

Soluzioni fondamentali del Laplaciano.

1. Una soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace ∇^2 su \mathbb{R}^n è una distribuzione N su \mathbb{R}^n ($N \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) che è soluzione dell'equazione distribuzionale

$$\nabla^2 N = \delta, \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

La lettera N è scelta perché è l'iniziale del nome Newton, la prima persona che ha studiato il potenziale gravitazionale, e quindi, in un certo senso, ha risolto l'equazione precedente.

Se N_1, N_2 sono due soluzioni fondamentali del Laplaciano, si avrà

$$\nabla^2 (N_1 - N_2) = \delta - \delta = 0;$$

quindi

$$N_1 = N_2 + (\text{soluzione dell'equazione di Laplace omogenea}).$$

Si può dimostrare che le soluzioni dell'equazione distribuzionale

$$\nabla^2 N = 0$$

sono soltanto le soluzioni di classe C^∞ (quindi, le soluzioni classiche dell'equazione). Queste pro-

pietà è l' enunciato del "teorema di regolarità" e "littice". Quindi possiamo concludere che due soluzioni fondamentali dell'operatore di Laplace definite su tre asse per una funzione C^∞ che è soluzione (classica) dell'equazione di Laplace omogenea.

2. Consideriamo, innanzi tutto, il caso (banale) $n=1$. L'equazione per la soluzione fondamentale è

$$\partial^2 N = \delta, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Sull'aperto $]-\infty, 0[$ l'equazione diventa

$$\partial^2 N = 0, \text{ su }]-\infty, 0[;$$

le soluzioni di questa equazione (distribuzionale) sono

$$N(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{C};$$

similmente, sull'aperto $]0, +\infty[$, si hanno le soluzioni

$$N(x) = a'x + b', \quad a', b' \in \mathbb{C}.$$

La condizione che sia

$$\partial^2 N = \delta, \text{ su } \mathbb{R},$$

perfe facilmente a concludere che

$$b = b', \quad a' - a = 1.$$

Quindi le soluzioni sono

$$N(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x > 0 \\ a'x + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

con la condizione $a' - a = 1$.

3. Consideriamo i casi $n \geq 3$. Per trasformate di Fourier, l'equazione

$$\nabla^2 M = \delta, \text{ su } \mathbb{R}^n$$

diviene

$$-|\xi|^2 \hat{M} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

in cui

$$\xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\xi|^2 = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2).$$

La funzione

$$\xi \mapsto |\xi|^{-2}$$

è localmente integrabile su \mathbb{R}^n e definisce una distribuzione temperata su \mathbb{R}^n ; quindi la distribuzione (temperata)

$$-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, n \geq 3,$$

è (una possibile) soluzione dell'equazione

$$-|\xi|^2 \hat{M} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Quindi M si trova calcolando la trasformata di Fourier inversa di

$$\frac{1}{|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, n \geq 3.$$

Deve essere sottolineato che $|\xi|^{-2}$ è localmente integrabile, ma non integrabile su \mathbb{R}^n . Il calcolo può essere effettuato nella maniera che segue.

Consideriamo le funzioni

$$G(x) = e^{-t/2 |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle \hat{G}, \varphi \rangle = \langle G, \hat{\varphi} \rangle;$$

inoltre si

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{(t)^{n/2}} e^{-|\xi|^2/2t}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ottendiamo così che, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-t/2 |x|^2} d^n x = \frac{1}{(t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-|\xi|^2/2t} d^n \xi.$$

Fissiamo ε , $0 < \varepsilon < n$; moltiplichiamo ambo i membri della precedente uguaglianza per $t^{(n-\varepsilon)/2}$

e integriamo da 0 a $+\infty$; ~~si ha~~ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dt \, t^{(n-\varepsilon)/2} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, e^{-t/2 |x|^2} \hat{\varphi}(x) &= \\ &= \int_0^{+\infty} dt \, t^{(n-\varepsilon)/2} / t^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi \, \varphi(\xi) e^{-|\xi|^2/2t}. \end{aligned}$$

Scambiando l'ordine delle integrazioni, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \hat{\varphi}(x) \int_0^{+\infty} dt \, t^{(n-\varepsilon)/2} e^{-t/2 |x|^2} &= \\ = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \xi \, \varphi(\xi) \int_0^{+\infty} dt \, e^{-|\xi|^2/2t} t^{-\frac{\varepsilon}{2}-1}. \end{aligned}$$

Consideriamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-|\xi|^2/2t} t^{-\frac{\kappa}{2}-1} dt =$$

(con la sostituzione $t = u^2$)

$$= \int_0^{+\infty} e^{-|\xi|^2 u/2} u^{\frac{\kappa}{2}+1} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-|\xi|^2 u/2} u^{\frac{\kappa}{2}-1} du =$$

(con la sostituzione $u |\xi|^2/2 = y$)

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(y \frac{2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{\kappa}{2}-1} 2 \frac{1}{|\xi|^2} dy =$$

$$= \left(\frac{2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{\kappa}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{\kappa}{2}-1} dy$$

$$= \left(\frac{2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right).$$

Infine, consideriamo

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}|x|^2} dt =$$

(con la sostituzione $\frac{t}{2}|x|^2 = y$)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{|x|^2} \left(\frac{y}{|x|^2} \cdot 2\right)^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-y} dy =$$

$$= \left(\frac{2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{(n-2)}{2}-1} dy =$$

$$= \left(\frac{2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Otteniamo così l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x) \Gamma\left(\frac{n-z}{2}\right) \left(\frac{2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-z}{2}} d^n x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) 2^{\frac{z}{2}} |\xi|^{-z} d^n \xi,$$

che vale per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per ogni intero $n \geq 3$
e per ogni z , $0 < z < n$. Possiamo allora concludere che

$$\left(|x|^{z-n}\right)^\wedge(\xi) = 2^z 2^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-z}{2}\right)} |\xi|^{-z}$$

in cui n intero ≥ 3 , $0 < z < n$.

Nel caso $z=2$, otteniamo

$$\left(|x|^{2-n}\right)^\wedge(\xi) = 2^2 2^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)} |\xi|^{-2}.$$

Ricordiamo da qui (con $n \geq 3$)

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$C_n = 2 \pi^{n/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

in cui C_n è l'area della sfera unitaria in \mathbb{R}^n .

Per cui, abbiamo

$$\left(|x|^{2-n}\right)^\wedge(\xi) = C_n \left(\frac{n}{2}-1\right) / 2 \left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{1}{\pi^{n/2}} \frac{1}{|\xi|^2}$$

o anche

$$\frac{1}{|\xi|^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(n-2)c_n} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right)^\wedge$$

Possiamo così concludere, usando l'uguaglianza precedente, che, per $n \geq 3$, una soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 \Gamma = \delta$$

è data da

$$\begin{aligned} \Gamma &= - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{(2\pi)^{n/2}}{(n-2)c_n} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \\ &= - \frac{1}{(n-2)c_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \end{aligned}$$

Notiamo che nel caso $n=3$, si ha

$$\Gamma = - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$

4. Ci proponiamo di riottenere il risultato precedente anche con un altro metodo, che può essere generalizzato al caso $n=2$.

Calcoliamo $\nabla^2 |x|^{2-n}$, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

È chiaro che, se $n \geq 3$, la funzione

$$x \mapsto |x|^{2-n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è localmente integrabile, quindi definisce una distribuzione su \mathbb{R}^n . È altrettanto chiaro che que-

sta funzione è di classe C^∞ , nell'aperto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
 e si ha

$$\nabla^2 |x|^{2-n} = 0, \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

nel senso classico.

Definiamo $F_\varepsilon(x) = (|x|^2 + \varepsilon^2)^{(2-n)/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$.

Usando il teorema della convergenza dominata, si può mostrare che

$$F_\varepsilon \rightarrow |x|^{2-n}, \quad \text{debolmente, se } \varepsilon \downarrow 0.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial |x|^2}{\partial x_j} = \frac{\partial (x_1^2 + \dots + x_n^2)}{\partial x_j} = 2x_j;$$

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{(2-n)}{2} (|x|^2 + \varepsilon^2)^{1 - \frac{n}{2} - 1} \cdot \frac{\partial |x|^2}{\partial x_j} =$$

$$= (2-n) x_j (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 F_\varepsilon}{\partial x_i^2} = (2-n) (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} +$$

$$+ (2-n) x_i \left(-\frac{n}{2}\right) (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}-1} (2x_i) =$$

$$= (2-n) (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} - n(2-n) x_i^2 (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}};$$

$$\nabla^2 F_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_\varepsilon}{\partial x_i^2} =$$

$$= n(2-n) (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} - n(2-n) |x|^2 (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2(2-n) (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left[-|x|^2 + |x|^2 + \varepsilon^2 \right] = \\
&= 2(2-n) \varepsilon^2 \varepsilon^{-2\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left(\left| \frac{x}{\varepsilon} \right|^2 + 1 \right) = \\
&= 2(2-n) \varepsilon^{-n} \left(\left| \frac{x}{\varepsilon} \right|^2 + 1 \right)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Poniamo

$$\bar{\phi}(x) = n(2-n) (|x|^2 + 1)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$C_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\phi}(x) d^n x.$$

