

Soluzioni fondamentali per l'equazione delle onde.

1. Consideriamo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

in cui assumiamo $n \geq 2$. Denoteremo con x le variabili in \mathbb{R}^n e con t la variabile in \mathbb{R} . Considereremo l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\partial_t^2 u - c^2 \nabla_x^2 u, \quad c > 0.$$

Useremo anche il simbolo \square per denotare l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\square = \partial_t^2 - c^2 \nabla_x^2.$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, denoteremo

la sua \hat{u} trasformata di Fourier "usuale", definita su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Denoteremo, di solito, con ξ e τ le variabili (rispettivamente in \mathbb{R}^n e \mathbb{R}) da cui dipende la distribuzione \hat{u} .

Nel seguito useremo anche le trasformate di Fourier "parziali", rispetto a x e rispetto a t .

Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, si può mostrare che la funzione

$$(\mathcal{F}_x \varphi)(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t) e^{-ix \cdot \xi} d^n x$$

è in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$; se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ è allora ben definito il pairing

$$\langle u, \mathcal{F}_x \varphi \rangle;$$

la trasformata di Fourier parziale di u , rispetto a x ,

è allora definita come

$$\langle \mathcal{F}_x u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}_x \varphi \rangle.$$

Si può dimostrare che

$$\mathcal{F}_x u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

e che l'applicazione

$$u \mapsto \mathcal{F}_x u : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

è continua (nel senso di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$).

Considerazioni del tutto analoghe valgono per la trasformata di Fourier parziale rispetto a t , $\mathcal{F}_t u$.

Notiamo infine che si ha,

$$\hat{u} = \mathcal{F}_t (\mathcal{F}_x u) = \mathcal{F}_x (\mathcal{F}_t u).$$

Il teorema di immersione di Fourier si enuncia allora nella forma

$$u = \mathcal{F}_x^* (\mathcal{F}_x u), \quad u = \mathcal{F}_t^* (\mathcal{F}_t u), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

2. Una soluzione fondamentale dell'equazione delle onde è una distribuzione (temperata)

$$G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

che risolve l'equazione

$$\partial_t^2 G - c^2 \Delta_x^2 G = \delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Prendendo la trasformata di Fourier parziale \mathcal{F}_x di due membri si ottiene

$$\partial_t^2 (\mathcal{F}_x G) + c^2 |\xi|^2 (\mathcal{F}_x G) = \frac{1}{(2\pi)^n} \delta$$

(in cui $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Risolveremo questa equazione in maniera formale, trattando

$$t \mapsto (\mathbb{F}_x G) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$$

come una funzione. In questo modo, la equazione per $(\mathbb{F}_x G)$ ~~che~~
~~ci~~ ci fornisce due equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbb{F}_x G) + c^2 (\mathbb{F}_x G) = 0 \quad \text{su }]-\infty, 0[\text{ e su }]0, +\infty[.$$

Allora

$$(\mathbb{F}_x G)(\xi, t) = \begin{cases} a(\xi) \cos ct|\xi| + b(\xi) \sin ct|\xi| & \text{se } t > 0 \\ c(\xi) \cos ct|\xi| + d(\xi) \sin ct|\xi| & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Affinché $\mathbb{F}_x G$ sia soluzione dell'equazione

$$\partial_t^2 (\mathbb{F}_x G) + c^2 |\xi|^2 (\mathbb{F}_x G) = \frac{\delta}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{in } \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$$

si deve richiedere

a) che $t \mapsto \mathbb{F}_x G$ sia continua in $t=0$

b) che $t \mapsto \partial_t (\mathbb{F}_x G)$ abbia una discontinuità "a salto" in $t=0$.

Però si ha

$$(a) \Rightarrow a = c$$

$$(b) \Rightarrow c|\xi| [b - d] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Quindi $(\mathbb{F}_x G)$ è data da

$$(\mathbb{F}_x G)(\xi, t) = \begin{cases} a \cos ct|\xi| + b \sin ct|\xi| & \text{se } t > 0 \\ a \cos ct|\xi| + d \sin ct|\xi| & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

con la condizione

$$c|\xi| [b-d] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

in cui a, b, d sono funzioni di ξ .

Notiamo che Q non è determinato univocamente dalle condizioni di essere soluzione dell'equazione

$$\partial_t^2 Q - c^2 \nabla_x^2 Q = \delta$$

Scegliendo a, b, c in modo che la condizione

$$c|\xi| [b-d] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

sia soddisfatta, si ottengono diverse possibili soluzioni fondamentali.

Nel seguito discuteremo tre scelte possibili. In effetti queste tre scelte, apparentemente immotivate, sono esauritive nelle classi delle soluzioni fondamentali dell'equazione delle onde che sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

* * *

3. Discuteremo le due scelte

$$Q_{ret} \text{ e } Q_{adv}$$

che vengono dette le soluzioni fondamentali "~~retarded~~" "retardate" e "avanzate", rispettivamente. Sono caratterizzate

da le proprietà

$$Q_{ret} \Big|_{\{(x,t): t < 0\}} = 0$$

$$Q_{adv} \Big|_{\{(x,t): t < 0\}} = 0$$

Le soluzioni Q_{ret} e ~~retarded~~ si ottiene facendo

$$a(\xi) = d(\xi) = 0$$

per cui

$$\left(\int_x G_{n,t}\right)(\xi, t) = \begin{cases} b(\xi) \sin ct |\xi| & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases};$$

inoltre $b(\xi)$ è soluzione dell'equazione

$$c |\xi| b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Stiamo supponendo $n \geq 2$; quindi

$$|\xi|^{-1} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

e la soluzione dell'equazione

$$c |\xi| b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

è la funzione localmente integrabile

$$b(\xi) = \frac{1}{c(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

In conclusione ~~è~~ si ha

$$\left(\int_x G_{n,t}\right)(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{c|\xi|} H(t) \sin ct |\xi|.$$

