

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica



Rappresentazioni unitarie di supergruppi di Lie compatti in superspazi di Hilbert

Relatore:
Prof. Gianni Cassinelli

Correlatore:
Prof. Alberto Blasi

Candidato:
Luigi Balduzzi

Anno Accademico 2004–2005

Vorrei ringraziare per l'aiuto e il sostegno ricevuto il mio relatore, i miei amici, la mia famiglia. Un ringraziamento particolare va a Claudio e Alessandro per il molto tempo che mi hanno dedicato in questi mesi: le loro idee e consigli hanno reso possibile questo lavoro.

Indice

Indice	1
Introduzione	3
1 Superalgebra e supergeometria	9
1.1 Superspazi vettoriali e superspazi di Hilbert	9
1.2 Superalgebre associative	12
1.3 Superalgebre di Lie	14
1.4 Supervarietà	15
1.5 Topologia del fascio	30
2 Supergruppi di Lie	43
2.1 Definizione	43
2.2 Il lemma di Yoneda	46
2.3 Il funtore dei punti	50
2.4 Azione del gruppo ridotto	54
2.5 Superalgebra di Lie di un supergruppo di Lie	56
3 Super coppie di Harish-Chandra	63
3.1 Definizione	63
3.2 La super coppia associata a un supergruppo	65
3.3 Azione di un supergruppo di Lie	69
4 Rappresentazioni di supergruppi di Lie	73
4.1 Definizione	73
4.2 Il caso dei supergruppi di Lie compatti	79
4.3 Il problema della rappresentazione regolare	83
Conclusioni	89
Appendice A Rappresentazioni unitarie di gruppi compatti	91
Bibliografia	93

Introduzione

All'inizio degli anni '70 vennero introdotte in fisica le prime teorie supersimmetriche come una possibile via per rendere compatibili meccanica quantistica e relatività generale. Sebbene allo stato attuale tali teorie non siano supportate da dati sperimentali, i risultati positivi ottenuti sia nella teoria dei campi che delle stringhe fanno delle supersimmetrie uno dei più promettenti filoni di ricerca della fisica moderna. Le simmetrie giocano un ruolo cruciale in tutta la fisica, sia classica che quantistica. In particolare in meccanica quantistica relativistica le simmetrie definiscono le proprietà dei sistemi fisici considerati. Le simmetrie solitamente contemplate non mischiano mai fermioni e bosoni: tale possibilità è espressamente vietata da un teorema dovuto a Coleman e Mandula [4]. Le teorie supersimmetriche prevedono invece il superamento di questa limitazione e pertanto devono basarsi su un nuovo formalismo matematico. Con i supergruppi di Lie si è cercato in particolare di dare il giusto strumento per descrivere una supersimmetria.

In modo analogo a quanto avviene classicamente, ad ogni supergruppo di Lie è associata una superalgebra di Lie. Una superalgebra di Lie è un'algebra la cui legge di composizione soddisfa certe relazioni: pur non essendo un'algebra di Lie, si tratta comunque di un'oggetto algebrico classico. È quindi chiaro cosa si debba intendere per rappresentazione di una superalgebra e lo studio di queste rappresentazioni non presenta eccessivi problemi, tanto da costituire una teoria oggi piuttosto sviluppata. Un discorso completamente diverso riguarda i supergruppi di Lie. Infatti un supergruppo di Lie non è né un gruppo né una varietà differenziabile. Addirittura non si tratta neppure di un insieme (in un senso che chiariremo). La stessa definizione di rappresentazione di un supergruppo di Lie non è a priori ovvia e lo studio di tali oggetti è ancora agli inizi. Sebbene le teorie fisiche si concentrino principalmente sulle rappresentazioni delle superalgebre, lo sviluppo di una solida teoria delle rappresentazioni dei supergruppi di Lie sarebbe auspicabile. Nulla infatti assicura che ciò che funziona a livello infinitesimo si estenda senza problemi a livello di gruppo. Lavorare a livello di gruppo fornisce inoltre il giusto strumento nei casi in cui, a livello di algebra, si ha a che fare con operatori non limitati.

