

Soluzioni fondamentali e problema di Cauchy

1. Supponiamo che L denoti un operatore differenziale su \mathbb{R}^n a coefficienti costanti

$$L(\partial) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha,$$

una distribuzione

$$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

tale che

$$L(\partial)E = \delta, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

viene detta (una) soluzione fondamentale dell'operatore differenziale $L(\partial)$.

Notiamo che se E_0 è un elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa l'equazione

$$L(\partial)E_0 = 0,$$

sicché

$$\begin{aligned} L(\partial)(E_0 + E) &= L(\partial)E_0 + L(\partial)E = \\ &= 0 + \delta = \\ &= \delta; \end{aligned}$$

quindi anche $(E_0 + E)$ è una soluzione fondamentale di $L(\partial)$.

Supponiamo che E sia una soluzione fondamentale di $L(\partial)$ e che E sia una distribuzione temperata. Allora anche $L(\partial)E$ è temperata, e si ha

$$(L(\partial)E)^\wedge = \hat{\delta}, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);$$

quindi

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Le sostituiamo

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

concludiamo che \hat{E} è soluzione dell'equazione algebrica

$$L(i\xi) \hat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Inversamente, se $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è tale che

$$L(i\xi) \hat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}},$$

allora gli stessi passaggi precedenti ci portano a concludere che

$$(L(\partial)E)^\wedge = \delta^\wedge$$

$$\Rightarrow L(\partial)E = \delta,$$

cioè E è una soluzione fondamentale di $L(\partial)$.

Il problema di trovare una soluzione fondamentale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ di ~~un~~ un operatore differenziale a coefficienti costanti è così risolto al problema di risolvere in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'equazione (algebraica)

$$P(\xi)u = 1$$

in cui P è un arbitrario polinomio (su \mathbb{R}^n).

È evidente che una soluzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ di questa equazione deve coincidere (se esiste) con la funzione

$$1/P(\xi)$$

al di fuori dell'insieme

$$V_P = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0 \}.$$

Se $V_P \neq \emptyset$ è immediato convincersi che non c'è unicità della soluzione. Possiamo al caso $n=1$; le distribuzioni

$$\frac{1}{\xi + i0}, \quad \frac{1}{\xi - i0}, \quad \xi^{-1} \text{ (valore principale)}$$

sono tutte soluzioni (temperate) dell'equazione

$$\xi \cdot u = 1.$$

Se la funzione

$$\frac{1}{P(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus V_P$$

è localmente integrabile in \mathbb{R}^n allora la distribuzione

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\xi)}{P(\xi)} d^n \xi$$

è una soluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione

$$P(\xi) \cdot u = 1.$$

Tuttavia, se $1/P(\xi)$ non è localmente integrabile, il problema di costruire una soluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ di questa equazione può essere non banale.

È un risultato profondo, dovuto a Hörmander, che l'equazione ha sempre almeno una soluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

* * *

Supponiamo che F sia un'assegnata distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

L'equazione

$$L(\partial)u = F, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

può essere risolta usando una soluzione fondamentale dell'operatore $L(\partial)$.

Supponiamo che E denoti una fissata soluzione fondamentale per $L(\partial)$. Introduciamo la notazione

$$\mathcal{L}(E) = \{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : E * v \text{ è definita in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \}.$$

Teorema. Se $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è tale che

$$F \in \mathcal{L}(E),$$

allora l'equazione

$$L(\partial)u = F$$

ha soluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ~~data da~~ data da

$$u = E * F.$$

Tale soluzione è l'unica in $\mathcal{L}(E)$.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} L(\partial)(E * F) &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha (E * F) \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha E \right) * F \\ &= (L(\partial)E) * F \\ &= \delta * F \\ &= F \end{aligned}$$

Si mostra che $E * F$ è soluzione dell'equazione

$$L(\partial)u = F.$$

Per mostrare l'unicità della soluzione, è sufficiente mostrare che l'unica soluzione in $\mathcal{L}(E)$ dell'equazione omogenea

$$L(\partial)u = 0$$

è $u = 0$.