Dal calcolo precedente, abbiamo

$$\nabla^2 F_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} C_1 \left(\bar{\phi}(\varepsilon^{-1}x) / C_1 \right).$$

Allora si ha

$$\varepsilon^{-n} \frac{\bar{\phi}(\varepsilon^{-1}x)}{C_1} \rightarrow \int, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{se } \varepsilon \downarrow 0;$$

quindi anche

$$\frac{1}{C_1} \nabla^2 F_\varepsilon \rightarrow \int, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{se } \varepsilon \downarrow 0.$$

D'altra parte, abbiamo visto

$$F_\varepsilon \rightarrow |x|^{2-n}, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{se } \varepsilon \downarrow 0,$$

quindi anche

$$\frac{1}{C_1} \nabla^2 F_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{C_1} \nabla^2 |x|^{2-n}, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{se } \varepsilon \downarrow 0.$$

Possiamo così concludere

$$\frac{1}{c_1} \nabla^2 |x|^{2-n} = \delta.$$

Resta da calcolare c_1 . Si ha

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 |x|^{2-n} d^n x = \\ &= n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} (|x|^2 + 1)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)} d^n x = \\ &\quad (\text{usando coordinate sferiche in } \mathbb{R}^n) \\ &= c_n n(2-n) \int_0^{+\infty} (r^2 + 1)^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)} r^{n-1} dr = \\ &\quad (\text{con la sostituzione } s = \frac{r^2}{r^2 + 1}) \\ &= c_n n(2-n) \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 s^{\frac{n-2}{2}} ds = \\ &= c_n (2-n) \left[s^{\frac{n}{2}} \Big|_0^1 \right] = \\ &= (2-n) c_n. \end{aligned}$$

Quindi, se definiamo

$$N(x) = \frac{1}{(2-n)c_n} |x|^{n-2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3,$$

abbiamo

$$\nabla^2 N = \delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

In particolare, per $n=3$, abbiamo

$$N(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

5. Esistentemente, il calcolo del paragrafo pre-

cedente non è corretto, se $n=2$. In questo caso si ha

$$\frac{1}{|x|^{n-2}} = 1, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^2,$$

quindi

$$\Delta^2 \frac{1}{|x|^{n-2}} = 0, \text{ se } n=2, \text{ su tutto } \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo che F_ε sia una funzione, definita su \mathbb{R}^2 , con la proprietà

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_i} = x_i \frac{1}{(|x|^2 + \varepsilon^2)^2}$$

allora tutti i calcoli fatti nel paragrafo precedente possono essere riferiti (usando queste "nuove" funzioni F_ε); si ottiene

$$\Delta^2 F_\varepsilon = 2 \varepsilon^{-2} \left(\left| \frac{x}{\varepsilon} \right|^2 + 1 \right)^{-2}.$$

Possiamo

$$\Phi(x) = 2 \left(|x|^2 + 1 \right)^{-2}$$

$$C_1 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 x}{(|x|^2 + 1)^2} =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{2z \, dz}{(z^2 + 1)^2} =$$

$$= -2\pi \frac{1}{(z^2 + 1)} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= 2\pi.$$

Si può ripercorrere il ragionamento fatto nel

per il paragrafo precedente, e concludere che

$$\frac{1}{2\pi} \Delta^k \bar{F}_\varepsilon \rightarrow \delta, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \text{ se } \varepsilon \downarrow 0.$$

La funzione F_ε può essere trovata facilmente, integrando le equazioni:

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_i} = x_i \frac{1}{|x|^2 + \varepsilon^2}, \quad i=1,2;$$

si ottiene

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2} \log(|x|^2 + \varepsilon^2) = \\ &= \log(|x|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Esistemente, si ha

$$\bar{F}_\varepsilon \rightarrow \log|x|, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \text{ se } \varepsilon \downarrow 0;$$

quindi, in conclusione

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|, \text{ se } m=2.$$