V_{\frac{1}{2}} \otimes \dots \otimes V_{\frac{1}{2}}$ di $\mathcal{H}^{\otimes N}$ e sul fattore $L^2(\mathbb{R}^3)$ è definito formalmente come

$$F \mapsto \left(\sum_{i < k} \left[\frac{1}{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) F$$

Supporremo che $H^{(1)}$ possa essere considerato piccolo rispetto ad $H^{(0)}$ nel senso della teoria quantistica delle perturbazioni.

Ricordiamo che l'operatore dinamico per una particella in un campo centrale ha la forma

$$H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}} + H'$$

in cui H' è la piccola interazione *spin*-orbita. Considereremo, perciò, un ulteriore addendo $H^{(2)}$ nell'operatore dinamico del sistema di N elettroni

$$H^{(2)} = \sum_{i=1}^N \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \dots \otimes H' \otimes \dots \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}};$$

nell' i -esimo addendo il fattore H' compare nell' i -esima posizione. Il termine $H^{(2)}$ deve essere considerato piccolo rispetto ad $H^{(1)}$.

Lo schema perturbativo basato sulle assunzioni descritte in precedenza viene detto *approssimazione di Russel-Saunders* o anche *accoppiamento L-S*. E' un modello matematico semplificato, ma utile, degli atomi più leggeri.

Riassumiamo la discussione precedente nei seguenti punti:

i lo spazio degli stati del sistema di N elettroni è

$$\Lambda^N(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}^{\otimes N}$$

in cui

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

è lo spazio degli stati di un elettrone;

ii l'operatore dinamico del sistema è la restrizione a $\Lambda^N(\mathcal{H})$ dell'operatore:

$$H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)}$$

definito su $\mathcal{H}^{\otimes N}$. $H^{(2)}$ è piccolo rispetto ad $H^{(1)}$ e $H^{(1)}$ è piccolo rispetto a $H^{(0)}$.

6.3.2 Autovalori ed autospazi dell'operatore dinamico di un atomo con N elettroni indipendenti. Le configurazioni elettroniche.

Il problema che ci proponiamo è quello di descrivere gli autovalori di $H^{(0)}$ (ristretto a $\Lambda^N(\mathcal{H})$), di descriverne gli autospazi e la loro molteplicità. Ricordiamo che la decomposizione spettrale di

$$H_{\text{sing}} = H \otimes \text{Id}_{V_{\frac{1}{2}}}$$

agente su

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}},$$

è data da

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{l=0}^{n-1} V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right);$$

in cui

$$\begin{aligned} \dim V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} &= 2(2l+1) \\ H_{\text{sing}}\phi &= E_{nl}\phi, \quad \text{se } \phi \in V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Il problema è quello di decomporre

$$\mathcal{H}_N = \Lambda^N(\mathcal{H}) = \Lambda^N \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{l=0}^{n-1} V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

in autospazi di $H^{(0)}$.

Per risolvere questa problema useremo una formula di isomorfismo ben nota nell'algebra tensoriale esterna. Se V e W sono due spazi vettoriali di dimensione finita, e N_1, N_2 sono due interi positivi qualunque, esiste un'applicazione lineare canonica (iniettiva) da $\Lambda^{N_1}(V) \otimes \Lambda^{N_2}(W)$ a $\Lambda^{N_1+N_2}(V \oplus W)$, definita da

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_{N_1}) \otimes (w_1 \wedge \dots \wedge w_{N_2}) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{N_1} \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{N_2}$$

E' facile vedere che questa applicazione determina un isomorfismo

$$\Lambda^N(V \oplus W) \simeq \bigoplus_{N_1+N_2=N} \Lambda^{N_1}(V) \otimes \Lambda^{N_2}(W)$$

Per capire come possa essere usata questa formula per la soluzione del nostro problema, è opportuno considerare un esempio semplice, in cui compaia una somma finita di sottospazi di \mathcal{H} . Consideriamo, ad esempio,

$$\Lambda^3 \left(\left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

Notiamo che si ha:

$$\dim \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 2 \quad \dim \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 2$$

per cui

$$\Lambda^3 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = \{0\} \quad \Lambda^3 \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = \{0\}$$

Si ottiene cos`I l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \Lambda^3 \left(\left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right) &\simeq \left\{ \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^2 \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right\} \\ &\oplus \left\{ \Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Come si verifica facilmente, entrambi gli addendi sono autospazi di

$$H^{(0)} = H_{\text{sing}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}} + \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes H_{\text{sing}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}} + \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}} \otimes H_{\text{sing}};$$

il primo con autovalore

$$E_{10} + 2E_{20};$$

il secondo con autovalore

$$2E_{10} + E_{20}.$$

Estrapolando da questo esempio, dovrebbe essere abbastanza chiaro come si costruiscano gli autospazi di $H^{(0)}$ (ristretto a $\Lambda^N(\mathcal{H})$).

Per ogni k -upla ($1 \leq k \leq N$) di interi

$$N_1, \dots, N_k$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} N_i &\geq 1 \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k N_i &= N \end{aligned}$$

si fissa una k -upla di coppie

$$(n_1, l_1), \dots, (n_k, l_k)$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} n_i &\geq 1 \\ 0 &\leq l_i \leq n_i - 1 \\ N_i &\leq 2(2l_i + 1) \end{aligned}$$

L'immagine di

$$\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

in

$$\Lambda^N \left(\left(V_{l_1}^{n_1} \oplus V_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \dots \oplus \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

è un autospazio di $H^{(0)}$ con autovalore:

$$\sum_{i=1}^k N_i E_{n_i l_i}$$

Corrispondentemente, la decomposizione di \mathcal{H}_N in autospazi di $H^{(0)}$ è data da

$$\mathcal{H}_N \simeq \bigoplus \left(\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

in cui la somma si estende a tutte le possibili scelte di (N_1, \dots, N_k) e di $((n_1, l_1), \dots, (n_k, l_k))$.