Infatti, supponiamo $u \in \mathcal{L}(E)$ e $L(\partial)u = 0$. Si ha

$$u = u * \delta = u * L(\partial)E = L(\partial)u * E = 0.$$

□

Esempi di alcune soluzioni fondamentali degli operatori dif-

ferenziali

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad \text{Laplaciano in } \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right), \quad \text{operatore di D'Alembert "delle onde", in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right), \quad \text{operatore di Fourier "del calore", in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

sono discussi in note a parte.

* * *

2. In questo paragrafo discuteremo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

Innanzi tutto stabiliamo alcune notazioni.

Dimosteremo i punti di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con

$$(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Considereremo l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla_x^2 u = F(x, t) \quad (c > 0)$$

in cui

$$\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Uteremo anche il simbolo □ per denotare l'operatore dif. ferenziale a coefficienti costanti:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla_x^2$$

In tutto il seguito intenderemo sempre

$$n \geq 2.$$

Infine, denotiamo

$$D = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > 0 \}$$

$$\bar{D} = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq 0 \}$$

$$V_0 = \{ (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$D_- = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 0 \}$$

Nel seguito del paragrafo useremo la soluzione fondamentale G_{ret} che è discussa ampiamente in un altro set di note - Ricordiamo che G_{ret} è definita dall'uguaglianza

$$\nabla_x G_{ret} = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{c|\xi|} H(t) \sin c t |\xi|$$

Il supporto di G_{ret} coincide con il cono di luce futuro chiuso in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\text{supp } G_{ret} = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| = ct, t \geq 0 \}$$

La proprietà fondamentale di G_{ret} è:

$$\text{se } v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \text{ e } v|_{D_-} = 0, \text{ allora } v \in \mathcal{L}(G_{ret})$$

(ricordiamo: $v \in \mathcal{L}(G_{ret})$ significa che la convoluzione $G_{ret} * v$ è definita in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$).

Usando queste proprietà si può mostrare la proposizione che segue, che è di interesse di per se stesse.

Proposizione. G_{ret} è l'unica ~~la~~ soluzione fondamentale di \square che si annulla quando è ristretta a D_- .

Dimostrazione. Sufficiente che E abbia le proprietà

$$\square E = \delta, \quad E|_{D_-} = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

Allora $E \in \mathcal{L}(G_{ret})$ e quindi anche $E * G_{ret} \in \mathcal{L}(G_{ret})$. Si ha

$$(E - G_{ret}) =$$

$$= (E - G_{n,t}) * \delta =$$

$$= (E - G_{n,t}) * [I] G_{n,t} =$$

(si usa la proprietà che $(E * G_{n,t}) * G_{n,t}$ è definita in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$)

$$= \square \left((E - G_{n,t}) * G_{n,t} \right) =$$

$$= \left(\square (E - G_{n,t}) \right) * G_{n,t} =$$

$$= (\delta - \delta) * G_{n,t} = 0.$$

Da cui $E - G_{n,t} = 0$, $E = G_{n,t}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. □

Il problema di Cauchy classico per l'equazione delle onde può essere posto nelle maniere seguenti:

1) $u \in C^2(D)$

2) $\square u = F(x,t)$

in cui F è una funzione (almeno) continua su \bar{D}

3) u si estende a una funzione continua su \bar{D}

$\frac{\partial u}{\partial t}$ si estende ad una funzione continua su \bar{D}

4) si hanno le condizioni iniziali

$$u|_{V_0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{V_0} = g(x)$$

in cui f, g sono funzioni (almeno) continue su $V_0 \cong \mathbb{R}^3$.

Vogliamo mostrare come si possa costruire esplicitamente una soluzione per questo problema, pur di assumere opportune ipotesi sulle funzioni F, f, g .