Una strada promettente in questa direzione è costituita dallo studio delle super coppie di Harish-Chandra. Una super coppia di Harish-Chandra

è composta da un gruppo di Lie classico e da una superalgebra di Lie su cui è definita un'opportuna azione del gruppo. Si può dimostrare che i supergruppi di Lie e le super coppie di Harish-Chandra sono (a meno di isomorfismi) in corrispondenza biunivoca, così come i morfismi nelle rispettive categorie. In altre parole la definizione di super coppia è equivalente alla definizione di supergruppo che usualmente viene data. Si può dunque considerare un supergruppo G , a cui è associata una super coppia (G_0, \mathfrak{g}) , e dire che una rappresentazione di G è costituita da una rappresentazione del gruppo G_0 e una rappresentazione della superalgebra \mathfrak{g} , opportunamente legate. La rappresentazione di un supergruppo si riduce cioè alla rappresentazione di due oggetti classici. Questo approccio ha portato a interessanti risultati nello studio delle rappresentazioni indotte e delle rappresentazioni del supergruppo di Poincaré [3].

Un caso particolarmente semplice e ben noto all'interno della teoria delle rappresentazioni dei gruppi classici è costituito, almeno nei suoi aspetti più elementari, dallo studio delle rappresentazioni unitarie di gruppi compatti. In appendice sono riportati alcuni dei principali risultati in questo ambito. Scopo di questa tesi è stato quello di cercare di estendere alcuni di questi risultati al caso supergeometrico. In particolare ci si è dedicati alla ricerca delle sottorappresentazioni irriducibili di una rappresentazione unitaria di un supergruppo compatto, mostrando che, esattamente come nel caso classico, ogni rappresentazione unitaria di un supergruppo compatto è completamente decomponibile in sottorappresentazioni irriducibili finito-dimensionali. Successivamente abbiamo affrontato il problema di definire la rappresentazione regolare di un supergruppo nella prospettiva, in analogia con il caso classico, di legare le rappresentazioni irriducibili di un supergruppo compatto alle sottorappresentazioni della sua rappresentazione regolare. Nonostante la definizione data non sia ancora del tutto soddisfacente e lo studio delle proprietà di questa rappresentazione sia lontano dall'essere completato, sono stati raggiunti alcuni risultati positivi.



Vediamo ora brevemente il contenuto dei diversi capitoli. I primi tre capitoli contengono essenzialmente le premesse che permetteranno nell'ultimo capitolo di esporre il problema dello studio delle rappresentazioni unitarie dei supergruppi compatti e della definizione della rappresentazione regolare. Nei primi due capitoli, in particolare, si trovano le definizioni standard di supervarietà e supergruppo di Lie, mentre nel terzo capitolo si parla di super coppie di Harish-Chandra come modo alternativo di definire i supergruppi di Lie. Nel quarto capitolo, infine, si trovano i risultati ottenuti e i problemi irrisolti.

Primo capitolo. In questo capitolo introduciamo i principali oggetti matematici con cui avremo a che fare nel seguito. In particolare diamo una

definizione di superspazio vettoriale, superspazio di Hilbert, superalgebra associativa, superalgebra di Lie e supervarietà. Uno spazio vettoriale V diventa un superspazio nel momento in cui viene data una decomposizione $V = V_0 \oplus V_1$; gli elementi di V_0 sono detti *pari*, quelli di V_1 *dispari*. Il prefisso “super” indica proprio la presenza di questa decomposizione; si dice anche che V è \mathbb{Z}_2 -gradato. Tutte le superalgebre sono algebre \mathbb{Z}_2 -gradate e la loro legge di composizione è compatibile con la gradazione, cioè la composizione di due elementi della stessa parità è pari, mentre la composizione di due elementi di parità opposta è dispari. In particolare la legge di composizione di una superalgebra di Lie, indicata al solito con $[\cdot, \cdot]$, è antisimmetrica o simmetrica a seconda della parità dei fattori, cioè

$$[X, Y] = -(-1)^{p(X)p(Y)}[Y, X] \quad p(X) = \begin{cases} 0 & X \text{ pari} \\ 1 & X \text{ dispari} \end{cases}$$

Il discorso si complica parlando di supervarietà. Non si tratta infatti di una semplice estensione del concetto di varietà differenziabile, almeno secondo la definizione che comunemente viene data. Bisogna infatti partire dall’idea di *fascio*. Data un’usuale varietà differenziabile possiamo considerare la legge che associa ad ogni aperto della varietà, pensata come spazio topologico, l’algebra delle funzioni lisce⁽¹⁾ definite sull’aperto. Questa legge soddisfa certe proprietà che la rendono un *fascio di algebre*. Se sostituiamo queste algebre di funzioni con opportune superalgebre associative abbiamo una supervarietà. Gli elementi di queste superalgebre vengono detti *sezioni* e giocano un ruolo analogo a quello delle funzioni lisce per le varietà ordinarie. Intuitivamente una supervarietà può essere pensata come una varietà classica, detta *varietà ridotta*, circondata da una nuvola di “cose” dispari [7, 17]. Anche la definizione di morfismo tra due supervarietà presenta alcune difficoltà. Infatti non è sufficiente definire un morfismo sui punti della varietà ridotta, ma è necessario tener conto in qualche modo della “nuvola” dispari. Un morfismo tra varietà ordinarie figlia una nozione di pullback delle funzioni, un morfismo tra supervarietà viene invece dato direttamente in termine di pullback delle sezioni. Una supervarietà non è quindi pensabile come un insieme di punti e i morfismi tra supervarietà non sono usuali corrispondenze di elementi di insiemi.

