

Soluzioni fondamentali dell'equazione del calore

L'equazione del calore, in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, è

$$\partial_t u - K \nabla_x^2 u = F(x, t), \quad (K > 0)$$

Dimostriamo anche con P l'operatore differenziale (lineare) a coefficienti costanti:

$$\partial_t - K \nabla_x^2;$$

l'equazione del calore può essere scritta nella forma

$$P u = F.$$

L'operatore P ha una proprietà fondamentale, che assumiamo senza dimostrazione:

le soluzioni dell'equazione

$$P u = 0, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

sono soltanto le soluzioni classiche dell'equazione differenziale

le classiche

$$P u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Non ci sono distribuzioni che sono soluzioni dell'equazione $P u = 0$; ci sono solo funzioni lisce. Un operatore differenziale che abbia queste proprietà viene detto "ipocoellitico". Anche l'operatore di Laplace è ipocoellitico. L'operatore delle onde non lo è; esistono distribuzioni (che non sono funzioni lisce) che sono soluzioni dell'equazione

$$\square u = 0.$$

Quindi due soluzioni fondamentali dell'equazione del calore

$$E_1, \quad E_2$$

differiscono tra esse per una funzione liscia (su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) che

è soluzione classica dell'equazione omogenea,

$$Pu = 0.$$

In questo paragrafo vogliamo discutere la soluzione fondamentale dell'equazione del calore che serve a risolvere il problema di Cauchy per questa equazione.

Una soluzione fondamentale, E , dell'equazione del calore è una soluzione dell'equazione

$$\partial_t E - \kappa^2 \nabla_x^2 E = \delta, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Applicando l'operatore di trasformata di Fourier parziale \mathcal{F}_x ai due membri dell'equazione, si ottiene

$$\mathcal{F}_x(\partial_t E) - \kappa^2 \mathcal{F}_x(\nabla_x^2 E) = \mathcal{F}_x(\delta)$$

$$\partial_t (\mathcal{F}_x E) - \kappa^2 (-|\xi|^2) \mathcal{F}_x E = \frac{1(\xi)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \delta(t)$$

$$\partial_t (\mathcal{F}_x E) + \kappa^2 |\xi|^2 (\mathcal{F}_x E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \delta(t) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

È immediato verificare che la funzione

$$\left(\frac{\mathcal{F}_x E}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\kappa^2 |\xi|^2 t}$$

risolve l'equazione (distribuzionale) per $\mathcal{F}_x E$. Quindi una possibile soluzione fondamentale dell'equazione delle onde è data da

$$\mathcal{F}_x E = \frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\kappa^2 |\xi|^2 t}$$

da cui

$$E(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} (\mathcal{F}_x E).$$

Dal momento che

$$\xi \mapsto \mathcal{F}_x(E)$$

è integrabile su \mathbb{R}^n , la trasformata di Fourier pericoli inversa è l'usuale trasformata inversa della funzione Gaussiana. Noi otteniamo le formule

$$\left(e^{-a|x|^2} \right)^\wedge (\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2a})^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}, \quad a > 0,$$

(che rimane valida anche per $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, per la definizione la radice con il suo valore principale). Usando queste formule

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_{\xi} \left(\frac{1}{x} E \right)^\wedge = \\ &= \frac{1-H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\sqrt{2k^2 t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}} \\ &= \frac{1-H(t)}{(2k\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}}. \end{aligned}$$

Nel seguito, con il simbolo $E(x, t)$ intenderemo sempre queste funzioni.

$E(x, t)$ è localmente integrabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; per $t > 0$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) d^n x = \frac{1}{(2k\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4k^2 t}\right) d^n x$$

~~$$= \frac{1}{(2k\sqrt{\pi t})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4k^2 t}\right) dy$$~~

$$= \left(\frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{4k^2 t}\right) dy \right)^n$$

$$= 1, \quad \text{indipendentemente da } t.$$

La funzione $E(x, t)$ è

$$C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0});$$

in particolare, si può calcolare esplicitamente che per $t > 0$, e $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$P E(x, t) = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

Infine, una proprietà fondamentale di $E(x, t)$ è

$$E(x, t) \rightarrow \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ se } t \downarrow 0.$$

* * *

Vogliamo calcolare esplicitamente che

$$P(E) = \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, si ha

$$\langle P E, \varphi \rangle =$$

$$= \langle \partial_t E, \varphi \rangle - \kappa^2 \langle \nabla_x^2 E, \varphi \rangle =$$

$$= - \langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle - \kappa^2 \langle E, \nabla_x^2 \varphi \rangle =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} E(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \kappa^2 \nabla_x^2 \varphi \right) d^n x dt =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \times]\varepsilon, +\infty[} E(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \kappa^2 \nabla_x^2 \varphi \right) d^n x dt =$$

(calcolando gli integrali multipli come integrali iterati)

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt E(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} d^n x E(x, t) \nabla_x^2 \varphi \right] =$$

calcoliamo separatamente i due integrali. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt E(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} =$$

(integrando in t , per parti)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left[E(x, t) \varphi \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \frac{\partial E}{\partial t} \varphi \right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \left[-E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \frac{\partial E}{\partial t} \varphi \right].$$

Inoltre (facciamo il calcolo per $n=2$, per fissare le idee)

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 E(x_1, x_2, t) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 E(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 E(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right]$$

(integrando per parti: due volte, in x_1 e x_2)

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} E \cdot \varphi + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} E \cdot \varphi \right]$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x \nabla_x^2 E \cdot \varphi.$$

Analogamente, si ha

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} d^n x E(x, t) \nabla_x^2 \varphi = \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \nabla_x^2 E(x, t) \cdot \varphi.$$

Per cui

$$\langle PE, \varphi \rangle =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} -E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x - \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial E}{\partial t} \varphi dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \nabla_x^2 E(x, t) \cdot \varphi \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x + \int_{\mathbb{R}^n] \varepsilon, +\infty[} -PE \cdot \varphi d^n x dt \right\} =$$

(dal momento che $PE = 0$, su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x.$$

Per calcolare quest'ultimo limite si possono usare due diverse strategie.

Prima strategia.

~~XXXXXXXXXX~~

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x =$$

(cambio di variabili $x = 2k\sqrt{\varepsilon} y$
 $d^n x = (2k\sqrt{\varepsilon})^n d^n y$)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-|y|^2} \varphi(2k\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon) d^n y$$

Per cui passando al limite sotto il segno di integrale / con
 che è lecito per il teorema delle convergenze dominate)

si ha:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0, 0) e^{-|y|^2} d^n y$$

$$= \varphi(0, 0).$$

bisogna mostrare che

$$\langle PE, \varphi \rangle = \varphi(0,0) \quad , \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

da cui

$$PE = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Seconda strategia.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) d^n x + \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] d^n x \right] \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] d^n x \right| \leq \\ & \leq M \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) d^n x = M \varepsilon \end{aligned}$$

Inoltre $E(x, \varepsilon) \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, se $\varepsilon \rightarrow 0$;

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) d^n x & = 0 + \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x, 0) d^n x \\ & = \varphi(0,0) \end{aligned}$$

e anche

$$PE = \delta \quad , \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$