Gli autospazi di $H^{(0)}$ vengono detti *configurazioni elettroniche*. Essi possono essere denotati con il simbolo più semplice

$$(n_1 l_1)^{N_1}, (n_2 l_2)^{N_2}, \dots, (n_k l_k)^{N_k}$$

Il vincolo

$$N_i \leq 2(2l_i + 1) \quad i = 1, \dots, k,$$

non è altro che il principio di esclusione di Pauli. L'identificazione degli autospazi di $H^{(0)}$ su \mathcal{H}_N con gli spazi

$$\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

costituisce la formulazione matematica del *modello a shell dell'atomo*.

La degenerazione degli autovalori di $H^{(0)}$ è data da

$$\begin{aligned} \dim \left(\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \right) &= \dim \Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \dim \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che si ha

$$\dim \Lambda^{N_i} \left(V_{l_i}^{n_i} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 1$$

se

$$N_i = 2(2l_i + 1)$$

Fattori di questo tipo non contribuiscono alla degenerazione dell'autovalore di $H^{(0)}$.

Queste configurazioni (o sottoconfigurazioni) elettroniche vengono dette *shell complete*.

La configurazione elettronica che corrisponde al più piccolo tra gli autovalori possibili di $H^{(0)}$ viene detta la configurazione fondamentale dell'atomo. Ad esempio, se $N = 3$ (è il caso del litio) la configurazione fondamentale è identificata con

$$\Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

cui corrisponde l'autovalore

$$2E_{1,0} + E_{2,0}$$

Notiamo che

$$\dim \Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 1;$$

quindi la dimensione dell'autospazio è due. Dal punto di vista della degenerazione è come se ci fosse un solo elettrone nello stato $V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}}$. Ciò è dovuto alla presenza della *shell* completa

$$\Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

Un altro esempio è $N = 7$ (il caso dell'azoto). E' facile vedere che la configurazione elettronica fondamentale è identificata con

$$\Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^2 \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

con autovalore

$$2E_{1,0} + 2E_{2,0} + 3E_{2,1}$$

Notiamo che si ha:

$$\dim \Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = \dim \Lambda^2 \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 1$$

e

$$\dim \Lambda^3 \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = 20$$

Tutta la degenerazione è dovuta agli elettroni al di fuori delle *shell* complete.

In generale, l'autospazio fondamentale è identificato con

$$\Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^2 \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots$$

Compaiono le *shell* complete che non contribuiscono alla degenerazione. Solo gli N' elettroni che rimangono oltre le *shell* complete contribuiscono alla degenerazione con

$$\dim \Lambda^{N'} \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2(2l+1) \dots (2(2l+1) - N' + 1)}{N'!}$$

Sullo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes V_{\frac{1}{2}}$$

agisce in maniera naturale il gruppo compatto $SO(3) \times SU(2)$. Questa azione non è altro che la rappresentazione unitaria

$$U \boxtimes D^{\frac{1}{2}},$$

in cui U denota la rappresentazione unitaria naturale di $SO(3)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(U(R)f)(\vec{r}) = f(R^{-1}\vec{r}), \quad R \in SO(3)$$

Questa rappresentazione si estende in maniera naturale ad una rappresentazione

$$\left(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes N}$$

su $\mathcal{H}^{\otimes N}$. Il punto fondamentale è che l'operatore dinamico $H^{(0)}$, l'azione naturale di \mathcal{S}_n e la rappresentazione $\left(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}\right)^{\otimes N}$ commutano tra loro su $\mathcal{H}^{\otimes N}$. Ne risulta che \mathcal{H}_N è invariante per $\left(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}\right)^{\otimes N}$, ed anche che i singoli autospazi di $H^{(0)}$ su \mathcal{H}_N sono sottospazi invarianti per la rappresentazione $\left(U \boxtimes D^{\frac{1}{2}}\right)^{\otimes N}$ di $SO(3) \times SU(2)$. Questa osservazione è fondamentale per la discussione del prossimo paragrafo.

6.3.3 I termini spettroscopici

Consideriamo l'autospazio dell'operatore dinamico $H^{(0)}$ su \mathcal{H}_N che corrisponde all'autovalore

$$\sum_{i=1}^k N_i E_{n_i, l_i} \quad \left(\sum_{i=1}^k N_i = N \right)$$

Questo autospazio è identificato con la configurazione elettronica

$$\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

Il gruppo $SO(3) \times SU(2)$ agisce unitariamente sulla configurazione.

Consideriamo l'operatore dinamico

$$H^{(0)} + H^{(1)}$$

in cui $H^{(1)}$ descrive la repulsione coulombiana tra gli elettroni. Vogliamo studiare come si divide l'autovalore di $H^{(0)}$, e con quali molteplicità, quando si tiene conto della perturbazione $H^{(1)}$. In accordo con la discussione generale del paragrafo 6.1.2, è necessario determinare il gruppo di simmetria G' di $H^{(1)}$; quindi decomporre lo spazio degli autovettori di $H^{(0)}$ in rappresentazioni irriducibili di G' . E' del tutto chiaro come $H^{(1)}$ abbia come gruppo di simmetria

$$SO(3) \times SU(2)$$

stesso.

Le rappresentazioni irriducibili di $SO(3) \times SU(2)$ sono

$$\begin{aligned} & (D^L \boxtimes D^S, V_L \otimes V_S) \\ & L = 0, 1, 2, \dots \\ & S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \end{aligned}$$

ed hanno dimensione

$$(2L + 1)(2S + 1)$$

I sottospazi della configurazione

$$\Lambda^{N_1} \left(V_{l_1}^{n_1} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \dots \otimes \Lambda^{N_k} \left(V_{l_k}^{n_k} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

che sono irriducibili rispetto all'azione di $SO(3) \times SU(2)$ vengono detti *termini*, e vengono denotati con il simbolo

$${}^{2S+1}L$$

L'uso di questa nomenclatura e di questi simboli è preso dalla spettroscopia atomica.

E' importante notare come ogni singolo fattore

$$\Lambda^{N_i} \left(V_{l_i}^{n_i} \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

che compare in una configurazione sia invariante rispetto all'azione di $SO(3) \times SU(2)$. Siamo cos' **I** ricondotti al problema di decomporre

$$\begin{aligned} & \Lambda^k \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \\ & k \leq (2l + 1) \\ & n \geq 1, \quad 0 \leq l \leq n - 1 \end{aligned}$$

in rappresentazioni irriducibili di $SO(3) \times SU(2)$.

