



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

TESI DI LAUREA IN FISICA

Tomografia quantistica e la rappresentazione metaplettica

Relatore:

Prof. Gianni Cassinelli

Correlatore:

Prof. Pierantonio Zanghì

Candidato:

Francesca Zizzi

ANNO ACCADEMICO 2005/2006

Indice

Introduzione	1
1 Tomografia Quantistica e le rappresentazioni a quadrato integrabile	5
1.1 Introduzione alla Tomografia Quantistica	5
1.2 Rappresentazioni a quadrato integrabile e Tomografia Quantistica	8
1.3 Esempi	11
1.3.1 Il gruppo $SU(2)$	11
1.3.2 Il gruppo di Heisenberg	15
2 I gruppi $SU(1,1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$ e le rappresentazioni della serie discreta	21
2.1 I gruppi $SU(1,1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$	21
2.1.1 Il gruppo $SU(1,1)$	21
2.1.2 Il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$	23
2.1.3 Isomorfismo tra $SU(1,1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$	26
2.2 Il duale unitario di $SL(2, \mathbb{R})$	27
2.3 La serie discreta di $SU(1,1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$	30
2.4 Proprietà di integrabilità delle rappresentazioni della serie discreta	39
3 La rappresentazione metaplettica di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$ e la rappresentazione ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$	45
3.1 La rappresentazione metaplettica di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$	46
3.2 La rappresentazione di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$	50
3.2.1 Descrizione della rappresentazione ω^2	50
3.2.2 Decomposizione della rappresentazione ω^2	52
3.3 Relazione tra le rappresentazioni ω e ω^2	58
3.4 La rappresentazione metaplettica	61

4	La formula di ricostruzione per $SL(2, \mathbb{R})$	67
4.1	Decomposizione di Cartan per $SL(2, \mathbb{R})$	67
4.2	Le relazioni di ortogonalità e la formula di ricostruzione per $SL(2, \mathbb{R})$	69
4.3	Schemi di applicazione	74
4.3.1	Campo elettromagnetico con un'unica frequenza	74
4.3.2	Campo elettromagnetico con due frequenze	75
A	Appendice	77
	Bibliografia	83

Introduzione

Lo stato di un sistema fisico è descritto, tanto in Meccanica Classica quanto in Meccanica Quantistica, da un oggetto matematico che sia in grado di fornire una informazione completa sul sistema. In particolare questo significa che, dato l'oggetto matematico che rappresenta lo stato, è possibile prevedere il risultato della misura di ogni osservabile del sistema, anche solo in modo probabilistico.

In Meccanica Classica lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un punto nello spazio delle fasi, è cioè specificato da un insieme di numeri che sono le coordinate canoniche del punto.

In Meccanica Quantistica l'oggetto che descrive lo stato di un sistema è l'operatore statistico, che è un operatore autoaggiunto, di classe traccia e a traccia unitaria che agisce sullo spazio di Hilbert del sistema. Nel caso particolare in cui lo stato sia puro l'operatore statistico è il proiettore su un sottospazio unidimensionale dello spazio di Hilbert.

Per indagare lo stato di un sistema è necessario poter eseguire delle misure sul sistema stesso, quando si trova nello stato incognito. Lo scopo della Tomografia Quantistica è quello di determinare un insieme di osservabili del sistema, di cui devono essere misurate le distribuzioni di probabilità, e ricostruire lo stato incognito a partire dalla conoscenza di questi dati sperimentali. Questo problema riguarda le basi stesse della Meccanica Quantistica e fu posto già da Pauli nel suo classico *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik* [22] (vedi paragrafo 1.1). Il primo approccio sistematico al problema fu però, verso la fine degli anni '50, il lavoro di U. Fano [11], il quale chiamò *quorum* un insieme di osservabili sufficiente per la completa determinazione della matrice densità.

Nonostante la sua natura fondamentale, comunque, il problema è rimasto a livello di pura speculazione fino a circa dieci anni fa, quando nuovi sviluppi nelle tecniche sperimentali hanno portato a nuovi esperimenti e conseguentemente ad un interesse in costante aumento verso l'argomento della Tomografia Quantistica. In particolare, il primo esperimento fu eseguito dal

gruppo di Raymer [26] nel dominio dell'ottica quantistica. Infatti, in ottica quantistica, usando un rivelatore omodino bilanciato¹ è possibile misurare tutte le possibili combinazioni lineari di posizione e momento di un oscillatore armonico che rappresenta un campo elettromagnetico a modo singolo, e tramite queste ricostruire lo stato del campo.

Il successo della tomografia ottica omodina ha stimolato lo sviluppo di metodi di ricostruzione dello stato anche in altri campi, oltre a quello ottico, per esempio [17], [10], [19] [21]. Il metodo della tomografia omodina è stato poi generalizzato in modo da poter ricostruire una generica osservabile del campo elettromagnetico a modo singolo [6] e anche per un numero qualsiasi di modi [7].

Più recentemente il metodo di ricostruzione della Tomografia Quantistica è stato descritto matematicamente, ed esteso al caso generale di un sistema fisico qualsiasi, per mezzo della teoria dei gruppi [4]. In particolare è stato spiegato come possono essere ricavate teoricamente le formule di ricostruzione che si trovano in ottica quantistica, se sullo spazio degli stati del sistema agisce una rappresentazione unitaria irriducibile e a quadrato integrabile.

La mia tesi si propone di far rientrare in questo schema generale il lavoro di D'Ariano, De Vito, Maccone [8]. Nell'articolo citato:

- viene descritta una formula di ricostruzione basata sul gruppo $SU(1, 1)$; ho mostrato in modo matematicamente preciso perché si può scrivere una tale formula e l'ho ricavata teoricamente.
- la formula di ricostruzione è applicata agli stati di un campo elettromagnetico con un'unica frequenza e con due frequenze; in entrambi i casi ho mostrato in maniera rigorosa e precisa, studiando la rappresentazione metaplettica, quali sono gli stati che possono essere ricostruiti con la formula ricavata.

Nella discussione sono state spesso usate proprietà generali delle rappresentazioni infinito-dimensionali dei gruppi di Lie, senza dare ogni volta un riferimento. Per la teoria generale si può vedere [18].

La mia tesi è organizzata come segue.

Nel capitolo 1 viene spiegato come possa essere risolto il problema della Tomografia Quantistica, se sullo spazio degli stati del sistema agisce una rappresentazione unitaria irriducibile e a quadrato integrabile di un gruppo

¹Per una descrizione dei fondamenti della teoria della rivelazione in ottica quantistica, fotorivelazione e rivelazione omodina, si veda [5].

di Lie unimodulare. Nel paragrafo 1.3 vengono presentati due esempi di applicazione dello schema generale appena introdotto. Il primo è basato sulle rappresentazioni D^j del gruppo $SU(2)$, tramite le quali si possono ricostruire gli stati di un sistema con spin j . Il secondo invece è basato sulla rappresentazione di Schrödinger del gruppo di Heisenberg, tramite cui si possono ricostruire gli stati di una particella quantistica priva di spin in una dimensione.

Il secondo capitolo è dedicato allo studio del gruppo $SU(1,1)$ e di un gruppo ad esso isomorfo, $SL(2, \mathbb{R})$. In particolare ho studiato una famiglia di rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, che viene denominata la serie discreta, mostrando che tutte le rappresentazioni di questa classe sono a quadrato integrabile. La serie discreta viene studiata mediante una sua realizzazione concreta come famiglia di rappresentazioni del gruppo $SU(1,1)$ agenti sullo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato integrabile e olomorfe definite sul disco \mathcal{D} .

Nel terzo capitolo ho studiato due rappresentazioni di $SL(2, \mathbb{R})$, che sono decomponibili in somma diretta di rappresentazioni appartenenti alla serie discreta. Di queste:

- la prima, ω , è la rappresentazione metaplettica e agisce su $L^2(\mathbb{R})$, che è lo spazio degli stati del campo elettromagnetico con un'unica frequenza;
- la seconda, ω^2 , è il prodotto tensore di due copie della rappresentazione metaplettica e agisce su $L^2(\mathbb{R}^2)$, che è lo spazio degli stati del campo elettromagnetico con due frequenze.

In base a questa descrizione ho stabilito in modo preciso per quali stati del campo elettromagnetico, in entrambi i casi, si può usare la formula di ricostruzione basata sulle rappresentazioni unitarie irriducibili e a quadrato integrabile della serie discreta.

Nel capitolo 4 ho esplicitamente derivato la formula di ricostruzione basata sulle rappresentazioni della serie discreta di $SL(2, \mathbb{R})$. Questa è esattamente quella trovata, per altra via, nell'articolo [8] ed è implementabile sperimentalmente. Infine ho mostrato come questa formula può essere usata per determinare gli stati del campo elettromagnetico, con un'unica frequenza e con due frequenze, facendo espressamente uso dei risultati ottenuti nel capitolo 3.

Capitolo 1

Tomografia Quantistica e le rappresentazioni a quadrato integrabile

1.1 Introduzione alla Tomografia Quantistica

Scopo della Tomografia Quantistica è quello di determinare lo stato di un sistema fisico a partire dalla conoscenza delle distribuzioni di probabilità, che si determinano sperimentalmente, di certe opportune osservabili del sistema nello stato incognito. È quindi naturale chiedersi quali osservabili bisogna conoscere per poter ricostruire lo stato del sistema

Il problema fu posto già da Pauli nel suo classico *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik* [22], nella seguente forma: se si conoscono le distribuzioni di probabilità della posizione e dell'impulso di una particella quantistica, priva di spin, in una dimensione, è possibile dedurre da queste lo stato della particella? Il problema può essere riformulato nella maniera seguente: se f denota una funzione incognita in $L^2(\mathbb{R})$ e sono assegnati esplicitamente $|f|$ e $|\hat{f}|$, dove \hat{f} denota la trasformata di Fourier di f , allora è possibile determinare f , a meno di un fattore di fase, cioè a meno di un numero complesso di modulo unitario?

La risposta al problema è negativa. Si può infatti esibire un controesempio, cioè si possono costruire due diverse funzioni f e g in $L^2(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{aligned} |f| &= |g| \\ |\hat{f}| &= |\hat{g}| \end{aligned}$$

Le funzioni f e g di $L^2(\mathbb{R})$ rappresentano quindi due diversi stati quantistici

della particella, che hanno però le stesse distribuzioni di probabilità della posizione e dell'impulso.

È evidente allora che il problema di Pauli conduce al seguente problema, che è la base della Tomografia Quantistica: se si conoscono le distribuzioni di probabilità di un insieme di osservabili in uno stato del sistema quantistico, allora è possibile determinare univocamente lo stato e ricostruirlo esplicitamente? E se sì di quali osservabili è necessario conoscere le distribuzioni di probabilità?

Denotiamo con \mathcal{H} lo spazio di Hilbert degli stati di un sistema quantistico. Uno stato del sistema è rappresentato da un operatore T su \mathcal{H} autoaggiunto, di classe traccia e a traccia unitaria, detto operatore statistico o matrice densità; T deve inoltre essere tale che il valor medio o valore di aspettazione di una generica osservabile A del sistema nello stato T sia sempre definito ed espresso dalla traccia $Tr(AT)$:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad t.c. \quad & - \quad T^* = T \\ & - \quad Tr T = 1 \\ & - \quad \langle A \rangle_T = Tr(AT) \quad \forall \text{ osservabile } A \end{aligned}$$

Per conoscere lo stato del sistema è necessario poter determinare il valor medio di ogni osservabile A del sistema nello stato T o, equivalentemente, gli elementi di matrice di T :

$$(u, Tv)_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

dove $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ è un prodotto scalare su \mathcal{H} , che per convenzione scriviamo lineare nel secondo termine.

Nel seguito consideriamo soltanto stati puri del sistema quantistico. L'operatore statistico T di uno stato puro è l'operatore di proiezione su un sottospazio unidimensionale di \mathcal{H} individuato da un vettore $w \in \mathcal{H}$, che per semplicità si sceglie di norma unitaria, $|w| = 1$:

$$T(\text{stato puro } w) = P[w] \quad , \quad \text{con } |w| = 1$$

dove $P[w]$ è definito da:

$$P[w]u := (w, u)_{\mathcal{H}} w \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

Il problema che ci si pone è allora quello di ottenere una formula esplicita che permetta di calcolare gli elementi di matrice del proiettore $P[w]$:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

a partire dalle distribuzioni di probabilità misurate di certi opportuni osservabili. Per questo, dobbiamo supporre di poter misurare sperimentalmente la distribuzione di probabilità di qualunque osservabile del nostro sistema quantistico. Questa supposizione equivale alla idealizzazione seguente, che è usualmente adottata nella descrizione della Meccanica Quantistica e che è molto vicina alla realtà sperimentale attuale, specialmente in ottica quantistica. Abbiamo a disposizione un insieme statistico di sistemi quantistici identicamente preparati nello stesso stato; possiamo misurare su ogni individuo dell'insieme statistico una qualunque osservabile del sistema, in modo da poter ricavare sperimentalmente le distribuzioni di probabilità delle varie osservabili.

Denoteremo con:

$$\alpha_w^A$$

la distribuzione di probabilità dell'osservabile A nello stato incognito $P[w]$. Esplicitamente, se E è un sottoinsieme di Borel di \mathbb{R} , la quantità:

$$\alpha_w^A(E)$$

rappresenta la probabilità che il valore misurato di A sia compreso in E , se il sistema si trova nello stato $P[w]$.

Con queste premesse, e con queste notazioni, il problema della Tomografia Quantistica può essere posto in questi termini precisi:

1. determinare un insieme di osservabili del sistema

$$\{A_\omega : \omega \in \Omega\}$$

parametrizzate da uno spazio di probabilità (Ω, μ) , cioè uno spazio dotato di misura tale che la misura di tutto lo spazio è 1: $\mu(\Omega) = 1$. Ogni osservabile A_ω è rappresentata matematicamente da un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , che denoteremo ancora con A_ω . L'insieme delle osservabili A_ω è usualmente chiamato *quorum*.

2. calcolare esplicitamente, per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathcal{H}$, la funzione

$$\lambda \longmapsto f_{u,v}^\omega(\lambda) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

in modo tale che si abbia la seguente *formula di ricostruzione dello stato* $P[w]$:

$$(u, P[w]v)_\mathcal{H} = \int_\Omega d\mu(\omega) \int_{\mathbb{R}} d\alpha_w^\omega(\lambda) f_{u,v}^\omega(\lambda) \quad (1.1)$$

dove abbiamo usato la notazione semplificata

$$\alpha_w^\omega = \alpha_w^{A_\omega}$$

per la distribuzione di probabilità dell'osservabile A_ω nello stato incognito $P[w]$.

Notiamo che, nella formula di ricostruzione (1.1):

1. la quantità

$$d\mu(\omega)d\alpha_w^\omega(\lambda)$$

dipende dallo stato incognito $P[w]$ del sistema. Essa rappresenta “la probabilità che scegliendo a caso una osservabile A_ω , in accordo con la distribuzione di probabilità μ su Ω , si misuri il valore λ di A_ω , quando il sistema si trova nello stato puro $P[w]$ ”. L'informazione su questa probabilità si ottiene sperimentalmente dalla misura delle osservabili A_ω su varie repliche, preparate identicamente, del sistema quantistico in un insieme statistico che rappresenti lo stato puro $P[w]$.

2. la funzione

$$f_{u,v}^\omega$$

per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni coppia $u, v \in \mathcal{H}$, non dipende dallo stato incognito $P[w]$ del sistema, ma solo dallo spazio di probabilità (Ω, μ) e dalla scelta dell'osservabile A_ω . Questo oggetto deve essere calcolato teoricamente.

Per completezza scriviamo anche la formula di ricostruzione nel caso di uno stato misto T , che è di verifica immediata:

$$(u, Tv)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} d\mu(\omega) \int_{\mathbb{R}} d\alpha_T^\omega(\lambda) f_{u,v}^\omega(\lambda)$$

dove α_T^ω è la misura di Borel su \mathbb{R} , che rappresenta la distribuzione di probabilità dei valori di A_ω , con ω fissato, nello stato misto T .

1.2 Rappresentazioni a quadrato integrabile e Tomografia Quantistica

Per realizzare lo schema introdotto nel paragrafo precedente è necessario poter determinare un set di osservabili A_ω e la funzione $f_{u,v}^\omega$, in modo da poter scrivere la formula di ricostruzione (1.1).

Il problema è risolvibile se sullo spazio degli stati del sistema agisce una rappresentazione a quadrato integrabile di un gruppo di Lie unimodulare.

Sia \mathcal{G} un gruppo di Lie connesso e unimodulare. Sia dg una misura di Haar su \mathcal{G} ; ricordiamo che dg è determinata univocamente a meno di una costante moltiplicativa positiva. Ricordiamo inoltre che la misura di Haar permette di integrare le funzioni definite sul gruppo \mathcal{G} e che l'ipotesi di unimodularità significa che l'integrazione è invariante sia per l'azione regolare destra di \mathcal{G} su \mathcal{G} sia per quella sinistra

$$\int_{\mathcal{G}} f(g)dg = \int_{\mathcal{G}} f(ag)dg = \int_{\mathcal{G}} f(ga)dg$$

per ogni $a \in \mathcal{G}$ e per ogni funzione $f \in C_c(\mathcal{G})$.

Introduciamo la seguente ipotesi fondamentale:

Ipotesi 1.2.1. Sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati del sistema quantistico agisce una rappresentazione unitaria, irriducibile e a quadrato integrabile U del gruppo connesso e unimodulare \mathcal{G} . Ricordiamo che una rappresentazione è a quadrato integrabile se esiste un vettore non nullo $v \in \mathcal{H}$ tale che:

$$(g \mapsto (U(g)v, v)_{\mathcal{H}}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G}, dg)$$

o, in altre parole, se esiste un vettore non nullo $v \in \mathcal{H}$ tale che:

$$\int_{\mathcal{G}} |(U(g)v, v)_{\mathcal{H}}|^2 dg < \infty$$

Le proprietà delle rappresentazioni a quadrato integrabile sono:

1. la funzione

$$(g \mapsto (U(g)u, v)_{\mathcal{H}})$$

è in $\mathcal{L}^2(\mathcal{G}, dg)$ per tutti i vettori $u, v \in \mathcal{H}$.

2. esiste un numero positivo d_U , che dipende dalla scelta della costante moltiplicativa della misura di Haar dg , tale che:

$$\int_{\mathcal{G}} \overline{(U(g)v, u)_{\mathcal{H}}} (U(g)y, w)_{\mathcal{H}} dg = \frac{1}{d_U} (u, w)_{\mathcal{H}} (y, v)_{\mathcal{H}} \quad (1.2)$$

per ogni $u, v, w, y \in \mathcal{H}$. Queste uguaglianze sono note come le *relazioni di ortogonalità* per la rappresentazione unitaria U e la costante d_U viene detta *il grado formale di U* .

La dimostrazione delle proprietà fondamentali (1) e (2) delle rappresentazioni a quadrato integrabile può essere trovata in [3]. L'esposizione di Borel è un classico della teoria delle rappresentazioni.

Le relazioni di ortogonalità possono essere usate per risolvere il problema della Tomografia Quantistica per un sistema il cui spazio di Hilbert degli stati sia \mathcal{H} . Infatti gli elementi di matrice dell'operatore di proiezione $P[w]$, che rappresenta uno stato puro, possono essere espressi nella maniera seguente, facendo uso delle relazioni di ortogonalità:

$$\begin{aligned} (u, P[w]v)_{\mathcal{H}} &= (u, (w, v)_{\mathcal{H}}w)_{\mathcal{H}} = (u, w)_{\mathcal{H}}(w, v)_{\mathcal{H}} = \\ &= d_U \int_{\mathcal{G}} (u, U(g)v)_{\mathcal{H}}(U(g)w, w)_{\mathcal{H}} dg \end{aligned} \quad (1.3)$$

Se si ha uno stato misto T questa formula si generalizza come:

$$(u, Tv)_{\mathcal{H}} = d_U \int_{\mathcal{G}} (u, U(g)v)_{\mathcal{H}} \text{Tr}(U(g)T) dg \quad (1.4)$$

Deve essere sottolineato come la funzione che compare sotto il segno di integrazione in dg nella formula (1.3), o equivalentemente nella (1.4), sia fattorizzata in una parte che dipende dallo stato incognito w e in un'altra che non dipende dallo stato incognito w . Questo è il punto essenziale. Naturalmente, rimane il problema di passare dalla formula (1.3) ad una formula di ricostruzione del tipo (1.1).

Nel paragrafo (1.3) mostreremo come questo sia possibile descrivendo gli esempi, già trattati e noti nella letteratura, del gruppo $SU(2)$ e del gruppo di Heisenberg. Il resto della tesi è dedicato a questo problema per il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$.

Nota 1.2.1. La condizione che il gruppo sia unimodulare è necessaria per poter scrivere le relazioni di ortogonalità nella forma (1.2). Infatti per un gruppo \mathcal{G} non unimodulare le relazioni di ortogonalità di una rappresentazione a quadrato integrabile U sono del tipo:

$$\int_{\mathcal{G}} \overline{(U(g)v, u)_{\mathcal{H}}} (U(g)y, w)_{\mathcal{H}} dg = (u, w)_{\mathcal{H}} (Cy, Cv)_{\mathcal{H}}$$

dove C è un operatore positivo, invertibile e autoaggiunto su \mathcal{H} , determinabile univocamente e il cui dominio $\mathcal{D}(C)$ è denso in \mathcal{H} e coincide con l'insieme \mathcal{A} dei vettori ammissibili; v, y sono dei vettori ammissibili in \mathcal{H} e u, w sono dei vettori qualsiasi in \mathcal{H} . Ricordiamo che un vettore $u \in \mathcal{H}$ si dice ammissibile se

$$\int_{\mathcal{G}} |(U(g)u, u)_{\mathcal{H}}|^2 dg < \infty$$

Inoltre si ha che l'operatore C è un multiplo positivo dell'identità, cioè $C = \lambda I$, con $\lambda > 0$, se e solo se \mathcal{G} è unimodulare. Per una dimostrazione si può vedere [9].

Nota 1.2.2. In alcuni casi, come per esempio nel caso del gruppo di Heisenberg, che sarà trattato nel prossimo paragrafo, la teoria delle rappresentazioni a quadrato integrabile non è sufficiente. È necessaria una sua generalizzazione: la nozione di rappresentazione a quadrato integrabile modulo il centro del gruppo. Anche in questo caso si possono scrivere delle relazioni di ortogonalità della forma (1.2) e la dimostrazione si trova ancora in [3].

1.3 Esempi

In entrambi gli esempi seguenti l'integrazione sul gruppo, presente nella formula di ricostruzione (1.3), viene effettuata trasportando l'integrazione sull'algebra di Lie del gruppo. Lo schema generale di questo calcolo è riportato in appendice.