Sottolineiamo che la funzione $\left(\int_x G_{n,t}\right)$ è ovviamente in $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Del momento che abbiamo proceduto formalmente, verifichiamo che $\left(\int_x G_{n,t}\right)$ sia soluzione dell'equazione

$$\partial_t^2 \left(\int_x G_{n,t}\right) + c^2 |\xi|^2 \left(\int_x G_{n,t}\right) = \frac{\delta(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Notiamo che

$$t \mapsto \int_x G_{n,t}$$

è continua in $t=0$, e C^∞ in $\mathbb{R} - \{0\}$; quindi si ha

$$\partial_t \int_x G_{n,t} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{c|\xi|} c |\xi| H(t) \cos ct |\xi|$$

$$\partial_t^2 \int_x G_{n,t} = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} c |\xi| \sin ct |\xi| \cdot H(t) + \frac{\delta(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \left(\int_x G_{ret} \right) + c^2 |\xi|^2 \left(\int_x G_{ret} \right) &= \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} c |\xi| H(ct) \sin ct |\xi| + \frac{\delta(ct)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} c^2 |\xi|^2 \frac{1}{c |\xi|} \sin ct |\xi| H(ct) \\ &= \delta(ct) / (2\pi)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che

$$\left(\int_x G_{ret} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{c |\xi|} H(ct) \sin ct |\xi|$$

è in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ ed ~~è~~ ha le proprietà:

$$\partial_t^2 \left(\int_x G_{ret} \right) + c^2 |\xi|^2 \left(\int_x G_{ret} \right) = \delta(ct) / (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

La soluzione G_{adv} è data dalla scelta

$$a = b = 0.$$

Quindi:

$$\left(\int_x G_{adv} \right) (\xi, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 0 \\ d(\xi) \sin ct |\xi| & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

inoltre

$$-d(\xi) c |\xi| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Otteniamo

$$\left(\int_x G_{adv} \right) (\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{-1}{c |\xi|} H(-t) \sin ct |\xi|;$$

notiamo che si ha

$$\left(\int_x G_{adv} \right) (\xi, t) = \left(\int_x G_{ret} \right) (\xi, -t);$$

quindi,

$$G_{adv}(x, t) = G_{ret}(x, -t).$$

Nel seguito discuteremo solo le proprietà di G_{ret} . Quelle di G_{adv} si deducano dalle relazioni precedenti.

* * *

4. Una terza possibile scelta verrà denotata con G_F . Viene detta la soluzione fondamentale "di Feynmann" o "causale".
 $(\int_x G_F)$ è definita dalle scelte

$$-d = b, \quad a(\xi) = -\frac{1}{2ic|\xi|} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

L'equazione per b diviene

$$2|\xi|c b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

la cui soluzione è

$$b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{2c|\xi|}$$

Si ha così

$$\left(\int_x G_F\right)(\xi, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{2c|\xi|} i \left[\cos ct|\xi| - i \sin ct|\xi| \right], & t > 0 \\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{2c|\xi|} i \left[\cos ct|\xi| + i \sin ct|\xi| \right], & t < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{i}{2c|\xi|} \begin{cases} e^{-ict|\xi|} & t > 0 \\ e^{ict|\xi|} & t < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{i}{2c|\xi|} e^{-ic|t\xi|}$$

È del tutto evidente che la funzione $(\int_x G_F)$ definita
 è una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Si può verificare

che ~~è~~ ha la proprietà:

$$\partial_t^2 (\int_x G_F) + c^2 |\xi|^2 (\int_x G_F) = \frac{\sqrt{L(t)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

* * *

5. Vogliamo ottenere formule, il più esplicite possibile, per

$$G_{ret} \quad , \quad \hat{G}_{ret}$$

Esistemente, si ha

$$G_{ret} = \int_{\xi}^* (\int_x G_{ret})$$

$$\hat{G}_{ret} = \int_t (\int_x G_{ret})$$

Nel caso $n=3$, avremo calcolato

$$\int_{S_{ct}} |\xi| = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin c |\xi| t}{|\xi|}$$

da cui

$$\int_{\xi}^* \left(\frac{\sin c |\xi| t}{c |\xi|} \right) = \frac{1}{c^2 t} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{S_{ct}}$$

e anche

$$\begin{aligned} G_{ret} = \int_{\xi}^* \left(\int_x G_{ret} \right) &= \frac{1}{(2\pi)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} H(t) \frac{1}{c^2 t} \int_{S_{ct}} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} H(t) \frac{1}{t} \int_{S_{ct}} \end{aligned}$$

Esplícitamente, la soluzione fondamentale G_{ret} agisce su

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ come

$$\langle G_{ret}, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{t} \int_{S_{ct}} d\sigma_{ct}(x) \varphi(x, t)$$