Sebbene una supervarietà sia un oggetto piuttosto inusuale è possibile utilizzare un formalismo locale molto simile a quello della geometria differenziale ordinaria. Una supervarietà, con varietà ridotta di dimensione p , ha p coordinate pari x^1, \dots, x^p che commutano tra loro, cioè

$$x^i x^j = x^j x^i$$

⁽¹⁾Qui e nel seguito consideriamo varietà e supervarietà lisce reali. Un discorso analogo potrebbe essere fatto per varietà e supervarietà analitiche reali o complesse.

La “nuvola” dispari è invece dovuta alla presenza di altre q “coordinate” dispari che anticommutano tra loro, cioè q oggetti $\theta^1, \dots, \theta^q$ tali che

$$\theta^i \theta^j = -\theta^j \theta^i \qquad (\theta^i)^2 = 0$$

Si dice che una tale supervarietà ha dimensione $p|q$. Ciò che differenzia le supervarietà dai fibrati esterni è la possibilità che coordinate di parità diversa vengano mischiate al cambiare del sistema di riferimento.

Una sezione può essere scritta come “funzione” delle coordinate sia pari che dispari. Più precisamente una sezione avrà localmente la forma

$$s = s_0 + \sum_i s_i \theta^i + \sum_{j < k} s_{jk} \theta^j \theta^k + \dots$$

con s_0, s_i , ecc. funzioni lisce nelle x^1, \dots, x^p : le sezioni si scrivono in coordinate come polinomi nelle θ con coefficienti nelle funzioni lisce. Grazie a questo formalismo è possibile dar senso anche in un contesto supergeometrico a tutta una serie di concetti quali derivate parziali, campi vettoriali, spazi tangenti, integrali e così via. Si può inoltre introdurre una topologia nello spazio delle sezioni $\mathcal{O}(M)$ su una supervarietà M che lo renda uno spazio di Fréchet. Nell’ultimo paragrafo del capitolo esaminiamo più in dettaglio questo aspetto, dimostrando alcuni risultati ad esso legati che verranno successivamente utilizzati.

Secondo capitolo. All’inizio del capitolo diamo una definizione di supergruppo di Lie. Per far questo occorre dotare una supervarietà, in un qualche senso, di una struttura di gruppo. Chiaramente non si può far ciò definendo una moltiplicazione tra elementi della supervarietà, in quanto, come già più volte osservato, una supervarietà non è un insieme. Si possono però tradurre gli assiomi che definiscono un gruppo ordinario in termini di relazioni tra morfismi e definire moltiplicazione e inverso di un supergruppo G come due morfismi

$$m: G \times G \rightarrow G \qquad i: G \rightarrow G$$

che soddisfano certe proprietà analoghe alla moltiplicazione e all’inverso di un gruppo ordinario. La varietà ridotta associata a un supergruppo diviene a sua volta un gruppo di Lie e prende il nome di *gruppo ridotto*. Vediamo anche cosa si intenda per azione di un supergruppo di Lie su una supervarietà.

Nonostante un supergruppo di Lie non sia un gruppo, è possibile dar senso anche in questo contesto a una scrittura del tipo

$$m: G \times G \longrightarrow G \\ (x, y) \longmapsto xy$$

Per far questo occorre generalizzare il concetto di “punto” introducendo il *funtore dei punti* di una supervarietà. Questo metodo si basa su un’importante risultato della teoria delle categorie, il lemma di Yoneda, e costituisce un utile strumento per definire morfismi tra supervarietà o tra supergruppi o per dare struttura di supergruppo a una supervarietà.