1.3.1 Il gruppo $SU(2)$

$SU(2)$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 che conservano il prodotto scalare naturale su \mathbb{C}^2 e che hanno determinante 1:

$$SU(2) = \{g \in Mat_2(\mathbb{C}) : (gx, gy) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}^2, \det g = 1\} \quad (1.5)$$

dove $(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}^2$. Questo è equivalente a dire che $SU(2)$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante unitario e unitarie:

$$SU(2) = \{g \in Mat_2(\mathbb{C}) : g^* = g^{-1}, \det g = 1\} \quad (1.6)$$

dove con g^* si è indicata l'aggiunta della matrice g . Dalle due caratterizzazioni precedenti (1.5), (1.6) si può derivare la seguente parametrizzazione degli elementi di $SU(2)$:

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

L'identità in $SU(2)$ è data da:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverso di un elemento $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ di $SU(2)$ è:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

$SU(2)$ è un gruppo di Lie connesso, semplicemente connesso, compatto e unimodulare.

Sia D^j , con $2j \in \mathbb{N}$, la rappresentazione unitaria e irriducibile del gruppo $SU(2)$ agente sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2j+1}$. Dal momento che $SU(2)$ è compatto, tutte le sue rappresentazioni sono a quadrato integrabile e integrabili. Si possono allora scrivere le relazioni di ortogonalità (1.2) per la rappresentazione D^j . La rappresentazione (D^j, \mathbb{C}^{2j+1}) definisce quindi, in accordo con la teoria generale, un *quorum* e permette di scrivere esplicitamente una formula di ricostruzione per ogni stato $P[w]$ di un sistema quantistico il cui spazio degli stati sia \mathbb{C}^{2j+1} , cioè per un sistema con spin j :

$$(u, P[w]v) = d_j \int_{SU(2)} (u, D^j(g)v)(D^j(g)w, w) dg$$

dove tutti i prodotti scalari (\cdot, \cdot) sono prodotti scalari in \mathbb{C}^{2j+1} e dove si è indicato il grado formale della rappresentazione D^j con la notazione semplificata d_j .

L'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ del gruppo è l'insieme delle matrici complesse 2×2 antiautoaggiunte e a traccia nulla:

$$\mathfrak{su}(2) = \{g \in Mat_2(\mathbb{C}) : g^* = -g, Trg = 0\}$$

Una base per $\mathfrak{su}(2)$ può essere scelta come:

$$\frac{i}{2}\sigma_1, \quad \frac{i}{2}\sigma_2, \quad \frac{i}{2}\sigma_3$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tramite la scelta della base si può identificare lo spazio vettoriale reale soggiacente a $\mathfrak{su}(2)$ con \mathbb{R}^3 :

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \frac{i}{2}(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Allora una misura di Haar per $\mathfrak{su}(2)$ è la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^3 .

Definiamo:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 2\pi \right\}$$

È noto che:

1. V è un intorno aperto dell'origine in \mathbb{R}^3 ;
2. la mappa esponenziale, che in questo caso è l'esponenziale delle matrici, ristretta a V è un diffeomorfismo da V ad un aperto $\exp(V)$ di $SU(2)$;
3. il complemento di $\exp(V)$ in $SU(2)$ è trascurabile rispetto alla misura di Haar su $SU(2)$;
4. il differenziale $(d\exp)_{(x,y,z)}$ è invertibile per ogni $(x, y, z) \in V$.

L'aperto V di $\mathfrak{su}(2)$ soddisfa quindi tutte le condizioni dell'aperto $O \subset \mathfrak{g}$ dell'ipotesi (A.0.1) dell'appendice. Inoltre si può calcolare che:

$$\det(d\exp)_{(x,y,z)} = 4 \frac{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se si sceglie la misura di Haar di $SU(2)$ in modo tale che la costante k nella formula della misura immagine sia 1, si ha:

$$\int_{SU(2)} 1 dg = \int_V J(x, y, z) dx dy dz = 16\pi^2 \quad (1.7)$$

Data la scelta (1.7) della normalizzazione per la misura di Haar di $SU(2)$ si ha che il grado formale della rappresentazione D^j risulta:

$$d_j = \frac{2j + 1}{16\pi^2}$$

Consideriamo la sfera S^2 in $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{ \vec{n} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{n}| = 1 \}$$

La misura di Lebesgue su \mathbb{R}^3 si trasporta nell'isomorfismo $S^2 \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ nella misura:

$$4\pi t^2 dt d\Omega(\vec{n})$$

dove $d\Omega(\vec{n}) = d\vec{n}/4\pi$ è la misura sulla sfera, normalizzata ad 1.

Per ogni $\vec{n} \in S^2$ si definisce un operatore hermitiano $J_{\vec{n}}$ tale che:

$$D^j(\exp(t\vec{n})) = e^{itJ_{\vec{n}}} \quad t \in \mathbb{R}$$

Allora il *quorum* definito dalla rappresentazione D^j di $SU(2)$ è l'insieme degli operatori autoaggiunti:

$$\{J_{\vec{n}} : \vec{n} \in S^2\}$$

parametrizzato dallo spazio di probabilità:

$$\left(S^2, \frac{d\vec{n}}{4\pi}\right)$$

Le osservabili $J_{\vec{n}}$ rappresentano gli operatori di spin lungo la direzione \vec{n} . È noto che esiste un operatore unitario $W_{\vec{n}}$, unico a meno di un fattore di fase, che trasporta l'operatore di spin nella direzione dell'asse z , $J_z = J_{(0,0,1)}$, in quello lungo la generica direzione \vec{n} , cioè tale che:

$$J_{\vec{n}} = W_{\vec{n}}^{-1} J_z W_{\vec{n}} \quad (1.8)$$

Inoltre gli autovalori dell'operatore di spin $J_{\vec{n}}$ sono, per ogni $\vec{n} \in S^2$:

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Se $P[w]$ è il proiettore che rappresenta uno stato puro di un sistema quantistico il cui spazio degli stati sia \mathbb{C}^{2j+1} , cioè se $P[w]$ è uno stato puro di un sistema con spin j , la formula di ricostruzione degli elementi di matrice risulta:

$$\begin{aligned} (u, P[w]v) &= \frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} d\Omega(\vec{n}) \int_0^{2\pi} dt t^2 J(t\vec{n})(u, e^{itJ_{\vec{n}}}v)(e^{itJ_{\vec{n}}}w, w) = \\ &= \frac{2j+1}{\pi} \int_{S^2} d\Omega(\vec{n}) \int_0^{2\pi} dt \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) (u, e^{itJ_{\vec{n}}}v)(e^{itJ_{\vec{n}}}w, w) \end{aligned}$$

dove tutti i prodotti scalari (\cdot, \cdot) sono prodotti scalari in \mathbb{C}^{2j+1} . Data la proprietà (1.8) delle osservabili $J_{\vec{n}}$, l'elemento di matrice $(e^{itJ_{\vec{n}}}w, w)$ si può scrivere nella maniera seguente:

$$(e^{itJ_{\vec{n}}}w, w) = (W_{\vec{n}}^{-1} e^{itJ_z} W_{\vec{n}} w, w) = (e^{itJ_z} W_{\vec{n}} w, W_{\vec{n}} w) \quad (1.9)$$

dove l'ultima identità segue dal fatto che $W_{\vec{n}}$ è un operatore unitario. Introduciamo ora una base di autovettori di J_z :

$$\{e_\lambda \in \mathbb{C}^{2j+1} : \lambda = -j, -j+1, \dots, j-1, j\}$$

e sviluppiamo su questa base il vettore $W_{\vec{n}}w$:

$$W_{\vec{n}}w = \sum_{\lambda=-j}^j \alpha_\lambda e_\lambda$$

con $\alpha_\lambda = (e_\lambda, W_{\vec{n}}w)$. L'elemento di matrice (1.9) risulta quindi:

$$\begin{aligned} (e^{itJ_{\vec{n}}}w, w) &= (e^{itJ_z}W_{\vec{n}}w, W_{\vec{n}}w) = \sum_{\lambda=-j}^j \sum_{\lambda'=-j}^j \overline{\alpha_\lambda} \alpha_{\lambda'} e^{-it\lambda} (e_\lambda, e_{\lambda'}) = \\ &= \sum_{\lambda=-j}^j |\alpha_\lambda|^2 e^{-it\lambda} = \sum_{\lambda=-j}^j |(e_\lambda, W_{\vec{n}}w)|^2 e^{-it\lambda} \end{aligned}$$

Si ha allora la seguente formula di ricostruzione per lo stato puro $P[w]$:

$$\begin{aligned} (u, P[w]v) &= \frac{2j+1}{\pi} \sum_{\lambda=-j}^j \int_{S^2} d\Omega(\vec{n}) |(e_\lambda, W_{\vec{n}}w)|^2 \\ &\quad \int_0^{2\pi} dt \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) (u, e^{itJ_{\vec{n}}}v) e^{-it\lambda} \end{aligned}$$

dove la funzione $f_{u,v}^\omega$ della teoria generale è:

$$f_{u,v}^{\vec{n}}(\lambda) = \frac{2j+1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) (u, e^{itJ_{\vec{n}}}v) e^{-it\lambda}$$

Nel caso di uno stato misto T la formula di ricostruzione risulta:

$$(u, Tv) = \sum_{\lambda=-j}^j \int_{S^2} d\Omega(\vec{n}) (W_{\vec{n}}^{-1}e_\lambda, TW_{\vec{n}}^{-1}e_\lambda) f_{u,v}^{\vec{n}}(\lambda)$$

Notiamo che la quantità

$$|(e_\lambda, W_{\vec{n}}w)|^2$$

o in alternativa per uno stato misto la quantità

$$(W_{\vec{n}}^{-1}e_\lambda, TW_{\vec{n}}^{-1}e_\lambda)$$

è la probabilità di trovare il valore λ per lo spin lungo l'asse \vec{n} , scelto a caso in accordo con la distribuzione $\Omega(\vec{n})$, se il sistema è nello stato incognito w , o T . L'informazione su questa misura di probabilità si ottiene sperimentalmente, in questo caso tramite una macchina di Stern-Gerlach.

1.3.2 Il gruppo di Heisenberg

Sia $\mathcal{G} = H^1$ il gruppo di Heisenberg:

$$\mathcal{G} = \{(\eta, q, p) \in \mathbb{R}^3\}$$

con la regola di prodotto:

$$(\eta_1, q_1, p_1) \cdot (\eta_2, q_2, p_2) = (\eta_1 + \eta_2 + \frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{2}, q_1 + q_2, p_1 + p_2)$$

L'identità in \mathcal{G} è $(0, 0, 0)$. L'elemento inverso di $(\eta, q, p) \in \mathcal{G}$ è $(-\eta, -q, -p)$. Il gruppo di Heisenberg è un gruppo di Lie connesso, semplicemente connesso, nilpotente e unimodulare. Una misura di Haar su \mathcal{G} è la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^3 .

Il centro di \mathcal{G} è il sottogruppo abeliano $Z = \{(\eta, 0, 0) : \eta \in \mathbb{R}\}$. Lo spazio quoziente $H = \mathcal{G}/Z$ può essere allora identificato con \mathbb{R}^2 :

$$H = \mathcal{G}/Z = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2\}$$

H è in maniera naturale un \mathcal{G} -spazio transitivo ed è anche un gruppo, dato che Z è un sottogruppo normale. Una misura di Haar su H è la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^2 . La proiezione canonica $p : \mathcal{G} \rightarrow H$ è data da:

$$p(\eta, q, p) = (q, p)$$

Una sezione di Borel per p , $s : H \rightarrow \mathcal{G}$, può essere fissata come:

$$s(q, p) = (0, q, p) \tag{1.10}$$

Consideriamo la seguente applicazione:

$$(\eta, q, p) \mapsto e^{i(\eta + qQ + pP)}$$

dove Q e P sono gli operatori posizione e quantità di moto agenti sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Essa è una rappresentazione unitaria e irriducibile di \mathcal{G} su $L^2(\mathbb{R})$, nota come la *rappresentazione di Schrödinger*. In particolare essa agisce in $L^2(\mathbb{R})$ come:

$$(U(\eta, q, p)\Phi)(x) = e^{i(\eta + qx + \frac{qp}{2})}\Phi(x + p)$$

per ogni funzione $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$. Si può provare che la rappresentazione $(U, L^2(\mathbb{R}))$ di \mathcal{G} è a quadrato integrabile modulo il centro Z . Questo significa che esiste un vettore $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ non nullo, tale che l'applicazione

$$(h \mapsto (U(s(h))\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}}) : H \rightarrow \mathbb{C}$$

è in $\mathcal{L}^2(H)$ per una qualsiasi sezione di Borel s da H a \mathcal{G} .

Si possono allora scrivere delle relazioni di ortogonalità della forma (1.2):

$$\int_H (u, U(s(h))v)_{\mathcal{H}} (U(s(h))y, w)_{\mathcal{H}} dh = \frac{1}{d_U} (u, w)_{\mathcal{H}} (y, v)_{\mathcal{H}}$$

valide per ogni $u, v, y, w \in L^2(\mathbb{R})$.

La rappresentazione $(U, L^2(\mathbb{R}))$ definisce quindi, in accordo con la teoria generale, estesa al caso delle rappresentazioni a quadrato integrabile modulo il centro, un *quorum* e permette di scrivere una formula di ricostruzione per ogni stato di un sistema il cui spazio degli stati sia $L^2(\mathbb{R})$, cioè per una particella priva di spin in una dimensione:

$$(u, P[w]v)_{L^2(\mathbb{R})} = d_U \int_H (u, U(s(h))v)_{L^2(\mathbb{R})} (U(s(h))w, w)_{L^2(\mathbb{R})} dh$$

Lo spazio vettoriale reale soggiacente all'algebra di Lie \mathfrak{h} di H è \mathbb{R}^2 , quindi la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$ in questo caso è l'identità. Segue allora che si può scegliere come aperto O in \mathfrak{h} tutto lo spazio \mathfrak{h} , perché esso soddisfa tutte le condizioni viste dell'ipotesi (A.0.1) dell'appendice. Inoltre per ogni vettore $v \in \mathfrak{h}$ si ha che:

$$\det(d \exp)_v = 1$$

perciò le proprietà della misura immagine valgono trivialmente e la costante k è 1.

Con la scelta della misura di Haar su H fatta il grado formale risulta:

$$d_U = \frac{1}{2\pi}$$

Consideriamo la sfera S^1 in $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{n(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 : \phi \in [0, 2\pi[\}$$

La misura di Lebesgue dx su $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$ si trasporta nell'isomorfismo $S^1 \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ nella misura:

$$2\pi t dt d\Omega(\phi)$$

dove $d\Omega(\phi) = d\phi/2\pi$ è la misura sulla sfera, normalizzata ad 1.

Con la scelta (1.10) della sezione s e dato che la mappa esponenziale è l'identità, si ha:

$$\begin{aligned} U(s(\exp(tn(\phi)))) &= U(s(tn(\phi))) = U(s(t \cos \phi, t \sin \phi)) = \\ &= U(0, t \cos \phi, t \sin \phi) = e^{it(\cos \phi Q + \sin \phi P)} \end{aligned}$$

In questo caso, per ogni fissato $\phi \in [0, 2\pi[$, l'applicazione:

$$t \mapsto U(s(\exp(tn(\phi)))) = e^{it(\cos \phi Q + \sin \phi P)}$$

è un sottogruppo ad un parametro, cioè è una rappresentazione di \mathbb{R} e non una rappresentazione proiettiva. Il *quorum* è l'insieme degli operatori autoaggiunti:

$$\{Y_\phi = \cos \phi Q + \sin \phi P : \phi \in [0, 2\pi[\}$$

parametrizzato dallo spazio di probabilità:

$$\left(S^1, \frac{d\phi}{2\pi} \right)$$

Gli operatori Y_ϕ hanno la seguente proprietà:

Proposizione 1.3.1. *Per ogni $\phi \in [0, 2\pi[$ esiste un operatore unitario W_ϕ tale che:*

$$Y_\phi = W_\phi Q W_\phi^{-1}$$

Dimostrazione. Consideriamo, per ogni $\phi \in [0, 2\pi[$ la funzione f_ϕ da \mathcal{G} in \mathcal{G} definita da:

$$f_\phi(\eta, q, p) = (\eta, q \cos \phi - p \sin \phi, q \sin \phi + p \cos \phi)$$

Si può provare che f_ϕ è un automorfismo continuo di \mathcal{G} ; allora l'applicazione:

$$g \mapsto U(f_\phi(g))$$

è una rappresentazione unitaria e irriducibile di \mathcal{G} , che denotiamo con U^{f_ϕ} . Il carattere centrale di U^{f_ϕ} è uguale a quello di U :

$$U^{f_\phi}(\eta, 0, 0) = U(f_\phi(\eta, 0, 0)) = U(\eta, 0, 0) = e^{i\eta}$$

Dal teorema di unicità della rappresentazione di Schrödinger (teorema di Stone-von-Neumann) segue che esiste un operatore unitario W_ϕ tale che:

$$U^{f_\phi} = W_\phi U W_\phi^{-1}$$

Allora:

$$U(s(tn(\phi))) = U^{f_\phi}(0, t, 0) = W_\phi U(0, t, 0) W_\phi^{-1}$$

Per cui:

$$e^{itY_\phi} = W_\phi e^{itQ} W_\phi^{-1}$$

Usando il teorema di Stone si ottiene:

$$Y_\phi = W_\phi Q W_\phi^{-1} \quad \square$$

Per ogni stato puro $P[w]$ di un sistema quantistico il cui spazio degli stati sia $L^2(\mathbb{R})$, si ha allora la seguente formula di ricostruzione:

$$(u, P[w]v)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{S^1} d\Omega(\phi) \int_0^\infty dt t (u, e^{itY_\phi} v)_{L^2(\mathbb{R})} (e^{itY_\phi} w, w)_{L^2(\mathbb{R})}$$

Nel caso di uno stato misto T si ha analogamente:

$$(u, Tv)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{S^1} d\Omega(\phi) \int_0^\infty dt t (u, e^{itY_\phi} v)_{L^2(\mathbb{R})} \text{Tr}(e^{itY_\phi} T)$$

Dal momento che tutte le osservabili Y_ϕ sono operatori autoaggiunti, il teorema spettrale assicura l'esistenza di una misura di probabilità α_w^ϕ per ogni stato del sistema, tale che:

$$(e^{itY_\phi} w, w)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d\alpha_w^\phi(\lambda) \quad (1.11)$$

La misura α_w^ϕ è data da:

$$\alpha_w^\phi(\cdot) = (w, P^\phi(\cdot)w)_{L^2(\mathbb{R})} \quad (1.12)$$

dove P^ϕ è la PVM spettrale di Y_ϕ .

Data la proprietà 1.3.1, la PVM spettrale di Y_ϕ risulta legata alla PVM spettrale dell'operatore posizione Q nel modo seguente:

$$P^\phi(\cdot) = W_\phi P_Q W_\phi^{-1}$$

La misura di probabilità α_w^ϕ è perciò:

$$(w, P^\phi(\cdot)w)_{L^2(\mathbb{R})} = (w, W_\phi P_Q W_\phi^{-1} w)_{L^2(\mathbb{R})} \quad (1.13)$$

L'operatore $P^Q(E)$ moltiplica per la funzione caratteristica del sottoinsieme di Borel E di \mathbb{R} :

$$(P^Q(E)\Phi)(x) = \chi_E(x)\Phi(x)$$

per ogni $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ e per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ne segue che la misura α_w^ϕ ha densità rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R} . Questo significa che esiste una funzione $\omega(\phi, \cdot)$, per ogni $\phi \in [0, 2\pi]$, tale che:

$$(\lambda \mapsto \omega(\phi, \lambda)) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

e se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\alpha_w^\phi(E) = \int_E \omega(\phi, \lambda) d\lambda$$

$\omega(\phi, \lambda)$ rappresenta la densità di probabilità di ottenere il valore λ misurando l'osservabile Y_ϕ , scelta a caso nel quorum in accordo con la distribuzione di probabilità $d\Omega(\phi)$.

La formula di ricostruzione per gli elementi di matrice di uno stato puro $P[w]$ è allora:

$$\begin{aligned} (u, P[w]v)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{S^1} d\Omega(\phi) \int_0^\infty dt t(u, e^{itY_\phi}v)_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \omega(\phi, \lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^\infty dt t(u, e^{itY_\phi}v)_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \omega(\phi, \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

La rappresentazione di Schrödinger U è in effetti integrabile modulo il centro Z del gruppo di Heisenberg su un insieme denso di vettori di $L^2(\mathbb{R})$. È quindi lecito scambiare le due integrazioni in dt e $d\lambda$. Si ottiene allora:

$$(u, P[w]v)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega(\phi, \lambda) d\lambda \int_0^\infty dt t(u, e^{itY_\phi}v)_{L^2(\mathbb{R})} e^{it\lambda}$$

La funzione $f_{u,v}^\omega$ della teoria generale è quindi:

$$f_{u,v}^\phi(\lambda) = \int_0^\infty dt t(u, e^{itY_\phi}v)_{L^2(\mathbb{R})} e^{it\lambda}$$

Se scegliamo una base per $L^2(\mathbb{R})$ formata da autovettori dell'operatore numero, $(u_n)_{n \geq 0}$ si ottiene esplicitamente:

$$f_{u_{n+l}, u_n}^\phi(\lambda) = \frac{(-i)^l}{2^{l/2}} \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} e^{il\phi} \int_0^\infty t^{l+1} L_n^l\left(\frac{t^2}{2}\right) e^{-t^2/4+it\lambda} dt$$

dove L_n^l sono i polinomi associati di Laguerre.