Se poniamo

$$ct = r = |x|,$$

otteniamo

$$\frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{t} \int_{S_{ct}'} d\sigma_{ct}(x) \varphi(x, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{+\infty} dz \frac{1}{c} \frac{c}{z} \int_{S_z'} d\sigma_z(x) \varphi(x, z/c) -$$

Nell'identificazione

$$\mathbb{R}^3 \cong S_z' \times \mathbb{R}_+$$

$$d^3x = d\sigma_z dz$$

otteniamo

$$\langle G_{ret}(x, t), \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\varphi(x, |x|/c)}{|x|}$$

Usando la teoria del pull-back delle distribuzioni, avremo col-
colato

$$\langle \delta(c^2 t^2 - |x|^2), \varphi \rangle = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, |x|/c) + \varphi(x, -|x|/c)}{|x|} d^3x,$$

otteniamo così anche

$$G_{ret}(x, t) = \frac{1}{2\pi c} H(t) \delta(c^2 t^2 - |x|^2).$$

Sempre usando la teoria del pull-back delle distribuzioni è facile
calcolare la distribuzione

$$\delta(|x| - ct), \text{ in } \mathbb{R}^4,$$

è dato da

$$\langle \delta(ct - |x|), \varphi \rangle = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varphi(x, |x|/c) -$$

Si ha così anche la rappresentazione

$$G_{ret}(x, t) = \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{|x|} \delta(ct - |x|).$$

In conclusione, nel caso $n=3$, otteniamo per G_{ret} le ~~espressioni~~

representazioni

$$G_{\text{ret}}(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} H(t) \frac{1}{t} \int_{\Sigma_{ct}} \delta(c^2 t^2 - |x|^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi c} H(ct) \delta(c^2 t^2 - |x|^2)$$

$$= \frac{1}{4\pi c |x|} \delta(ct - |x|);$$

esplicitamente, si ha, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$

$$\langle G_{\text{ret}}, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, |x|/c) \frac{1}{|x|} d^3x.$$

Si possono ottenere formule esplicite per G_{ret} per ogni $n \geq 2$.

Per comprendere a fondo le differenze tra le diverse soluzioni fondamentali dell'equazione delle onde è di utilità considerare la trasformata di Fourier "completa". ~~Per questo~~ Per questo calcoliamo

$$\hat{G}_{\text{ret}} = \int_t \left(\int_x G_{\text{ret}} \right)$$

(intendiamo a considerare il caso di n qualunque, $n \geq 2$).

Le funzioni

$$t \mapsto \left(\int_x G_{\text{ret}} \right) (\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} H(t) \frac{\sin ct |\xi|}{c |\xi|}$$

non è integrabile su \mathbb{R} , quindi $\int_t \left(\int_x G_{\text{ret}} \right)$ non si può calcolare come un integrale.

Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo

$$e^{-\varepsilon t} \left(\int_x G_{\text{ret}} \right) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{e^{it(c|\xi| + i\varepsilon)} - e^{it(-c|\xi| + i\varepsilon)}}{2ic|\xi|};$$

si ha

$$e^{-\varepsilon t} \left(\int_x G_{\text{ret}} \right) \rightarrow \int_x G_{\text{ret}}, \text{ se } \varepsilon \downarrow 0, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

da cui, usando la proprietà di continuità di \mathcal{F}_x ricordata nel paragrafo iniziale,

$$\mathcal{F}_t \left(e^{-\varepsilon t} \mathcal{F}_x G_{\text{net}} \right) \rightarrow \mathcal{F}_t \left(\mathcal{F}_x G_{\text{net}} \right), \text{ se } \varepsilon \downarrow 0, \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

La funzione

$$t \mapsto e^{-\varepsilon t} \mathcal{F}_x G_{\text{net}}$$

è integrabile su \mathbb{R} , e si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t \left(e^{-\varepsilon t} \mathcal{F}_x G_{\text{net}} \right) (\xi, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t} \left(\mathcal{F}_x G_{\text{net}} \right) (\xi, t) e^{-i\tau t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic|\xi|} \left[e^{-(\varepsilon+i\tau-ic|\xi|)t} - e^{-(\varepsilon+i\tau+ic|\xi|)t} \right] dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - (\tau-i\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\hat{G}_{\text{net}} = \mathcal{F}_t \left(\mathcal{F}_x G_{\text{net}} \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - (\tau-i\varepsilon)^2}$$

in cui il limite deve essere inteso nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

È chiaro che

$$\hat{G}_{\text{net}} \Big|_{\{(\xi, \tau) : c^2|\xi|^2 \neq \tau^2\}} = \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \tau^2},$$

quindi \hat{G}_{net} , al di fuori del cono $c^2|\xi|^2 = \tau^2$, è la funzione liscia

$$\frac{1}{c^2|\xi|^2 - \tau^2}$$

questa funzione, però, non è localmente integrabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, quindi non definisce la ~~distribuzione~~ G_{net} .

* * *

6. In questo paragrafo ci proponiamo di calcolare G_{net} anche per valori di n diversi da 3. Non arriveremo ad ottenere formule esplicite per G_{net} , ma potremo mettere in luce le differenze fondamentali che ci sono i casi

n pari, n dispari.