Successivamente vediamo come, dato un supergruppo di Lie, si possa definire una rappresentazione naturale del suo gruppo ridotto nello spazio delle sezioni e, infine, come si possa estendere l’idea di campo vettoriale invariante a sinistra (destra) al caso dei supergruppi di Lie. Analogamente al caso classico, i campi vettoriali invarianti a sinistra (destra) costituiscono una superalgebra di Lie finito-dimensionale isomorfa allo spazio tangente all’identità. Anche in questo caso ad ogni morfismo tra supergruppi è associato un morfismo tra le rispettive superalgebre, detto *differenziale* del morfismo.

Terzo capitolo. Innanzitutto introduciamo la definizione di super coppia di Harish-Chandra che, come già detto, è costituita da un gruppo di Lie ordinario e da una superalgebra di Lie su cui è definita un’opportuna azione del gruppo. Consideriamo poi la coppia formata dal gruppo ridotto e dalla superalgebra di un supergruppo di Lie fissato e mostriamo esplicitamente come questa costituisca una super coppia di Harish-Chandra. Per far questo definiamo un’azione del gruppo ridotto sulla superalgebra, sostanzialmente analoga all’azione aggiunta di un gruppo di Lie sulla sua algebra. Successivamente vediamo come ad ogni morfismo tra supergruppi sia possibile associare un morfismo tra le rispettive super coppie. Questa corrispondenza costituisce sostanzialmente una biiezione tra la categoria dei supergruppi di Lie e quella delle super coppie di Harish-Chandra. Infine osserviamo come un’azione di un supergruppo possa essere espressa in termini di un’azione della super coppia associata.

Quarto capitolo. Partendo dall’idea che un supergruppo di Lie è una super coppia di Harish-Chandra, vediamo come sia possibile definire il concetto di rappresentazione in un superspazio vettoriale e di rappresentazione unitaria in un superspazio di Hilbert. Come sottolineato in [3] occorrono alcune cautele nel caso di rappresentazioni di dimensione infinita.

Successivamente definiamo i supergruppi compatti come supergruppi con gruppo ridotto compatto e, come ci eravamo proposti inizialmente, proviamo ad estendere alle loro rappresentazioni alcuni risultati riguardanti i gruppi compatti classici. In particolare mostriamo che per le rappresentazioni unitarie di questi supergruppi è possibile estendere il teorema di completa decomponibilità in sottorappresentazioni irriducibili finito-dimensionali (teorema A.4). A partire dal risultato classico, si può infatti costruire una sottorappresentazione irriducibile finito-dimensionale di una fissata rappresentazione unitaria: tutte le rappresentazioni irriducibili sono quindi di di-

mensione finita; inoltre, come per i gruppi compatti, ogni rappresentazione unitaria è somma diretta di rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali. Mostriamo invece con un contro esempio che per i supergruppi compatti non è più valido il teorema che afferma l'unitarizzabilità di ogni rappresentazione in uno spazio di Hilbert (teorema A.1).

Per proseguire nel nostro intento bisognerebbe a questo punto definire la rappresentazione regolare (destra) di un supergruppo e studiarne la decomposizione. A tale scopo vediamo come la moltiplicazione di un supergruppo G possa essere pensata come un'azione destra del supergruppo su se stesso e come questa azione si traduca in un'azione sullo spazio $\mathcal{O}(G)$ delle sezioni sul supergruppo o, se si preferisce, sulla sua complessificazione $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Mostriamo che si tratta effettivamente di una rappresentazione (secondo la definizione data) del supergruppo G in un superspazio localmente convesso. Il problema è che non si tratta di uno spazio di Hilbert. Classicamente la rappresentazione regolare di un gruppo G viene definita in $L^2(G, \mu)$, con μ misura di Haar del gruppo: si ha in questo modo una rappresentazione unitaria. Nel caso dei supergruppi manca però un prodotto scalare tra le sezioni che consenta di definire uno spazio analogo a quello delle funzioni a quadrato integrabile. Osserviamo inoltre che, anche se si riuscisse a introdurre un prodotto scalare, in molti casi non sarebbe comunque possibile rendere unitaria la rappresentazione da noi trovata. Questo accade sia per supergruppi compatti che non compatti.

Capitolo 1

Superalgebra e supergeometria

Questo capitolo vuole essere una rassegna dei principali concetti di superalgebra e supergeometria che saranno utilizzati nel seguito. I primi quattro paragrafi, di carattere più generale, seguono l'esposizione di [17, cap. 3–4], dove si trovano ulteriori dettagli e diverse dimostrazioni. L'ultimo paragrafo è più specificatamente finalizzato al proseguimento del discorso e contiene alcune considerazioni di carattere topologico e l'introduzione di alcuni operatori.