La prima osservazione da fare è che una *shell* completa (cioè uno spazio $\Lambda^{2(2l+1)} \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$) ha dimensione uno. Quindi la rappresentazione di $SO(3) \times SU(2)$ che agisce su di essa non è altro che

$$D^0 \boxtimes D^0$$

Infatti $SO(3)$ e $SU(2)$ non hanno rappresentazioni unidimensionali, eccetto che la (D^0, V_0) . Quindi

$$\Lambda^{2(2l+1)} \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \simeq V_0 \otimes V_0$$

come rappresentazione di $SO(3) \times SU(2)$. L'unico termine di una *shell* completa è il termine ${}^1S^1$. L'interpretazione fisica del fatto che una *shell* completa sia equivalente alla rappresentazione $D^0 \boxtimes D^0$ di $SO(3) \times SU(2)$ è che in una tale configurazione il momento angolare totale degli elettroni è zero ed il loro spin totale è zero.

Analogamente, l'interpretazione fisica del termine ${}^{2S+1}L$, contenuto nella configurazione $(nl)^k$ è che negli stati che appartengono a quel sottospazio di $\Lambda^k \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$ gli elettroni hanno momento angolare totale L e spin totale S (da questo viene il nome di accoppiamento $L - S$ per questo schema perturbativo).

Siamo cos' **I** ricondotti al problema di studiare la decomposizione di

$$\Lambda^k \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

in rappresentazioni irriducibili di $SO(3) \times SU(2)$. Come primo passo per la soluzione di questo problema è necessario usare un isomorfismo che esiste tra le rappresentazioni di $Gl(V)$.

Supponiamo che V e W siano due spazi vettoriali di dimensione finita, e che k sia un intero maggiore o uguale a due. Si ha l'isomorfismo

$$\Lambda^k (V \otimes W) \simeq \bigoplus_{\lambda} \left(E_{\lambda} [V^{\otimes k}] \otimes E_{\lambda'} [W^{\otimes k}] \right)$$

in cui E_{λ} ed $E_{\lambda'}$ denotano i simmetrizzatori di Young associati alle partizioni λ e λ' di k ; la partizione λ' è duale della partizione λ^2 ; la somma deve essere fatta sulla partizioni di k che possiedono

¹Nella notazione ${}^{2S+1}L$, $L = 0$ viene denotato con S , $L = 1$ con P , $L = 2$ con D , $L = 3$ con F, \dots Anche questa notazione è ripresa dalla spettroscopia atomica.

²I diagrammi di Young di λ e λ' si ottengono l'uno dall'altro scambiando le righe con le colonne.

al più $\dim V$ righe

al più $\dim W$ colonne

Nel nostro caso, questo isomorfismo viene scritto come

$$\Lambda^k \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \simeq \bigoplus_{\lambda} \left(E_{\lambda} \left[V^{\otimes k} \right] \otimes E_{\lambda'} \left[W^{\otimes k} \right] \right)$$

in cui la somma è sulle partizioni λ di k che hanno al più $(2l+1)$ righe ed al più due colonne.

Il secondo passo consiste nel decomporre ogni fattore che compare nella somma in rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ o di $SU(2)$. Ricordiamo che $SO(3)$ agisce su V_l^n e che $SU(2)$ agisce su $V_{\frac{1}{2}}$.

Consideriamo come esempio la decomposizione in termini della configurazione fondamentale dell'azoto. L'azoto ha sette elettroni; la configurazione elettronica fondamentale è

$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^2 \left((10)^2 (20)^2 (21)^2 \right)$$

Lo spazio degli stati che corrisponde a questa configurazione è (identificabile con)

$$\Lambda^2 \left(V_0^1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^2 \left(V_0^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \otimes \Lambda^3 \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

La dimensione di questo spazio è

$$1 \times 1 \times 20 = 20$$

Lo stato fondamentale dell'azoto è venti volte degenerare. La repulsione coulombiana tra gli elettroni spezza questo sottospazio nella somma dei termini. Dobbiamo determinare quali termini compaiono e quale è la loro dimensione. Si ha

$$\begin{aligned} \Lambda^3 \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) &\simeq \left\{ E_{\boxplus} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right] \otimes E_{\boxplus} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right] \right\} \otimes \\ &\otimes \left\{ E_{\boxminus} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right] \otimes E_{\boxminus} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right] \right\} \end{aligned}$$

Come secondo passo dobbiamo decomporre in rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ o di $SU(2)$. Consideriamo innanzitutto i fattori che contengono $V_{\frac{1}{2}}$. In generale, se

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = k,$$

si ha

$$E_{\lambda} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes k} \right] \simeq V_{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}$$

come rappresentazioni di $SU(2)$. Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} E_{\square\square} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right] &\simeq V_{\frac{1}{2}} \\ E_{\square\square\square} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right] &\simeq V_{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Quindi la configurazione fondamentale dell'azoto contiene dei termini di doppietto e di quartetto:

$${}^2L, {}^4L$$

Dobbiamo stabilire quali valori possa assumere L . Ci sono delle formule e dei metodi generali, ma il problema può essere facilmente risolto a mano. La configurazione

$$(2p)^3$$

compone tra loro tre momenti angolari uno. Per la formula di Clebsh-Gordan

$$D^1 \otimes D^1 \otimes D^1 \simeq D^3 \oplus 2D^2 \oplus 3D^1 \oplus D^0$$

E' chiaro che

$$E_{\square} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right]_{(SU(2))} \simeq V_0;$$

tenendo conto di questo fatto e dal momento che

$$\dim \left(E_{\square} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right] \right) = 8$$

rimane come unica possibilità

$$E_{\square\square} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right]_{(SU(2))} \simeq V_1 \oplus V_2$$