È ovvio che nel caso di uno stato misto T le formule (1.11), (1.12) e (1.13) si generalizzano come:

$$Tr(e^{itY_\phi}T) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d\alpha_T^\phi(\lambda)$$

$$\alpha_T^\phi(\cdot) = Tr(P^\phi(\cdot)T)$$

$$Tr(P^\phi(\cdot)T) = Tr(W_\phi P^Q W_\phi^{-1}T) = Tr(W_\phi^{-1}T W_\phi P^Q)$$

e la formula di ricostruzione per gli elementi di matrice di uno stato misto T è:

$$(u, Tv)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega(\phi, \lambda) f_{u,v}^\phi(\lambda) d\lambda$$

Capitolo 2

I gruppi $SU(1, 1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$ e le rappresentazioni della serie discreta

2.1 I gruppi $SU(1, 1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$

2.1.1 Il gruppo $SU(1, 1)$

$SU(1, 1)$ è definito come il gruppo delle matrici complesse 2×2 che conservano la forma sesquilineare su \mathbb{C}^2 definita da $B(x, y) := \bar{x}_1 y_1 - \bar{x}_2 y_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^2$ e che hanno determinante 1:

$$SU(1, 1) = \left\{ g \in Mat_2(\mathbb{C}) : B(gx, gy) = B(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^2, \det g = 1 \right\} \quad (2.1)$$

Questo è equivalente a dire che $SU(1, 1)$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante unitario tali che:

$$g^* \eta g = \eta \quad (2.2)$$

dove g^* è l'aggiunta della matrice g e $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dalle due caratterizzazioni precedenti (2.1), (2.2) si può derivare la seguente parametrizzazione degli elementi di $SU(1, 1)$:

$$SU(1, 1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

da cui si vede che $SU(1, 1)$ è un gruppo di Lie (di matrici) di dimensione 3. L'identità in $SU(1, 1)$ è data da:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverso di un elemento $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ di $SU(1, 1)$ è:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

$SU(1, 1)$ è un gruppo di Lie semisemplice, non compatto, connesso, ma non semplicemente connesso. Il suo gruppo fondamentale è \mathbb{Z} . Queste proprietà di $SU(1, 1)$ sono facilmente derivabili notando che esso è topologicamente isomorfo al prodotto cartesiano del disco aperto \mathcal{D} e del cerchio. Infatti, scrivendo $g \in SU(1, 1)$, come

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

si definiscono:

$$z = \frac{\bar{\beta}}{\alpha}, \quad \omega = \arg \alpha$$

dove ω è definito modulo 2π . Osserviamo che $|z| < 1$ e che:

$$\alpha = e^{i\omega}(1 - |z|^2)^{-1/2}, \quad \bar{\beta} = e^{i\omega}z(1 - |z|^2)^{-1/2}$$

La moltiplicazione tra matrici, che rende $SU(1, 1)$ un gruppo, può essere espressa in termini delle coordinate (z, ω) ; cioè se $(z, \omega)(z', \omega') = (z'', \omega'')$, allora:

$$z'' = (z + z'e^{-2i\omega})(1 + \bar{z}z'e^{-2i\omega})^{-1} \tag{2.3}$$

$$\omega'' = \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \log \left\{ (1 + \bar{z}z'e^{-2i\omega})(1 + z\bar{z}'e^{-2i\omega})^{-1} \right\}$$

dove $\log z$ è definito dal suo valor principale e ω'' è definito modulo 2π . $SU(1, 1)$ può quindi essere parametrizzato come segue:

$$SU(1, 1) = \{(z, \omega) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1, -\pi < \omega \leq \pi\}$$

Questo significa che $SU(1, 1)$ è il prodotto topologico del disco aperto \mathcal{D} e del cerchio:

$$SU(1, 1) = \mathcal{D} \times S^1$$

Questa identificazione mostra il fatto che $SU(1, 1)$ è un gruppo non compatto, perché il disco non è compatto, connesso e non semplicemente connesso e anche che il suo gruppo fondamentale è \mathbb{Z} , cioè quello del cerchio.

Si ha inoltre che:

$$\widetilde{SU}(1, 1) = \{(z, \omega) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1, -\infty < \omega < \infty\} = \mathcal{D} \times \mathbb{R}$$

è il gruppo di ricoprimento universale di $SU(1, 1)$, con la stessa regola di prodotto (2.3), eccetto per il fatto che ω non è definito modulo 2π . Inoltre, dato che il gruppo fondamentale di $SU(1, 1)$ è \mathbb{Z} , è possibile definire il gruppo di ricoprimento n -esimo $\widetilde{SU}^n(1, 1)$:

$$\widetilde{SU}^n(1, 1) = \{(z, \omega) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1, -\pi n < \omega \leq \pi n\} = \mathcal{D} \times]-\pi n, \pi n]$$

con la stessa regola di prodotto (2.3) eccetto per il fatto che ω è definito modulo $2\pi n$.

L'algebra di Lie di $SU(1, 1)$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 tali che $\eta g^* \eta = g$ e con traccia nulla:

$$\mathfrak{su}(1, 1) = \{g \in Mat_2(\mathbb{C}) : \eta g^* \eta = g, Trg = 0\}$$

Gli elementi di $\mathfrak{su}(1, 1)$ possono essere parametrizzati come segue:

$$\mathfrak{su}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Perciò $\mathfrak{su}(1, 1)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

2.1.2 Il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$

$SL(2, \mathbb{R})$ è definito come il gruppo delle matrici reali 2×2 , con determinante unitario:

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{R}) &= \{g \in Mat_2(\mathbb{R}) : \det g = 1\} = \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} \end{aligned}$$

L'identità in $SL(2, \mathbb{R})$ è data da:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverso di un elemento $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in $SL(2, \mathbb{R})$ è:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$SL(2, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie reale, tridimensionale, connesso e unimodulare. Inoltre non è semplicemente connesso e il suo gruppo fondamentale è \mathbb{Z} . Queste proprietà sono ovvie dal momento che, come dimostreremo, $SL(2, \mathbb{R})$ è isomorfo a $SU(1, 1)$.

$SL(2, \mathbb{R})$ contiene il sottogruppo compatto $SO(2)$:

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

In effetti $SO(2)$ è un sottogruppo compatto massimale ed ogni sottogruppo compatto di $SL(2, \mathbb{R})$ può essere coniugato a diventare un sottogruppo di $SO(2)$. Notiamo infine che $SO(2)$ è isomorfo al cerchio unitario T :

$$T = \{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C}$$

mediante l'applicazione:

$$R_\theta \leftrightarrow e^{i\theta} : SO(2) \leftrightarrow T$$

L'algebra di Lie di $SL(2, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici reali 2×2 con traccia nulla:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) &= \{ g \in Mat_2(\mathbb{R}) : Trg = 0 \} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Quindi $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

Una base per l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ può essere scelta come $\{h, e^+, e^-\}$, dove:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Le regole di commutazione tra gli elementi di questa base sono:

$$\begin{aligned} [h, e^+] &= 2e^+ \\ [h, e^-] &= -2e^- \\ [e^+, e^-] &= h \end{aligned} \quad (2.5)$$

Naturalmente le regole di commutazione (2.5) caratterizzano completamente l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Inoltre si conviene, in accordo con Howe [15], di chiamare *base standard* per $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ una qualsiasi base che soddisfi le regole di commutazione (2.5). Esiste in effetti un'altra base standard¹, che useremo in seguito, definita da:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= i(e^- - e^+) \\ n^+ &= \frac{1}{2}(h + i(e^+ + e^-)) \\ n^- &= \frac{1}{2}(h - i(e^+ + e^-)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si verifica facilmente che le regole di commutazione sono:

$$\begin{aligned} [\bar{k}, n^+] &= 2n^+ \\ [\bar{k}, n^-] &= -2n^- \\ [n^+, n^-] &= \bar{k} \end{aligned}$$

Le relazioni inverse delle (2.6) sono:

$$\begin{aligned} h &= n^+ + n^- \\ e^+ &= \frac{i}{2}(\bar{k} - (n^+ - n^-)) \\ e^- &= -\frac{i}{2}(\bar{k} + (n^+ - n^-)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ciò che rende importante la base $\{\bar{k}, n^+, n^-\}$ è il fatto che l'elemento:

$$i\bar{k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è il generatore infinitesimo del sottogruppo compatto $SO(2)$ di $SL(2, \mathbb{R})$:

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta \bar{k}) : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Un altro importante elemento è l'operatore di Casimir² C , che nella base $\{h, e^+, e^-\}$ è:

$$C = h^2 + 2(e^+e^- + e^-e^+) \quad (2.8)$$

L'importanza degli elementi \bar{k} e C deriva dal fatto che i loro spettri determinano la classificazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$.

¹La base $\{\bar{k}, n^+, n^-\}$ è in realtà una base della complessificazione $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

²L'operatore di Casimir C non è un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, ma è un elemento dell'algebra universale involupante $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Non è difficile dimostrare che C appartiene al centro di $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, in quanto commuta con tutti gli elementi di base $\{h, e^+, e^-\}$. Si può poi mostrare che anzi C genera il centro dell'algebra universale involupante. Questa proprietà risulta fondamentale nella classificazione delle rappresentazioni unitarie e irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, in quanto implica che C deve agire sullo spazio della rappresentazione come un multiplo scalare dell'identità.

2.1.3 Isomorfismo tra $SU(1, 1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$

I gruppi $SU(1, 1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$ sono sottogruppi coniugati in $SL(2, \mathbb{C})$, tramite il seguente isomorfismo:

$$\begin{aligned}
 SL(2, \mathbb{R}) &\simeq SU(1, 1) \\
 g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ z & \delta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} = \\
 &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \delta + i(\beta - z) & \alpha - \delta - i(\beta + z) \\ \alpha - \delta + i(\beta + z) & \alpha + \delta - i(\beta - z) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SU(1, 1) &\simeq SL(2, \mathbb{R}) \\
 g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\
 &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha + \beta) & \operatorname{Im}(\alpha - \beta) \\ -\operatorname{Im}(\alpha + \beta) & \operatorname{Re}(\alpha - \beta) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il sottogruppo compatto $SO(2) \subset SL(2, \mathbb{R})$ è coniugato al sottogruppo di $SU(1, 1)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Notiamo infine che se X è una matrice arbitraria e W una qualsiasi matrice invertibile, si ha:

$$W \exp(tX) W^{-1} = \exp(tW X W^{-1}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si hanno allora le seguenti relazioni tra le algebre di Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} &= \mathfrak{su}(1, 1) \\
 \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{su}(1, 1) \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

2.2 Il duale unitario di $SL(2, \mathbb{R})$

La derivazione delle classi di equivalenza delle rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, ricavata per la prima volta da Bargmann [2], si può trovare in [23], [15], [20]. Riportiamo qui solo i concetti fondamentali e le conclusioni finali che sono necessarie per la discussione successiva.

Le rappresentazioni unitarie irriducibili (π, V) di $SL(2, \mathbb{R})$ vengono classificate in base all'azione derivata dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Ricordiamo che la rappresentazione derivata non agisce su tutto lo spazio V , ma sul sottospazio V^∞ di V formato dai vettori lisci per $SL(2, \mathbb{R})$, cioè i vettori $v \in V$ tali che:

$$g \mapsto \pi(g)v : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow V$$

è una funzione liscia. In particolare le rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$ sono catalogate tramite lo spettro degli operatori $\pi(\tilde{k})$ e $\pi(C)$, dove \tilde{k} è l'elemento della base (2.6) che è, a meno di una unità immaginaria, il generatore infinitesimo del sottogruppo compatto massimale $SO(2)$ di $SL(2, \mathbb{R})$, e C è l'operatore di Casimir (2.8). Infatti si può mostrare che esiste una base hilbertiana $\{v_\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}$ per V formata da vettori lisci e con le proprietà:

- ogni vettore di base v_λ è un autovettore dell'operatore $\pi(\tilde{k})$ con autovalore λ ;
- tutti i vettori di base sono autovettori dell'operatore $\pi(C)$ con lo stesso autovalore μ ;
- la restrizione al sottospazio algebrico di V generato dagli elementi di base:

$$\text{span} \{v_\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\} = V_{fin}^\infty$$

è una rappresentazione irriducibile dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Si ha allora la seguente classificazione:

1. Se

$$\text{spec}(\pi(\tilde{k})) = \{n, n+2, n+4, \dots\} \quad e \quad n \geq 1$$

il modulo V_{fin}^∞ si dice *modulo con peso più basso* e si indica con V_n . L'intero positivo n si dice *peso più basso*, in quanto tutti gli autovettori v_λ di $\pi(\tilde{k})$ hanno autovalori maggiori o uguali ad n . L'operatore di Casimir in questo caso vale:

$$\pi(C) = (n-1)^2 - 1 = \mu$$

La rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ che genera una tale rappresentazione derivata si denota con π_n^+ e costituisce un membro della *serie discreta olomorfa*.

2. Se

$$\text{spec}(\pi(\vec{k})) = \{\dots, n-4, n-2, n\} \quad e \quad n \leq -1$$

il modulo V_{fin}^∞ si dice *modulo con peso più alto* e si indica con \bar{V}_n . L'intero positivo n si dice *peso più alto*, in quanto tutti gli autovettori v_λ di $\pi(\vec{k})$ hanno autovalori minori o uguali ad n . L'operatore di Casimir in questo caso vale:

$$\pi(C) = (n+1)^2 - 1 = \mu$$

La rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ che genera una tale rappresentazione derivata si denota con π_n^- e costituisce un membro della *serie discreta antiolomorfa*.

3. Se

$$\begin{cases} \text{spec}(\pi(\vec{k})) = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \\ \pi(C) = 1 + s^2 = \mu \geq 1 \quad e \quad s \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

la rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ caratterizzata da questi spettri si denota con π_{is}^e e costituisce un membro della *prima serie principale*.

4. Se

$$\begin{cases} \text{spec}(\pi(\vec{k})) = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \\ 0 < \pi(C) = 1 - s^2 = \mu < 1 \quad e \quad s \in (0, 1) \end{cases}$$

la rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ caratterizzata da questi spettri si denota con π_s^e e costituisce un membro della *serie complementare*.

5. Se

$$\text{spec}(\pi(\vec{k})) = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

allora l'operatore di Casimir deve essere strettamente maggiore di 1, quindi si può scrivere:

$$\pi(C) = 1 + s^2 = \mu > 1 \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{R}^+ / \{0\}$$

La rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ caratterizzata da questi spettri si denota con π_{is}^o e costituisce un membro della *seconda serie principale*.

In tutti i casi sopra elencati, gli operatori “a scaletta”, che fanno passare da un vettore di base v_λ , autovettore di $\pi(\tilde{k})$ corrispondente all’autovalore λ , ad uno successivo o ad uno precedente, sono rispettivamente $\pi(n^+)$ e $\pi(n^-)$, dove n^+ e n^- sono gli elementi della base (2.6):

$$\begin{aligned}\pi(n^+)v_\lambda &= v_{\lambda+2} \\ \pi(n^-)v_\lambda &= v_{\lambda-2}\end{aligned}$$

Queste proprietà seguono dalle regole di commutazione della base standard (2.5).

Il teorema fondamentale che useremo nel seguito è:

Teorema 2.2.1. *Tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, non triviali, sono unitariamente equivalenti ad uno dei tipi (1), (2), (3), (4), (5):*

$$\begin{aligned}\pi_n^+ & n \geq 1 \\ \pi_n^- & n \leq -1 \\ \pi_{is}^e & s \in \mathbb{R}^+ \\ \pi_s^e & s \in (0, 1) \\ \pi_{is}^o & s \in \mathbb{R}^+ / \{0\}\end{aligned}$$

L’equivalenza si stabilisce in base agli spettri degli operatori $\pi(\tilde{k})$ e $\pi(C)$.

Esplicitamente quindi, data una rappresentazione unitaria irriducibile di $SL(2, \mathbb{R})$, per stabilire a quale dei tipi elencati essa sia equivalente basta studiare lo spettro degli operatori $\pi(\tilde{k})$ e $\pi(C)$ su una base hilbertiana dello spazio della rappresentazione. Nel seguito focalizzeremo l’attenzione sulle rappresentazioni della serie discreta π_n^+ e π_n^- di $SL(2, \mathbb{R})$, quindi basterà trovare lo spettro dell’operatore $\pi(\tilde{k})$, in quanto in questi due casi lo spettro di $\pi(C)$ è univocamente determinato, e osservare che esso ha un autovalore minimo o un autovalore massimo.

Nota 2.2.1. I membri della serie discreta π_1^+ e π_1^- si dicono *limiti della serie discreta*, in quanto non hanno la proprietà di integrabilità di tutti gli altri membri π_n^+ e π_n^- con $n \geq 2$.

Infine dobbiamo aggiungere che, se la rappresentazione (π, V) non è una rappresentazione del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, ma del ricoprimento n -esimo $\widetilde{SL}^n(2, \mathbb{R})$, allora gli autovalori dell’operatore $\pi(\tilde{k})$ sono contenuti in $\frac{\mathbb{Z}}{n}$ invece che in \mathbb{Z} .

2.3 La serie discreta di $SU(1, 1)$ e $SL(2, \mathbb{R})$

In questo paragrafo costruiamo una famiglia di rappresentazioni unitarie e irriducibili del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, che appartengono alla serie discreta, e mostriamo che sono a quadrato integrabile e integrabili. Costruiremo esplicitamente queste rappresentazioni come rappresentazioni di $SU(1, 1)$.

Denotiamo con \mathcal{D} il disco aperto in \mathbb{C} :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Esso è un \mathcal{G} -spazio transitivo, con $\mathcal{G} = SU(1, 1)$. L'azione del gruppo $SU(1, 1)$ sul disco è l'applicazione da $SU(1, 1) \times \mathcal{D}$ a \mathcal{D} definita da:

$$(g, z) \mapsto g \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad (2.9)$$

dove $g \in SU(1, 1)$ è dato da :

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Questa è un'azione transitiva del gruppo $SU(1, 1)$ sul disco.

Lo stabilizzatore dell'origine di \mathcal{D} , $z = 0$, è il sottogruppo T di $SU(1, 1)$

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 = 1, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Il disco \mathcal{D} è allora isomorfo allo spazio omogeneo $SU(1, 1)/T$:

$$\mathcal{D} \simeq SU(1, 1)/T$$

Dal momento che $SU(1, 1)$ e T sono entrambi unimodulari, esiste una misura su \mathcal{D} invariante rispetto all'azione (2.9) di $SU(1, 1)$, unica a meno di una costante moltiplicativa positiva. Si può verificare che tale misura invariante è data da:

$$\begin{aligned} m &= (1 - |z|^2)^{-2} dx dy = \\ &= (1 - r^2)^{-2} r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

in cui (r, θ) sono le coordinate polari dei punti di $\mathcal{D} - \{0\}$, cioè $z = x + iy = r e^{i\theta}$. Ricordiamo che l'invarianza della misura m è espressa esplicitamente dalla uguaglianza, valida $\forall g \in SU(1, 1)$:

$$\int_{\mathcal{D}} f(g \cdot z) dm(z) = \int_{\mathcal{D}} f(z) dm(z) \quad \forall f \in C_c(\mathcal{D})$$

Per ogni intero positivo $n \geq 2$ consideriamo la seguente misura su \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} m_n &= (1 - |z|^2)^n m &= (1 - |z|^2)^{n-2} dx dy = \\ & &= (1 - r^2)^{n-2} r dr d\theta \end{aligned}$$

La misura m_n è quasi invariante rispetto all'azione (2.9) del gruppo $SU(1, 1)$ sul disco. Questo significa esplicitamente che, per ogni $n \geq 2$ e per ogni fissato $g \in SU(1, 1)$, esiste una funzione positiva $J_n(g, z)$ tale che:

$$\int_{\mathcal{D}} f(g \cdot z) dm_n(z) = \int_{\mathcal{D}} f(z) J_n(g, z) dm_n(z)$$

Si può calcolare che, se $g \in SU(1, 1)$ è dato da (2.10), la densità $J_n(g, z)$ risulta:

$$J_n(g, z) = |-\bar{\beta}z + \alpha|^{-2n}$$

Per ogni $n \geq 2$ e $g \in SU(1, 1)$, $J_n(g, z)$ è una funzione definita sul disco \mathcal{D} e soddisfa le seguenti proprietà:

- $J_n(g, z)$ è strettamente positiva su \mathcal{D} ;
- $J_n(g, z)$ è integrabile su \mathcal{D} rispetto alla misura invariante m ;
- $J_n(g, z)$ è una funzione continua ma non olomorfa su \mathcal{D} ;
- $J_n(g, z)$ soddisfa le proprietà di cociclo, cioè per ogni $z \in \mathcal{D}$ si ha:

$$\begin{cases} J_n(e, z) = 1 \\ J_n(g_1 g_2, z) = J_n(g_1, z) J_n(g_2, g_1^{-1} \cdot z) \end{cases}$$

dove $g_1, g_2 \in SU(1, 1)$ ed e è l'identità di $SU(1, 1)$.

Denotiamo con H_n lo spazio delle funzioni definite sul disco \mathcal{D} e a quadrato integrabile rispetto alla misura m_n :

$$H_n = L^2(\mathcal{D}, m_n)$$

È un fatto ben noto che l'azione di $SU(1, 1)$ sullo spazio di funzioni H_n definita da:

$$(\rho_n(g)f)(z) = [J_n(g, z)]^{1/2} f(g^{-1} \cdot z) \tag{2.12}$$

è una rappresentazione unitaria e continua del gruppo $SU(1, 1)$. Essa agisce esplicitamente come:

$$(\rho_n(g)f)(z) = \frac{1}{|-\bar{\beta}z + \alpha|^n} f\left(\frac{\bar{\alpha}z - \beta}{-\bar{\beta}z + \alpha}\right)$$

Definizione 1. Per ogni $n \geq 2$ si definisce la seguente azione di $SU(1, 1)$ sullo spazio H_n :

$$(\pi_n^-(g)f)(z) = \gamma_n(g, z)f(g^{-1} \cdot z) \quad (2.13)$$

dove la funzione $\gamma_n(g, z)$, se $g \in SU(1, 1)$ è dato da (2.10), è data da:

$$\gamma_n(g, z) = (-\bar{\beta}z + \alpha)^{-n}$$

Si ha allora esplicitamente:

$$(\pi_n^-(g)f)(z) = \frac{1}{(-\bar{\beta}z + \alpha)^n} f\left(\frac{\bar{\alpha}z - \beta}{-\bar{\beta}z + \alpha}\right)$$

Per ogni $n \geq 2$ e $g \in SU(1, 1)$, la funzione $\gamma_n(g, z)$ è definita sul disco \mathcal{D} e ha le seguenti proprietà:

- $\gamma_n(g, z)$ non si annulla mai su \mathcal{D} . Inoltre si ha che

$$|\gamma_n(g, z)|^2 = J_n(g, z)$$

- $\gamma_n(g, z)$ è integrabile su \mathcal{D} rispetto alla misura quasi invariante m_n ;
- $\gamma_n(g, z)$ è continua e olomorfa su \mathcal{D} ;
- $\gamma_n(g, z)$ soddisfa le proprietà di cociclo, cioè per ogni $z \in \mathcal{D}$ si ha:

$$\begin{cases} \gamma_n(e, z) = 1 \\ \gamma_n(g_1g_2, z) = \gamma_n(g_1, z)\gamma_n(g_2, g_1^{-1} \cdot z) \end{cases}$$

con $g_1, g_2 \in SU(1, 1)$ ed e è l'identità di $SU(1, 1)$.

Con queste definizioni si ha il seguente risultato:

Proposizione 2.3.1. *La coppia:*

$$(\pi_n^-, H_n)$$

è una rappresentazione unitaria e continua del gruppo $SU(1, 1)$.