In precedenza, abbiamo ottenuto

$$\left(\int_x G_{nt}\right)(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{c|\xi|} H(ct) \sin ct|\xi|$$

e dobbiamo calcolare

$$G_{nt} = \int_{\xi}^* \left(\int_x G_{nt}\right).$$

La funzione

$$\xi \mapsto \frac{\sin ct|\xi|}{c|\xi|}$$

non è integrabile in \mathbb{R}^n , quindi non possiamo calcolare $\int_{\xi}^* \left(\int_x G_{nt}\right)$ come un integrale. Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo

$$F_{\varepsilon}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\varepsilon|\xi|} H(ct) \frac{\sin ct|\xi|}{c|\xi|};$$

si ha

$$F_{\varepsilon} \rightarrow \int_x G_{nt}, \text{ se } \varepsilon \downarrow 0, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

da cui, per la continuità in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ di \int_{ξ}^* ,

$$\int_{\xi}^* F_{\varepsilon} \rightarrow \int_{\xi}^* \int_x G_{nt}, \text{ se } \varepsilon \downarrow 0, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

La funzione

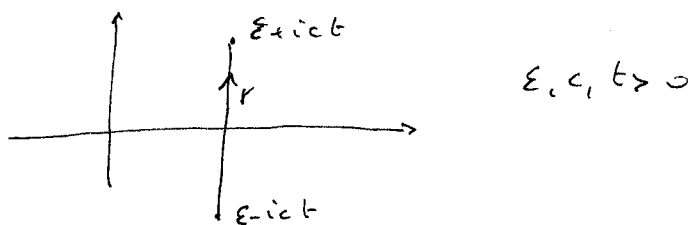
$$\xi \mapsto F_{\varepsilon}(\xi, t)$$

è integrabile in \mathbb{R}^n , e si ha

$$\int_{\xi}^* F_{\varepsilon} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} F_{\varepsilon}(\xi, t) d^n \xi$$

Il calcolo dell'integrale che appare in questa formula è un po' lungo.

Consideriamo il seguente cammino di integrazione, nel piano complesso



$$\int_{\gamma} e^{-z|\xi|} dz = \int_{-t}^t e^{-(\varepsilon + i c y)|\xi|} (i c) dy =$$

$$= e^{-\varepsilon|\xi|} \left(-2i \frac{\sin c t |\xi|}{-|\xi|} \right);$$

per cui

$$\frac{1}{2ic} \int_{\gamma} e^{-z|\xi|} dz = e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin c t |\xi|}{c |\xi|},$$

$$\int_{\xi}^* \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{(2\pi)^n} H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \left(\frac{1}{2ic} \int_{\gamma} e^{-z|\xi|} dz \right) d^n \xi =$$

(scambiando l'ordine delle integrazioni)

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} H(t) \frac{1}{2ic} \int_{\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z|\xi|} e^{ix \cdot \xi} d^n \xi \right) dz.$$

Notiamo che $\operatorname{Re} z > 0$ su γ ; quindi l'integrazione in $d^n \xi$ è ben definita). Si ha, per ogni $s > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-s|\xi|} d^n \xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-s|\xi|} d^n \xi =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (2)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(I dettagli di questo calcolo sono riportati in un'Appendice a parte)

Consideriamo ora la funzione

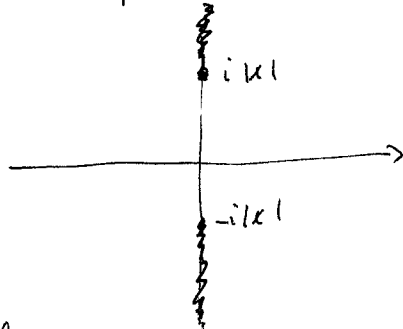
$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z|\xi|} e^{ix \cdot \xi} d^n \xi, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0.$$

Derivando sotto il segno di integrale, le condizioni di Lebesgue-

ci assicurano che questa funzione è olomorfa nel semipiano $\text{Re } z > 0$.
 Consideriamo anche questa funzione

$$z \mapsto \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{(\sqrt{z^2 + |x|^2})^{n+1}}$$

in cui la radice è definita con la determinazione principale.
 È olomorfa nel piano complesso tagliato



quindi, in particolare, per $\text{Re } z > 0$. Le due funzioni coincidono
 sull'asse reale positivo. Allora coincidono in tutto il semipia-
 no $\text{Re } z > 0$.

Abbiamo così mostrato che, per $\text{Re } z > 0$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z|x|} e^{i\xi \cdot x} d^n \xi = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{(\sqrt{z^2 + |x|^2})^{n+1}}$$

se si prende la determinazione principale della radice.

