

La distribuzione x^{-1} e variazioni sul tema.

1. La distribuzione x^{-1} .

Mostriamo che per ogni fissata $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, il limite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) / x \, dx$$

esiste finito. Fissiamo $a > 0$, tale che

$$\text{supp } \varphi \subset [-a, a];$$

per ogni $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < a$), si ha

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) / x \, dx =$$

$$= \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \varphi(x) / x \, dx =$$

$$= \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0)}{x} \right) dx =$$

(la funzione $\varphi(0)/x$ è dispari ed è integrata su un insieme simmetrico rispetto all'origine)

$$= \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx =$$

(per la formula di Taylor, $\varphi(x) = \varphi(0) + x \sum_{\varphi}^L(x)$,

in cui $\sum_{\varphi}^L \in C^\infty(\mathbb{R})$)

$$= \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \zeta_{\varphi}^{\pm}(x) dx$$

Dal momento che $\zeta_{\varphi}^{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, questa funzione è integrabile su $[-a, a]$; e allora si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx &= \int_{-a}^a \zeta_{\varphi}^{\pm}(x) dx = \\ &= \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

Si mostra che il limite esiste finito. Inoltre, si ha

$$\left| \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right| \leq \int_{-a}^a |\zeta_{\varphi}^{\pm}(x)| dx \leq$$

$$\leq 2a \sup_{x \in \mathbb{R}} |\zeta_{\varphi}^{\pm}(x)| \leq 2a \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Si mostra che la forma lineare

$$\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx$$

definisce una distribuzione su \mathbb{R} , che denotiamo con x^{-1} , e che viene detta il "valore principale di $\frac{1}{x}$ ".

Consideriamo l'uguaglianza

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

(in cui $a > 0$ è tale che $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$); dal momento

to che il primo membro non dipende da a , anche il secondo membro è indipendente da a ; si ha così

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

Deve essere sottolineato che

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi_1(x)$$

è integrabile su $[-a, a]$, qualunque sia $a > 0$; inoltre

ha

$$\lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

esiste finito; ma la funzione

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

non è integrabile su \mathbb{R} .

Si può ottenere ancora un'altra rappresentazione per

la distribuzione x^{-1} . Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle x^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx;$$

consideriamo

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} dx =$$

(cambio di variabile $x = -y$)

$$= \int_{-\infty}^{\varepsilon} \varphi(-y) \frac{1}{-y} (-dy) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} - \frac{\varphi(-x)}{x} dx ;$$

per cui:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx .$$

Mostriamo che

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \downarrow 0} \varphi'(x) - \varphi'(-x) = 2\varphi'(0) ;$$

quindi la funzione

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$$

è integrabile su $[0, +\infty[$. Allora si ha

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

(in cui compare l'integrale di una funzione integrabile).

In conclusione, si hanno per la distribuzione x^{-1} le

differenti rappresentazioni:

$$\begin{aligned} \langle x^{-1}, \varphi \rangle &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \\ &= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

2. Le distribuzioni $\text{vp } \frac{f}{x}$.

Se f è una funzione continua e pari, su \mathbb{R} , si

può considerare

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Si possono ripetere, parola per parola, i ragionamenti fatti nel paragrafo precedente (per questo è cruciale l'ipotesi che f sia pari) e mostrare che si ottiene in questo modo una distribuzione su \mathbb{R} , che viene denotata con

$\text{vp } \frac{f}{x}$.

In particolare, sono ben definite $\text{vp } \frac{\cos x}{x}$ e $\text{vp } \frac{e^{-|x|}}{x}$.

Per esse si ha

$$\langle \text{vp } \frac{\cos x}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\langle \text{v.p.} \frac{e^{-|x|}}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-|x|}}{x} \varphi(x) dx,$$

per ogni: $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

* * *

3. L'uguaglianza

$$\partial \log|x| = x^{-1}.$$

La funzione

$$\log|x|, \quad x \neq 0,$$

è localmente integrabile su \mathbb{R} , quindi definisce una distribuzione

$$\log|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

La derivata distribuzionale di $\log|x|$ è una distribuzione, che vogliamo descrivere esplicitamente.

Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \partial \log|x|, \varphi \rangle &= \\ &= - \langle \log|x|, \varphi' \rangle = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \log(-x) \cdot \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \log(x) \cdot \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \log(x) \cdot \varphi'(x) dx &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log x \cdot \varphi'(x) dx = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \log x \cdot \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ -\log \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right\}.$$

Analogamente

$$\int_{-\infty}^0 \log(-x) \cdot \varphi'(x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) \cdot \varphi'(x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \log(-x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{(-1)}{(-x)} \varphi(x) dx \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \log \varepsilon \cdot \varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right\}.$$

Per cui:

$$\langle \mathcal{D} \log |x|, \varphi \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \log \varepsilon \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \right) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right\}.$$

Si ha

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon r_{\varphi}^1(\varepsilon)$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon r_{\varphi}^1(-\varepsilon),$$

da cui

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \varepsilon \left(r_{\varphi}^1(\varepsilon) + r_{\varphi}^1(-\varepsilon) \right);$$

ricordiamo che $r_{\varphi}^1 \in C_{\infty}^1(\mathbb{R})$ e che $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$,

per cui

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \log \varepsilon \left(\varphi(\varepsilon) \cdot \varphi(-\varepsilon) \right) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon \log \varepsilon \left(\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(-\varepsilon) \right) dx =$$

= 0.

In conclusione

$$\langle \partial \log|x|, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \langle x^{-1}, \varphi \rangle,$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ciò mostra l'uguaglianza

$$\partial \log|x| = x^{-1}.$$

* * *

4. La distribuzione x^{-2} . Le generalizzazioni x^{-n} .

Classicamente, cioè nel senso delle funzioni su \mathbb{R} , si ha

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0;$$

definiremo la distribuzione x^{-2} , su \mathbb{R} , ponendo, in analogia,

$$x^{-2} = -\partial x^{-1}.$$

Vogliamo descrivere il più esplicitamente possibile l'azione di x^{-2} sulle funzioni di prova. Può essere di interesse ottenere alcune diverse espressioni per queste azioni.

h.l. Consideriamo la prima. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle x^{-2}, \varphi \rangle =$$

$$= - \langle \partial x^{-1}, \varphi \rangle =$$

$$= \langle x^{-1}, \varphi' \rangle$$

$$= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} dx =$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} dx =$$

(integrando per parti in ogni tratto; notiamo anche che

$$\frac{d}{dx} \left(\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0) \right) = \varphi'(x) - \varphi'(0)$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x} \Big|_{-a}^{-\varepsilon} + \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x} \Big|_{\varepsilon}^a - \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \left(\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0) \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right) \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(0)}{-\varepsilon} - \varphi'(0) - \frac{\varphi(-a)}{-a} + \frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0) + \frac{\varphi(a)}{a} - \frac{\varphi(0)}{a} - \varphi'(0) - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) + \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x^2} dx \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left\{ \frac{\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{a} + \frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{a} + \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x^2} dx \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{\substack{a \uparrow +\infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a z_{\varphi}^2(x) dx =$$

($z_{\varphi}^2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, quindi è integrabile su $[-a, a]$)

$$= \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a z_{\varphi}^2(x) dx =$$

In conclusione

$$\langle x^{-2}, \varphi \rangle = \lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x \varphi'(0)}{x^2} dx,$$

per ogni $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

4.2. Possiamo avere un'altra espressione esplicita per x^{-2} .

Per ogni $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, si ha anche

$$\langle x^{-2}, \varphi \rangle =$$

$$= - \langle \partial x^{-1}, \varphi \rangle =$$

$$= \langle x^{-1}, \varphi' \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) / x dx =$$

(integrando per parti, in ciascun tratto)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \varphi(x) / x \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx + \right.$$

$$+ \varphi(x) \int_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \Bigg| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right\}$$

si ha

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon r_{\varphi}^1(\varepsilon)$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon r_{\varphi}^1(-\varepsilon)$$

da cui

$$-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} = -\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - r_{\varphi}^1(\varepsilon) + \frac{\varphi(0)}{-\varepsilon} + r_{\varphi}^1(-\varepsilon) =$$

$$= -2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - r_{\varphi}^1(\varepsilon) + r_{\varphi}^1(-\varepsilon)$$

