

Il problema della primitive.

Supponiamo che I sia un intervallo aperto di \mathbb{R} e che v sia una fissata distribuzione su I . Ogni u in $\mathcal{D}'(I)$ che sia soluzione dell'equazione

$$Du = v$$
 viene detta una primitiva di v (su I). Ci proponiamo di descrivere esplicitamente tutte le primitive di un'assegnata distribuzione v .

Per semplificare l'esposizione, daremo la dimostrazione solo nel caso $I = \mathbb{R}$. Dei risultati più importanti, riporteremo gli enunciati nel caso di un intervallo I qualunque.

Innanzi tutto, esamineremo alcune proprietà tecniche delle funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

1. Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è tale che

$$\varphi = \varphi', \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

allora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Inversamente, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0,$$

allora la funzione

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

ψ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$; più precisamente, se ψ è tale che

$$\text{supp } \psi \subset [-a, a]$$

allora ψ è anche

$$\text{supp } \psi \subset [-a, a];$$

inoltre si ha

$$\psi' = \psi.$$

In conclusione, le funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ che sono derivate di altre funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ sono tutte e sole quelle il cui integrale su \mathbb{R} è nullo.

2. Se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\psi = \varphi'$$

allora φ' è l'unica funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ con queste proprietà. Infatti, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ha le proprietà

$$f' = \varphi' = \psi$$

allora necessariamente

$$(f - \varphi)' = 0 \Rightarrow f = \varphi + c, \quad c \in \mathbb{C};$$

ma, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, deve essere $c = 0$.

In altre parole, l'applicazione

$$\varphi \mapsto \varphi': C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$$

è iniettiva. Dal punto 1, la sua immagine è costituita dalle funzioni a integrale nullo.

Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ha integrale nullo, l'unico elemento ψ di $C_c^\infty(\mathbb{R})$, tale che

$$\varphi' = \varphi$$

è la funzione

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

3. Fissiamo, una volta per tutte, una funzione $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con le proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt = 1.$$

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha l'uniche uguaglianza

$$\varphi(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0(x) + \left(\varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0(x) \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che è

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0(x) \right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Quindi, la funzione

$$\varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0(x)$$

è la derivata di un'unica funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R})$, che denoteremo ψ_φ (che dipende dalla scelta di φ_0)

$$\psi_\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \left[\varphi(y) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0(y) \right] dy$$

$$\psi_\varphi'(x) = \varphi(x).$$

Mostriamo che si ha

$$\begin{aligned} \psi_{\varphi'}(x) &= \int_{-\infty}^x \left[\varphi'(y) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) dt \right) \varphi_0(y) \right] dy = \\ &= \int_{-\infty}^x \varphi'(y) dy = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. In questo modo, abbiamo definito un'applicazione

$$\varphi \mapsto \psi_\varphi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$$

(che dipende dalla scelta di φ_0 fissata) che è, ovviamente lineare; è anche continua. Infatti, se $a > 0$ è tanto grande che

$$\text{supp } \varphi, \text{supp } \varphi_0 \subset [-a, a],$$

si ha anche

$$\text{supp } \psi_\varphi \subset [-a, a].$$

Soltanto, se $b > 0$ è tale che

$$\text{supp } \varphi_0 \subset [-b, b],$$

si ha

$$|\psi_\varphi(x)| \leq 2b(1 + \sup|\varphi_0|) \cdot \sup|\varphi|$$

$$|\psi_\varphi^{(n)}(x)| \leq \sup|\varphi^{(n-1)}| + 2b \sup|\varphi_0^{(n-1)}| \cdot \sup|\varphi|.$$

Quanto disse quell'incertezza mostrano che, se $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ è una successione di elementi di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi_j \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

allora

$$\psi_{\varphi_j} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

A questo punto possiamo trovare tutte le soluzioni u dell'

equazione

$$Du = v$$

in cui v è un'assegnata distribuzione su \mathbb{R} .

L'applicazione

$$\varphi \mapsto -\langle v, \psi_\varphi \rangle : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

definisce una distribuzione su \mathbb{R} (cfr. il punto 4 precedente)
Dimosteremo con u_0 queste distribuzioni; quindi, abbiamo

$$\langle u_0, \varphi \rangle = - \langle v, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Si ha:

$$\langle \partial u_0, \varphi \rangle = - \langle u_0, \varphi' \rangle = \langle v, \varphi' \rangle = \langle v, \varphi \rangle$$

per cui

$$\partial u_0 = v.$$

In questa maniera, abbiamo costruito una soluzione dell'equazione

$$\partial u = v$$

In conclusione, possiamo mostrare il teorema seguente.