Utilizzando questo risultato, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \frac{1}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} H(t) \frac{1}{2ic} \int \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{(\sqrt{z^2 + |x|^2})^{n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic} H(t) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{-t}^t \frac{\varepsilon + icy}{((\varepsilon + icy)^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} (i\varepsilon) dy$$

motivo di cui

$$\frac{d}{dy} \left((\varepsilon + icy)^2 + |x|^2 \right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{1-y}{2} \right) \left((\varepsilon + icy)^2 + |x|^2 \right)^{-\frac{(n+1)}{2}} 2(\varepsilon + icy)(ic)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{2\left(\frac{1-n}{2}\right)} H(t) \int_{-t}^t 2\left(\frac{1-n}{2}\right) (ic) \left((\varepsilon + icy)^2 + |x|^2 \right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} (\varepsilon + icy) dy \\
&= \frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{2\left(\frac{1-n}{2}\right)} H(t) \int_{-t}^t \frac{d}{dy} \left((\varepsilon + icy)^2 + |x|^2 \right)^{\frac{1-n}{2}} dy \\
&= \frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{H(t)}{2\left(\frac{1-n}{2}\right)} \left[\frac{1}{\left((\varepsilon + ict)^2 + |x|^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{\left((\varepsilon - ict)^2 + |x|^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}} \right]
\end{aligned}$$

Dopo aver calcolato

$$J_{\xi}^* (F_{\varepsilon})$$

dobbiamo calcolare

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} J_{\xi}^* (F_{\varepsilon}) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

A questo punto, entra in gioco la distinzione cruciale tra i casi n pari e n dispari.

I° Caso, n dispari

Se n è dispari, $n = 2k+1$, l'esponente

$$\frac{n-1}{2} = \frac{2k+1-1}{2} = k$$

è un intero.

Se $|x| \neq ct$ (ricordiamo che $t > 0$), si ha

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[|x|^2 - (\varepsilon + ict)^2 \right] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[|x|^2 + (\varepsilon - ict)^2 \right] = |x|^2 - c^2 t^2,$$

quindi ($\frac{n-1}{2}$ è intero)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[|x|^2 + (\varepsilon + ict)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[|x|^2 + (\varepsilon - ict)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} = \left(|x|^2 - c^2 t^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

eccetto che per $|x|^2 = c^2 t^2$; quindi

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\frac{1}{\left(|x|^2 + (\varepsilon + ict)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{1}{\left(|x|^2 + (\varepsilon - ict)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}} \right] = 0 \quad \text{se } |x|^2 \neq c^2 t^2.$$

Per $|x|^2 = c^2 t^2$ le "funzioni nullo all'infinito". Il ragionamento può essere reso più preciso, ma fondamentalmente è corretto:

$$G_{net} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma}^* (e^{-\epsilon|x|} \int_{\Sigma} G_{net})$$

= una distribuzione che ha supporto su
 $\{ (x,t) : |x|^2 = c^2 t^2, t \geq 0 \}$

Nel caso $n=3$ abbiamo la forma esplicita di G_{net}

$$\frac{1}{4\pi c^2} H(t) \frac{1}{t} \int_{S_{ct}} \cdot$$

Per $n > 3$ (n dispari) la distribuzione è ancora più singolare sulla sfera S_{ct} .

II° Caso, n pari

Se n è pari, $n=2k$ ($k \geq 1$), l'esponente

$$\frac{n-1}{2} = \frac{2k-1}{2}$$

è semi-integer.

Se $|x| > ct$ (consideriamo $t > 0$), si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[|x|^2 + (\epsilon + i\epsilon t)^2 \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[|x|^2 + (\epsilon - i\epsilon t)^2 \right] = |x|^2 - c^2 t^2 > 0,$$

quindi si ha ancora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(|x|^2 + (\epsilon + i\epsilon t)^2)^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{(|x|^2 + (\epsilon - i\epsilon t)^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right] = 0$$

Se $|x| < ct$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[|x|^2 + (\epsilon + i\epsilon t)^2 \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[|x|^2 + (\epsilon - i\epsilon t)^2 \right] = |x|^2 - c^2 t^2 < 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{|x|^2 + (\epsilon + i\epsilon t)^2} = i \sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{|x|^2 + (\epsilon - i\epsilon t)^2} = -i \sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}$$

Inoltre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{|x|^2 + (\varepsilon + i c t)^2})^{n-1}} = \frac{1}{(i)^{n-1} (c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{i (-1)^{\frac{n}{2}}}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{|x|^2 + (\varepsilon - i c t)^2})^{n-1}} = \frac{1}{(-i)^{n-1} (c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{-i (-1)^{\frac{n}{2}}}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad ;$$

quindi, se $|x| < c t$ ($t > 0$), si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(|x|^2 + (\varepsilon + i c t)^2)^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{(|x|^2 + (\varepsilon - i c t)^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right] = \frac{2i (-1)^{\frac{n}{2}}}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Questo significa che se n è pari

$$G_{ret} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_{\varepsilon}}^* F_{\varepsilon}$$

è la distribuzione che ha come supporto

$$\{(x, t) : |x| \leq c t, (t \geq 0)\} ;$$

nell'insieme aperto

$$\{(x, t) : |x| < c t, t > 0\}$$

coincide con la funzione

$$\frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2ic} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(1-n)} \frac{2i (-1)^{\frac{n}{2}}}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

Questa funzione diventa "infinita" sui punti (x, t) tali che $|x| = c t$; se $n > 2$ lo fa in maniera così violenta da non essere localmente integrabile (su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$). Nel caso $n = 2$, tuttavia, questa funzione è localmente integrabile, definisce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \subset \int_{\Sigma}^* F_{\varepsilon}$ converge a questa distribuzione (per $\varepsilon \rightarrow 0$) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Si ha così

$$k_{ret} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{se } |x| < ct \quad (t > 0) \\ 0 & \text{se } |x| < ct \quad (t \leq 0) \end{cases}$$

* * *

7. In questo paragrafo torniamo al calcolo di

$$G_F \text{ e } \hat{G}_F$$

È particolarmente istruttivo il confronto tra \hat{G}_F e \hat{G}_{ret} .