Noi sappiamo che

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) \frac{1}{x} dx \text{ esiste finito,}$$

quindi, essendo

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{\varphi}^1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{\varphi}^1(-\varepsilon) = r_{\varphi}^1(0),$$

si ha

$$\langle x^{-2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\}.$$

h.3. La precedente rappresentazione della distribuzione x^{-2} può essere ulteriormente modificata. Infatti, si ha

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(0) \frac{1}{x^2} dx = \varphi(0) \left[-\frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} \right] = \varphi(0) / \varepsilon$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(0) \frac{1}{x^2} dx = \varphi(0) \left[-\frac{1}{x} \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} \right] = \varphi(0) / \varepsilon$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\varphi(0)/\varepsilon =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx =$$

(con il cambio di variabile $x = -y$ nel primo integrale)

$$= \int_{+\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-y) - \varphi(0)}{(-y)^2} (-dy) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx.$$

Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x) + \varphi''(-x)}{2} = \varphi''(0);$$

quindi la funzione

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2}$$

è integrabile su $[0, +\infty[$. Allora si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\varphi(0)/\varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx.$$

In conclusione, abbiamo per la distribuzione x^{-2} (che è definita come $x^{-2} = -2x^{-1}$) le diverse rappresentazioni:

$$\begin{aligned} \langle x^2, \varphi \rangle &= \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x^2} dx - 2\varphi(0) \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx \right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

La definizione di x^{-2} può essere generalizzata. Nel caso delle funzioni su \mathbb{R} , si ha

$$\frac{1}{x^k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0;$$

allora, per analogia si definisce x^{-k} ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$)

ponendo

$$x^{-k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \partial^{k-1} x^{-1}.$$

Si possono ottenere per x^{-k} rappresentazioni analoghe a quelle ottenute per x^{-2} .

* * *

5. Le distribuzioni

$$\frac{1}{x \pm i0}$$

e l'uguaglianza

$$\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right).$$

Cominciamo con l'osservare che, se

$$\varphi \in C_c^\infty]0, +\infty[),$$

si ha

$$\langle x^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx;$$

quindi la restrizione della distribuzione x^{-1} all'intervallo aperto $]0, +\infty[$ coincide con la funzione $\frac{1}{x}$, che è localmente integrabile nell'aperto $]0, +\infty[$. Unicamente, si ha una conclusione analoga anche se $\varphi \in C_c^\infty]-\infty, 0[$. Quindi, la distribuzione x^{-1} coincide con la funzione localmente integrabile $\frac{1}{x}$ nell'unione disgiunta di intervalli aperti:

$$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nel seguito, vogliamo descrivere due altre distribuzioni che coincidono con $\frac{1}{x}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Notiamo, innanzi tutto, che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

le funzioni

$$\frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}$$

sono integrabili su tutto \mathbb{R} . Quindi le funzioni localmente integrabili

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon}$$

definiscono delle distribuzioni su \mathbb{R} , qualunque sia $\varepsilon > 0$.

Consideriamo ora la funzione

$$\log(x + i\varepsilon),$$

definita da

$$\log(x + i\varepsilon) = \log(x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} + i \arg(x + i\varepsilon),$$

in cui fissiamo

$$0 < \arg z < \pi.$$

Consideriamo le famiglie di funzioni

$$x \mapsto \log(x + i\varepsilon)$$

parametrizzate da $\varepsilon > 0$.