Quindi

$$\begin{aligned} E_{\square\square} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right]_{\otimes} E_{\square\square} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right]_{(SU(2) \times SU(2))} &\simeq (V_2 \oplus V_1) \otimes V_{\frac{1}{2}}, \\ E_{\square} \left[\left(V_1^2 \right)^{\otimes 3} \right]_{\otimes} E_{\square\square\square} \left[\left(V_{\frac{1}{2}} \right)^{\otimes 3} \right]_{(SU(2) \times SU(2))} &\simeq V_0 \otimes V_{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Otteniamo cos`I la decomposizione

$$\Lambda^3 \left(V_1^2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)_{(SU(2) \times SU(2))} \simeq \left(V_2 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \left(V_1 \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \oplus \left(V_0 \otimes V_{\frac{3}{2}} \right)$$

In notazione e linguaggio della spettroscopia, la configurazione

$$(2p)^3$$

dà luogo ai termini

$${}^4S, {}^2P, {}^2D$$

Le regole di Hund della spettroscopia affermano:

i il termine con energia più bassa è quello con la dimensione della parte di spin più alta, nel nostro caso 4S ;

ii tra i termini con la stessa dimensione per la parte di spin quello con energia più bassa è quello con L più alto.

Tenendo conto delle regole di Hund, lo stato fondamentale dell'azoto, che è venti volte degenere, si spezza in tre livelli energetici differenti

$$^4S, ^2D, ^2P$$

che hanno energia crescente da sinistra verso destra, le cui degenerazioni sono

$$\begin{array}{ll} ^4S, & 4 \text{ volte degenere} \\ ^2D, & 10 \text{ volte degenere} \\ ^2P, & 6 \text{ volte degenere} \end{array}$$

Un ultimo commento: grazie al fatto che su $V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}}$ c'è un prodotto scalare, si ha un isomorfismo naturale

$$\Lambda^k \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right) \simeq \Lambda^{2(2l+1)-k} \left(V_l^n \otimes V_{\frac{1}{2}} \right)$$

Questo ci assicura che una configurazione $(nl)^k$ è equivalente alla configurazione $(nl)^{2(2l+1)-k}$. Da questo segue che la suddivisione in termini è la stessa per le due configurazioni. Ad esempio, i termini spettroscopici, del carbonio,

$$(10)^2 (20)^2 (21)^2 ,$$

sono gli stessi dell'ossigeno

$$(10)^2 (20)^2 (21)^4 ,$$

quelli del boro

$$(10)^2 (20)^2 (21)^1 ,$$

sono gli stessi del fluoro

$$(10)^2 (20)^2 (21)^5 ,$$

6.3.4 L'interazione spin-orbita. Multipletti.

Consideriamo l'operatore dinamico completo che include l'interazione spin-orbita. E' chiaro, ricordando la discussione dell'interazione spin-orbita per un singolo elettrone del paragrafo 6.2.3, che il gruppo di simmetria dell'operatore dinamico

$$H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)}$$

è il sottogruppo diagonale

$$\{(R(h), h) : h \in SU(2)\} \simeq SU(2)$$

di

$$SO(3) \times SU(2)$$

E' necessario decomporre ogni termine in rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$. Ogni termine è un sottospazio su cui agisce una rappresentazione di $SO(3) \times SU(2)$ della forma

$$D^L \boxtimes D^S;$$

il problema è quindi quello della decomposizione di

$$V_L \otimes V_S$$

in rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$. Questo è esattamente il problema risolto dalle formule di Clebsh-Gordan:

$$(V_L \otimes V_S, D^L \boxtimes D^S)_{|SU(2)} \simeq \bigoplus_{j=|L-S|}^{L+S} (V_j, D^j)$$

I sottospazi irriducibili rispetto a $SU(2)$, isomorfi a V_j , vengono detti multipletti (anche in questo caso con un linguaggio ripreso dalla spettroscopia atomica).

Come esempio, consideriamo come si dividono i termini della configurazione fondamentale dell'azoto. Dal paragrafo precedente, sappiamo che i termini sono

$$S^4, D^2, P^2$$

Per essi si ha:

$$\begin{aligned} V_0 \otimes V_{\frac{3}{2}} &\simeq V_{\frac{3}{2}} \\ V_1 \otimes V_{\frac{1}{2}} &\simeq V_{\frac{3}{2}} \oplus V_{\frac{1}{2}} \\ V_2 \otimes V_{\frac{1}{2}} &\simeq V_{\frac{5}{2}} \oplus V_{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

A causa dell'interazione spin-orbita

- i il termine S^4 non si divide in multipletti;
- ii il termine D^2 si divide in un sestetto ed in un quartetto;
- iii il termine P^2 si divide in un quartetto ed in un doppietto.

La somma delle dimensioni dei multipletti è venti.

Appendice A

Nozioni elementari di teoria dei gruppi

In queste note sono raccolti i prerequisiti algebrici necessari per poter seguire il corso. Sono poco più che un glossario, con qualche semplice dimostrazione e l'indicazione di qualche facile esercizio.

A.1 Gruppi e sottogruppi

Definizione 2 Un gruppo G è un insieme

$$\{a, b, \dots, g, \dots\}$$

di elementi (non necessariamente finito, nè numerabile) in cui è definita un'operazione binaria

$$a, b \mapsto ab : G \times G \rightarrow G$$

(cioè una regola che associa ad ogni coppia di elementi di G un unico elemento di G , il loro prodotto), che soddisfa le condizioni

1. esiste in G un elemento, e , detto l'identità di G , tale che

$$eg = ge = g \quad \forall g \in G$$

2. per ogni $g \in G$ esiste un elemento, g^{-1} , in G , che viene detto l'inverso di g , tale che

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e$$

3. per tutti gli elementi a, b, c in G si ha l'uguaglianza (proprietà associativa)

$$a(bc) = (ab)c$$

Se due elementi a, b in G sono tali che

$$ab = ba$$

si dice che *commutano* (tra loro). Se tutti gli elementi di G commutano, si dice che G è *abeliano* o *commutativo*.

Se G ha un numero finito di elementi, si dice che G è *finito*. In tal caso, il numero di elementi di G viene denotato con $|G|$ e viene detto l'ordine di G .

Definizione 3 Un sottoinsieme H di G che sia un gruppo rispetto all'operazione definita in G (che rende G un gruppo), viene detto un **sottogruppo** di G .