Supponiamo che $u(x,t)$ sia soluzione del problema di Cauchy classico. Definiamo

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{su } \bar{D} \\ 0 & \text{su } D_- \end{cases}, \quad \tilde{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{su } \bar{D} \\ 0 & \text{su } D_- \end{cases}$$

Le funzioni \tilde{u} e \tilde{F} sono definite su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; si ha

$$\tilde{u} \in C_1^{1,2}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - V_0) = C_1^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R} \cdot \{0\})$$

$$\tilde{F} \in C_1^{1,2}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - V_0) = C_1^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R} \cdot \{0\}).$$

Calcoliamo $\square \tilde{u}$ (nel senso delle distribuzioni). Supponiamo che $H(x, t)$ sia una funzione di classe $C_1^{1,2}$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, eccetto che su V_0 , e che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} H(x_1, \dots, x_n, t) = H(x_1, \dots, x_n, 0^+), \text{ sia finita}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(x_1, \dots, x_n, t) = H(x_1, \dots, x_n, 0^-), \text{ sia finita.}$$

Allora si ha

$$\partial_t H \text{ (intesa nel senso delle distribuzioni)} =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \text{ (come funzione definita in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus V_0) +$$

$$+ \text{ la distribuzione } \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \varphi(x_1, \dots, x_n, 0) (H(x, 0^+) - H(x, 0^-))$$

quindi

$$\partial_t H = \frac{\partial H}{\partial t} + (H(x, 0^+) - H(x, 0^-)) \delta_{V_0}$$

Usando queste uguaglianze, si calcola facilmente

$$\partial_t \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + f(x) \otimes \delta(t)$$

$$\partial_t^2 \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + g(x) \otimes \delta(t) + f(x) \otimes \delta'(t)$$

quindi, se u è la soluzione del problema di Cauchy descritto, necessariamente \tilde{u} ~~è soluzione~~ ^{soddisfa} dell'equazione

$$\square \tilde{u} = \tilde{F}(x, t) + g(x) \otimes \delta(t) + f(x) \otimes \delta'(t), \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

D'altra parte, consideriamo l'equazione (distribuzionale)

$$\square v = \tilde{F}(x, t) + g(x) \otimes \delta(t) + f(x) \otimes \delta'(t) \quad (*)$$

Il membro di destra è in $\mathcal{L}(G_{\text{ret}})$; allora possiamo definire

$$\bar{v} = G_{\text{ret}} * (\tilde{F} + g \otimes \delta + f \otimes \delta')$$

La distribuzione \bar{v} ha le proprietà

$$\bar{v}|_{D_-} = 0$$

$$\square \bar{v} = \tilde{F} + g \otimes \delta + f \otimes \delta'$$

Quindi \bar{v} è soluzione dell'equazione (*), ed è l'unica (tra le soluzioni di (*)) che è in $\mathcal{L}(G_{\text{ret}})$. Noi abbiamo mostrato in precedenza che anche \tilde{u} è soluzione dell'equazione (*), ed è anche in $\mathcal{L}(G_{\text{ret}})$ (dal momento che $\tilde{u}|_{D_-} = 0$). Allora deve essere

$$\bar{v} = \tilde{u}, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

In particolare la restrizione

$$\bar{v}|_{D_{\#}}$$

coincide con u su D .

Nel seguito calcoleremo esplicitamente $\bar{v}|_D$ e mostreremo che definisce la soluzione del problema di Cauchy classico, purché F, t, g abbiano opportune proprietà.

* * *
Calcoleremo ora a tre volte i tre addendi che compare in

$$G_{\text{ret}} * (\tilde{F}(x, t) + g(x) \otimes \delta(t) + f(x) \otimes \delta'(t))$$

nel caso particolare $n=3$.

1) $G_{\text{ret}} * \tilde{F}(x, t)$.

Calcoliamo (formalmente) $G_{\text{ret}} * \alpha$, in cui α è localmente integrabile su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Poi esamineremo la scelta particolare

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, si ha

$$\langle G_{\text{ret}} * w, \varphi \rangle =$$

$$= \langle G_{\text{ret}}(x, t) \otimes w(y, \bar{t}), \varphi(x+y, t+\bar{t}) \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \langle w(y, \bar{t}), \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x+y, |x|/c + \bar{t}) \frac{d^3x}{|x|} \rangle =$$

(con il cambio di variabili $x+y = \xi$)

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \langle w(y, \bar{t}), \int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi \varphi(\xi, |\xi-y|/c + \bar{t}) \frac{1}{|\xi-y|} \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} d^3y d^3\xi d\bar{t} w(y, \bar{t}) \varphi(\xi, |\xi-y|/c + \bar{t}) \frac{1}{|\xi-y|} =$$