1.1 Superspazi vettoriali e superspazi di Hilbert

Un *superspazio vettoriale* V su un campo k (di caratteristica 0) è uno spazio vettoriale su k che sia $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gradato, cioè in cui sia data una decomposizione

$$V = V_0 \oplus V_1$$

I vettori in V_0 sono detti *pari*, quelli in V_1 *dispari*. Si dice che V ha dimensione $d_0|d_1$, dove $d_0 = \dim V_0$ e $d_1 = \dim V_1$. I vettori in $V_0 \cup V_1$ sono detti *omogenei*. Con $p(v)$ si indica la parità di un vettore omogeneo non nullo v (0 per v pari, 1 per v dispari). Oggetti lineari o multilineari vengono solitamente definiti per i vettori omogenei e poi estesi per linearità. Con $k^{p|q}$ si intende il superspazio vettoriale ottenuto decomponendo k^{p+q} in $k^p \oplus k^q$.

I morfismi tra due superspazi vettoriali V e W sono le mappe lineari che preservano la gradazione (cioè che mandano vettori omogenei in vettori della stessa parità). Essi formano uno spazio vettoriale indicato con $\text{Hom}(V, W)$. Lo spazio di tutte le mappe lineari $V \rightarrow W$ prende il nome di spazio degli *omomorfismi interni* e viene indicato con $\mathbf{Hom}(V, W)$. Esso è un superspazio vettoriale dove le mappe pari preservano la gradazione e quelle dispari la invertono. In particolare $\mathbf{Hom}(V, W)_0 = \text{Hom}(V, W)$. $\mathbf{Hom}(V, V)$ si indica con $\mathbf{End}(V)$.

Dati V e W superspazi vettoriali, la loro somma diretta è quella usuale con $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$ e il loro prodotto tensore è $V \otimes W$ con

$$(V \otimes W)_i = \sum_{\substack{j+k=i \\ i,j,k \in \mathbb{Z}_2}} V_j \otimes W_k$$

ossia

$$\begin{aligned} (V \otimes W)_0 &= (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1) \\ (V \otimes W)_1 &= (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0) \end{aligned}$$

Un *sottospazio* W di un superspazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V che si decomponga in somma diretta di un sottospazio W_0 di V_0 e W_1 di V_1 .

La regola dei segni. Il prodotto tensore tra ordinari spazi vettoriali gode di proprietà di associatività e commutatività, nel senso che ci sono due isomorfismi naturali

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

dato da

$$(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w) \quad u \in U, v \in V \text{ e } w \in W$$

e

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

dato da

$$c_{V,W}: v \otimes w \mapsto w \otimes v \quad v \in V \text{ e } w \in W \quad (1.1a)$$

per U, V e W spazi vettoriali. In particolare il primo isomorfismo permette di scrivere il prodotto tensore tra più spazi vettoriali senza parentesi.

Nel caso del prodotto tensore tra superspazi vettoriali, si mantiene lo stesso isomorfismo (che è un isomorfismo di superspazi) per l'associatività, mentre la commutatività

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

(V e W superspazi vettoriali) è data da

$$c_{V,W}: v \otimes w \mapsto (-1)^{p(v)p(w)} w \otimes v \quad (1.1b)$$

per $v \in V$ e $w \in W$ omogenei ed estesa per linearità. Si può notare che $c_{W,V} \circ c_{V,W} = \text{id}$.

Tutto ciò può essere esteso al prodotto tensore di più superspazi vettoriali V_1, \dots, V_n . Se S_n è il gruppo delle permutazioni di n elementi, un elemento $\sigma \in S_n$ può essere scritto (in vari modi) come prodotto di elementi del tipo

$$s_i: (1, \dots, i, i+1, \dots, n) \mapsto (1, \dots, i+1, i, \dots, n)$$

Scrivendo

$$L(s_i) = I \otimes \dots \otimes I \otimes c_{V_i, V_{i+1}} \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (1.2)$$

si ha un isomorfismo

$$L(\sigma) = L(s_{i_1}) \dots L(s_{i_r}): V_1 \otimes \dots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes V_{\sigma(n)}$$

che si dimostra non dipendere dalla decomposizione di σ .