Dimostrazione. Si deve mostrare che π_n^- è un omomorfismo di gruppi, che è continuo e che l'operatore $\pi_n^-(g)$ è unitario per ogni $g \in SU(1, 1)$.

- Il fatto che π_n^- sia un omomorfismo di gruppi deriva dal fatto che γ_n ha le proprietà del cociclo. Infatti si ha, per ogni $g_1, g_2 \in SU(1, 1)$ e per ogni $f \in H_n$:

$$\begin{aligned} (\pi_n^-(g_1g_2)f)(z) &= \gamma_n(g_1g_2, z)f((g_1g_2)^{-1} \cdot z) = \\ &= \gamma_n(g_1, z)\gamma_n(g_2, g_1^{-1} \cdot z)f(g_2^{-1}g_1^{-1} \cdot z) = \\ &= \gamma_n(g_1, z)(\pi_n^-(g_2)f)(g_1^{-1} \cdot z) = \\ &= [\pi_n^-(g_1)(\pi_n^-(g_2)f)](z) = \\ &= (\pi_n^-(g_1)\pi_n^-(g_2)f)(z) \end{aligned}$$

$$\implies \pi_n^-(g_1 g_2) = \pi_n^-(g_1) \pi_n^-(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in SU(1, 1)$$

- L'operatore $\pi_n^-(g)$ è unitario su H_n per ogni $g \in SU(1, 1)$, in quanto è isometrico e surgettivo. Per dimostrare l'isometricità basta calcolare la norma:

$$\begin{aligned} \|\pi_n^-(g)f\|_{H_n}^2 &= \int_{\mathcal{D}} |(\pi_n^-(g)f)(z)|^2 dm_n(z) = \\ &= \int_{\mathcal{D}} |\gamma_n(g, z)|^2 |f(g^{-1} \cdot z)|^2 dm_n(z) = \\ &= \int_{\mathcal{D}} J_n(g, z) |f(g^{-1} \cdot z)|^2 dm_n(z) = \\ &= \int_{\mathcal{D}} |(\rho_n(g)f)(z)|^2 dm_n(z) = \\ &= \|\rho_n(g)f\|_{H_n}^2 = \|f\|_{H_n}^2 \end{aligned}$$

dove l'ultima identità segue dal fatto che la rappresentazione $\rho_n(g)$ è unitaria.

Per dimostrare la surgettività è sufficiente mostrare che il range di $\pi_n^-(g)$ è un sottoinsieme denso in H_n ; dato che $\pi_n^-(g)$ è isometrico, questo permette di concludere che π_n^- è surgettivo. In effetti il range di π_n^- è denso in H_n perché contiene tutte le funzioni continue a supporto compatto, che sono dense in H_n . Infatti, se $f \in C_c(\mathcal{D})$, la funzione f' definita da:

$$f'(z) = \frac{1}{\gamma_n(g, z)} f(g \cdot z) \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

che è ancora continua a supporto compatto, è tale che:

$$\pi_n^-(g)f' = f$$

- Si può dimostrare che l'applicazione

$$g \mapsto \pi_n^-(g)f : SU(1, 1) \rightarrow H_n \quad (2.14)$$

è continua nell'identità e di $SU(1, 1)$, per ogni $f \in H_n$. Questo segue dal fatto che il cociclo $\gamma_n(g, z)$ tende ad 1 uniformemente su \mathcal{D} quando g tende ad e :

$$\gamma_n(g, z) \rightarrow 1 \quad \text{uniformemente su } \mathcal{D} \quad g \rightarrow e$$

e dal fatto del tutto generale che la rappresentazione

$$(\pi(g)h)(z) = h(g^{-1} \cdot z)$$

è continua nell'identità per le funzioni h continue a supporto compatto, che sono un insieme denso in H_n , dotate della norma del sup.

La continuità dell'applicazione (2.14) in e è sufficiente a mostrare la continuità in ogni punto $g \in SU(1, 1)$. \square

Le rappresentazioni della famiglia (π_n^-, H_n) , con $n \geq 2$, non sono irriducibili. Infatti esiste un sottospazio di H_n chiuso e invariante rispetto alla rappresentazione (2.13). Questo sottospazio, che quindi definisce una sottorappresentazione della (π_n^-, H_n) , è costituito dalle funzioni olomorfe di H_n :

$$H_n^{hol} = \{f \in H_n : f \text{ olomorfa su } \mathcal{D}\} \subset H_n$$

Proposizione 2.3.2. *Per ogni $n \geq 2$, il sottospazio $H_n^{hol} \subset H_n$ è non vuoto, chiuso in H_n e invariante rispetto all'azione (2.13).*

Dimostrazione. Il fatto che la rappresentazione π_n^- lascia invariato H_n^{hol} è evidente dalla forma dell'azione (2.13); in essa infatti compare il cociclo $\gamma_n(g, z)$ che è una funzione olomorfa su \mathcal{D} , per ogni $g \in SU(1, 1)$ e $n \geq 2$. Se $n \geq 2$ la funzione $(1 - r^2)^{n-2}$ è Lebesgue integrabile sul disco \mathcal{D} . Allora, in questi casi, \mathcal{D} ha misura m_n finita:

$$m_n(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} dm_n(z) = \int_{\mathcal{D}} (1 - r^2)^{n-2} r dr d\theta = \frac{\pi}{n-1}$$

Segue quindi che ogni polinomio in z è integrabile e a quadrato integrabile su \mathcal{D} , cioè appartiene a H_n . Ciò mostra che il sottospazio H_n^{hol} è non banale:

$$H_n^{hol} \neq \{0\}$$

Mostriamo ora che il sottospazio delle funzioni olomorfe è chiuso in H_n .

Consideriamo il disco \mathcal{D}_1 definito da:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 - r, \text{ con } 0 < r < \frac{1}{2} \right\}$$

\mathcal{D}_1 è un sottoinsieme compatto di \mathcal{D} . Consideriamo anche il disco \mathcal{D}_2 :

$$\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r, \text{ con } a \in \mathbb{C}\}$$

\mathcal{D}_2 è contenuto nel disco compatto \mathcal{D}_1 se a è tale che:

$$|a| < 1 - 2r$$

Dato che H_n^{hol} è non vuoto, sia $f \in H_n^{hol}$. Segue da una proprietà standard delle funzioni olomorfe che:

$$\int_{|z-a|<r} f(z) dz = \pi r^2 f(a)$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}
\pi r^2 |f(a)| &\leq \int_{|z-a|<r} |f(z)| dz = \\
&= \int_{|z-a|<r} \left| f(z)(1-r^2)^{(n-2)/2} \right| (1-r^2)^{(2-n)/2} dz \leq \\
&\leq \left(\int_{|z-a|<r} |f(z)|^2 (1-r^2)^{n-2} dz \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\int_{|z-a|<r} (1-r^2)^{2-n} dz \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \|f(z)\|_{H_n} \left(\int_{|z-a|<r} (1-r^2)^{2-n} dz \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Hölder per le funzioni $f(z)(1-r^2)^{(2-n)/2}$ e $(1-r^2)^{(2-n)/2}$, entrambe a quadrato integrabile rispetto alla misura di Lebesgue dz .

La funzione:

$$z \mapsto (1-r^2)^{2-n}$$

è Lebesgue integrabile sul disco compatto \mathcal{D}_1 . Allora si può concludere che, se $|a| \leq 1-2r$:

$$|f(a)| \leq C_r \|f\|_{H_n} \quad (2.15)$$

Supponiamo che $(f_p)_{p \geq 1}$ sia una successione di funzioni in H_n^{hol} che converge ad una funzione f in H_n^{hol} :

$$f_p \rightarrow f \quad \text{in } H_n^{hol}$$

La disuguaglianza (2.15) mostra che la convergenza della successione $(f_p)_{p \geq 1}$ è uniforme su ogni compatto in \mathcal{D} .

Supponiamo ora che $(f_p)_{p \geq 1}$ sia una successione di funzioni in H_n^{hol} che converge ad una funzione f in H_n :

$$f_p \rightarrow f \quad \text{in } H_n$$

La disuguaglianza (2.15) mostra che la successione $(f_p)_{p \geq 1}$ è anche una successione di Cauchy per la convergenza uniforme sui compatti di \mathcal{D} , ed ha quindi come limite una funzione g che è olomorfa su \mathcal{D} . Estraeendo se necessario una sottosuccessione di $(f_p)_{p \geq 1}$, possiamo assumere che la successione $f_p(z)$ converge a $f(z)$ per tutti i punti al di fuori di un sottoinsieme N_n trascurabile rispetto alla misura m_n :

$$f_p(z) \rightarrow f(z) \quad \forall z \notin N_n$$

In particolare questo mostra che $f = g$ se $z \notin N_n$, quindi che $f = g$ in H_n . Allora possiamo concludere che:

$$f \in H_n^{hol}$$

cioè che H_n^{hol} è chiuso in H_n . \square

Le coppie (π_n^-, H_n^{hol}) sono quindi rappresentazioni del gruppo $SU(1, 1)$. Si ha il seguente importante risultato:

Proposizione 2.3.3. *Per ogni $n \geq 2$ le rappresentazioni unitarie*

$$(\pi_n^-, H_n^{hol})$$

sono irriducibili.

Dimostrazione. Consideriamo una funzione $f \in H_n^{hol}$. La disuguaglianza (2.15):

$$|f(a)| \leq C_r \|f\|_{H_n}$$

valida per $|a| \leq 1 - 2r$, implica che le forme lineari, dipendenti da z :

$$f \mapsto f(z) : H_n^{hol} \rightarrow \mathbb{C}$$

sono continue. Il lemma di Riesz allora assicura che, per ogni $f \in H_n^{hol}$, esiste un unico vettore $e_z \in H_n^{hol}$ tale che:

$$f(z) = (e_z, f)_{H_n^{hol}}$$

Rimane così definito l'insieme di vettori in H_n^{hol} :

$$\{e_z : z \in \mathcal{D}\} \subset H_n^{hol}$$

Esso è totale in H_n^{hol} . Infatti si hanno le seguenti implicazioni:

$$(e_z, f)_{H_n^{hol}} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Per la definizione (2.13) della rappresentazione π_n^- , si ha:

$$(\pi_n^-(g^{-1})e_\zeta)(z) = \gamma_n(g^{-1}, z)e_\zeta(g \cdot z)$$

Segue allora che:

$$\begin{aligned} (e_z, \pi_n^-(g^{-1})e_\zeta)_{H_n^{hol}} &= [j(g^{-1}, z)]^{-n} (e_z, e_\zeta^g)_{H_n^{hol}} = \\ &= [j(g^{-1}, z)]^{-n} e_\zeta(g \cdot z) = \\ &= [j(g^{-1}, z)]^{-n} (e_{g \cdot z}, e_\zeta)_{H_n^{hol}} \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato $\gamma(g^{-1}, z) = [j(g^{-1}, z)]^{-n} = [\bar{\beta}z + \bar{\alpha}]^{-n}$, mentre con e_ζ^g si indica la funzione che a $z \in \mathcal{D}$ associa $e_\zeta(g \cdot z)$. Notiamo che il prodotto scalare su H_n^{hol} è stato scelto lineare nel secondo termine. Data l'unitarietà dell'operatore $\pi_n^-(g)$ possiamo scrivere:

$$(\pi_n^-(g)e_z, e_\zeta)_{H_n^{hol}} = (\overline{[j(g^{-1}, z)]^{-n}} e_{g \cdot z}, e_\zeta)_{H_n^{hol}}$$

Dal momento che il sottoinsieme $\{e_z : z \in \mathcal{D}\}$ è totale in H_n^{hol} , segue:

$$\pi_n^-(g)e_z = \overline{[j(g^{-1}, z)]^{-n}} e_{g \cdot z}$$

Quest'ultima uguaglianza implica che, per $z, \zeta \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} (e_{g \cdot \zeta}, e_{g \cdot z})_{H_n^{hol}} &= (\overline{[j(g^{-1}, \zeta)]^n} \pi_n^-(g)e_\zeta, \overline{[j(g^{-1}, z)]^n} \pi_n^-(g)e_z)_{H_n^{hol}} = \\ &= [j(g^{-1}, \zeta)]^n \overline{[j(g^{-1}, z)]^n} (\pi_n^-(g)e_\zeta, \pi_n^-(g)e_z)_{H_n^{hol}} = \\ &= [j(g^{-1}, \zeta)]^n \overline{[j(g^{-1}, z)]^n} (e_\zeta, e_z)_{H_n^{hol}} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che π_n^- è una rappresentazione unitaria. Per ogni operatore $A \in \text{End}(H_n^{hol})$, che commuta con ogni $\pi_n^-(g)$, $g \in SU(1, 1)$, si può scrivere analogamente:

$$(e_{g \cdot \zeta}, Ae_{g \cdot z})_{H_n^{hol}} = [j(g^{-1}, \zeta)]^n \overline{[j(g^{-1}, z)]^n} (e_\zeta, Ae_z)_{H_n^{hol}}$$

Perciò la quantità:

$$h(\zeta, z) = \frac{(e_\zeta, Ae_z)_{H_n^{hol}}}{(e_\zeta, e_z)_{H_n^{hol}}}$$

è invariante rispetto all'azione di $SU(1, 1)$ sul disco:

$$h(g \cdot \zeta, g \cdot z) = h(\zeta, z)$$

La funzione h è per definizione meromorfa in ζ , in quanto è il rapporto di due funzioni olomorfe in ζ . Fissiamo $\zeta \neq 0$ e un elemento $t \in T$, lo stabilizzatore dell'origine di \mathcal{D} . I punti dell'insieme:

$$\{t \cdot \zeta : t \in T\}$$

formano un cerchio centrato nell'origine, di raggio $|\zeta| \neq 0$. Per la proprietà di invarianza di h si ha:

$$h(t \cdot \zeta, t \cdot 0) = h(\zeta, 0) = h(t \cdot \zeta, 0)$$

Questo significa che la funzione $h(\zeta, 0)$ è costante sul cerchio centrato nell'origine di raggio $|\zeta| \neq 0$. Al variare di $\zeta \neq 0$ e appartenente a \mathcal{D} , si ha che la funzione $h(\zeta, 0)$ è costante su tutti i cerchi centrati nell'origine di raggio

minore di 1, che invadono \mathcal{D} . Segue quindi che la funzione $h(\zeta, 0)$ è costante su \mathcal{D} :

$$h(\zeta, 0) = c, \quad \zeta \in \mathcal{D}$$

Data la transitività dell'azione (2.9), per ogni $z \in \mathcal{D}$ esiste $g_z \in SU(1, 1)$ che trasporta z nell'origine:

$$g_z \cdot z = 0$$

Per cui si ha che:

$$h(\zeta, z) = h(g_z \cdot \zeta, 0) = c$$

Ancora:

$$(e_\zeta, Ae_z)_{H_n^{hol}} = c(e_\zeta, e_z)_{H_n^{hol}} = (e_\zeta, ce_z)_{H_n^{hol}}$$

L'operatore A quindi agisce su \mathcal{D} come un multiplo scalare dell'identità:

$$Ae_z = ce_z \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

Questo conclude la dimostrazione, perché per il lemma di Schur segue che la rappresentazione (π_n^-, H_n^{hol}) è irriducibile. \square

Dal momento che tutte le rappresentazioni della famiglia (π_n^-, H_n^{hol}) sono irriducibili, per il teorema (2.2.1), visto nel paragrafo precedente, esse devono essere equivalenti ad uno dei tipi (1), (2), (3), (4), (5) del teorema suddetto.

Per stabilire l'equivalenza è sufficiente determinare lo spettro sullo spazio H_n^{hol} dell'operatore corrispondente a \mathfrak{k} nell'algebra di Lie di $SU(1, 1)$. L'elemento \mathfrak{k} è, a meno di una unità immaginaria, il generatore infinitesimo del sottogruppo compatto massimale $SO(2)$ di $SL(2, \mathbb{R})$:

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

Nella coniugazione in $SL(2, \mathbb{C})$ tra $SL(2, \mathbb{R})$ e $SU(1, 1)$ esso è coniugato al sottogruppo $T \subset SU(1, 1)$:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

che è lo stabilizzatore dell'origine di \mathcal{D} rispetto all'azione (2.9) di $SU(1, 1)$. Calcoliamo allora l'azione π_n^- di un generico elemento di T su una base hilbertiana per le funzioni olomorfe H_n^{hol} :

$$\{z^N : N \geq 0\}$$

Si ha:

$$\pi_n^- \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} z^N = e^{i\theta(-n-2N)} z^N$$

Si ottiene quindi che lo spettro del generatore di T , che è uguale a quello del generatore di $SO(2)$, è:

$$\{\dots, -n-4, -n-2, -n\} \quad n \geq 2$$

cioè è del tipo con *peso più alto*. Possiamo concludere che le rappresentazioni della famiglia (π_n^-, H_n^{hol}) sono una realizzazione concreta dei membri della *serie discreta antiolomorfa*.

Se si vogliono ottenere i membri della *serie discreta olomorfa*, bisogna considerare la seguente rappresentazione di $SU(1,1)$ su H_n^{hol} :

$$(\pi_n^+(g)f)(z) = (-\beta z + \bar{\alpha})^{-n} f\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{-\beta z + \bar{\alpha}}\right)$$

Infatti in questo caso si ha:

$$\pi_n^+ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} z^N = e^{i\theta(n+2N)} z^N$$

Quindi lo spettro del generatore di T è:

$$\{n, n+2, n+4, \dots\} \quad n \geq 2$$

cioè è del tipo con *peso più basso*.

Notiamo che in questo schema non si ottengono i limiti della serie discreta π_1^- e π_1^+ .

2.4 Proprietà di integrabilità delle rappresentazioni della serie discreta

Le rappresentazioni della serie discreta di $SL(2, \mathbb{R})$, π_n^- e π_n^+ , sono a quadrato integrabile per ogni $n \geq 2$. Questa affermazione segue dalla seguente:

Proposizione 2.4.1. *Le rappresentazioni unitarie irriducibili*

$$(\pi_n^-, H_n^{hol})$$

definite nel paragrafo precedente, sono a quadrato integrabile per ogni $n \geq 2$.

Dimostrazione. Una rappresentazione unitaria irriducibile π_n^- è a quadrato integrabile se i coefficienti $c_{f,h}$ della rappresentazione, che sono funzioni definite sul gruppo $SU(1,1)$, sono a quadrato integrabile rispetto alla misura di Haar dg , per ogni coppia di elementi $f, h \in H_n^{hol}$. Ricordiamo che i coefficienti $c_{f,h}$ sono definiti come:

$$g \mapsto c_{f,h}(g) := (\pi_n^-(g)f, h)_{H_n^{hol}}$$

dove

$$(\pi_n^-(g)f, h)_{H_n^{hol}} = \int_{\mathcal{D}} \overline{\gamma_n(g, z)} \overline{f(g^{-1} \cdot z)} h(z) dm_n(z)$$

Per le proprietà delle rappresentazioni a quadrato integrabile, se esiste un elemento $f \in H_n^{hol}$ tale che il coefficiente $c_{f,f} \neq 0$ è in $\mathcal{L}^2(SU(1,1), dg)$, allora tutti i coefficienti $c_{f,h}$ sono in $\mathcal{L}^2(SU(1,1), dg)$ per ogni $f, h \in H_n^{hol}$. È sufficiente quindi esibire una tale funzione di H_n^{hol} .

Consideriamo la funzione costante uguale a 1 su tutto il disco \mathcal{D} :

$$f(z) = 1 \quad \forall z \in H_n^{hol}$$

Essa appartiene allo spazio H_n^{hol} , in quanto il disco \mathcal{D} ha misura m_n finita $\forall n \geq 2$.

- Calcoliamo il coefficiente $c_{1,1}$.

Per comodità calcoliamo prima il complesso coniugato

$$\overline{c_{1,1}(g)} = (1, \pi_n^-(g)1)_{H_n^{hol}}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \overline{c_{1,1}(g)} &= \int_{\mathcal{D}} \gamma_n(g, z) (1 - |z|^2)^{n-2} dz = \\ &= \int_{\mathcal{D}} (-\bar{\beta}z + \alpha)^{-n} (1 - |z|^2)^{n-2} dz = \\ &= \int_0^1 (1 - r^2)^{n-2} r \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\alpha - \bar{\beta}r e^{i\theta})^n} \right) dr \end{aligned}$$

L'integrale tra parentesi si calcola facilmente con il metodo dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\alpha - \bar{\beta}r e^{i\theta})^n} = \frac{2\pi}{\alpha^n}$$

essendo $|\alpha| > |\beta|$ e $|r| < 1$. Per cui si ha:

$$\overline{c_{1,1}(g)} = \frac{2\pi}{\alpha^n} \int_0^1 (1 - r^2)^{n-2} r dr = \frac{\pi}{n-1} \frac{1}{\alpha^n}$$

Il coefficiente $c_{1,1}$ risulta allora:

$$c_{1,1}(g) = \frac{\pi}{n-1} \frac{1}{\bar{\alpha}^n}$$

- Mostriamo che $c_{1,1}$ è in $\mathcal{L}^2(SU(1, 1), dg)$.

Notiamo preliminarmente che se t_1, t_2 appartengono al sottogruppo di stabilità T dell'origine del disco, si ha:

$$\begin{aligned} c_{1,1}(t_1^{-1}gt_2) &= (\pi_n^-(t_1^{-1}gt_2)1, 1)_{H_n^{hol}} = \\ &= (\pi_n^-(g)\pi_n^-(t_2)1, \pi_n^-(t_1)1)_{H_n^{hol}} = \\ &= (\pi_n^-(g)1, 1)_{H_n^{hol}} = c_{1,1}(g) \end{aligned}$$

essendo che

$$\pi_n^-(t)1 = \alpha^{-n} \quad \forall t \in T$$

e $|\alpha|^2 = 1$. Il coefficiente $c_{1,1}$ è quindi invariante per l'azione di T sia a destra che a sinistra. Allora l'integrazione su $SU(1, 1)$ può essere ridotta ad una integrazione sul disco \mathcal{D} .

Per questo scegliamo la misura di Haar dg su $SU(1, 1)$ ponendo formalmente:

$$dg = dmdt \quad (2.16)$$

dove dm è la misura invariante sul disco \mathcal{D} già descritta (2.11), e dt è la misura di Haar su T normalizzata a 1.