Evidentemente i due insiemi

$$\{e\}, \quad G$$

sono sottogruppi di G . Vengono detti sottogruppi *impropri* (o *banali*) di G . Gli altri sottogruppi di G (se ce ne sono) vengono detti *propri*.

Le seguenti sono proprietà elementari, che si raccomanda di dimostrare per esercizio (le dimostrazioni sono molto semplici e molto brevi).

1. L'identità, e , in G è *unica*.
2. L'inverso, g^{-1} , di un elemento g di G è *unico*.
3. Un sottoinsieme (non vuoto), H , di un gruppo G è un sottogruppo di G se e solo se le due condizioni seguenti sono soddisfatte:
 - (a) se $a, b \in H$, allora $ab \in H$;
 - (b) se $g \in H$, allora $g^{-1} \in H$.

A.2 Omomorfismi ed isomorfismi di gruppi

Definizione 4 G e G' denotano due gruppi. Un'applicazione

$$\varphi: G \longrightarrow G'$$

viene detta un omomorfismo di G in G' se è soddisfatta la condizione

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad a, b \in G$$

Si può mostrare (esercizio!) che, se $\varphi: G \rightarrow G'$ è un omomorfismo, allora

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= e' \\ \varphi(g^{-1}) &= (\varphi(g))^{-1} \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

ove e ed e' denotano, rispettivamente, le identità in G e G' . Se $\varphi: G \rightarrow G'$ è un omomorfismo, l'insieme

$$\varphi(G) := \{\varphi(g) : g \in G\} \subset G'$$

viene detto l'*immagine* o *range* di φ . Mostrate per esercizio che $\varphi(G)$ è un sottogruppo di G' .

L'insieme

$$\ker \varphi := \{g \in G : \varphi(g) = e'\} \subset G$$

viene detto il *nucleo* o *kernel* di φ . Mostrate che $\ker \varphi$ è un sottogruppo di G .

Se

$$\varphi(G) = G'$$

(cioè se per ogni $g' \in G'$ esiste un elemento g in G tale che $\varphi(g) = g'$) diremo che φ è *surgettivo*.

Se φ ha la proprietà

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$$

diremo che φ è *iniettivo*. Si ha la proprietà (la cui dimostrazione è raccomandata per esercizio) seguente:

se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un omomorfismo, allora φ è iniettivo se e solo se $\ker \varphi = \{e\}$.

Un omomorfismo che sia iniettivo e surgettivo viene detto un *isomorfismo* di G e G' . Se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo, allora l'applicazione φ è una applicazione *biunivoca* (come applicazione tra insiemi); allora è definita l'inversa, φ^{-1} , di φ , come applicazione dall'insieme G' all'insieme G . Si può verificare (esercizio!) che φ^{-1} è un omomorfismo di G' in G , cioè che si ha

$$\varphi^{-1}(a'b') = \varphi^{-1}(a')\varphi^{-1}(b'),$$

per tutti gli a', b' in G' . In altre parole, un isomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow G'$$

è un omomorfismo invertibile il cui inverso è ancora un omomorfismo.

Definizione 5 *Un isomorfismo*

$$\varphi : G \longrightarrow G$$

di un gruppo G in se stesso è detto un *automorfismo* (di G). L'insieme di tutti gli automorfismi di G viene denotato con $\text{Aut}(G)$.

In $\text{Aut}(G)$ può essere definita un'operazione binaria che lo rende un gruppo. Se $\varphi, \psi \in \text{Aut}(G)$, definiamo $\varphi \circ \psi$ ponendo

$$\varphi \circ \psi(g) := \varphi(\psi(g)), \quad \forall g \in G$$

E' facile verificare che $\varphi \circ \psi$ è ancora un elemento di $\text{Aut}(G)$ e che $\text{Aut}(G)$, con questa operazione, diventa un gruppo in cui:

1. l'identità è l'elemento $e(\cdot)$ di $\text{Aut}(G)$ definito come

$$e(g) = g \quad \forall g \in G;$$

2. l'inverso di φ in $\text{Aut}(G)$ è proprio l'omomorfismo inverso di φ , definito poco sopra.

A.3 Azione di un gruppo su un insieme

Definizione 6 G denota un gruppo; e l'identità in G . X denota un insieme. Un' **azione (sinistra) di G su X** è l'assegnazione di un'applicazione

$$a, x \mapsto a.x : G \times X \rightarrow X$$

con le proprietà

1. $e.x = x$, per ogni $x \in X$;
2. $a.(b.x) = (ab).x$, per tutti gli $a, b \in G$ e per ogni $x \in X$.

Se è definita un'azione di G su X , si dice anche che X è un **G -spazio**. E' del tutto evidente che se X è un G -spazio ed H è un sottogruppo di G , X è anche un H -spazio, in maniera naturale.

Deve essere sottolineato che, per ogni fissato a in G , l'applicazione

$$x \mapsto a.x : X \rightarrow X$$

è **biiettiva**. Infatti, le due applicazioni

$$\begin{aligned} x &\mapsto a.x : X \rightarrow X \\ x &\mapsto a^{-1}.x : X \rightarrow X \end{aligned}$$

sono l'una l'inversa dell'altra, quindi sono entrambe biettive.

Definizione 7 Se X è un G -spazio, l'insieme

$$\mathcal{O}_x := \{a.x : a \in G\}, \quad x \in X$$

viene detto l' **orbita** di x (rispetto all'azione di G). L'insieme

$$G_x := \{a \in G : a.x = x\}, \quad x \in X$$

viene detto lo **stabilizzatore** (o il **sottogruppo di stabilità**) di x .

(Mostrate per esercizio che G_x è un sottogruppo di G .)

Definizione 8 Se X è formato da una sola orbita, si dice che X è **transitivo**, o che G agisce **transitivamente** su X .

Se X è un G -spazio e x, y sono elementi di X si può definire una relazione di equivalenza ponendo

$$x \sim y \quad \text{quando } y \text{ appartiene a } \mathcal{O}_x$$

E' essenziale convincersi che \sim è una **relazione di equivalenza** in X .