In particolare si può dimostrare che, preso un superspazio vettoriale V , esiste un'unica rappresentazione di S_n in

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ volte}}$$

che ristretta alle permutazioni del tipo s_i sia data dalla (1.2), ovvero

$$L(s_i): v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto (-1)^{p(v_i)p(v_{i+1})} v_1 \otimes \dots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_n$$

Essa è data da

$$L(\sigma): v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto (-1)^{p(\sigma, v_1, \dots, v_n)} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)} \quad (1.3)$$

con

$$p(\sigma, v_1, \dots, v_n) = \sum_{(k,l) \in N(\sigma)} p(v_k)p(v_l)$$

$$N(\sigma) = \{ (k, l) \mid k < l, \sigma(k) > \sigma(l) \}$$

per ogni $\sigma \in S_n$.

Quanto visto mostra che la regola dei segni introdotta dalla (1.1b) funziona in modo coerente.

Superspazi di Hilbert. Un *superspazio di Hilbert* (vedi [7] o [3, § 2.1]) è un superspazio vettoriale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ su \mathbb{C} con un prodotto scalare⁽¹⁾ (\cdot, \cdot) che lo renda spazio di Hilbert e con \mathcal{H}_0 ed \mathcal{H}_1 sottospazi vettoriali chiusi e mutuamente ortogonali. Accanto al prodotto scalare si introduce la *super forma hermitiana*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } p(x) \neq p(y) \\ (x, y) & \text{se } p(x) = p(y) = 0 \\ i(x, y) & \text{se } p(x) = p(y) = 1 \end{cases}$$

($x, y \in \mathcal{H}$ omogenei). Questa forma ha le seguenti proprietà ($c_{\mathcal{H}, \mathcal{H}}$ è definito dalla (1.1b)):

⁽¹⁾Lineare nella prima componente e antilineare nella seconda.

1. $\langle y, x \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \overline{\langle x, y \rangle}$, ossia $\langle \cdot, \cdot \rangle \circ c_{\mathcal{H}, \mathcal{H}} = \overline{\langle \cdot, \cdot \rangle}$;
2. $\langle x, x \rangle > 0$ se $0 \neq x \in \mathcal{H}_0$;
3. $i^{-1} \langle x, x \rangle > 0$ se $0 \neq x \in \mathcal{H}_1$ (cioè $\langle x, x \rangle = i\alpha$, $\alpha > 0$).

Il primo punto mostra che è la definizione naturale di super forma hermitiana (in particolare $\langle x, x \rangle$ è reale se x è pari, immaginario se x è dispari), il secondo che è una forma definita positiva su \mathcal{H}_0 e il terzo è l'analogo per \mathcal{H}_1 (si sarebbe anche potuto scegliere $i \langle x, x \rangle > 0$).

Se $T \in \mathbf{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ è un operatore limitato si definisce il suo *super aggiunto* T^\dagger con

$$\langle Tx, y \rangle = (-1)^{p(T)p(x)} \langle x, T^\dagger y \rangle$$

T^\dagger è limitato, $p(T) = p(T^\dagger)$ e, indicando con T^* l'usuale aggiunto di T rispetto al prodotto scalare (\cdot, \cdot) , si ha

$$T^\dagger = \begin{cases} T^* & \text{se } p(T) = 0 \\ -iT^* & \text{se } p(T) = 1 \end{cases}$$

1.2 Superalgebre associative

Una *superalgebra* A è un superspazio vettoriale che è anche un'algebra associativa (usualmente con unità) tale che la moltiplicazione sia un morfismo

$$\mu: A \otimes A \rightarrow A$$

di superspazi vettoriali, cioè tale che

$$p(a \cdot b) \equiv p(a) + p(b) \pmod{2}$$

$a, b \in A$ omogenei. In particolare si ha che l'unità è sempre pari, A_0 è una sottoalgebra, $A_0 A_1 \subseteq A_1$ e $A_1^2 \subseteq A_0$.

Esempio 1.1. Se V è un superspazio vettoriale, $\mathbf{End}(V)$ è una superalgebra. Se $V = k^{p|q}$, gli elementi di $\mathbf{End}(V)$ si scrivono nella base canonica come

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con A, B, C e D matrici di elementi in k di dimensione rispettivamente $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ e $q \times q$. Un elemento di $\mathbf{End}(V)$ è pari se $B = C = 0$, dispari se $A = D = 0$.

Esempio 1.2. Sia V uno spazio vettoriale e

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i} = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

l'algebra tensoriale su di esso. $T(V)$ diventa una superalgebra associativa con la decomposizione $T(V) = T(V)_0 \oplus T(V)_1$ data da

$$T(V)_0 = \bigoplus_{i \text{ pari}} V^{\otimes i} \quad T(V)_1 = \bigoplus_{i \text{ dispari}} V^{\otimes i}$$

Chiaramente $1 \in k$ è l'unità e, se $v \in V^{\otimes i}$ e $w \in V^{\otimes j}$, $v \otimes w \in V^{\otimes(i+j)}$.