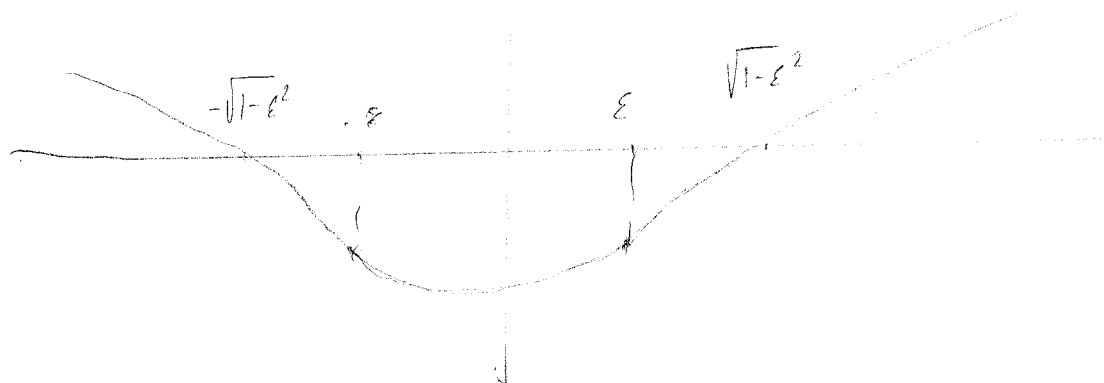
Se

$$0 < \varepsilon < \sqrt{1 - \varepsilon^2} < 1$$

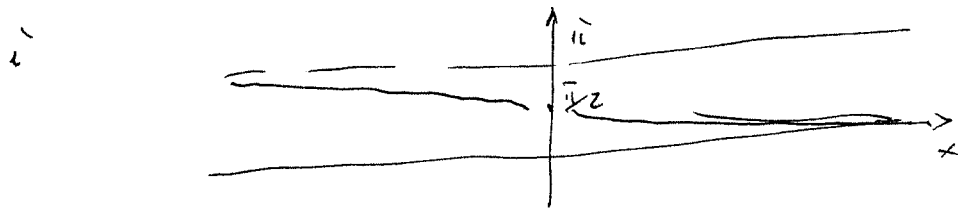
l'elemento delle funzioni

$$x \mapsto \log \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$$

è



e l'argomento di
 $x \mapsto \arg(x+i\varepsilon)$



limiti, per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione
 $x \mapsto \log(x+i\varepsilon)$

è localmente integrabile, e definisce una distribuzione su \mathbb{R} .
 Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha il limite punto per punto

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log(x+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\log \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i \arg(x+i\varepsilon) \right]$$

$$= \log|x| + i\pi(1-H(x)).$$

Un argomento basato sul teorema delle convergenze domi-
 nate mostra che

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log(x+i\varepsilon) = \log|x| + i\pi(1-H(x))$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Per la continuità in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dell'applicazione
 $u \mapsto Du$,

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log(x+i\varepsilon) \right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{D} \log(x+i\varepsilon) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} \end{aligned}$$

ci si mostra

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x+i\varepsilon}$$

esiste in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. D'altra parte si ha, per quanto visto in precedenza,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(x+i\varepsilon) \right) &= \mathcal{D} \left(\log|x| + i\pi (1-H(x)) \right) \\ &= x^{-1} + i\pi (-\delta) \\ &= x^{-1} - i\pi \delta, \end{aligned}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

In conclusione, abbiamo mostrato

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = x^{-1} - i\pi \delta, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

In maniera del tutto analoga, si può mostrare anche

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-i\varepsilon} = x^{-1} + i\pi \delta.$$

~~Le distribuzioni $\frac{1}{x \pm i0}$ sono definite come~~ Le distribuzioni:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$$

sono definite come

$$\frac{1}{x \pm i0}$$

con queste notazioni, si ha l'uguaglianza

$$\delta = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0} \right).$$

6. Le distribuzioni: x_+^{-1} e x_-^{-1} .

Definiamo una funzione, L_+ , su \mathbb{R} , ponendo

$$L_+(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

L_+ è localmente integrabile su \mathbb{R} ; quindi definisce una distribuzione su \mathbb{R} .

Definiamo due distribuzioni su \mathbb{R} , che denotiamo

$$X_+^{-1}, X_+^{-2}$$

ponendo

$$X_+^{-1} = \mathcal{D}L_+; \quad X_+^{-2} = -\mathcal{D}^2L_+ - \delta' = -\mathcal{D}X_+^{-1} - \delta'$$