1. E' **riflessiva**. Evidentemente $x \in \mathcal{O}_x$

2. E' **simmetrica** . Se $y \in \mathcal{O}_x$, si ha che $y = a.x$ per un qualche $a \in G$; allora si ha anche

$$a^{-1}.y = a^{-1}.(a.x) = (a^{-1}a).x = e.x = x$$

e quindi $x \in \mathcal{O}_y$.

3. E' **transitiva** . Se $y \in \mathcal{O}_x$ e $z \in \mathcal{O}_y$, si ha $y = a.x$ e $z = b.y$, con a, b opportuni elementi di G . Allora è anche

$$z = b.y = b.(a.x) = (ba).x$$

quindi $z \in \mathcal{O}_x$.

Dal momento che per i punti di X l'appartenenza alla stessa orbita è una relazione di equivalenza, se ne deduce che le orbite (in X , rispetto all'azione di G) costituiscono una *partizione di X in insiemi disgiunti* . In altre parole, *ogni* elemento di X appartiene ad una qualche orbita e *non può* appartenere a due orbite *diverse* .

Supponiamo che X e X' siano entrambe G -spazi (notate che si potrebbe avere questa situazione anche nel caso in cui X e X' siano lo stesso insieme, sul quale sono definite due diverse azioni di G). Supponiamo che sia assegnata un'applicazione

$$\varphi: X \rightarrow X';$$

diremo che φ è un **G -morfismo** (o che φ è **equivariante**) quando si ha

$$a.\varphi(x) = \varphi(a.x)$$

per ogni $a \in G$ e per ogni $x \in X$. Se φ è biettiva si dice che le due azioni di G sono **isomorfe** o che i due G -spazi sono isomorfi.

A.4 Classi laterali, classi di coniugazione

Ci sono tre importanti azioni di un gruppo G su se stesso (a, g denotano elementi di G):

- $a.g := ag$ azione **regolare sinistra**
- $a.g := ga^{-1}$ azione **regolare destra**
- $a.g := aga^{-1}$ azione **aggiunta** (o **interna**)

ove le azioni di a su g , che compaiono nei membri di sinistra sono definite, in termini della moltiplicazione in G , dai membri di destra.

Notiamo che le azioni regolare destra e sinistra di G sono tra loro isomorfe, l'isomorfismo essendo definito dall'applicazione

$$g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G.$$

Se H è un sottogruppo di G , possiamo considerare G come un H -spazio, rispetto alle restrizioni delle azioni sopra definite. Consideriamo innanzitutto le orbite rispetto alle azioni regolari destra e sinistra di H su G .

1. Se $g \in G$ ed H è un sottogruppo di G , l'orbita di g , rispetto all'azione regolare *sinistra* di H su G è data da

$$\{h.g = hg : h \in H\}.$$

Quest'orbita viene denotata con Hg e viene detta una **classe laterale destra** (o un **laterale destro** di H in G).

2. L'orbita di g rispetto all'azione regolare *destra* di H su G è data da

$$\{h.g = gh^{-1} : h \in H\}.$$

Quest'orbita viene denotata con gH e viene detta una **classe laterale sinistra** (o un **laterale sinistro**) di H in G ¹.

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente l'insieme delle classi laterali sinistre (o destre) costituisce una partizione di G in *insiemi disgiunti*.

L'insieme delle classi laterali sinistre viene denotato con G/H ; l'insieme delle classi laterali destre viene denotato con H/G . Deve essere sottolineato che gli elementi di G/H (o di H/G) sono *sottoinsiemi* di G ; inoltre, ogni $a \in gH$ definisce lo stesso laterale, cioè

$$aH = gH \quad \text{se } a \in gH.$$

Se G è un gruppo *finito* ed H è un sottogruppo di G , anche H è finito. Inoltre, ogni laterale, gH , di H contiene esattamente $|H|$ elementi. Infatti, se si ha

$$gh = gk, \quad h, k \in H,$$

allora è anche

$$g^{-1}gh = g^{-1}gk \Rightarrow h = k.$$

Ciò mostra che gH contiene $|H|$ elementi distinti. Dal momento che i laterali sinistri di H partizionano G in insiemi disgiunti, ciascuno dei quali contiene $|H|$ elementi, se ne deduce che

$$|G| / |H| \quad \text{è un intero}$$

questa conclusione è nota come **Teorema di Lagrange**).

Una proprietà fondamentale è che il gruppo G *agisce transitivamente* su G/H . Se $g \in G$ e $aH \in G/H$, si definisce l'azione di g su aH ponendo

$$g.(aH) = gaH.$$

E' necessario verificare che la definizione sia ben posta, nel senso seguente: se si definisce la classe laterale aH usando un altro elemento b (cioè se $b \in aH$, e si ha $bH = aH$) allora è vero che $gaH = gbH$? La risposta è **sì**, in quanto

$$b = ah \quad \text{con } h \in H$$

¹Si noti lo scambio di ruoli tra gli aggettivi destro e sinistro.

per cui

$$gbH = gahH = gaH ;$$

(si ha infatti $hH = H$, come insiemi, se H è un sottogruppo e $h \in H$). In questo modo, si è definita un'azione di G su G/H . Questa azione è transitiva. Infatti, dati

$$aH, bH \in G/H$$

si ha $ba^{-1} \in G$, per cui

$$ba^{-1} \cdot (aH) = bH.$$

Quando G/H è visto come spazio sui cui G opera transitivamente, viene detto lo **spazio omogeneo** G/H .

Gli spazi omogenei G/H (al variare di H tra i sottogruppi di G) sono i modelli di tutti gli spazi su cui G opera transitivamente. E' importante capire questa proprietà. Supponiamo che X sia un qualunque G -spazio transitivo. Fissiamo un punto $x_0 \in X$. Denotiamo con G_0 il sottogruppo di stabilità di x_0 . Vogliamo dimostrare che esiste una biiezione tra X e G/G_0 , in maniera tale che questi due spazi sono isomorfi come G -spazi.