Una superalgebra si dice (*super*)*commutativa* se

$$a \cdot b = (-1)^{p(a)p(b)} b \cdot a$$

per ogni $a, b \in A$ omogenei, cioè se

$$\mu \circ c_{A,A} = \mu$$

con $c_{A,A}$ definito dalla (1.1b). Utilizzando la (1.1a) si trova invece l'usuale definizione di algebra commutativa. È da notare che per una superalgebra sono due concetti distinti l'essere commutativa come algebra ordinaria o come superalgebra. In una superalgebra commutativa gli elementi dispari sono nilpotenti.

Esempio 1.3. Torniamo all'esempio precedente. Se J è l'ideale in $T(V)$ generato da

$$J' = \{ v \otimes w + w \otimes v \mid v, w \in V \} \subseteq T(V)_0$$

allora

$$\Lambda(V) = T(V)/J$$

è l'algebra esterna su V . L'ideale J si decompone in $J_0 \oplus J_1$, con $J_i \subseteq T(V)_i$ (infatti se $t \in J'$ e $u = u_0 + u_1 \in T(G)$, con $u_i \in T(V)_i$, allora $ut = u_0t + u_1t$, con $u_it \in T(G)_i$). Così

$$\Lambda(V) = T(V)_0/J_0 \oplus T(V)_1/J_1$$

è una superalgebra. Per come è definito il prodotto esterno

$$v \wedge w = (-1)^{ij} w \wedge v \quad v \in \Lambda^i(V) \text{ e } w \in \Lambda^j(V)$$

e quindi $\Lambda(V)$ è una superalgebra (*super*)*commutativa*.

Se A è una superalgebra (non necessariamente associativa), la sua *algebra opposta* A^{opp} è una superalgebra identica ad A come spazio vettoriale e con il prodotto definito da

$$\mu^{\text{opp}} = \mu \circ c_{A,A} \tag{1.4}$$

Una superalgebra è quindi commutativa se e solo se $A^{\text{opp}} = A$.

Moduli su una superalgebra commutativa. Un modulo M su una superalgebra commutativa A è un superspazio vettoriale su cui è definita un'azione sinistra di A

$$\begin{aligned} A \otimes M &\longrightarrow M \\ a \otimes m &\longmapsto a.m \end{aligned}$$

che è un morfismo di superspazi cioè tale che

$$p(a.m) \equiv p(a) + p(m) \pmod{2}$$

Un morfismo tra moduli è un omomorfismo di moduli che preserva la gradazione. Un A -modulo libero è un A -modulo che ha una *base omogenea su* A , cioè un insieme di elementi omogenei tali che ogni elemento del modulo si scriva in modo univoco come combinazione lineare a coefficienti in A degli elementi della base stessa. Con $A^{p|q}$ si indica il modulo libero

$$A^{p|q} = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_p \oplus Af_1 \oplus \cdots \oplus Af_q$$

con e_i elementi pari della base e f_j elementi dispari.

1.3 Superalgebre di Lie

Una *superalgebra di Lie* \mathfrak{g} è un superspazio vettoriale con un morfismo (di superspazi vettoriali, cioè che preserva la gradazione)

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

tale che, se σ è l'automorfismo di $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definito dalla (1.3) corrispondente alla permutazione ciclica $(1, 2, 3) \mapsto (3, 1, 2)$, soddisfi

1. $[\cdot, \cdot](1 + c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}}) = 0$;
2. $[\cdot, [\cdot, \cdot]](1 + \sigma + \sigma^2) = 0$.

Nel caso in cui $c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}}$ e σ derivino dall'usuale azione delle permutazioni sul prodotto tensore di spazi vettoriali, si ritrovano le consuete relazioni che definiscono un'algebra di Lie, cioè antisimmetria delle parentesi di Lie e identità di Jacobi. Esplicitando la regola dei segni si trova, per ogni $a, b, c \in \mathfrak{g}$ omogenei,

1. $[a, b] = -(-1)^{p(a)p(b)}[b, a]$;
2. $[a, [b, c]] + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)}[b, [c, a]] + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)}[c, [a, b]] = 0$.