(cambio di variabili $|\xi-y|/c + \bar{t} = t$)

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} \varphi(\xi, t) \frac{w(y, t - |\xi-y|/c)}{|\xi-y|} d^3y d^3\xi dt,$$

da cui, almeno formalmente, se w è una funzione

$$(G_{\text{ret}} * w)(\xi, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{w(y, t - |\xi-y|/c)}{|\xi-y|} d^3y.$$

Se si sceglie $w = \tilde{F}$, e si tiene conto che $\tilde{F}(x, t) = 0$ se $t < 0$, si ottiene l'uguaglianza, che non è più solo formale (e in cui abbiamo rinominato alcune variabili)

$$(G_{\text{ret}} * \tilde{F})(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|\xi-x| < ct} \frac{F(x, t - |\xi-x|/c)}{|\xi-x|} d^3\xi, \quad t > 0.$$

Con il cambio di variabili $\xi-x = -ct\gamma$, si ottiene anche

$$(G_{\text{ret}} * \tilde{F})(x, t) = \frac{1}{4\pi} t^2 \int_{|\gamma| < 1} \frac{F(x+ct\gamma, t(1-|\gamma|))}{|\gamma|} d^3\gamma, \quad t > 0.$$

2) $G_{\text{ret}} * (g \otimes \delta)$.

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, si ha

$$\langle G_{ret} * (g \otimes \delta), \varphi \rangle =$$

$$= \langle G_{ret}(x, t) \otimes g(z) \otimes \delta(\tau), \varphi(x+z, t+\tau) \rangle$$

$$= \langle G_{ret}(x, t), \langle g(z), \langle \delta(\tau), \varphi(x+z, t+\tau) \rangle \rangle \rangle$$

$$= \langle G_{ret}(x, t), \int_{\mathbb{R}^3} g(z) \varphi(x+z, t) d^3 z \rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{t} \int_{S_{ct}^1} d\sigma_{ct}(x) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 z \varphi(x+z, t) g(z)$$

(nell'integrale in $d^3 z$ effettuiamo il cambio di variabili $x+z=y$)

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \frac{\varphi(y, t)}{t} \int_{S_{ct}^1} d\sigma_{ct} g(y-x)$$

(nell'integrale su S_{ct}^1 , effettuiamo il cambio di variabili $y-x=\xi$, $d\sigma_{ct}(x) = d\sigma_{ct}(\xi)$)

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \varphi(y, t) \frac{1}{t} \int_{|\xi-y|=ct} d\sigma_{ct}(\xi) g(\xi)$$

da cui

$$(G_{ret} * (g \otimes \delta))(x, t) = \frac{\cancel{1}}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi-x|=ct} g(\xi) d\sigma_{ct}(\xi), \quad \text{se } t > 0.$$

con il cambio di variabili $x-\xi = ct\omega$, $\omega \in S_2$, otteniamo anche

$$(G_{ret} * (g \otimes \delta))(x, t) = \frac{\cancel{1}}{4\pi} t \int_{S_2} g(x - ct\omega) d\omega, \quad \text{se } t > 0.$$

$$3) G_{ret} * (f \otimes \delta')$$

Per calcolare $G_{ret} * (f \otimes \delta')$ usiamo le regole di derivazione dei prodotti: $*$ e \otimes , oltre al risultato del punto precedente. Si ha

$$G_{ret} * (f \otimes \delta') = \partial_t (G_{ret} * (f \otimes \delta))$$

$$= \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi-x|=ct} f(\xi) d\sigma_{ct}(\xi) \right), \text{ se } t > 0.$$

Usando anche la seconda rappresentazione trovata al punto 2, si ha anche, per $t > 0$,

$$G_{ret} * (f \otimes \delta') = \partial_t (G_{ret} * (f \otimes \delta))$$

$$= \partial_t \left(\frac{1}{4\pi} t \int_{S'_t} f(x - ct\omega) d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S'_t} f(x - ct\omega) d\omega \right.$$

$$\left. + t \left(\frac{\partial_1 f \cdot (-c\omega_1) + \partial_2 f \cdot (-c\omega_2) + \partial_3 f \cdot (-c\omega_3) \right) d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{S'_t} f(x - ct\omega) d\omega - ct \int_{S'_t} (grad f \cdot \omega) (x - ct\omega) d\omega \right\}$$