Teorema Le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che

$\partial u = v$
sono tutte e sole quelle della forma

$$u = u_0 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

In particolare, le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che

$\partial u = 0$
sono tutte e sole le costanti.

Dimostrazione. Se

$$u = u_0 + c$$

allora

$$\partial u = \partial(u_0 + c) = \partial u_0 = v$$

Inveramente, se $\partial u = v$, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \langle u, \varphi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0 + \varphi \varphi' \rangle = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \langle u, \varphi_0 \rangle + \langle u, \varphi \varphi' \rangle \\ &= \langle (\langle u, \varphi_0 \rangle), \varphi \rangle - \langle \partial u, \varphi \varphi \rangle \\ &= \langle (\langle u, \varphi_0 \rangle), \varphi \rangle - \langle v, \varphi \varphi \rangle \\ &= \langle (\langle u, \varphi_0 \rangle), \varphi \rangle + \langle u_0, \varphi \rangle \\ &= \langle u_0 + c, \varphi \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$u = u_0 + c.$$

□

Il teorema precedente si generalizza immediatamente

te sostituendolo a \mathbb{R} un qualunque intervallo aperto I .
Si ha quindi:

Teorema Se v è una assegnata distribuzione in $\mathcal{D}'(I)$, allora
esistono distribuzioni u in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che

$$\mathcal{D}u = v.$$

Se u_1 e u_2 sono due elementi di $\mathcal{D}'(I)$ con queste proprietà, allora

$$u_1 - u_2 = c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

In particolare le distribuzioni in $\mathcal{D}'(I)$ tali che

$$\mathcal{D}u = 0$$

sono tutte e sole le costanti.

Una conseguenza importante del Teorema precedente è il corollario che segue, che è un caso particolare di un teorema molto profondo, noto come teorema di regolarità ellittica.

Corollario (di regolarità ellittica)

Se $v \in \mathcal{D}'(I)$ è soluzione dell'equazione

$$\mathcal{D}v + f v = g$$

in cui

$$f \in C^\infty(I), \quad g \in C^1(I)$$

allora

$$v \in C^1(I)$$

e v è soluzione dell'equazione

$$v' + f v = g.$$

Dimostrazione. Sufficientemente, innanzi tutto, che se $f=0$

Del momento che g ha una primitiva

$$g = Q', \quad Q \in C^1(I)$$

e che

$$\mathcal{D}(v - Q) = \mathcal{D}v - Q' = g - g = 0,$$

il teorema sulle primitive delle distribuzioni, ci assicura che

$$v - Q = c \Rightarrow v = Q + c \in C^1(I).$$

Consideriamo ora il caso $f \neq 0$. Denotiamo F una qualunque primitiva di f , su I . Denotiamo

$$E(x) = \exp(F(x)), \quad x \in I$$

Allora $E \in C^\infty(I)$, e

$$E(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

Si ha allora

$$\partial(Ev) = E \partial v + E'v$$

$$\{ E' = f(E) \}$$

$$= E \partial v + f E v$$

$$= E(\partial v + f v)$$

$$\text{(dal momento che } \partial v + f v = g \text{)}$$

$$= E \cdot g \in C^1(I).$$

Allora, per la prima parte della dimostrazione

$$Ev \in C^1(I)$$

Dal momento che $E \neq 0$, si ha

$$v \in C^1(I).$$

Poiché le equazioni differenziali di ordine più alto sono riducibili a sistemi del primo ordine, si può dedurre il risultato seguente □

Corollario. Se $u \in \mathcal{D}'(I)$ è tale che

$$\partial^n u + f_{n-1} \partial^{n-1} u + \dots + f_0 u = g,$$

in cui $g \in C^1(I)$ e $f_0, \dots, f_{n-1} \in C^\infty(I)$, allora

$$u \in C^1(I)$$

e l'equazione è soddisfatta in senso classico.

La generalizzazione dei corollari precedenti alle distribuzioni in \mathbb{R}^n è altamente non banale. Citiamo soltanto (senza dimostrazione) un utile analogo (più

debole) del corollario di regolarità ellittica:

Se f e g sono funzioni continue su \mathbb{R}^n e

$$\partial_j f = g \quad \text{in } D'(\mathbb{R}^n)$$

allora la derivata parziale classica

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

esiste per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed è uguale a $g(x)$.