Inoltre per poter passare ad una integrazione su \mathcal{D} bisogna scrivere il coefficiente $c_{1,1}$ come una funzione su \mathcal{D} ; questo si può fare usando l'applicazione:

$$g \mapsto z = g \cdot 0 : SU(1, 1) \rightarrow \mathcal{D} \simeq SU(1, 1)/T \quad (2.17)$$

dove 0 è l'origine del disco \mathcal{D} . Esplicitamente si ha:

$$z = g \cdot 0 = \frac{\beta}{\alpha}$$

Dato che per ogni elemento $g \in SU(1, 1)$ deve essere:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

segue che:

$$|\alpha|^2 = (1 - |z|^2)^{-1}$$

Il modulo quadro del coefficiente $c_{1,1}$

$$|c_{1,1}(g)|^2 = \frac{\pi^2}{(n-1)^2 |\alpha|^{2n}}$$

dà luogo allora alla seguente funzione su \mathcal{D} :

$$z \mapsto \frac{\pi^2}{(n-1)^2} (1 - |z|^2)^n$$

Ricordando la forma della misura invariante m su \mathcal{D} :

$$m = (1 - r^2)^{-2} r dr d\theta$$

si ha che $|c_{1,1}(g)|^2$ è integrabile su $SU(1, 1)$ se e solo se è integrabile su \mathcal{D} la funzione:

$$z \mapsto \frac{\pi^2}{(n-1)^2} (1 - r^2)^{n-2} r$$

cioè ancora se e solo se è integrabile sull'aperto $]0, 1[$ la funzione:

$$z \mapsto (1 - r^2)^{n-2} r$$

Questo è sempre vero se $n \geq 2$, quindi si può concludere che il coefficiente $c_{1,1} \in \mathcal{L}^2(SU(1, 1), dg)$.

□

Come conseguenza della proposizione precedente si ottiene il *grado formale* della rappresentazione π_n^- , corrispondente alla scelta (2.16) della misura di Haar su $SU(1, 1)$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \|c_{1,1}\|_{\mathcal{L}^2(SU(1,1))}^2 &= \int_{SU(1,1)} |c_{1,1}(g)|^2 dg = \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\pi^2}{(n-1)^2} (1 - r^2)^{n-2} r dr d\theta = \\ &= \frac{\pi^3}{(n-1)^3} \end{aligned}$$

Inoltre è immediato verificare che la norma della funzione 1 è:

$$\|1\|_{H_n^{hol}}^2 = \frac{\pi}{n-1}$$

Perciò si ha:

$$\|c_{1,1}\|_{\mathcal{L}^2(SU(1,1))}^2 = \frac{\pi}{n-1} \|1\|_{H_n^{hol}}^4$$

Queste sono le *relazioni di ortogonalità* della rappresentazione π_n^- , calcolate con i vettori tutti uguali alla funzione 1. Perciò il grado formale risulta:

$$d_n = d_{\pi_n^-} = \frac{n-1}{\pi}$$

Proposizione 2.4.2. *Il coefficiente della $c_{1,1}$ rappresentazione (π_n^+, H_n^{hol}) è integrabile per ogni $n \geq 3$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella della proposizione (2.4.1). Il coefficiente $c_{1,1}$, che abbiamo già calcolato

$$c_{1,1}(g) = \frac{\pi}{n-1} \frac{1}{\bar{\alpha}^n}$$

è integrabile sul gruppo $SU(1,1)$ rispetto alla misura di Haar dg se la funzione che esso genera su \mathcal{D} tramite l'applicazione (2.17) è integrabile sul disco. Il modulo del coefficiente dà luogo alla funzione

$$z \mapsto \frac{\pi}{n-1} (1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}$$

dove ricordiamo che $|\alpha|^2 = (1 - |z|^2)^{-1}$. Allora il coefficiente è integrabile su $SU(1,1)$ se e solo se è integrabile sul disco \mathcal{D} la funzione:

$$z \mapsto \frac{\pi}{n-1} (1 - r^2)^{\frac{n}{2}-2} r$$

o ancora se e solo se la funzione

$$r \mapsto (1 - r^2)^{\frac{n}{2}-2} r$$

è integrabile sull'aperto $]0, 1[$. Questo è vero per ogni $n \geq 3$, mentre se $n = 2$ la funzione non è integrabile. \square

In questo caso l'integrabilità di un coefficiente, $c_{1,1}$, della rappresentazione non implica l'integrabilità di tutti i coefficienti $c_{f,h} \forall f, h \in H_n^{hol}$, ma solo l'integrabilità dei coefficienti $c_{f,h}$ con f, h in un insieme denso di vettori di H_n^{hol} . Possiamo quindi concludere che le rappresentazioni della serie discreta di $SL(2, \mathbb{R})$, π_n^+ e π_n^- , sono integrabili per un insieme denso di vettori per ogni $n \geq 3$.

Capitolo 3

La rappresentazione metaplettica di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$ e la rappresentazione ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$

In questo capitolo descriviamo due rappresentazioni del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, agenti rispettivamente sullo spazio $L^2(\mathbb{R})$ e sullo spazio $L^2(\mathbb{R}^2)$.

La prima, che verrà denotata con $(\omega, L^2(\mathbb{R}))$, è una rappresentazione proiettiva del gruppo, che deriva da una rappresentazione unitaria del ricoprimento doppio $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$, ancora denotata con ω . La rappresentazione del ricoprimento doppio non è irriducibile su $L^2(\mathbb{R})$, ma si può decomporre nella somma diretta di due sottorappresentazioni, ognuna delle quali è isomorfa ad un membro della serie discreta.

La seconda, che verrà denotata con $(\omega^2, L^2(\mathbb{R}^2))$, è invece una rappresentazione unitaria del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$. Anche questa non è irriducibile su $L^2(\mathbb{R}^2)$, ma contiene ogni membro della serie discreta. In particolare si può mostrare che è somma diretta di due copie di ogni rappresentazione appartenente alla serie discreta e di una copia della rappresentazione limite della serie discreta.

3.1 La rappresentazione metaplettica di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R})^1$ lo spazio di Schwartz su \mathbb{R} . Si definisce una rappresentazione ω dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tramite gli operatori:

$$\begin{aligned}\omega(h) &= x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \\ \omega(e^+) &= i \frac{x^2}{2} \\ \omega(e^-) &= \frac{i}{2} \frac{d^2}{dx^2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove $\{h, e^+, e^-\}$ è la base standard (2.4) di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ definita nel capitolo precedente.

L'operatore $x(d/dx)$ applicato ad una funzione omogenea di grado n la moltiplica per n ; esso è chiamato l'operatore di Eulero su \mathbb{R} . Gli operatori e^+ ed e^- invece variano il grado di omogeneità della funzione, aumentandolo di 2 e diminuendolo di 2 rispettivamente.

Teorema (Shale-Weil) 3.1.1. *Il modulo $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ descritto dalle equazioni (3.1) si esponentia ad una rappresentazione unitaria, agente sullo spazio $L^2(\mathbb{R})$, del ricoprimento doppio $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$ di $SL(2, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Questo è un caso speciale di un teorema più generale che costruisce una rappresentazione unitaria del ricoprimento doppio $Mp(n, \mathbb{R})$ del gruppo simplettico $Sp(n, \mathbb{R})$, su $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nel caso $n = 1$ si ha infatti $Sp(1, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})$. Per una dimostrazione dettagliata vedi Howe [16], Lang [20], Shale [25], Weil [27]. \square

I sottogruppi ad un parametro generati dagli operatori (3.1) possono essere facilmente descritti esplicitamente:

$$\begin{aligned}(\omega(\exp(th))f)(x) &= e^{t/2} f(e^t x) \\ (\omega(\exp(te^+))f)(x) &= e^{ix^2/2} f(x) \\ \omega(\exp(te^-)) &= \text{convoluzione con } \frac{(1+i)}{2} (\pi t)^{-1/2} e^{-ix^2/2t}\end{aligned}$$

per $f \in L^2(\mathbb{R})$.

¹ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è definito come lo spazio delle funzioni C^∞ che, con tutte le loro derivate, decrescono all'infinito più rapidamente di ogni potenza negativa di $|x|$.

La rappresentazione ω di $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$ non è irriducibile, ma può essere decomposta nella somma diretta di due sottorappresentazioni irriducibili, formate rispettivamente dagli spazi delle funzioni pari e delle funzioni dispari:

$$L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})_e \oplus L^2(\mathbb{R})_o \quad (3.2)$$

Vogliamo mostrare che ognuna di queste due sottorappresentazioni è equivalente ad un membro della serie discreta di $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$.

Per quanto visto nel capitolo precedente sulla classificazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, consideriamo l'operatore:

$$\omega(\vec{k}) = \omega [i(e^- - e^+)] = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right)$$

Esso rappresenta il generatore infinitesimo di $\widetilde{SO}^2(2)$, il ricoprimento doppio di $SO(2)$, che è un sottogruppo compatto massimale di $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$. Inoltre $\omega(\vec{k})$ è essenzialmente l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico unidimensionale $(-d^2/dx^2 + x^2)$, noto anche come operatore di Hermite.

Per dimostrare la decomposizione (3.2) di ω , diagonalizziamo l'operatore $2\omega(\vec{k})$ su $L^2(\mathbb{R})$ e mostriamo che i suoi autovettori formano una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$.

Consideriamo i seguenti operatori su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$a = x + \frac{d}{dx} \quad , \quad a^+ = x - \frac{d}{dx}$$

Osserviamo che $a^* = a^+$, dove l'asterisco indica l'aggiunto di un operatore rispetto al prodotto scalare in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$(f, g)_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Un semplice calcolo mostra che:

$$\begin{aligned} a^+ a &= 2\omega(\vec{k}) - 1 \\ a a^+ &= 2\omega(\vec{k}) + 1 \end{aligned}$$

La prima di queste due identità implica che il più piccolo autovalore possibile di $2\omega(\vec{k})$ è 1. Inoltre seguono le regole di commutazione:

$$[a, 2\omega(\vec{k})] = 2a \quad , \quad [a^+, 2\omega(\vec{k})] = -2a^+$$

Se si indica con $H_\mu \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'autospazio di $2\omega(\vec{k})$ corrispondente all'autovalore μ , allora dalle regole di commutazione si deduce che a e a^+ sono

isomorfismi tra gli autospazi H_μ tali che:

$$\begin{aligned} a & : H_\mu \rightarrow H_{\mu-2} \\ a^+ & : H_\mu \rightarrow H_{\mu+2} \end{aligned}$$

infatti per ogni $v_\mu \in H_\mu$ si ha:

$$\begin{aligned} 2\omega(\bar{k})(av_\mu) &= a2\omega(\bar{k})v_\mu - 2av_\mu = \mu av_\mu - 2av_\mu = (\mu - 2)av_\mu \\ 2\omega(\bar{k})(a^+v_\mu) &= a^+2\omega(\bar{k})v_\mu + 2a^+v_\mu = \mu a^+v_\mu + 2a^+v_\mu = (\mu + 2)a^+v_\mu \end{aligned}$$

Se $\mu \in \text{spec}(2\omega(\bar{k}))$ allora o anche $(\mu - 2) \in \text{spec}(2\omega(\bar{k}))$ oppure a si annulla sul sottospazio H_μ . Dalla definizione dell'operatore a segue che esso si annulla solo sullo spazio generato dalla funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$v_0 = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$$

dove $\pi^{-1/4}$ è il fattore di normalizzazione². Lo spazio generato da v_0 deve essere quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore minimo di $2\omega(\bar{k})$, cioè 1:

$$H_1 = \text{span} \{v_0\}$$

Si ha quindi che lo spettro di $2\omega(\bar{k})$ è costituito da tutti gli interi positivi dispari:

$$\text{spec}(2\omega(\bar{k})) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Inoltre, dato che a e a^+ sono isomorfismi, tutti gli autospazi di $2\omega(\bar{k})$ H_{2j+1} , $j \in \mathbb{Z}_+$ sono unidimensionali e sono generati dagli elementi:

$$v_j = (a^+)^j v_0$$

L'espressione esplicita delle funzioni v_j può essere dedotta per induzione:

$$v_j = c_j \left(x - \frac{d}{dx} \right)^j e^{-x^2/2} = c_j P_j(x) e^{-x^2/2} \quad (3.3)$$

dove c_j sono fattori di normalizzazione e $P_j(x)$ sono polinomi di grado j , noti come polinomi di Hermite. Le funzioni v_j sono quindi le *funzioni di Hermite*. I polinomi di Hermite soddisfano la *formula di Rodriguez*:

$$P_j(x) = (-1)^j e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^j (e^{-x^2})$$

²Si ha infatti:

$$(v_0, v_0)_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{v_0(x)} v_0(x) dx = \pi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi^{-1/2} \sqrt{\pi} = 1$$

Proposizione 3.1.1. *Le funzioni di Hermite $\{v_j, j \in \mathbb{Z}_+\}$ formano base hilbertiana nello spazio $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per mostrare l'ortogonalità dei vettori v_j calcoliamo i prodotti scalari (v_j, v_l) . Premettiamo alcune utili formule. Dalla definizione degli operatori a e a^+ seguono facilmente le regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= 2 \\ [a, (a^+)^j] &= 2j(a^+)^{j-1} \quad j \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

La seconda segue dalla prima per induzione. Calcoliamo ora l'azione dell'operatore a su un elemento v_j , ricordando che $av_0 = 0$:

$$av_j = a(a^+)^j v_0 = (a^+)^j av_0 + 2j(a^+)^{j-1} v_0 = 2jv_{j-1}$$

Infine i prodotti scalari tra le funzioni di Hermite sono:

$$\begin{aligned} (v_j, v_l) &= (a^+ v_{j-1}, v_l) = (v_{j-1}, av_l) = 2l(v_{j-1}, v_{l-1}) = 2^l l! \delta_{jl} (v_0, v_0) = \\ &= 2^l l! \delta_{jl} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Oltre a verificare l'ortogonalità abbiamo anche trovato i fattori di normalizzazione delle funzioni di Hermite $c_j = (2^j j! \sqrt{\pi})^{-1/2}$.

Per mostrare la completezza dei vettori v_j si può usare la formula (3.3). \square

Si può concludere che le funzioni di Hermite $\{v_j\}$ sono una base hilbertiana per $L^2(\mathbb{R})$ di autovettori dell'operatore $2\omega(\mathbb{k})$, e ogni vettore v_j corrisponde all'autovalore $\mu = (2j + 1)$. Lo spettro di $\omega(\mathbb{k})$ sarà:

$$\text{spec}(\omega(\mathbb{k})) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots \right\}$$

ed ogni v_j corrisponderà all'autovalore $\frac{\mu}{2} = (j + \frac{1}{2})$ di $\omega(\mathbb{k})$. Notiamo che lo spettro di $\omega(\mathbb{k})$ è contenuto in $\frac{\mathbb{Z}}{2}$, come deve essere, dato che la rappresentazione ω è un'azione del ricoprimento doppio e non del gruppo.

Infine osserviamo che gli insiemi $\{v_{2l} \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ e $\{v_{2l+1} \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ generano gli spazi delle funzioni pari e dispari in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, rispettivamente, e questi sono entrambi moduli irriducibili di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Più precisamente l'insieme $\{v_{2l} \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ genera il modulo con peso più basso $V_{1/2}$, dove il vettore corrispondente al peso più basso $1/2$ è v_0 ; l'insieme $\{v_{2l+1} \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ genera il modulo con peso più basso $V_{3/2}$ e il vettore corrispondente al peso più basso $3/2$ è v_1 . Abbiamo quindi la seguente decomposizione del modulo $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \simeq V_{\frac{1}{2}} \oplus V_{\frac{3}{2}}$$

Da questa segue la decomposizione (3.2).

3.2 La rappresentazione di $SL(2, \mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$

3.2.1 Descrizione della rappresentazione ω^2

Consideriamo coordinate polari in \mathbb{R}^2 . Siano:

$$X = r \frac{\partial}{\partial r} + 1, \quad V = i \frac{r^2}{2}, \quad U = i \frac{\Delta}{2}$$

dove Δ è l'operatore Laplaciano ³ in \mathbb{R}^2 . $\{X, V, U\}$ sono operatori antiautoaggiunti su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Essi soddisfano le stesse regole di commutazione della base standard $\{h, e^+, e^-\}$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; infatti si ha:

$$[X, V] = 2V, \quad [X, U] = -2U, \quad [V, U] = X$$

$\{X, V, U\}$ generano quindi una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ agente sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Denotiamo questa rappresentazione ω^2 . Allora si ha:

$$X = \omega^2(h), \quad V = \omega^2(e^+), \quad U = \omega^2(e^-)$$

Consideriamo anche le immagini secondo l'omomorfismo ω^2 della base standard $\{\bar{k}, n^+, n^-\}$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \omega^2(\bar{k}) &= \omega^2[i(e^- - e^+)] = \frac{1}{2}(-\Delta + r^2) \\ \omega^2(n^+) &= \omega^2\left\{\frac{1}{2}[h + i(e^+ + e^-)]\right\} = \frac{1}{2}\left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 - \frac{r^2}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) \\ \omega^2(n^-) &= \omega^2\left\{\frac{1}{2}[h - i(e^+ + e^-)]\right\} = \frac{1}{2}\left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 + \frac{r^2}{2} + \frac{\Delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che la rappresentazione ω^2 dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ si esponentia ad una rappresentazione $\widetilde{\omega}^2$ del gruppo di ricoprimento universale $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ di $SL(2, \mathbb{R})$, mostrando che tutte le funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ sono vettori analitici per la rappresentazione ω^2 , vedi [23].

Oltre a questo si ha l'importante risultato che la rappresentazione ω^2 deriva effettivamente da una rappresentazione del gruppo stesso $SL(2, \mathbb{R})$, che denoteremo ancora con ω^2 e che è quella che contiene tutti i membri della serie discreta.

Proposizione 3.2.1. *La rappresentazione ω^2 tramite operatori antiautoaggiunti dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ si esponentia ad una rappresentazione unitaria del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$.*

³L'operatore Laplaciano Δ in coordinate polari in \mathbb{R}^2 è:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Dimostrazione. L'unitarietà della rappresentazione del gruppo segue dal fatto che l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ è rappresentata da operatori antiautoaggiunti su $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Per dimostrare che la rappresentazione ω^2 dell'algebra di Lie si esponenzia ad una rappresentazione del gruppo bisogna mostrare che:

$$\ker \phi \subset \ker \widetilde{\omega^2}$$

dove $\widetilde{\omega^2}$ è la rappresentazione del gruppo di ricoprimento universale $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ associata a ω^2 , mentre $\phi : \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ è l'omomorfismo di ricoprimento di $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ su $SL(2, \mathbb{R})$.

Ricordiamo che $SL(2, \mathbb{R})$ è isomorfo al gruppo $SU(1, 1)$ e quindi è il prodotto topologico del disco aperto \mathcal{D} e del cerchio:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \mathcal{D} \times (-\pi, \pi] = \{(z, \omega) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1, -\pi < \omega \leq \pi\}$$

Il gruppo di ricoprimento universale $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ è quindi:

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) = \{(z, \omega) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1, -\infty < \omega < \infty\}$$

L'omomorfismo di ricoprimento ϕ è descritto in questa parametrizzazione da:

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow SL(2, \mathbb{R}) \\ (z, \omega) &\longmapsto (z, \omega \text{ modulo } 2\pi) \end{aligned}$$

Si ha quindi ⁴:

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \left\{ (z, \omega) \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) : \phi(z, \omega) = e_{SL(2, \mathbb{R})} = (0, 0) \right\} = \\ &= \left\{ (0, 2\pi n) \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) : n \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Gli elementi del nucleo di ϕ sono quindi le rotazioni del piano di angoli multipli interi di 2π ; essi sono quindi generati dalla matrice $i\mathbf{k} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\ker \phi = \{\exp(2\pi n i\mathbf{k}) : n \in \mathbb{Z}\}$$

L'immagine secondo l'omomorfismo $\widetilde{\omega^2}$ di un elemento del nucleo di ϕ è:

$$\widetilde{\omega^2}(\exp(2\pi n i\mathbf{k})) = \exp(i2\pi n \omega^2(\mathbf{k})) = \exp(i2\pi n') = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dove $n' \in \mathbb{Z}$. La penultima identità segue dal fatto che lo spettro dell'operatore $\omega^2(\mathbf{k})$ consiste di tutti gli interi positivi. Infatti l'operatore $2\omega^2(\mathbf{k})$ è

⁴L'identità nel gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, $e_{SL(2, \mathbb{R})}$, è la matrice identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che nella parametrizzazione tramite il prodotto cartesiano $\mathcal{D} \times (-\pi, \pi]$ risulta $e_{SL(2, \mathbb{R})} = (0, 0)$.

l'hamiltoniano dell'oscillatore armonico $(-\Delta + r^2)$, il cui spettro su $L^2(\mathbb{R}^2)$ consiste di tutti gli interi positivi pari.

Si può quindi concludere che $\exp(2\pi ni\tilde{k}) \in \ker \widetilde{\omega^2} \forall n \in \mathbb{Z}$, cioè che vale l'inclusione:

$$\ker \phi \subset \ker \widetilde{\omega^2} \quad \square$$

3.2.2 Decomposizione della rappresentazione ω^2

Sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$ agisce in maniera naturale il gruppo delle rotazioni nel piano $SO(2)$. Infatti $SO(2)$ agisce su \mathbb{R}^2 in maniera standard; per ogni $\varphi \in [0, 2\pi[$, $x \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$R_\varphi \cdot x = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Allora $SO(2)$ agisce anche sulle funzioni di $L^2(\mathbb{R}^2)$ tramite l'azione γ :

$$(\gamma(R_\varphi) \cdot f)(x) = f(R_\varphi^{-1} \cdot x) = f(R_{-\varphi} \cdot x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

L'azione di $SO(2)$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$ è inoltre unitaria rispetto al prodotto scalare:

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f(x)} g(x) dx$$

$SO(2)$ è un gruppo compatto, quindi la sua rappresentazione $(\gamma, L^2(\mathbb{R}^2))$ si decompone canonicamente nella somma diretta:

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_k$$

Lo spazio H_k è esattamente:

$$H_k = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \hat{f}(r, \theta) = e^{ik\theta} h(r), \text{ con } h \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \right\} \quad (3.4)$$

dove $\hat{f}(r, \theta)$ è la funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ scritta in coordinate polari, cioè $\hat{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Si ha inoltre che $SO(2)$ agisce moltiplicativamente per $e^{ik\varphi}$ su ogni sottospazio H_k :

$$(\gamma(R_\varphi) \cdot f) = e^{ik\varphi} f \quad \forall f \in H_k$$

mentre il generatore di $SO(2)$, $i\tilde{k}$, agisce moltiplicativamente per ik su ogni sottospazio H_k :

$$(\gamma(i\tilde{k}) \cdot f) = ikf \quad \forall f \in H_k$$

Una conseguenza importante delle definizioni precedenti consiste nel fatto che le due rappresentazioni ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$ e R_φ di $SO(2)$ *commutano* tra

di loro.