In conclusione otteniamo che, per $t > 0$,

$$\bar{v} = G_{ret} (\tilde{F} + g \otimes \delta + f \otimes \delta') =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi-x|=ct} g(\xi) d\sigma_{ct}(\xi) + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi-x|=ct} f(\xi) d\sigma_{ct}(\xi) \right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|\xi-x| < ct} \frac{F(\xi, t - |\xi-x|/c)}{|\xi-x|} d^3 \xi. \quad (*)$$

Noi abbiamo mostrato, in precedenza che

$$\bar{v}|_{\mathcal{D}} = u, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{D}),$$

(u è la soluzione del problema di Cauchy classico). Quindi

per poter concludere che la formula (*) fornisce la soluzione classica dobbiamo mostrare che definisce una funzione in $C^2(D)$ che ha tutti i requisiti richiesti nella soluzione del problema di Cauchy. Per questo è opportuno riscrivere la formula (*) come

$$\begin{aligned}
 & u(x, t) = \left(\bar{F} + g \otimes \delta + f \otimes \delta' \right) = \\
 & = \frac{t^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} \frac{\bar{F}(x + cty, t(1 - |y|))}{|y|} d^3y + \\
 & + \frac{1}{4\pi} t \int_{S'_2} g(x - ctw) dw \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{S'_2} f(x - ctw) dw \\
 & - \frac{ct}{4\pi} \int_{S'_1} (grad f \cdot w)(x - ctw) dw, \quad \text{se } t > 0.
 \end{aligned}$$

Eseminiamo gli addendi uno alla volta.

1) Se $F \in C^2(D)$ e si prolunga con le sue derivate seconde a funzioni continue in \bar{D} , allora

$$x, t \mapsto \frac{t^2}{4\pi} \int_{|y| < 1} \frac{F(x + cty, t(1 - |y|))}{|y|} d^3y$$

è in $C^2(D)$ e si annulla con la sua derivata prima (rispetto a t) per $t=0$. È discusso dai teoremi di derivazione sotto il segno di integrale e di continuità di un integrale dipendente da un parametro.

2) Se $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ allora

$$x, t \mapsto \frac{1}{4\pi} t \int_{S_1} g(x-ctw) d\omega$$

è in $C_1^2(\bar{D})$ (per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale), inoltre, sia la funzione che le sue derivate parziali (fino al secondo ordine) si prolungano ~~in~~ a funzioni continue su \bar{D} (per il teorema di continuità di un integrale) - si ha

$$\left. \frac{1}{4\pi} t \int_{S_1} g(x-ctw) d\omega \right|_{t=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} t \int_{S_1} g(x-ctw) d\omega \right) \right|_{t=0} = g(x)$$

3) Nella stessa maniera, se $f \in C_1^3(\mathbb{R}^3)$

$$x, t \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f(x-ctw) d\omega - \frac{c}{4\pi} t \int_{S_1} (\text{grad} f \cdot w)(x-ctw) d\omega$$

è in $C_1^2(\bar{D})$ ed ha le corrette proprietà iniziali

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f(x-ctw) d\omega - \frac{c}{4\pi} t \int_{S_1} (\text{grad} f \cdot w)(x-ctw) d\omega \right) \Big|_{t=0} = f(x).$$

In conclusione, se si ha

$$F(x, t) \in C^2(\bar{D}), \quad f \in C_1^3(\mathbb{R}^3), \quad g \in C_1^2(\mathbb{R}^3)$$

la formula (di Poisson)

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ \int_{|\xi-x| < ct} \frac{F(\xi, t - |\xi-x|/c)}{|\xi-x|} d^3\xi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \int_{|\xi-x|=ct} g(\xi) d\sigma_{ct}(\xi) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \int_{|\xi-x|=ct} f(\xi) d\sigma_{ct}(\xi) \right) \right\}, \quad t > 0,$$

fornisce la soluzione del problema di Cauchy classico per l'equazione delle onde.

* * *