Ricordiamo che G_F è definito da

$$\left(\int_x G_F \right) (\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{+i}{2c|\xi|} e^{-ic|t\xi|}$$

Per definizione, si ha

$$\hat{G}_F(\xi, t) = \int_t \left(\int_x G_F \right)$$

La funzione

$$t \mapsto \int_x G_F$$

non è integrabile su \mathbb{R} ; quindi non possiamo calcolare $\int_t \left(\int_x G_{ret} \right)$ come un integrale. Abbiamo già incontrato altre volte questa difficoltà. Per ogni $\varepsilon > 0$, denotiamo

$$z_\varepsilon = -c^2 |\xi|^2 + i\varepsilon$$

fissiamo

$$0 < \arg z_\varepsilon < \pi$$

e definiamo $\sqrt{z_\varepsilon}$ con questa scelta; si ha, in particolare,

$$\operatorname{Re} \sqrt{z_\varepsilon} > 0$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{z_\varepsilon} = ic|\xi|$$

$$e^{-\sqrt{z_\varepsilon} |t|} \in L^1(\mathbb{R})$$

f_t ha anche

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{-1}{2(2i\varepsilon)^{\frac{n}{2}} \sqrt{z_\varepsilon}} e^{-\sqrt{z_\varepsilon} |t|} = \frac{-1}{2ic|\xi| (2i)^{\frac{n}{2}}} e^{-ic|t\xi|} \quad , \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Per la continuità di f_t in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, otteniamo

$$f_t (f_x G_F) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_t \left(\frac{-1}{2(2i\varepsilon)^{\frac{n}{2}} \sqrt{z_\varepsilon}} e^{-\sqrt{z_\varepsilon} |t|} \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f_t \left(\frac{-1}{2(2i\varepsilon)^{\frac{n}{2}} \sqrt{z_\varepsilon}} e^{-\sqrt{z_\varepsilon} |t|} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{z_\varepsilon} 2(2i\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sqrt{z_\varepsilon} |t|} e^{-it\tau} d\tau = \\ &= \frac{-1}{(2i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_\varepsilon}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{z_\varepsilon} t} e^{-it\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{z_\varepsilon} t} e^{-it\tau} d\tau \right\} \\ &= \frac{-1}{(2i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{z_\varepsilon + \tau^2}. \end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{aligned} f_t (f_x G_F) &= \\ &= f_t \left(\frac{-1}{2ic|\xi| (2i)^{\frac{n}{2}}} e^{-ic|t\xi|} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{-1}{z_\varepsilon + \tau^2} \quad , \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \tau^2 - i\varepsilon} \quad , \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

E' chiaro che

$$\hat{G}_F = f_t (f_x G_F) \Big|_{\{(\xi, \tau) : c^2|\xi|^2 \neq \tau^2\}} = \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \tau^2} \frac{1}{(2i)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Anche \hat{G}_F , come \hat{G}_{ret} , al di fuori del cono $c^2|\xi|^2 = \tau^2$, coincide con la funzione liscia

$$\frac{1}{c^2|\xi|^2 - \tau^2}$$

bi-invariante, G_{ret} e G_F sono due distribuzioni completamente differenti tra esse. Come mostra il calcolo seguente.

ci proponiamo di calcolare

$$G_F = \mathcal{F}_\xi^* \left(\mathcal{F}_x G_F \right)$$

Considereremo solo il caso particolare $n=3$. Si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2ic|\xi|} e^{-ic|\tau\xi|} e^{-\varepsilon|\xi|} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2ic|\xi|} e^{-ic|\tau\xi|} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R});$$

quindi

$$\mathcal{F}_\xi^* \left(\mathcal{F}_x G_F \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\xi^* \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{-1}{2ic|\xi|} e^{-ic|\tau\xi|} e^{-\varepsilon|\xi|} \right)$$

Inoltre

$$\mathcal{F}_\xi^* \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{-1}{2ic|\xi|} e^{-ic|\tau\xi|} e^{-\varepsilon|\xi|} \right) =$$

$$= \left(\text{ponendo } z = -ic|\tau| - \varepsilon \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-1}{2ic|\xi|} e^{z|\xi|} e^{ix \cdot \xi} d^3\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2ic} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|} e^{z|\xi|} e^{ix \cdot \xi} d^3\xi$$

($e^{z|\xi|}/|\xi|$ è una funzione radiale in \mathbb{R}^3 ; i calcoli sono

del tutto standard)

$$= \frac{i}{4\pi^2 c} \frac{1}{-c^2 \tau^2 + \varepsilon^2 + 2ic|\tau|\varepsilon + |x|^2}$$

Ultimamente così

$$G_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-i}{4\pi^2 c} \frac{1}{c^2 t^2 - |x|^2 - i(2ct|\varepsilon)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}),$$

Nell'insieme aperto in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$\{(x, t) : c^2 t^2 \neq |x|^2\}$$

G_F si restringe alle funzione liscie

$$\frac{-i}{4\pi^2 c} \frac{1}{c^2 t^2 - |x|^2}$$

Attenzione però, questa funzione liscia non è localmente integrabile nell'intorno del cono luce; quindi non è G_F - coincide con G_F solo fuori dal cono luce. G_F è definita dal limite su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$.