Allora i sottospazi di $L^2(\mathbb{R}^2)$ che sono invarianti rispetto all'azione naturale di $SO(2)$ lo sono anche rispetto all'azione ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$. In particolare si ha:

Proposizione 3.2.2. *I sottospazi H_k di $L^2(\mathbb{R}^2)$ sono invarianti rispetto alla rappresentazione ω^2 del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dal fatto che i sottospazi H_k sono $SO(2)$ -invarianti. \square

Oltre a questo si ha il seguente importante fatto:

Proposizione 3.2.3. *$SL(2, \mathbb{R})$, tramite ω^2 , agisce irriducibilmente su ogni sottospazio H_k di $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Dimostrazione. Si può dimostrare che il gruppo $ax + b$, generato dagli operatori X e U , agisce irriducibilmente su ogni sottospazio H_k , essendo questa rappresentazione intrecciata con un modello standard tramite una trasformata di Hankel. Per una dimostrazione vedi [23]. Segue allora che $SL(2, \mathbb{R})$ agisce irriducibilmente su ogni sottospazio H_k tramite ω^2 . \square

La decomposizione:

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_k$$

è quindi una decomposizione in sottospazi invarianti e irriducibili della rappresentazione unitaria ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$.

Come abbiamo già osservato lo spettro dell'operatore $\omega^2(\vec{k})$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$ è costituito da tutti gli interi positivi:

$$\text{spec}(\omega^2(\vec{k})) = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

È chiaro quindi, dalla classificazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, che ogni componente (ω_k^2, H_k) deve essere isomorfa ad un membro della serie discreta, dove si è indicato con ω_k^2 la restrizione al sottospazio H_k dell'azione ω^2 . Bisogna perciò studiare lo spettro dell'operatore $\omega^2(\vec{k})$ sul sottospazio H_k .

Teorema 3.2.1. *Il più piccolo autovalore dell'operatore $\omega^2(\vec{k})$ sul sottospazio H_k è $|k| + 1$.*

Dimostrazione. Per determinare lo spettro dell'operatore $\omega^2(\vec{k})$ sui sottospazi $H_k \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, trasferiamo la sua azione su uno spazio naturalmente

isomorfo ad $L^2(\mathbb{R}^2)$ e ne determiniamo lo spettro sui sottospazi immagine degli H_k .

Sia $\mathcal{H}^{(2)}$ lo spazio di Bargmann-Fok in due variabili:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \left\{ f(z) \text{ olomorfe in } \mathbb{C}^2 : \int_{\mathbb{C}^2} |f(z)|^2 e^{-|z|^2/2} dz < \infty \right\}$$

Esso è isomorfo allo spazio $L^2(\mathbb{R}^2)$ tramite la trasformazione unitaria $K : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}^{(2)}$, definita da:

$$(Kf)(z) = \pi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{\sqrt{2}z \cdot x - \frac{1}{2}(z \cdot z + x \cdot x)} dx$$

Ricordiamo che K è la mappa che intreccia la rappresentazione di Schrödinger del gruppo di Heisenberg $H^{(2)}$ con quella di Bargmann-Fok.

Trasferiamo l'azione dell'operatore $2\omega^2(\hat{k})$, che è l'hamiltoniano dell'oscillatore armonico bidimensionale, dallo spazio $L^2(\mathbb{R}^2)$ allo spazio $\mathcal{H}^{(2)}$, tramite l'isomorfismo K . Si ottiene il seguente operatore:

$$W = K[2\omega^2(\hat{k})]K^{-1} = 2 \sum_{j=1}^2 z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + 2$$

Introduciamo una base hilbertiana dello spazio di $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$w_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2) = \left(\frac{2}{\alpha_1! \alpha_2!} \right)^{1/2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$. L'operatore W agisce diagonalmente su ogni elemento della base:

$$W w_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2) = [2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2] w_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2)$$

Allora $\mathcal{H}^{(2)}$ ha una decomposizione in autospazi V_n di W :

$$\mathcal{H}^{(2)} = \bigoplus_{n \geq 0} V_n \tag{3.5}$$

caratterizzati come segue:

- V_n è l'autospazio corrispondente all'autovalore $(2n+2)$ di W con $n \in \mathbb{N}$.
- V_n è generato dai polinomi omogenei in z_1, z_2 di grado n :

$$z_1^n, z_1^{n-1} z_2, z_1^{n-2} z_2^2, \dots, z_1^2 z_2^{n-2}, z_1 z_2^{n-1}, z_2^n$$

- V_n ha dimensione $n + 1$.

Lo spazio generato dai polinomi omogenei di grado n in due variabili complesse, quindi per il secondo punto il sottospazio V_n di $\mathcal{H}^{(2)}$, è il modello standard della rappresentazione unitaria irriducibile D^j , di dimensione $j = n/2$, del gruppo compatto $SU(2)$. $SU(2)$ agisce su ogni V_n tramite la rappresentazione ρ :

$$(\rho(g) \cdot f)(z) = f(g^{-1} \cdot z) \quad \forall g \in SU(2), f \in \mathcal{H}^{(2)}$$

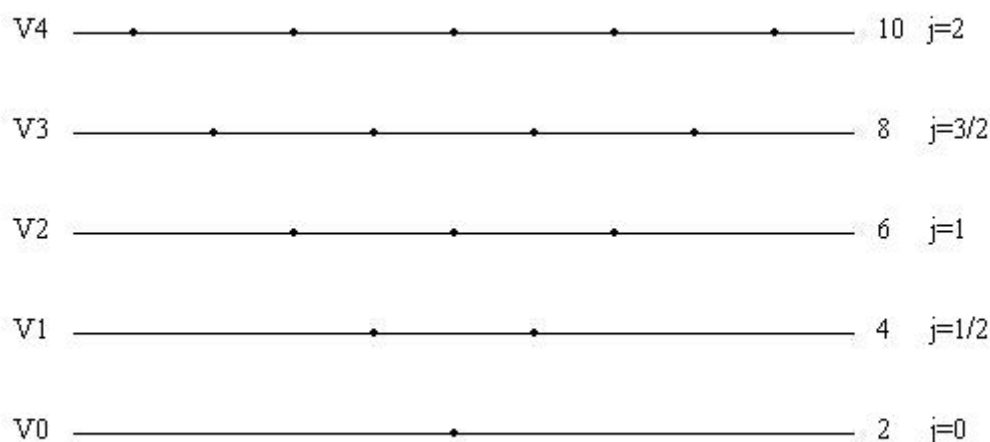
dove $g \cdot z$ è l'azione naturale di $SU(2)$ su \mathbb{C}^2 :

$$g \cdot z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 + \beta z_2 \\ -\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2 \end{pmatrix}$$

Questa azione è unitaria rispetto al prodotto scalare in $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$(f, g)_{\mathcal{H}^{(2)}} = \int_{\mathbb{C}^2} \overline{f(z)} g(z) e^{-|z|^2/2} dz$$

Lo spazio di Bargmann-Fok $\mathcal{H}^{(2)}$ ha quindi la seguente struttura:



Le righe rappresentano i sottospazi V_n che sono contemporaneamente rappresentazioni irriducibili D^j di $SU(2)$ con $j = n/2$, come indicato nella seconda colonna, e autospazi dell'operatore W corrispondenti all'autovalore indicato nella prima colonna; i puntini rappresentano una base per il sottospazio V_n e su ogni riga sono $n + 1$, come la dimensione di V_n .

Gli spazi H_k sono completamente caratterizzati dal fatto che su ognuno di essi il gruppo $SO(2)$ agisce, tramite la rappresentazione γ , moltiplicando

per $e^{ik\varphi}$ o equivalentemente dal fatto che il generatore ik di $SO(2)$ agisce, tramite la rappresentazione derivata di γ , moltiplicando per ik :

$$\begin{aligned}(\gamma(R_\varphi) \cdot f) &= e^{ik\varphi} f & \forall f \in H_k \\ (\gamma(ik) \cdot f) &= ikf & \forall f \in H_k\end{aligned}$$

L'isomorfismo K intreccia le due azioni γ di $SO(2)$ su $L^2(\mathbb{R}^2)$ e ρ ristretta a $SO(2) \subset SU(2)$ su $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$K\gamma(R_\varphi)K^{-1} = \rho(R_\varphi)$$

Questo può essere verificato direttamente e segue dal fatto che nell'operatore K sono presenti soltanto forme bilineari del tipo:

$$z_1x_1 + z_2x_2, \quad z_1^2 + z_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2$$

Allora il problema si riduce nel trovare i sottospazi di $\mathcal{H}^{(2)}$ su cui il generatore di $SO(2)$ agisce moltiplicativamente. Questi saranno le immagini secondo K degli H_k .

La decomposizione (3.5) aiuta in tal senso, dato che come abbiamo visto ogni sottospazio V_n è la rappresentazione D^j , con $j = n/2$, di $SU(2)$. Per il calcolo esplicito degli autovalori e autovettori consideriamo l'operatore $\rho(\vec{k})$, che è il trasformato di $\gamma(\vec{k})$ secondo l'isomorfismo K :

$$\rho(\vec{k}) = K\gamma(\vec{k})K^{-1} = -i \left(-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$$

La diagonalizzazione dell'operatore $\rho(\vec{k})$ sullo spazio V_n dei polinomi omogenei di grado n in z_1, z_2 è un problema elementare. Si può vedere ad esempio [13], capitolo 5. Gli autovalori di $\rho(\vec{k})$ su V_n sono:

$$-n, -n + 2, \dots, n - 2, n$$

Ovviamente ci sono $n + 1$ autovalori distinti, tanti quanti la dimensione di V_n . Esplicitamente, i primi cinque sottospazi hanno le seguenti basi di autovettori:

- Per V_0 :

$$1 \rightarrow \lambda = 0$$

- Per V_1 :

$$\begin{aligned}z_1 + iz_2 &\longrightarrow \lambda = 1 \\ z_1 - iz_2 &\longrightarrow \lambda = -1\end{aligned}$$

- Per V_2 :

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &\longrightarrow \lambda = 0 \\ z_1^2 + 2iz_1z_2 - z_2^2 &\longrightarrow \lambda = 2 \\ z_1^2 - 2iz_1z_2 - z_2^2 &\longrightarrow \lambda = -2 \end{aligned}$$

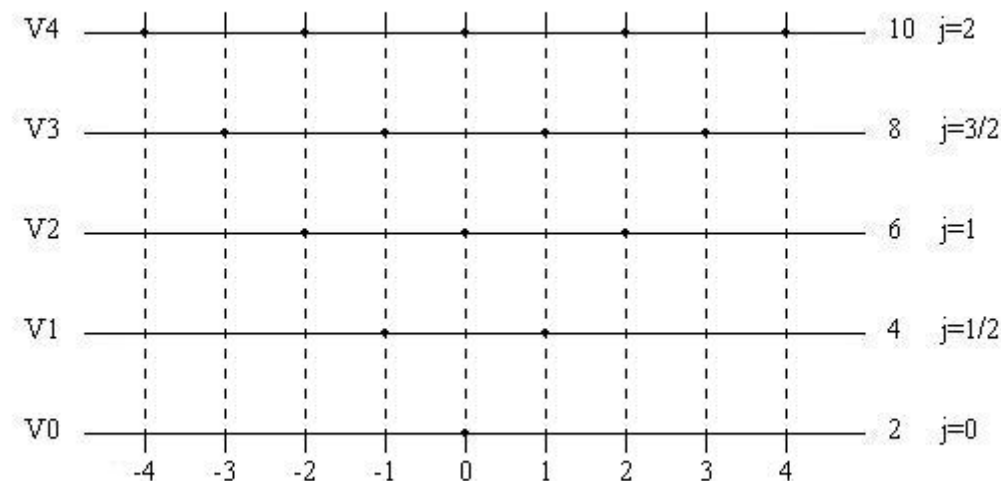
- Per V_3 :

$$\begin{aligned} z_1^3 + iz_1^2z_2 + z_1z_2^2 + iz_2^3 &\longrightarrow \lambda = 1 \\ z_1^3 - iz_1^2z_2 + z_1z_2^2 - iz_2^3 &\longrightarrow \lambda = -1 \\ z_1^3 + 3iz_1^2z_2 - 3z_1z_2^2 - iz_2^3 &\longrightarrow \lambda = 3 \\ z_1^3 - 3iz_1^2z_2 - 3z_1z_2^2 + iz_2^3 &\longrightarrow \lambda = -3 \end{aligned}$$

- Per V_4 :

$$\begin{aligned} z_1^4 + 2z_1^2z_2^2 + z_2^4 &\longrightarrow \lambda = 0 \\ z_1^4 + 2iz_1^3z_2 + 2iz_1z_2^3 - z_2^4 &\longrightarrow \lambda = 2 \\ z_1^4 - 2iz_1^3z_2 - 2iz_1z_2^3 - z_2^4 &\longrightarrow \lambda = -2 \\ z_1^4 + 4iz_1^3z_2 - 6z_1^2z_2^2 - 4iz_1z_2^3 + z_2^4 &\longrightarrow \lambda = 4 \\ z_1^4 - 4iz_1^3z_2 - 6z_1^2z_2^2 + 4iz_1z_2^3 + z_2^4 &\longrightarrow \lambda = -4 \end{aligned}$$

Lo spazio di Bargmann-Fok ha quindi la struttura:



Le righe rappresentano, come nello schema precedente, i sottospazi V_n ; i puntini sono ora una base per V_n formata da autovettori di $\rho(\bar{k})$ corrispondenti agli autovalori segnati in basso. Vediamo allora che il generatore di $SO(2)$ agisce sulle righe verticali moltiplicando per uno stesso numero,

quello segnato in basso moltiplicato per i ; le righe verticali sono perciò i sottospazi immagine $K(H_k)$.

Lo spettro di W su $K(H_k)$ è:

$$\text{spec}(W) = \{2|k| + 2, 2|k| + 4, 2|k| + 6, 2|k| + 8, \dots\}$$

L'operatore $\omega^2(\bar{k})$ trasportato su $\mathcal{H}^{(2)}$ è $W/2$, quindi il suo spettro su H_k risulta:

$$\text{spec}(\omega^2(\bar{k})) = \text{spec}(W/2) = \{|k| + 1, |k| + 2, |k| + 3, |k| + 4, \dots\}$$

In conclusione abbiamo che il più piccolo autovalore dell'operatore $\omega^2(\bar{k})$ sul sottospazio H_k è $|k| + 1$. \square

Corollario 3.2.1. *La sottorappresentazione (ω_k^2, H_k) di $SL(2, \mathbb{R})$ è isomorfa al membro π_n^+ della serie discreta olomorfa con $n = |k| + 1$:*

$$\omega_k^2 \simeq \pi_{|k|+1}^+$$

Corollario 3.2.2. *La rappresentazione $(\omega^2, L^2(\mathbb{R}^2))$ di $SL(2, \mathbb{R})$ contiene esattamente due copie di ogni rappresentazione π_n^+ della serie discreta olomorfa con $n \geq 2$ e una copia della rappresentazione limite π_1^+ :*

$$\omega^2 \simeq \dots \oplus \pi_3^+ \oplus \pi_2^+ \oplus \pi_1^+ \oplus \pi_2^+ \oplus \pi_3^+ \dots$$

π_1^+ è la riga verticale dello schema corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$ di \bar{k} , π_2^+ è quella corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, π_3^+ è quella corrispondente all'autovalore $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$, e così via.

3.3 Relazione tra le rappresentazioni ω e ω^2

Le rappresentazioni ω e ω^2 di $SL(2, \mathbb{R})$ descritte nei paragrafi precedenti non sono completamente estranee. In effetti si può mostrare che la rappresentazione ω^2 agente su $L^2(\mathbb{R}^2)$ non è altro che il prodotto tensore di due copie della rappresentazione ω agente su $L^2(\mathbb{R})$.

Estendiamo la costruzione della una base hilbertiana di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni di Hermite, fatta nel primo paragrafo, allo spazio di Schwartz su \mathbb{R}^n , $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un sistema di coordinate in \mathbb{R}^n . Si definiscano i seguenti operatori su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$a_j = x_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, n$$

$$a_j^+ = a_j^* = x_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, n$$

dove con a_j^* si indica l'aggiunto di a_j . Siano:

$$v_{(0,0,\dots,0)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n x_j^2\right) = \prod_{j=1}^n v_0(x_j)$$

e per $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = (a_1^+)^{\beta_1} (a_2^+)^{\beta_2} \dots (a_n^+)^{\beta_n} v_{(0,0,\dots,0)} = \prod_{j=1}^n v_{\beta_j}(x_j)$$

Osserviamo che le funzioni $v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$ definite sopra sono prodotti delle funzioni di Hermite in una variabile. Notiamo inoltre che tutti gli operatori $a_j \forall j = 1, \dots, n$ annullano l'elemento $v_{(0,0,\dots,0)}$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$a_j v_{(0,0,\dots,0)} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Si può mostrare che le funzioni $\{v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}\}$ appartengono allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che formano base hilbertiana in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Per uno schema di dimostrazione vedi [15]. Inoltre dalla formula (3.3) si ha:

$$v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = \left(\prod_{j=1}^n P_{\beta_j}(x_j) \right) v_{(0,0,\dots,0)} = P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(x_1, \dots, x_n) v_{(0,0,\dots,0)}$$

dove $P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$ sono polinomi nelle variabili x_1, \dots, x_n noti come polinomi di Hermite in \mathbb{R}^n . Le funzioni $v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$ sono quindi le *funzioni di Hermite* su \mathbb{R}^n .

Consideriamo ora il prodotto tensore di n copie della rappresentazione ω agente sul prodotto tensore $\underbrace{\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})}_{n \text{ volte}} = \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\otimes n}$. Questo spazio può essere identificato in maniera naturale con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (vedi [15] e [24]). La rappresentazione $(\omega^n, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ è generata da:

$$\begin{aligned} \omega^n(h) &= \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{n}{2} \\ \omega^n(e^+) &= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ \omega^n(e^-) &= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

dove $\{h, e^+, e^-\}$ è la base standard (2.4) in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se si calcola l'azione di \mathfrak{k} su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ottiene:

$$\omega^n(\mathfrak{k}) = i\omega^n(e^- - e^+) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(x_j^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j a_j^+ + a_j^+ a_j)$$

Questo operatore agisce diagonalmente sulle funzioni di Hermite:

$$\omega^n(\mathbf{k})v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = \sum_{j=1}^n \left(\beta_j + \frac{1}{2} \right) v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$$

Quindi l'insieme $\{v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} | (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R}^n)$ formata da autovettori di $\omega(\mathbf{k})$. Ogni elemento $v_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$ della base corrisponde all'autovalore $\sum_{j=1}^n (\beta_j + \frac{1}{2})$.

Restringiamo ora la costruzione a $n = 2$. Si ottengono i seguenti operatori agenti su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} \omega^2(h) &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 1 = r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \\ \omega^2(e^+) &= \frac{i}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{i}{2} r^2 \\ \omega^2(e^-) &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) = \frac{i}{2} \Delta \end{aligned}$$

Questa è proprio la rappresentazione che abbiamo descritto nel secondo paragrafo. In conclusione si ha che la rappresentazione ω^2 è il prodotto tensore di due copie della rappresentazione ω :

$$(\omega, L^2(\mathbb{R})) \otimes (\omega, L^2(\mathbb{R})) = (\omega^2, L^2(\mathbb{R}^2))$$

Notiamo che mentre la rappresentazione ω è una rappresentazione proiettiva del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, il prodotto tensore di due copie di ω è una rappresentazione effettiva e non più una rappresentazione proiettiva di $SL(2, \mathbb{R})$.

Da questa identificazione si può ottenere immediatamente la decomposizione della rappresentazione ω^2 in sottospazi invarianti e irriducibili, come conseguenza della seguente proposizione.

Proposizione 3.3.1. *Siano V_{λ_1} e V_{λ_2} due moduli di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ con minimo peso rispettivamente λ_1 e λ_2 . Se $\lambda_1 + \lambda_2 \notin \mathbb{Z}_-$ si ha la seguente decomposizione in somma diretta, del prodotto tensore di V_{λ_1} e V_{λ_2} :*

$$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_{\lambda_1 + \lambda_2 + 2j}$$

In particolare, gli autovalori di $i\mathbf{k}$ in $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ sono della forma $\lambda_1 + \lambda_2 + 2j$ per $j \in \mathbb{Z}_+$, e l'autospazio di $i\mathbf{k}$ corrispondente all'autovalore $\lambda_1 + \lambda_2 + 2j$ ha dimensione $j + 1$.

Dimostrazione. Per una dimostrazione vedi [15]. □

Se consideriamo $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, allora la rappresentazione $(\omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ è:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \simeq V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$$

Dato che la rappresentazione $(\omega^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}^2))$ è il prodotto tensore di due copie di ω , si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) &= \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}) \simeq (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}) \otimes (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}) = \\ &= (V_{\frac{1}{2}} \oplus V_{\frac{3}{2}}) \otimes (V_{\frac{1}{2}} \oplus V_{\frac{3}{2}}) = \\ &= (V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}}) \oplus (V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{3}{2}}) \oplus (V_{\frac{3}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}}) \oplus (V_{\frac{3}{2}} \otimes V_{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Ogni addendo può essere scomposto facendo uso della proposizione 3.3.1:

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_{1+2j} = V_1 \oplus V_3 \oplus V_5 \oplus \dots$$

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{3}{2}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_{2+2j} = V_2 \oplus V_4 \oplus V_6 \oplus \dots$$

$$V_{\frac{3}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_{2+2j} = V_2 \oplus V_4 \oplus V_6 \oplus \dots$$

$$V_{\frac{3}{2}} \otimes V_{\frac{3}{2}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_{3+2j} = V_3 \oplus V_5 \oplus V_7 \oplus \dots$$

In conclusione si ha la seguente decomposizione di ω^2 , che è l'analogia di quella trovata nel precedente paragrafo:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \simeq \dots \oplus V_4 \oplus V_3 \oplus V_2 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus \dots$$

3.4 La rappresentazione metaplettica

Sia $Sp(n, \mathbb{R})$ il gruppo simplettico n -dimensionale:

$$\begin{aligned} Sp(n, \mathbb{R}) &= \{g \in Mat_{2n}(\mathbb{R}) : \sigma(gu, gv) = \sigma(u, v) \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}\} = \\ &= \left\{ g \in Mat_{2n}(\mathbb{R}) : g^{tr} J g = J \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dove $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma simplettica⁵ sullo spazio \mathbb{R}^{2n} .

$Sp(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie semisemplice ed è omotopicamente equivalente

⁵Ricordiamo che una forma simplettica su uno spazio vettoriale reale V è una forma bilineare $\sigma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ antisimmetrica e non degenera:

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= -\sigma(v, u) & \forall u, v \in V \\ \sigma(u, v) &= 0 \forall v \in V & \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

ad $U(n)$, che è un suo sottogruppo compatto massimale. In particolare quindi il gruppo fondamentale di $Sp(n, \mathbb{R})$ è \mathbb{Z} . Allora per ogni $k \in \mathbb{Z}$ esiste un unico gruppo di Lie connesso che è il ricoprimento k -esimo di $Sp(n, \mathbb{R})$. Il ricoprimento doppio è di particolare importanza; esso si chiama gruppo metaplettico e si denota con $Mp(n, \mathbb{R})$. Per queste proprietà del gruppo simplettico si può vedere [23], [12].