X_+^{-1} e X_+^{-2} sono distribuzioni su \mathbb{R} , in quanto sono definite come derivate di distribuzioni su \mathbb{R} . Le loro proprietà sono (le verifico ~~in un altro foglio~~ lasciate per esercizio):

$$1) \quad X_+^{-1} |]-\infty, 0[= 0, \quad X_+^{-2} |]-\infty, 0[= 0$$

$$X_+^{-1} |]0, +\infty[= \frac{1}{x}, \quad X_+^{-2} |]0, +\infty[= \frac{1}{x^2}$$

$$2) \quad x \cdot X_+^{-1} = H(x) \quad ; \quad x \cdot X_+^{-2} = X_+^{-1}$$

$$3) \quad \mathcal{D}X_+^{-1} = -X_+^{-2} - \delta'$$

Si può ottenere una rappresentazione integrale della distribuzione X_+^{-1} : se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle X_+^{-1}, \varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} \log x \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[-\int_0^{+\infty} \log x \varphi'(x) dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[-\log x \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\log \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\varphi(0) \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) / x \, dx \right].$$

(Dove essere sottolineato che i limiti delle funzioni entro le parentesi qualche non sono separatamente finiti).

Nello stesso ordine di idee, si calcola facilmente

$$\langle x_+^{-2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\varphi'(0) \log \varepsilon - \varphi(0) / \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x) / x^2 \, dx \right]$$

Definiamo la funzione L_- su \mathbb{R} , ponendo

$$L_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

L_- è localmente integrabile su \mathbb{R} ; quindi definisce una distribuzione su \mathbb{R}

Definiamo due distribuzioni su \mathbb{R} , che denotiamo

$$x_-^{-1}, \quad x_-^{-2}$$

ponendo

$$x_-^{-1} = -\partial L_-; \quad x_-^{-2} = -\partial^2 L_- + \delta' = \partial x_-^{-1} + \delta';$$

x_-^{-1} e x_-^{-2} sono distribuzioni su \mathbb{R} in quanto sono definite come derivate di distribuzioni su \mathbb{R} . Le loro proprietà sono (la verifica è lasciata per esercizio)

$$1) \quad x_-^{-1} |]0, +\infty[= 0; \quad x_-^{-2} |]0, +\infty[= 0$$

$$x_-^{-1} |]-\infty, 0[= -\frac{1}{x}; \quad x_-^{-2} |]-\infty, 0[= \frac{1}{x^2}$$

$$2) \quad x \cdot x_-^{-1} = -H(-x); \quad x \cdot x_-^{-2} = -x_-^{-1}$$

$$3) \partial X_-^{-1} = X_-^{-2} - \delta'$$

Per le distribuzioni X_-^{-1} e X_-^{-2} si possono ottenere delle rappresentazioni integrali. Si può mostrare:

se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle X_-^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\varphi(0) \log \varepsilon + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \varphi(x) \frac{1}{-x} dx \right]$$

$$\langle X_+^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[-\varphi'(0) \log \varepsilon - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x^2} dx \right]$$

(dove esse sottointende che i limiti delle funzioni entro le parentesi ~~sono~~ sono separatamente finiti).

Notiamo che si hanno le uguaglianze:

$$a) X^{-1} = X_+^{-1} - X_-^{-1}$$

$$b) X^{-2} = X_+^{-2} + X_-^{-2}$$

Per quel che riguarda la (a), si ha:

$$\begin{aligned} X_+^{-1} - X_-^{-1} &= \partial L_+ - (-\partial L_-) = \\ &= \partial (L_+ + L_-) \\ &= \partial (\log |x|) \\ &= X^{-1} \end{aligned}$$

Per quel che riguarda la (b), si ha:

$$\begin{aligned} X_+^{-2} + X_-^{-2} &= -\partial X_+^{-1} - \delta' + \partial X_-^{-1} + \delta' \\ &= -\partial (X_+^{-1} - X_-^{-1}) \\ &= -\partial (X^{-1}) \\ &= X^{-2} \end{aligned}$$

Infine, definiamo la distribuzione $|x|^{-1}$, ponendo

$$\begin{aligned}|x|^{-1} &= x_+^{-1} + x_-^{-1} \\ &= \partial L_+ + (-\partial L_-) \\ &= \partial (L_+ - L_-)\end{aligned}$$

Notiamo che

$$(L_+ - L_-)(x) = \operatorname{sign} x \log |x|.$$

Si ha la rappresentazione:

$$\begin{aligned}\langle |x|^{-1}, \varphi \rangle &= \langle x_+^{-1} + x_-^{-1}, \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(0) \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \log \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2\varphi(0) \log \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx \right].\end{aligned}$$