Deve essere sottolineata la bellissima simmetria che esiste tra

G_F e \hat{G}_F :

$$G_F | \{(x, t) : c^2 t^2 \neq |x|^2\} = \frac{-i}{4\pi^2 c} \frac{1}{c^2 t^2 - |x|^2}$$

$$\hat{G}_F | \{(x, t) : c^2 |x|^2 \neq t^2\} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{c^2 |x|^2 - t^2}$$

Appendice 1.

Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-s|\xi|} d^n \xi, \quad \text{in cui } s \in \mathbb{R}, s > 0.$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1)y} dy = \frac{1}{1+x^2}$$

e anche

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|t|}}{a} \quad (x, t \in \mathbb{R}).$$

Se $t > 0$, combinando le due precedenti uguaglianze, si ha

$$e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-itx} \int_0^{+\infty} dy e^{-(x^2+1)y} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy e^{-itx} e^{-x^2y} e^{-y} =$$

(scambiando l'ordine delle integrazioni)

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} dy e^{-y} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2y} e^{-itx} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y} \mathcal{F}_x(e^{-x^2y})(t) dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{1}{\sqrt{2y}} e^{-\frac{t^2}{4y}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{4y}} dy.$$

Ponendo $t = s|\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$, nell'uguaglianza precedente,

Atteniamo

$$e^{-s|\xi|} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{s^2|\xi|^2}{4y}} dy, \quad s > 0;$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-s|\xi|} d^n \xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi e^{-ix \cdot \xi} \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{s^2}{4y} |\xi|^2} |\xi|^2$$

(scambiamo l'ordine delle integrazioni)

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi e^{-ix \cdot \xi} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{s^2}{4y} |\xi|^2} |\xi|^2 =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi \left(e^{-\frac{s^2}{4y} |\xi|^2} |\xi|^2 \right) (x) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}} \frac{1}{\left(2 \frac{s^2}{4y}\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4 \frac{s^2}{4y}}} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} s^n} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y \left(1 + \frac{|x|^2}{s^2}\right)} dy =$$

$$\left(\text{si pone } y \left(\frac{s^2 + |x|^2}{s^2} \right) = t, \quad dy = dt \frac{s^2}{s^2 + |x|^2} \right)$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} s^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{s^2}{s^2 + |x|^2} \left(\frac{s^2}{s^2 + |x|^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} dt =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{(n-1)}{2}} dt =$$

(in termini delle "funzione Γ " di Eulero)

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Appendice 2

In questa Appendice cerchiamo di dare un'idea di come alcuni dei calcoli descritti in precedenza vengono effettuati "alla maniera dei fisici". In altre parole, come essi sono ~~spesso~~ descritti nelle esposizioni dei Fisici Teorici.

Si parte dall'equazione per la soluzione fondamentale (che, in Fisica Teorica, viene spesso chiamata "funzione di Green").

$$\partial_t^2 G - c^2 \nabla_x^2 G = \delta, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

e si fa la trasformata di Fourier completa dei due membri, nella versione "alla Lorentz"

$$(FG)(\xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} e^{-i(t\tau - x \cdot \xi)} G(x, t) d^n x dt,$$

da cui:

$$-\tau^2 FG - c^2 (-|\xi|^2 FG) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}$$

infine, dividendo formalmente

$$FG = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{c^2 |\xi|^2 - \tau^2}$$

Questa uguaglianza è solo formale: la funzione

$$\xi, \tau \mapsto \frac{1}{c^2 |\xi|^2 - \tau^2}$$

non è localmente integrabile, quindi non definisce una distribuzione su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (è opportuno confrontare con le formule precise ottenute per $\hat{G}_{ret} = \hat{G}_F$). Proseguendo in maniera formale, si calcola G come

$$G = F^*(FG) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} e^{i(t\tau - x \cdot \xi)} FG(\xi, \tau) d^n \xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x} \int_{\mathbb{R}} d\vec{\tau} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\tau}} e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{t}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \vec{\tau}^2}$$

Siamo così ricondotti al "calcolo" dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} d\vec{\tau} e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{t}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \vec{\tau}^2}$$

Questo integrale non è definito; la funzione che compare sotto il segno di integrale non è integrabile. Si può proseguire nel calcolo formale, sostituendo all'integrazione su \mathbb{R} una "regolarizzazione" (o rinormalizzazione). Dal momento che la maniera di regolarizzare (o rinormalizzare) l'integrale divergente non è unica, si ricottiene il fatto che la soluzione fondamentale non è unica.

Bisogna pensare che

$$\int_{\mathbb{R}} d\vec{\tau} e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{t}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \vec{\tau}^2} \text{ è l' "analogo" di } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx$$

e noi abbiamo visto che ci sono diverse scelte possibili di $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx$.
La scelta di G_{ret} corrisponde alle regolarizzazioni

$$\int_{\mathbb{R}} d\vec{\tau} \text{ si interpreta come } \int_{\gamma} \text{ in cui } \gamma \text{ è un contorno nel piano complesso che circonda i poli a } \pm c|\xi|$$

L'integrale

$$\int_{\gamma} d\vec{\tau} e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{t}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \vec{\tau}^2}$$

si "calcola" usando formalmente il Lemma di Jordan.