L'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ del gruppo simplettico è:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) &= \{g \in Mat_{2n}(\mathbb{R}) : \sigma(gu, v) = -\sigma(u, gv) \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}\} = \\ &= \left\{ g \in Mat_{2n}(\mathbb{R}) : g^{tr} J = -Jg \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esiste una caratterizzazione alternativa di questa algebra di Lie. Sia hp_2 lo spazio dei polinomi omogenei di secondo grado nelle variabili $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$, che costituiscono un sistema di coordinate in \mathbb{R}^{2n} . Esso è un'algebra di Lie rispetto alle parentesi di Poisson⁶ in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Si ha allora il seguente risultato:

Proposizione 3.4.1. *L'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ è isomorfa all'algebra di Lie hp_2 :*

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \simeq hp_2 \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Dalla caratterizzazione (3.6) dell'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ e dal fatto che $-J = J^{tr}$, segue facilmente che:

$$g \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow Jg \text{ è una matrice simmetrica}$$

Ad ogni matrice simmetrica S è univocamente associato il polinomio p_S in hp_2 nelle variabili $w = (w_1, \dots, w_n)$ dato da:

$$p_S = -\frac{1}{2} w^{tr} S w \quad (3.8)$$

Inversamente per ogni polinomio p in hp_2 esiste un'unica matrice simmetrica S tale che vale la relazione precedente (3.8). Allora ad ogni matrice $g \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ si può associare univocamente il polinomio $p_g \in hp_2$:

$$g \mapsto p_g(x, \xi) = -\frac{1}{2} (x^{tr} \xi^{tr}) Jg \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

⁶Le parentesi di Poisson tra due funzioni $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ nelle variabili $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ sono:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

dove è sottintesa la somma sugli indici ripetuti.

È immediato verificare che:

$$P_{[g_1, g_2]} = \{p_{g_1}, p_{g_2}\}$$

cioè che l'isomorfismo (3.9) è un isomorfismo di algebre di Lie. \square

La rappresentazione metaplettica è una rappresentazione unitaria del gruppo metaplettico $Mp(n, \mathbb{R})$, agente sullo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$, quindi è una rappresentazione proiettiva del gruppo $Sp(n, \mathbb{R})$. Essa è descritta in modo semplice a livello dell'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Infatti, dato l'isomorfismo (3.7), definiamo l'applicazione:

$$g \mapsto \hat{\omega}(g) = p_g(Q, P) \quad (3.10)$$

dove $p_g(Q, P)$ è l'operatore differenziale del secondo ordine associato al polinomio $p_g(x, \xi) \in \mathfrak{hp}_2$ tramite il calcolo di Weil, vedi [23], [12]. L'applicazione (3.10) è una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ tramite operatori antiautoaggiunti su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dato che la corrispondenza di Weil conserva le parentesi di commutazione. Esplicitamente si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(x_j x_k) &= i x_j x_k \\ \hat{\omega}(\xi_j \xi_k) &= -i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \\ \hat{\omega}(x_j \xi_k) &= \frac{1}{2} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} x_j \right) \end{aligned}$$

Si può dimostrare, vedi [23], [12], che questa rappresentazione di $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ genera una rappresentazione unitaria del gruppo metaplettico $Mp(n, \mathbb{R})$.

Vogliamo mostrare come le rappresentazioni di $SL(2, \mathbb{R})$ ω e ω^2 descritte nei paragrafi precedenti siano casi particolari della rappresentazione metaplettica.

1. Se $n = 1$, i gruppi $SL(2, \mathbb{R})$ e $Sp(1, \mathbb{R})$ sono esattamente lo stesso gruppo. La loro algebra di Lie è 3-dimensionale e nell'isomorfismo (3.7) è generata dai vettori $\left\{ x\xi, \frac{x^2}{2}, -\frac{\xi^2}{2} \right\}$, che hanno le stesse regole di commutazione della base standard $\{h, e^+, e^-\}$. In questo caso la rappresentazione metaplettica $\hat{\omega}$ coincide con la rappresentazione ω . Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \omega(x\xi) &= x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} = \omega(h) \\ \omega\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{i}{2} x^2 = \omega(e^+) \\ \omega\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) &= \frac{i}{2} \frac{d^2}{dx^2} = \omega(e^-) \end{aligned}$$

2. Se $n = 2$, il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ può essere visto come un sottogruppo di $Sp(2, \mathbb{R})$, tramite l'immersione:

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{R}) &\hookrightarrow Sp(2, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Infatti, se $A \in SL(2, \mathbb{R})$ allora $B \in Sp(2, \mathbb{R})$, dato che:

$$\begin{aligned} B^t J B &= \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A^t \\ -A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Esiste allora una sottoalgebra di $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Nell'isomorfismo (3.7) si ha:

$$\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) \simeq \text{span} \{x^2, y^2, xy, \xi^2, \eta^2, \xi\eta, x\xi, x\eta, y\xi, y\eta\}$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ è quindi uno spazio vettoriale reale di dimensione 10. Considero il sottospazio vettoriale 3-dimensionale di $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$:

$$\text{span} \left\{ x\xi + y\eta, \frac{x^2 + y^2}{2}, -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\} \quad (3.11)$$

Un semplice calcolo mostra che:

$$\begin{aligned} \left\{ x\xi + y\eta, \frac{x^2 + y^2}{2} \right\} &= x^2 + y^2 \\ \left\{ x\xi + y\eta, -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\} &= \xi^2 + \eta^2 \\ \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2}, -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\} &= x\xi + y\eta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Segue che il sottospazio (3.11) è chiuso rispetto alle parentesi di Poisson, cioè è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$, e inoltre è isomorfo, come algebra di Lie, a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, perchè le regole di commutazione (3.12) sono quelle della base standard $\{h, e^+, e^-\}$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

La rappresentazione metaplettica $\hat{\omega}$, agente su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, ristretta a questa sottoalgebra, è esattamente la rappresentazione ω^2 :

$$\hat{\omega}(x\xi + y\eta) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 1 = \omega^2(h)$$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) &= \frac{i}{2}(x^2 + y^2) = \omega^2(e^+) \\ \hat{\omega}\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right) &= \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \omega^2(e^-)\end{aligned}$$

Capitolo 4

La formula di ricostruzione per $SL(2, \mathbb{R})$

4.1 Decomposizione di Cartan per $SL(2, \mathbb{R})$

Consideriamo i seguenti due sottoinsiemi del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}SO(2) &= \{g \in SL(2, \mathbb{R}) : g \text{ è una matrice ortogonale}\} \\ P &= \{g \in SL(2, \mathbb{R}) : g \text{ è una matrice definita positiva}\}\end{aligned}$$

Come più volte ricordato, il generatore infinitesimo del sottogruppo compatto massimale $SO(2)$ è l'elemento $i\mathfrak{k}$, con $\mathfrak{k} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ definito in (2.6). Esplicitamente quindi ogni elemento $R_\theta \in SO(2)$ può essere scritto, tramite la mappa esponenziale, come:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{i\theta\mathfrak{k}} \quad (4.1)$$

Il sottoinsieme P invece non è un sottogruppo di $SL(2, \mathbb{R})$. Lo spazio tangente di P nella matrice identità $e = I$ è il sottoinsieme dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) : X = X^{tr}\} \quad (4.2)$$

Il sottoinsieme $P \subset SL(2, \mathbb{R})$ ha la seguente importante proprietà, che conduce alla decomposizione di Cartan:

Lemma 4.1.1. *La mappa esponenziale ristretta a \mathfrak{p}*

$$\exp : \mathfrak{p} \rightarrow P$$

è un diffeomorfismo.

Usando questo lemma si ottiene direttamente la *decomposizione di Cartan*:

Teorema 4.1.1. *La mappa*

$$(R_\theta, X) \mapsto R_\theta e^X : SO(2) \times \mathfrak{p} \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

è un diffeomorfismo. In particolare, quindi, ogni elemento $g \in SL(2, \mathbb{R})$ può essere scritto come prodotto

$$g = R_\theta e^X$$

dove $R_\theta \in SO(2)$ e $X \in \mathfrak{p}$.

Una derivazione della decomposizione di Cartan nel caso generale di un gruppo di Lie semisemplice si può trovare in [23], [18]. È evidente che nel caso di $SL(2, \mathbb{R})$ la decomposizione di Cartan coincide con la decomposizione polare di una matrice invertibile.

Data la caratterizzazione (4.2) dello spazio \mathfrak{p} , un generico elemento $X \in \mathfrak{p}$ può essere parametrizzato tramite una coppia di numeri reali:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \{X \in Mat_2(\mathbb{R}) : Tr(X) = 0, X = X^{tr}\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

L'elemento $X \in \mathfrak{p}$ può essere sviluppato sulla base standard $\{h, e^+, e^-\}$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, introdotta nel secondo capitolo (2.4):

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \alpha h + \beta(e^+ + e^-)$$

Utilizzando ora le formule inverse (2.7) esprimiamo X come combinazione lineare degli elementi della base $\{\bar{k}, n^+, n^-\}$, anch'essa standard (2.6):

$$\begin{aligned} X &= \alpha(n^+ + n^-) - i\beta(n^+ - n^-) = (\alpha - i\beta)n^+ + (\alpha + i\beta)n^- = \\ &= \bar{\gamma}n^+ + \gamma n^- \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove abbiamo introdotto il numero complesso $\gamma = \alpha + i\beta$.

In conclusione quindi, usando la decomposizione di Cartan e le parametrizzazioni (4.1), (4.4), un generico elemento $g \in SL(2, \mathbb{R})$ può essere scritto nella forma:

$$g = e^{i\theta \bar{k}} e^{\bar{\gamma}n^+ + \gamma n^-}$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\gamma \in \mathbb{C}$.

Per facilitare i calcoli degli integrali sul gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, abbiamo bisogno di una formula integrale che metta in relazione l'integrazione su $SL(2, \mathbb{R})$ con la decomposizione di Cartan. Siano dg una misura di Haar su $SL(2, \mathbb{R})$, $d\theta/2\pi$ la misura di Haar su $SO(2)$ normalizzata ad 1 e dX la misura di Lebesgue sul sottospazio \mathfrak{p} dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Per ogni funzione f integrabile sul gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ si ha:

$$\int_{SL(2, \mathbb{R})} f(g) dg = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathfrak{p}} dX J(X) f(e^{i\theta k} e^X) \quad (4.5)$$

dove J è lo jacobiano del diffeomorfismo (4.3) della decomposizione di Cartan. Per gli sviluppi successivi non è necessario conoscere la forma esplicita dello jacobiano J , ma è importante notare che esso non dipende dall'angolo θ .

La formula integrale (4.5) si può anche riscrivere nella forma:

$$\int_{SL(2, \mathbb{R})} f(g) dg = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} d\gamma J(\gamma) f(e^{i\theta k} e^{\bar{\gamma}n^+ + \gamma n^-}) \quad (4.6)$$

4.2 Le relazioni di ortogonalità e la formula di ricostruzione per $SL(2, \mathbb{R})$

Le rappresentazioni π_n^+ della serie discreta di $SL(2, \mathbb{R})$ sono rappresentazioni unitarie irriducibili di un gruppo di Lie unimodulare. Inoltre per ogni $n \geq 2$ esse sono a quadrato integrabile. Allora, in accordo con la teoria generale esposta nel primo capitolo, è possibile scrivere una formula di ricostruzione per ogni stato di un sistema quantistico il cui spazio degli stati \mathcal{H} supporti un'azione della serie discreta π_n^+ con $n \geq 2$. La formula di ricostruzione deriva dalle relazioni di ortogonalità della rappresentazione π_n^+ :

$$d_n \int_{SL(2, \mathbb{R})} (u, \pi_n^+(g)v)_{\mathcal{H}} (\pi_n^+(g)y, w)_{\mathcal{H}} dg = (u, w)_{\mathcal{H}} (y, v)_{\mathcal{H}} \quad (4.7)$$

dove dg è una misura di Haar su $SL(2, \mathbb{R})$ e d_n è il grado formale della rappresentazione π_n^+ , relativo alla scelta di dg .

La formula di ricostruzione degli elementi di matrice del proiettore $P[w]$, che rappresenta uno stato puro, è quindi:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = d_n \int_{SL(2, \mathbb{R})} (u, \pi_n^+(g)v)_{\mathcal{H}} (\pi_n^+(g)w, w)_{\mathcal{H}} dg \quad (4.8)$$

Questa formula può essere semplificata in quanto dalle relazioni di ortogonalità (4.7) derivano altre relazioni di ortogonalità per gli operatori

$$C(\gamma) = e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)}$$

con $\gamma \in \mathbb{C}$, che, come vedremo definiscono il *quorum* associato alla rappresentazione π_n^+ .

Nell'ipotesi che lo spazio degli stati \mathcal{H} supporti una rappresentazione irriducibile della serie discreta, è sempre possibile scegliere una base ortonormale in \mathcal{H} formata da autovettori dell'operatore $\pi_n^+(\hat{k})$. Introduciamo allora una tale base:

$$\{v_j \in \mathcal{H} : j = 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{base in } \mathcal{H} \quad (4.9)$$

in modo tale che:

$$\pi_n^+(\hat{k})v_j = (n + 2j)v_j$$

Si ha allora la seguente:

Proposizione 4.2.1. *Per ogni $n \geq 2$ sono valide le seguenti relazioni di ortogonalità:*

$$d_n \int_{\mathfrak{p}} dX J(X)(v_m, \pi_n^+(e^X)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(e^X)v_l, v_k)_{\mathcal{H}} = \delta_{mk}\delta_{lj} \quad (4.10)$$

dove v_m, v_j, v_l, v_k sono elementi della base (4.9) di \mathcal{H} e \mathfrak{p} è il sottospazio (4.2) dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ introdotto nel paragrafo precedente.

Dimostrazione. Scriviamo le relazioni di ortogonalità (4.7) per gli elementi della base (4.9) dello spazio degli stati:

$$d_n \int_{SL(2, \mathbb{R})} (v_m, \pi_n^+(g)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(g)v_l, v_k)_{\mathcal{H}} dg = (v_m, v_k)_{\mathcal{H}}(v_l, v_j)_{\mathcal{H}} = \delta_{mk}\delta_{lj}$$

Il primo membro di questa uguaglianza si può riscrivere usando la formula integrale (4.5), cioè facendo uso della decomposizione di Cartan di $SL(2, \mathbb{R})$:

$$d_n \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathfrak{p}} dX J(X)(v_m, \pi_n^+(e^{i\theta\hat{k}})\pi_n^+(e^X)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(e^{i\theta\hat{k}})\pi_n^+(e^X)v_l, v_k)_{\mathcal{H}}$$

Ancora, si ha:

$$\begin{aligned} & d_n \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathfrak{p}} dX J(X) \\ & (\pi_n^+(e^{-i\theta\hat{k}})v_m, \pi_n^+(e^X)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(e^X)v_l, \pi_n^+(e^{-i\theta\hat{k}})v_k)_{\mathcal{H}} = \\ = & d_n \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathfrak{p}} dX J(X) e^{i\theta(n+2m)} e^{-i\theta(n+2k)} \\ & (v_m, \pi_n^+(e^X)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(e^X)v_l, v_k)_{\mathcal{H}} = \\ = & d_n \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathfrak{p}} dX J(X) e^{2i\theta(m-k)} (v_m, \pi_n^+(e^X)v_j)_{\mathcal{H}}(\pi_n^+(e^X)v_l, v_k)_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Dal momento che lo jacobiano J non dipende dall'angolo θ si può effettuare l'integrazione in $d\theta$, ottenendo così le relazioni di ortogonalità (4.10):

$$d_n \int_{\mathfrak{p}} dX J(X) (v_m, \pi_n^+(e^X) v_j)_{\mathcal{H}} (\pi_n^+(e^X) v_l, v_k)_{\mathcal{H}} = \delta_{mk} \delta_{lj} \quad \square$$

Riscriviamo le relazioni di ortogonalità (4.10) tramite la formula integrale (4.6):

$$d_n \int_{\mathbb{C}} d\gamma J(\gamma) (v_m, e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} v_j)_{\mathcal{H}} (e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} v_l, v_k)_{\mathcal{H}} = \delta_{mk} \delta_{lj} \quad (4.11)$$

Gli operatori $\pi_n^+(n^+)$ e $\pi_n^+(n^-)$ hanno la seguente proprietà:

$$(\pi_n^+(n^+))^* = -\pi_n^+(n^-)$$

dove con l'asterisco si indica l'aggiunto di un operatore. Questo deriva dal fatto che gli operatori $\pi_n^+(e^+)$, $\pi_n^+(e^-)$, $\pi_n^+(h)$ sono formalmente antiautoaggiunti, dato che la rappresentazione π_n^+ è unitaria. Segue allora che gli operatori $C(\gamma) = e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)}$ sono unitari:

$$C(\gamma)^{-1} = C(\gamma)^*$$

Questo permette di riscrivere le relazioni (4.11) come:

$$d_n \int_{\mathbb{C}} d\gamma J(\gamma) (v_m, e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} v_j)_{\mathcal{H}} (v_l, e^{-\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) - \gamma\pi_n^+(n^+)} v_k)_{\mathcal{H}} = \delta_{mk} \delta_{lj}$$

Con le identificazioni

$$\begin{aligned} K_+ &= n^+ \\ K_- &= -n^- \end{aligned}$$

queste sono esattamente le relazioni di ortogonalità che vengono derivate, per altra via, nell'articolo [8]. Usando le relazioni di ortogonalità (4.11) si ha allora la seguente formula di ricostruzione per gli elementi di matrice del proiettore $P[w]$:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = d_n \int_{\mathbb{C}} d\gamma J(\gamma) (u, e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} v)_{\mathcal{H}} (e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} w, w)_{\mathcal{H}} \quad (4.12)$$

Anche questa è esattamente la stessa formula di ricostruzione che viene ricavata in [8], scritta nel caso particolare degli elementi di matrice dell'operatore statistico di uno stato puro.

L'identità (4.12) potrebbe essere usata direttamente per ricostruire lo stato di un sistema il cui spazio degli stati sia \mathcal{H} , misurando le osservabili

associate agli operatori hermitiani $\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)$, che formano il *quorum* definito dalla rappresentazione π_n^+ . Per i sistemi fisici concreti per cui si può usare la formula di ricostruzione basata sulle rappresentazioni della serie discreta del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, di cui due esempi verranno trattati nel prossimo paragrafo, un apparato sperimentale che misuri una tale osservabile non è però realizzabile. Ciò, che in questi casi, è direttamente misurabile invece è l'osservabile associata all'operatore $\pi_n^+(\vec{k})$. Mostriamo allora come è possibile rielaborare l'identità (4.12) in modo da renderla in una forma che richieda la misura dell'osservabile $\pi_n^+(\vec{k})$ e non delle $\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)$.

Introduco gli elementi n_x, n_y dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tali che:

$$\begin{aligned} n^+ &= n_x + in_y \\ n^- &= -n_x + in_y \end{aligned}$$

Se denotiamo con $\vec{N} = (n_x, n_y, \vec{k}/2)$ e con $\vec{v} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ si può dimostrare la seguente relazione:

$$\exp[2i(bn_x + an_y)](-1)^{\vec{k}/2} = \exp(-ir\vec{v} \cdot \vec{N})(-1)^{\vec{k}/2} \exp(ir\vec{v} \cdot \vec{N}) \quad (4.13)$$

per ogni numero complesso $z = a + ib = re^{i(\pi - \varphi)}$. Questa identità si verifica tramite la serie di Baker-Campbell-Hausdorff, dato che gli elementi n_x, n_y, \vec{k} non commutano tra loro, ma hanno le seguenti regole di commutazione:

$$[\vec{k}, n_x] = 2in_y, \quad [\vec{k}, n_y] = -2in_x, \quad [n_x, n_y] = -\frac{i}{2}\vec{k}$$

Gli operatori $C(\gamma) = e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)}$ possono essere scritti nella forma del primo membro dell'identità (4.13). Infatti indicando con $\gamma = \bar{z} = a - ib = re^{i(\varphi - \pi)}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} C(\gamma) &= e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} = \\ &= e^{(a+ib)[\pi_n^+(n_x) + i\pi_n^+(n_y)] + (a-ib)[-\pi_n^+(n_x) + i\pi_n^+(n_y)]} = \\ &= e^{2i[b\pi_n^+(n_x) + a\pi_n^+(n_y)]} \end{aligned}$$

Dato che π_n^+ è una rappresentazione risulta:

$$\begin{aligned} C(\gamma)(-1)^{\pi_n^+(\vec{k})/2} &= e^{-ir(\sin \varphi \pi_n^+(n_x) - \cos \varphi \pi_n^+(n_y))}(-1)^{\pi_n^+(\vec{k})/2} \\ &= e^{ir(\sin \varphi \pi_n^+(n_x) - \cos \varphi \pi_n^+(n_y))} = \\ &= e^{-ir\vec{v} \cdot \pi_n^+(\vec{N})}(-1)^{\pi_n^+(\vec{k})/2} e^{ir\vec{v} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} \end{aligned}$$

È immediato verificare che le relazioni di ortogonalità (4.11) valgono ugualmente se agli operatori $C(\gamma)$ si sostituiscono gli operatori:

$$C'(\gamma) = C(\gamma)(-1)^{\pi_n^+(\vec{k})/2}$$

Allora la formula di ricostruzione (4.12) può essere scritta sostituendo ai $C(\gamma)$ i nuovi operatori $C'(\gamma)$; in questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned}
& (u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = \\
& = d_n \int_{\mathbb{C}} d\gamma J(\gamma)(u, e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad (e^{\bar{\gamma}\pi_n^+(n^+) + \gamma\pi_n^+(n^+)} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} w, w)_{\mathcal{H}} = \\
& = d_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr J(r)(u, e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad (e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w, w)_{\mathcal{H}} = \\
& = d_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr J(r)(u, e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad ((-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w, e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w)_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

dove l'ultima identità segue dall'unitarietà dell'operatore $e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})}$. Sviluppando ora il vettore $e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w$ sulla base ortonormale di autovettori di $\pi_n^+(\mathbb{k})$ dello spazio degli stati \mathcal{H} , già introdotta (4.9):

$$\begin{aligned}
e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w & = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j v_j = \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} (v_j, e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w)_{\mathcal{H}} v_j
\end{aligned}$$

Allora, se la rappresentazione π_n^+ è tale che si possono scambiare i segni di integrazione e la somma, in particolare π_n^+ deve essere integrabile, si ottiene:

$$\begin{aligned}
& (u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = \\
& = d_n \sum_{j,l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr J(r)(u, e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad ((-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} v_j, v_l)_{\mathcal{H}} \bar{\alpha}_j \alpha_l = \\
& = d_n \sum_{j,l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr J(r)(u, e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad (v_j, v_l)_{\mathcal{H}} \bar{\alpha}_j \alpha_l (-1)^{(n+2j)/2} = \\
& = d_n \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr J(r)(u, e^{-ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} (-1)^{\pi_n^+(\mathbb{k})/2} e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} v)_{\mathcal{H}} \\
& \quad \left| (v_j, e^{ir\vec{\nu} \cdot \pi_n^+(\vec{N})} w)_{\mathcal{H}} \right|^2 (-1)^{(n+2j)/2} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

La (4.14) è la formula di ricostruzione implementabile sperimentalmente, in quanto la quantità:

$$\left| (v_j, e^{ir\vec{v}\cdot\pi_n^+(\vec{N})} w)_{\mathcal{H}} \right|^2$$

può essere misurata. Notiamo che essa dipende dallo stato incognito w ed è la probabilità di ottenere il valore $(n+2j)$ misurando l'osservabile $\pi_n^+(\vec{k})$ se il sistema si trova nello stato incognito w evoluto tramite l'operatore unitario:

$$U(r, \varphi) = e^{ir\vec{v}\cdot\pi_n^+(\vec{N})} = e^{ir(\sin\varphi\pi_n^+(n_x) - \cos\varphi\pi_n^+(n_y))}$$

L'operatore di evoluzione $U(r, \varphi)$ può essere riscritto tramite gli operatori $\pi_n^+(n^+)$ e $\pi_n^+(n^-)$:

$$U(r, \varphi) = e^{-(r/2)(e^{-i\varphi}\pi_n^+(n^+) + e^{i\varphi}\pi_n^+(n^-))}$$

4.3 Schemi di applicazione

Presentiamo due esempi di sistemi fisici per cui può essere usata la formula di ricostruzione (4.14), basata sulle rappresentazioni della serie discreta di $SL(2, \mathbb{R})$.