1. Dato il laterale gG_0 , un qualunque suo elemento è della forma

$$gh, \quad h \in G_0$$

e si ha

$$gh.x_0 = g.x_0 .$$

Ogni elemento del laterale gG_0 manda x_0 in gx . Quindi è ben definita l'applicazione

$$gG_0 \mapsto g.x_0 : G/G_0 \rightarrow X$$

2. Dato $x \in X$, dal momento che X è un G -spazio transitivo, esiste $g \in G$ tale che $g.x_0 = x$. Se anche $a \in G$ è tale che $a.x_0 = x$, si ha

$$\begin{aligned} (g^{-1}a).x_0 &= g^{-1} \cdot (a.x_0) = \\ &= g^{-1}.x = g^{-1} \cdot (g.x_0) = \\ &= (g^{-1}g).x_0 = x_0 , \end{aligned}$$

per cui $g^{-1}a = h \in G_0$ e $a = g.h$. Ciò mostra che g e a sono elementi della stessa classe laterale; è cos`I ben definita l'applicazione

$$x = g.x_0 \mapsto gG_0 : X \rightarrow G/G_0 .$$

E' immediato verificare che le applicazioni definite nei punti 1 e 2 precedenti sono l'una l'inversa dell'altra, come applicazioni tra insiemi, e quindi definiscono una biiezione tra X e G/G_0 . Questa corrispondenza definisce un G -morfismo di G -spazi. Infatti, se denotiamo con φ_{x_0} l'applicazione

$$\varphi_{x_0}(gG_0) = g.x_0 ,$$

si ha, per ogni $a \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}(a.(gG_0)) &= \varphi_{x_0}(ag G_0) = \\ &= ag.x_0 = a.(g.x_0) = \\ &= a.\varphi_{x_0}(gG_0) \end{aligned}$$

Definizione 9 *Si definisce un'applicazione*

$$p : G \rightarrow G/H$$

ponendo, per ogni $g \in G$

$$p(g) := gH .$$

E' chiaro che p è un'applicazione *surgettiva*, dal momento che le classi laterali di H costituiscono una *partizione di tutto* G in insiemi disgiunti. L'applicazione p viene detta la **proiezione canonica** di G su G/H .

Definizione 10 *Le orbite degli elementi di G , rispetto all'azione aggiunta di G su se stesso, vengono dette le **classi di coniugazione** in G .*

Esplicitamente, $a, b \in G$ sono nella stessa classe di coniugazione se esiste $g \in G$ tale che

$$a = gbg^{-1} .$$

Le classi di coniugazione di G costituiscono una partizione di G in insiemi disgiunti.

La classe di coniugazione che contiene l'identità e consiste soltanto di un elemento, dal momento che

$$geg^{-1} = e , \quad \text{per ogni } g \in G .$$

Differenti classi di coniugazione non contengono, necessariamente, lo stesso numero di elementi.

Se G è *finito*, il numero di elementi in ciascuna classe *divide* $|G|$.

A.5 Sottogruppi normali.

Teorema degli omomorfismi.

Definizione 11 *Un sottogruppo N di G viene detto **normale** (o **invariante**) se, per ogni $a \in G$ si ha*

$$aN a^{-1} = N \quad (\text{come insiemi}).$$

Equivalentemente, N è normale se e solo se

$$aN = Na \quad (\text{come insiemi}) \quad \forall a \in G.$$

In altre parole per un sottogruppo normale N non c'è distinzione tra i laterali destri e sinistri di N in G .

Commenti alla definizione

1. Se G è abeliano, ogni suo sottogruppo è normale.
2. E' sufficiente che sia, per ogni $a \in G$,

$$aN a^{-1} \subset N$$

affinchè N sia normale.

Infatti, dato un qualunque $n \in N$, ed $a \in G$, si ha

$$n = a a^{-1} n a a^{-1} = a (a^{-1} n a) a^{-1};$$

d'altra parte

$$a^{-1} n a \in N, \quad \text{se } n \in N^2$$

allora

$$a^{-1} n a = n' \in N$$

e

$$n = a n' a^{-1}, \quad n' \in N \Rightarrow n \in a N a^{-1}.$$

Se N è un sottogruppo normale di G , si può definire un'operazione sull'insieme, G/N , dei laterali (sinistri o destri, è lo stesso) di N in maniera tale da renderlo un gruppo.

Consideriamo due elementi di G/N ; sono della forma

$$aN \quad bN \quad a, b \in G.$$

E' naturale cercare di definire il prodotto tra di essi come la classe laterale

$$(ab)N$$

Il punto è che aN e bN possono essere definite anche come

$$aN = a'N, \quad a' \in aN \quad ; \quad bN = b'N, \quad b' \in bN$$

Si ha

$$a' = ah, \quad h \in N \quad , \quad b' = bk, \quad k \in N,$$

²Per ipotesi è $a N a^{-1} \subset N$

per cui

$$a'b'N = \{a'b'n : n \in N\} = \{ahbkn : n \in N\}.$$

Dal momento che N è normale si ha

$$kb = bk'$$

per un qualche $k' \in N$, per cui

$$\begin{aligned} a'b'N &= \{abk'h'n : n \in N\} = \{abn : n \in N\} = \\ &= abN. \end{aligned}$$

Si capisce, cos`I, il motivo per cui G/H non è, in generale, un gruppo, se H è un sottogruppo qualunque, non normale.

Notiamo che nel gruppo G/N

1. l'identità è N
2. l'inverso di aN è $a^{-1}N$.

Se G è finito anche N è finito e si ha

$$|G/N| = |G| / |N|.$$

Nel paragrafo precedente abbiamo definito la proiezione canonica

$$p: G \longrightarrow G/H$$

come

$$p(a) = aH.$$

Nel caso H sia un sottogruppo normale N allora p è un omomorfismo (surgettivo) di gruppi. Infatti

$$p(ab) = abN = (aN)(bN) = p(a)p(b);$$

p viene detto l'**omomorfismo canonico** di G su G/N .