Se $t > 0$ si "chiude sopra"

Se $t < 0$ si "chiude sotto".

Per cui

Se $t < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\bar{z}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \bar{z}^2} d\bar{z} = 0,$$

per il teorema dei residui.

Se $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\bar{z}} \frac{1}{c^2|\xi|^2 - \bar{z}^2} d\bar{z} = 2\pi i \left(\text{Res}(\bar{z} = c|\xi|) + \text{Res}(\bar{z} = -c|\xi|) \right)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2c|\xi|} \left(e^{-ic|\xi|t} - e^{ic|\xi|t} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{c|\xi|} \sin c|\xi|t.$$

In questo modo, si ha

$$G_{n,t} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi e^{-ix \cdot \xi} \frac{2\pi}{c|\xi|} \sin c|\xi|t, \quad \text{se } t > 0$$

$$G_{n,t} = 0, \quad \text{se } t < 0.$$

Anche l'integrale in $d^n \xi$ non è definito, ma, ciò nonostante, non si rinuncia a calcolarlo. Consideriamo il caso $n=3$. In termini di coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 e trattando l'integrale come un legittimo integrale di una funzione radiale, si ottiene rapidamente (per $t > 0$)

$$G_{n,t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i|x|p} \frac{2\pi i}{2cp} \left\{ e^{-ictp} - e^{ictp} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{+2c|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left\{ e^{-i(|x|-ct)p} - e^{-i(|x|+ct)p} \right\}$$

Naturalmente gli integrali appena scritti non sono definiti, ma possiamo usare per essi le formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-inx} dx = \delta(x),$$

che è del tutto simbolica, e si ottiene (per $t > 0$)

$$G_{ret} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2c|x|} \left\{ \delta(|x| - ct) - \delta(|x| + ct) \right\} =$$

(tenendo conto che $t > 0$)

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2c|x|} \delta(|x| - ct).$$

Per cui in conclusione (per $n=3$)

$$G_{ret} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi c|x|} \delta(|x| - ct) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

in perfetto accordo con i nostri calcoli precedenti.

* * *

Calcoliamo anche G_F "alla maniera dei fisici". Si parte da

$$G = F^* \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{c^2 |\xi|^2 - \tau^2} \right);$$

(come discusso in precedenza tutti questi calcoli sono simbolici).

Si ottiene

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi e^{-ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\tau} e^{i\tilde{\tau} t} \frac{1}{c^2 |\xi|^2 - \tilde{\tau}^2}$$

Per calcolare l'integrale (che non è definito) in $d\tilde{\tau}$ si adotta, questa volta la regolarizzazione:

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{\tau} \longleftrightarrow \text{---} \underbrace{\hspace{10em}}_{-c|\xi|} \underbrace{\hspace{10em}}_{c|\xi|} \text{---}$$

e si applica formalmente, il Lemma di Jordan.

Se $t > 0$, si "chiude sopra", e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i\tilde{z}t}}{c^2|\xi|^2 - \tilde{z}^2} d\tilde{z} = 2\pi i \operatorname{Res}_{\tilde{z}=-c|\xi|} \left[\frac{e^{i\tilde{z}t}}{(c|\xi|-\tilde{z})(c|\xi|+\tilde{z})} \right] =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-ic|\xi|t}}{2c|\xi|}$$

Se $t < 0$, si "chiude sotto", e si ha (attenzione! c'è un segno "-" , dovuto al verso di percorrenza)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{z}t}}{c^2|\xi|^2 - \tilde{z}^2} d\tilde{z} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\tilde{z}=c|\xi|} \left[\frac{e^{i\tilde{z}t}}{(c|\xi|-\tilde{z})(c|\xi|+\tilde{z})} \right]$$

$$= \frac{2\pi i}{2c|\xi|} e^{ic|\xi|t}$$

Si può confrontare questo risultato con quello che si era ottenuto in precedenza, se si tiene conto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tilde{z}t}}{c^2|\xi|^2 - \tilde{z}^2} d\tilde{z} \text{ è l'analogo di } \int_{-\infty}^{+\infty} G_F$$

Ma il calcolo di G_F , consideriamo il caso $n=3$. Si ha

$$G_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi \left\{ e^{-ix \cdot \xi} \frac{(2\pi i)}{2c|\xi|} e^{-ic|t|\xi|} \right\}$$

Introducendo coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 e procedendo con calcoli standard, si arriva a

$$G_F = \frac{1}{(2\pi)^2 2c|\lambda|} \int_0^{+\infty} dp \left(-e^{-i|\lambda|p} + e^{i|\lambda|p} \right) e^{-icp|t|}$$

Notate l'integrazione $\int_0^{+\infty} dp$ e non $\int_{-\infty}^{+\infty} dp$. A questo punto

anche i fisici si rassegnano a calcolare un limite (nessuno è perfetto!).

3: serie

$$G_F = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2 2c|x|} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-i(|x|+c|t|)p}}{+e} + \frac{e^{-i(-|x|+c|t|)p}}{-e} \right) e^{-\varepsilon p} dp$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^2 c} \frac{1}{|x|^2 - c^2 t^2 + \varepsilon^2 - 2ict|x|}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{-i}{(2\pi)^2 c} \frac{1}{c^2 t^2 - |x|^2 - i\varepsilon}$$

in accordo con quanto abbiamo calcolato in precedenza.