4.3.1 Campo elettromagnetico con un'unica frequenza

Lo spazio degli stati di fotoni con una sola frequenza è $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^{(1)}$. Sia a l'operatore di distruzione dei fotoni; definiamo i seguenti operatori su $\mathcal{H}^{(1)}$:

$$\omega(n^+) = \frac{1}{2}(a^*)^2 \quad \omega(n^-) = -(\omega(n^+))^* \quad \omega(\vec{k}) = a^*a + \frac{1}{2}$$

Le regole di commutazione di questi operatori¹ sono le stesse di quelle della base standard $\{\vec{k}, n^+, n^-\}$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} [\omega(\vec{k}), \omega(n^+)] &= 2\omega(n^+) \\ [\omega(\vec{k}), \omega(n^-)] &= -2\omega(n^-) \\ [\omega(n^+), \omega(n^-)] &= \omega(\vec{k}) \end{aligned}$$

Essi generano la rappresentazione metaplettica ω del ricoprimento doppio di $SL(2, \mathbb{R})$, che abbiamo descritto nel terzo capitolo. La rappresentazione ω è decomponibile nella somma diretta di due rappresentazioni unitarie

¹Ricordiamo che le regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione sono:

$$[a, a^*] = 1$$

irriducibili di $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$ appartenenti alla serie discreta:

$$\omega \simeq \pi_{\frac{1}{2}}^+ \oplus \pi_{\frac{3}{2}}^+$$

I sottospazi di $L^2(\mathbb{R})$ che supportano le due rappresentazioni sono il sottospazio delle funzioni pari di $L^2(\mathbb{R})$ per la $\pi_{\frac{1}{2}}^+$ e il sottospazio delle funzioni dispari di $L^2(\mathbb{R})$ per la $\pi_{\frac{3}{2}}^+$. Solo la rappresentazione $\pi_{\frac{3}{2}}^+$ è a quadrato integrabile e integrabile, quindi solo stati puri w dei fotoni che hanno funzione d'onda dispari possono essere ricostruiti tramite la formula (4.14). Il fatto che la rappresentazione ω sia una rappresentazione di $\widetilde{SL}^2(2, \mathbb{R})$ e quindi solo una rappresentazione proiettiva del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ non impedisce di poter utilizzare la formula di ricostruzione.

In questo schema l'operatore $\pi_n^+(\vec{k}) = a^*a + 1/2$ corrisponde all'osservabile "numero totale di fotoni" e può quindi essere misurata tramite un fotorivelatore. L'operatore $U(r, \varphi)$ è:

$$U(r, \varphi) = \exp \left[-\frac{r}{4} (e^{-i\varphi} (a^*)^2 - e^{i\varphi} a^2) \right]$$

Esso descrive una amplificazione parametrica degenera, dove r e φ sono l'ampiezza e la fase di squeezing.

4.3.2 Campo elettromagnetico con due frequenze

Lo spazio degli stati di fotoni con due frequenze è $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{H}^{(2)}$. Siano a e b gli operatori di distruzione dei fotoni nei due diversi modi; definiamo i seguenti operatori su $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$\omega^2(n^+) = a^*b^* \quad \omega^2(n^-) = -(\omega^2(n^+))^* \quad \omega^2(\vec{k}) = a^*a + b^*b + 1$$

Questi operatori hanno le stesse regole di commutazione² della base standard $\{\vec{k}, n^+, n^-\}$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} [\omega^2(\vec{k}), \omega^2(n^+)] &= 2\omega^2(n^+) \\ [\omega^2(\vec{k}), \omega^2(n^-)] &= -2\omega^2(n^-) \\ [\omega^2(n^+), \omega^2(n^-)] &= \omega^2(\vec{k}) \end{aligned}$$

Essi generano la rappresentazione ω^2 del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, che abbiamo descritto nel terzo capitolo. Come abbiamo mostrato la rappresentazione ω^2

²Ricordiamo che le regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione di due modi diversi sono:

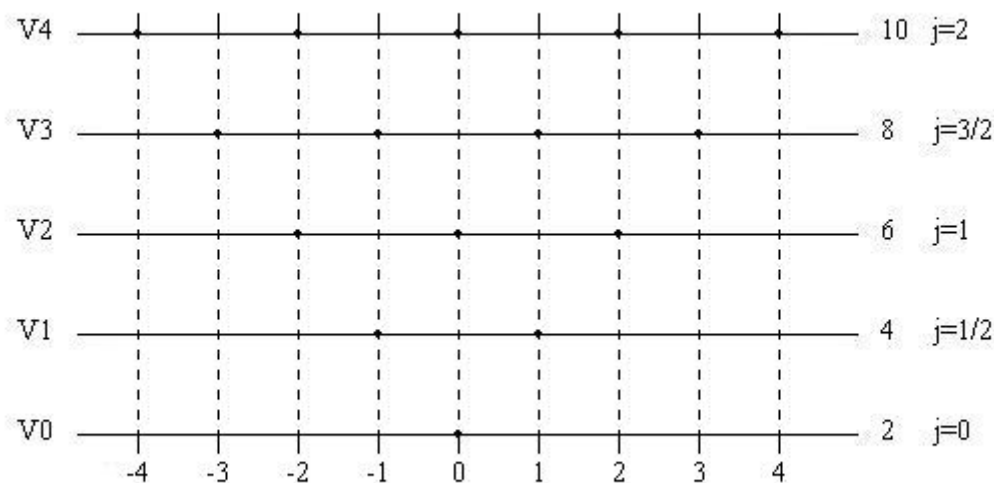
$$[a, a^*] = 1 \quad [b, b^*] = 1$$

mentre tutti gli altri commutatori sono nulli.

è decomponibile in somma diretta di rappresentazioni unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{R})$, tutte appartenenti alla serie discreta (3.2.2):

$$\omega^2 \simeq \cdots \oplus \pi_3^+ \oplus \pi_2^+ \oplus \pi_1^+ \oplus \pi_2^+ \oplus \pi_3^+ \cdots$$

I sottospazi di $L^2(\mathbb{R})$ che supportano la rappresentazione π_n^+ sono i sottospazi H_k , descritti in (3.4), tali che $|k| + 1 = n$. Come abbiamo visto, essi sono rappresentati dentro lo spazio di Bargmann-Fok $\mathcal{H}^{(2)}$ dalle righe verticali dello schema Dato che la rappresentazione limite della serie discreta π_1^+



non è a quadrato integrabile né integrabile e che la rappresentazione π_2^+ non è integrabile, la formula di ricostruzione (4.14) può essere usata per determinare gli stati puri w del sistema di fotoni con due frequenze che appartengono ai sottospazi

$$H_k \quad : \quad |k| = 2, 3, 4, \dots$$

In questo schema l'operatore $\pi_n^+(\vec{k}) = a^*a + b^*b + 1$ corrisponde all'osservabile "numero totale di fotoni" con entrambe le frequenze possibili. Questa osservabile può essere misurata tramite due fotorivelatori. L'operatore $U(r, \varphi)$ è invece:

$$U(r, \varphi) = \exp \left[-\frac{r}{2} (e^{-i\varphi} a^* b^* - e^{i\varphi} b a) \right]$$

Esso descrive una amplificazione parametrica non degenera, dove r e φ sono l'ampiezza e la fase di squeezing.

Appendice A

Appendice

Nel paragrafo 1.2 abbiamo visto come le relazioni di ortogonalità di una rappresentazione unitaria, irriducibile, a quadrato integrabile di un gruppo unimodulare \mathcal{G} , agente sullo spazio \mathcal{H} degli stati del sistema quantistico, permettono di scrivere gli elementi di matrice dell'operatore di proiezione $P[w]$, che rappresenta lo stato incognito del sistema, nella forma:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = dU \int_{\mathcal{G}} (u, U(g)v)_{\mathcal{H}} (U(g)w, w)_{\mathcal{H}} dg$$

Vediamo come si può eseguire l'integrazione su \mathcal{G} passando ad un integrale sull'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathcal{G} .

Indichiamo con $n+1$ la dimensione dello spazio vettoriale (reale) \mathfrak{g} e con dx una misura di Lebesgue su \mathfrak{g} . Supponiamo che:

Ipotesi A.0.1. Esiste un aperto O in \mathfrak{g} tale che:

1. $\exp(O)$ è aperto in \mathcal{G} ;
2. $\mathcal{G} - \exp(O)$ è un sottoinsieme di misura nulla rispetto a dg ;
3. $\exp : O \rightarrow \exp(O)$ è un diffeomorfismo;
4. $(d\exp)_x$ è invertibile (bijettivo) per ogni $x \in O$.

dove \exp è la mappa esponenziale da \mathfrak{g} a \mathcal{G} e $(d\exp)_x$ è il differenziale della mappa esponenziale nel punto x .

Conseguenza della precedente ipotesi è che la quantità:

$$J(x)dx = |\det(d\exp)_x| dx$$

è una misura di Borel su O , la cui misura immagine secondo la mappa esponenziale è proporzionale alla misura di Haar dg su \mathcal{G} , a meno di insiemi

dg -trascurabili.

Per il teorema della misura immagine si ha allora che una funzione f dg -misurabile su \mathcal{G} è integrabile su \mathcal{G} se e solo se la funzione $\chi_O \cdot f \cdot \exp$ è integrabile su \mathfrak{g} rispetto alla misura $J(x)dx$:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, dg) \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_O \cdot f \cdot \exp) \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{g}, J(x)dx)$$

Per tali funzioni si ha che:

$$\int_{\mathcal{G}} f(g)dg = k \int_O f(\exp x)J(x)dx$$

La costante k dipende dalla scelta della costante moltiplicativa della misura di Haar dg su \mathcal{G} . Si conviene di scegliere dg in maniera che k sia 1.

Gli elementi di matrice del proiettore $P[w]$ si scrivono quindi:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = d_U \int_O (u, U(\exp x)v)_{\mathcal{H}} (U(\exp x)w, w)_{\mathcal{H}} J(x)dx$$

Notiamo che avendo fissato la costante moltiplicativa della misura di Haar dg in modo che k sia 1 il grado formale d_U della rappresentazione rimane fissato.

Supponiamo ora che la “forma” di O in \mathfrak{g} sia tale che l’integrale su O possa essere calcolato utilizzando coordinate polari in \mathfrak{g} . Denotiamo con S^n la sfera unitaria in \mathbb{R}^{n+1} :

$$S^n = \{\omega \in \mathbb{R}^{n+1} : |\omega| = 1\}$$

in cui $|\omega|$ denota la norma euclidea naturale di \mathbb{R}^{n+1} . Consideriamo la bijezione insiemistica:

$$(\omega, t) \mapsto t\omega : S^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

Esiste una costante positiva $C_n > 0$ tale che la misura di Lebesgue dx su $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ si trasporta, nell’isomorfismo precedente, alla misura:

$$C_n t^n dt d\Omega(\omega)$$

su $S^n \times \mathbb{R}_+^*$. Questa misura non è altro che la misura di Lebesgue su S^{n+1} “scritta in coordinate polari”. La misura Ω su S^n è normalizzata ad 1, ed è l’unica misura su S^n invariante rispetto all’azione naturale di $SO(n+1)$ su S^n , che sia normalizzata ad 1.

Se supponiamo che O possa essere descritto come:

$$O = \{(\omega, t) \in S^n \times \mathbb{R}_+^* : 0 < t < a\}$$

in cui a può essere eventualmente $+\infty$, avremo:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = d_U C_n \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_0^a dt t^n J(t\omega) \\ (u, U(\exp t\omega)v)_{\mathcal{H}} (U(\exp t\omega)w, w)_{\mathcal{H}}$$

Per ogni fissato $\omega \in S^n$, l'applicazione:

$$t \mapsto U(\exp(t\omega)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

è una rappresentazione proiettiva di \mathbb{R} . Dal momento che tutti i moltiplicatori di \mathbb{R} sono esatti, esistono:

- un operatore autoaggiunto A_ω
- una funzione di Borel $\varphi_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

tali che:

$$U(\exp t\omega) = \varphi_\omega(t) e^{itA_\omega} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si ha quindi:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = d_U C_n \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_0^a dt t^n J(t\omega) \\ \varphi_\omega(t) \overline{\varphi_\omega(t)} (u, e^{itA_\omega} v)_{\mathcal{H}} (e^{itA_\omega} w, w)_{\mathcal{H}} = \\ = d_U C_n \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_0^a dt t^n J(t\omega) \\ (u, e^{itA_\omega} v)_{\mathcal{H}} (e^{itA_\omega} w, w)_{\mathcal{H}}$$

L'insieme degli operatori autoaggiunti:

$$\{A_\omega : \omega \in S^n\}$$

indicizzato dallo spazio di probabilità:

$$(S^n, \Omega)$$

costituisce il *quorum* definito dalla rappresentazione U ed è la costruzione centrale dell'approccio alla Tomografia Quantistica tramite la teoria dei gruppi. Notiamo che gli operatori A_ω sono definiti a meno di una costante additiva.

Dal momento che ogni operatore A_ω , $\omega \in S^n$, è autoaggiunto, il teorema spettrale ci assicura che, per ogni stato del sistema $P[w]$, esiste una misura di probabilità α_w^ω su \mathbb{R} tale che:

$$(e^{itA_\omega} w, w)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\alpha_w^\omega(\lambda)$$

La misura α_w^ω è la distribuzione di probabilità dei valori di A_ω nello stato puro $P[w]$ ed è data da:

$$\alpha_w^\omega(\cdot) = (w, P^\omega(\cdot)w)_\mathcal{H}$$

dove $P^\omega(\cdot)$ è la PVM spettrale dell'operatore A_ω .
Usando questa equazione otteniamo:

$$(u, P[w]v)_\mathcal{H} = \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_0^a dt \int_{\mathbb{R}} d\alpha_w^\omega(\lambda) t^n J(t\omega)(u, e^{itA_\omega}v)_\mathcal{H} e^{it\lambda}$$

Avremmo ottenuto una formula di ricostruzione per $P[w]$ del tipo (1.1) se fosse possibile scambiare tra di loro le integrazioni in dt e in $d\alpha_w^\omega$. A questo scopo è necessaria un'ipotesi aggiuntiva:

Ipotesi A.0.2. La rappresentazione (U, \mathcal{H}) di \mathcal{G} è una rappresentazione integrabile. Questo significa che esiste una coppia di vettori $u, v \in \mathcal{H}$ tali che:

$$(g \mapsto |(U(g)u, v)_\mathcal{H}|) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, dg) \quad (\text{A.1})$$

Ricordiamo che l'esistenza di una coppia di vettori u, v in \mathcal{H} per cui vale la (A.1) non implica la validità della stessa per ogni coppia di vettori in \mathcal{H} . Lo scambio delle due integrazioni allora potrà essere eseguito in generale solo per quelle coppie che soddisfano la (A.1).

Mostriamo come l'ipotesi (A.0.2) permette lo scambio delle integrazioni in dt e in $d\alpha_w^\omega$. Se $u, v \in \mathcal{H}$ sono una coppia di vettori che soddisfa l'ipotesi (A.0.2) allora:

$$(g \mapsto |(u, U(g)v)_\mathcal{H}|) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, dg)$$

Per il teorema della funzione immagine:

$$(x \mapsto |(u, U(\exp x)v)_\mathcal{H}| J(x)) \in \mathcal{L}^1(O, dx)$$

ed anche, usando coordinate polari in O :

$$((\omega, t) \mapsto |(u, U(\exp t\omega)v)_\mathcal{H}| J(t\omega)t^n) \in \mathcal{L}^1(S^n \times]0, a[, d\Omega \otimes dt)$$

Notiamo che:

$$|(u, U(\exp t\omega)v)_\mathcal{H}| = |(u, e^{itA_\omega}v)_\mathcal{H}|$$

Il teorema di Fubini assicura che, per Ω -quasi ogni $\omega \in S^n$, la funzione:

$$t \mapsto |(u, e^{itA_\omega}v)_\mathcal{H}| J(t\omega)t^n$$

sta in $\mathcal{L}^1(]0, a[, dt)$. È quindi immediata conseguenza del teorema di Tonelli che la funzione:

$$(t, \lambda) \mapsto (u, e^{itA_\omega} v)_{\mathcal{H}} J(t\omega) t^n e^{it\lambda}$$

è integrabile su $]0, a[\times \mathbb{R}$ rispetto alla misura prodotto $dt \otimes d\alpha_w^\omega$. Ancora per il teorema di Fubini si possono scambiare le integrazioni in dt e $d\alpha_w^\omega$. Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} (u, P[w]v)_{\mathcal{H}} &= d_U C_n \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_{\mathbb{R}} d\alpha_w^\omega(\lambda) \\ &\int_0^a dt t^n J(t\omega) (u, e^{itA_\omega} v)_{\mathcal{H}} e^{it\lambda} \end{aligned}$$

La formula precedente costituisce il risultato centrale della Tomografia Quantistica ed è la realizzazione concreta dello schema presentato nel paragrafo 1.1. Si pone ovviamente:

$$f_{u,v}^\omega(\lambda) = d_U C_n \int_0^a dt t^n J(t\omega) (u, e^{itA_\omega} v)_{\mathcal{H}} e^{it\lambda}$$

e si ottiene:

$$(u, P[w]v)_{\mathcal{H}} = \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_{\mathbb{R}} d\alpha_w^\omega(\lambda) f_{u,v}^\omega(\lambda)$$

La funzione $f_{u,v}^\omega(\lambda)$ può essere calcolata esplicitamente e la distribuzione $\alpha_w^\omega(\lambda)$ è determinabile sperimentalmente.

Nel caso generale di uno stato misto T la formula precedente si modifica in:

$$(u, Tv)_{\mathcal{H}} = \int_{S^n} d\Omega(\omega) \int_{\mathbb{R}} d\alpha_T^\omega(\lambda) f_{u,v}^\omega(\lambda)$$

in cui la misura di probabilità data dal teorema spettrale è:

$$\alpha_T^\omega(\lambda) = Tr(P^\omega(\lambda)T)$$

Bibliografia

- [1] S.T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*, Springer, New York, 2000.
- [2] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. Math.* 48, 1947, 568-640.
- [3] A. Borel, *Représentation de Groupes Localment Compacts*, Lect. Notes Math, 276, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [4] G. Cassinelli, G. M. D'Ariano, E. De Vito, A. Levrero, *J. Math. Phys.* 41, 7940, 2000.
- [5] G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, M. F. Sacchi, Quantum Tomographic Methods, in *Quantum State Estimation*, Lect. Notes Phys., Springer, Berlin, 2004.
- [6] G. M. D'Ariano, In *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, ed da O. Hirota, A. S. Holevo, C. M. Caves, Plenum Publishing, New York and London, 1997, p. 253.
- [7] G. M. D'Ariano, P. Kumar, M. F. Sacchi, *Phys. Rev. A* 61, 013806, 2000.
- [8] G. M. D'Ariano, E. De Vito, L. Maccone, Quantum tomography through parametric amplification, *Phys. Rev. A* 64, 033805, 2001.
- [9] M. Duflo, C. C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, *J. Funct. Anal.* 21, 1976, 209-243.
- [10] T. J. Dunn, I. A. Walmsley, S. Mukamel, *Phys. Rev. Lett.* 74, 884, 1995.
- [11] U. Fano, *Rev. Mod Phys.* 29, 74, Sec. 6, 1957.
- [12] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.

- [13] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: an Elementary Introduction*, Springer, New York, 2003.
- [14] W. Heisenberg, *The physical principle of Quantum Theory*, Univ. Chicago Press, Dover, NY, 1930.
- [15] R. Howe, E.C. Tan, *Non-Abelian Harmonic Analysis: applications of $SL(2, \mathbb{R})$* , Springer-Verlag, New York, 1992.
- [16] R.E. Howe, The Oscillator semigroup, Amer. Math. Soc., Proc. Symp. Pure Math. 48, 1988, 61-132.
- [17] U. Janicke, M. Wilkens, J. Mod. Opt. 42, 2183, 1995.
- [18] A. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups. An overview based on examples*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.
- [19] C. Kurtsiefer, T. Pfau, J. Mlynek, Nature 386, 150, 1997.
- [20] S. Lang, *$SL_2(\mathbb{R})$* , Addison-Wesley, Reading, MA, 1975.
- [21] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, D.J. Wineland, Phys. Rev. Lett. 77, 4281, 1996.
- [22] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, in *Handbuch der Physik*, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1958, p. 17.
- [23] M. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematics Surveys and Monographs, No. 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [24] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.
- [25] D.Shale, Linear symmetries of free bosons fields, Trans. Amer. Math. Soc. 103, 1962, 149-167.
- [26] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, Phys. Rev. Lett. 70, 1244, 1993.
- [27] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111, 1964, 143-211.