Supponiamo che

$$\varphi: G \longrightarrow G'$$

sia un *omomorfismo*. Abbiamo visto come $\ker \varphi$ sia un sottogruppo di G . In effetti, è un sottogruppo *normale*. Per verificarlo, è sufficiente accertarsi che

$$\begin{aligned} \varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a)^{-1} = \varphi(a)e'\varphi(a)^{-1} = e' \\ &\Rightarrow aka^{-1} \in \ker \varphi. \end{aligned}$$

Consideriamo ancora un omomorfismo

$$\varphi: G \longrightarrow G';$$

denotiamo

$$\ker \varphi = K.$$

Allora K è normale in G . Definiamo

$$\varphi' : G/K \longrightarrow G'$$

ponendo

$$\varphi'(aK) := \varphi(a), \quad a \in G.$$

La definizione è ben posta; infatti tutti gli elementi della stessa classe laterale aK sono mandati da φ nello stesso elemento in G' :

$$\varphi(aK) = \varphi(a)\varphi(k) = \varphi(a), \quad \text{per ogni } k \in K.$$

L'applicazione φ' è evidentemente un *omomorfismo* di gruppi; è iniettiva, infatti

$$\begin{aligned} \ker \varphi' &= \{aK \in G/K : \varphi'(aK) = e'\} = \\ &= \{aK \in G/K : \varphi(a) = e'\} = \\ &= \{aK \in G/K : a \in K\} = K. \end{aligned}$$

Notiamo che, per costruzione, si ha

$$\varphi = \varphi' \circ p;$$

otteniamo quindi il

Teorema 3 (degli omomorfismi) *ogni omomorfismo si fattorizza canonicamente nella composizione dell'omomorfismo canonico p (che è surgettivo) con l'omomorfismo φ' (che è iniettivo).*

A.6 Prodotti semidiretti e diretti

Lemma 9 *Supponiamo che G sia un gruppo, N sia un sottogruppo normale di G e che H sia un sottogruppo di G . Supponiamo che $G = NH$ ³. Allora sono tra loro equivalenti:*

1. $N \cap H = \{e\}$
2. ogni $g \in G$ è esprimibile in maniera unica come prodotto

$$g = nh, \quad n \in N, h \in H.$$

³In altre parole: si sta supponendo che ogni elemento di G possa venire espresso, in qualche modo, come prodotto di un elemento di N per un elemento di H

Dimostrazione 1) \Rightarrow 2). Supponiamo

$$g = n_1 h_1 = n_2 h_2, \quad n_1, n_2 \in N, \quad h_1 h_2 \in H;$$

$$g \cdot g^{-1} = e \Rightarrow n_1 h_1 (n_2 h_2)^{-1} = e = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1}.$$

Usando il fatto che N è normale, si ha che

$$e = n_1 m h_1 h_2^{-1}, \quad m \in N.$$

Si ha: $h_1 h_2^{-1} \in H$, dal momento che H è un sottogruppo; inoltre $h_1 h_2^{-1} \in N$, dal momento che è l'inverso di $n_1 m \in N$; allora

$$h_1 h_2^{-1} = e \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Ancora,

$$\begin{aligned} e &= n_1 h_1 (n_2 h_1)^{-1} = n_1 h_1 h_1^{-1} n_2 = n_1 n_2 \\ &\Rightarrow n_1 = n_2. \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 1) Supponiamo $a \in N \cap H$; allora si ha

$$e = a a^{-1}, \quad a \in N, \quad a^{-1} \in H.$$

Dal momento che è $e = e \cdot e$, si avrebbe che e è esprimibile, come prodotto di N con uno di H , in due maniere diverse; ciò è assurdo, a meno che non sia $a = e$. ■

Definizione 12 Se N ed H sono sottogruppi di G , se N è normale in G , se $G = N \cdot H$ e se una qualunque delle due condizioni equivalenti contenute nel lemma precedente è soddisfatta, diremo che G è il **prodotto semidiretto** di N ed H .

Se G è il prodotto semidiretto di N ed H e $a, b \in G$, si avrà

$$\begin{aligned} a &= n h \quad n \in N, \quad h \in H \\ b &= p k \quad p \in N, \quad k \in H; \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} ab &= n h p k = n h p h^{-1} h k = \\ &= (n h p h^{-1}) h k. \end{aligned}$$

Dal momento che N è normale, $h p h^{-1}$ è in N , e l'uguaglianza

$$ab = (n h p h^{-1}) h k$$

esprime l'unica decomposizione di ab come prodotto di un elemento di N per un elemento di H . Se anche H è normale, si ha

$$ab = n h p k = n p p^{-1} h p k = (n p) (p^{-1} h p k).$$

Dal momento che H è normale, $p^{-1}hp \in H$; si avrebbero, in questo modo, due diverse decomposizioni di ab . Allora è

$$hph^{-1} = p \quad , \quad p^{-1}hp = h$$

e

$$ab = (np)(hk) .$$

In tal caso si dice che G è il **prodotto diretto** di N ed H .

Teorema 4 *Supponiamo che N ed H siano sottogruppi di G e che N sia normale. I fatti seguenti sono tra loro equivalenti:*

1. G è il prodotto semidiretto di N ed H ,
2. la restrizione dell'omomorfismo canonico, $p : G \rightarrow G/N$, ad H è un isomorfismo.

Dimostrazione 1) \Rightarrow 2) Mostriamo che $p : H \rightarrow G/N$ è surgettivo. Sia gn un qualunque elemento di G/N , e sia gn un qualunque elemento di gN ; allora (per l'ipotesi 1)

$$gn = mh \quad , \quad m \in N, h \in H$$

Ciò significa, dal momento che N è normale, che g ed h sono nello stesso laterale di N . Allora

$$p(h) = p(g) = gN \quad , \quad h \in H.$$

Mostriamo che $p : G \rightarrow G/N$ è iniettiva. Si ha

$$\ker p = \{h \in H : p(h) = N\};$$

allora, da $p(h) = hN$, se $h \in \ker p$, si ha

$$\begin{aligned} hn &= n' \quad , \quad n, n' \in N \\ \Rightarrow h \in N \quad h &= e. \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 1) Supponiamo che sia $a \in N \cap H$. Allora è

$$p(a) = N \quad \text{poichè } a \in N .$$

Dal momento che $a \in H$ e $p : H \cong G/N$ si ha che $a = e$. Allora G è prodotto semidiretto di N ed H . ■