Chiaramente \mathfrak{g}_0 è un'ordinaria algebra di Lie. Inoltre, per $a, b \in \mathfrak{g}_0$ e $x, y, z \in \mathfrak{g}_1$, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} [[a, b], x] &= [a, [b, x]] - [b, [a, x]] \\ [a, [x, y]] &= [[a, x], y] + [x, [a, y]] \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 \end{aligned}$$

L'ultima di queste è equivalente alla richiesta che $[x, [x, x]] = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}_1$. Si trova dunque una definizione equivalente alla precedente: una superalgebra di Lie \mathfrak{g} è un superspazio vettoriale con un'operazione bilineare $[\cdot, \cdot]$ tale che

1. \mathfrak{g}_0 è un'ordinaria algebra di Lie rispetto a $[\cdot, \cdot]$;
2. \mathfrak{g}_1 è un \mathfrak{g}_0 -modulo rispetto all'azione $a.x = [a, x]$, $a \in \mathfrak{g}_0$ e $x \in \mathfrak{g}_1$;
3. $x \otimes y \mapsto [x, y]$ è una mappa simmetrica di \mathfrak{g}_0 -moduli da $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ ⁽²⁾ a \mathfrak{g}_0 ;
4. $[x, [x, x]] = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}_1$ ⁽³⁾.

Una superalgebra associativa A è resa una superalgebra di Lie dalle parentesi

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba \quad a, b \in A \quad (1.5)$$

Se V è un superspazio vettoriale, si usa $\mathfrak{gl}(V)$ per indicare l'algebra $\mathbf{End}(V)$ vista come superalgebra di Lie. Se $V = \mathbb{R}^{p|q}$ si usa $\mathfrak{gl}(p|q)$.

Derivazioni di una superalgebra. Sia A una superalgebra su k .

Definizione 1.4. Una *derivazione* (omogenea di grado $p(D)$) di A è una mappa k -lineare $D: A \rightarrow A$ tale che

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)p(a)}aD(b)$$

per ogni $a, b \in A$ omogenei.

Le derivazioni omogenee generano un superspazio vettoriale che diventa una superalgebra di Lie definendo

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - (-1)^{p(D_1)p(D_2)}D_2D_1 \quad (1.6)$$

1.4 Supervarietà

Varietà differenziabili e fasci di anelli. Consideriamo innanzitutto un'ordinaria varietà differenziabile M (per esempio liscia e reale). Ad ogni aperto $U \subseteq M$ si può associare l'anello delle funzioni reali e lisce definite su U ; si dice che l'applicazione

$$U \mapsto C^\infty(U)$$

è un *fascio di algebre di funzioni* in quanto

⁽²⁾ $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ è un \mathfrak{g}_0 -modulo rispetto all'azione

$$a.(x \otimes y) = (a.x) \otimes y + x \otimes (a.y) \quad a \in \mathfrak{g}_0 \text{ e } x, y \in \mathfrak{g}_1$$

⁽³⁾Questa è l'unica condizione non lineare.

1. per ogni U , $C^\infty(U)$ è un'algebra di funzioni in cui l'identità è la funzione costante 1;

2. preso un aperto $V \subset U$, la mappa di restrizione

$$f \mapsto f|_V \quad f \in C^\infty(U)$$

è un omomorfismo di anelli $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(V)$;

3. se $U = \bigcup_i U_i$, U_i aperti, e $\{f_i\}$ è una famiglia di funzioni $f_i \in C^\infty(U_i)$ tali che

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

per ogni i, j , allora esiste una e una sola funzione $f \in C^\infty(U)$ tale che

$$f|_{U_i} = f_i$$

Se $\psi: M \rightarrow N$ è una mappa differenziabile tra due varietà, il suo pullback ψ^* costituisce una famiglia di omomorfismi di anelli

$$\begin{aligned} \psi_V^*: C^\infty(V) &\longrightarrow C^\infty(\psi^{-1}(V)) \\ f &\longmapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

$V \subseteq N$ aperto. Il pullback commuta con le restrizioni, cioè per $f \in C^\infty(V)$ e $W \subset V$ aperto, $(\psi^* f)|_{\psi^{-1}(W)} = \psi^*(f|_W)$.

Se la possibilità di associare un'anello (di funzioni) ad ogni aperto di una varietà è una conseguenza della definizione di varietà stessa, si può generalizzare il concetto assegnando una legge che associ ad ogni aperto di uno spazio topologico un anello in modo che siano soddisfatte certe proprietà analoghe a quelle viste sopra.

Definizione 1.5. Un *fascio di anelli* \mathcal{O} su uno spazio topologico X è un'applicazione

$$U \mapsto \mathcal{O}(U) \quad U \subseteq X \text{ aperto}$$

dove

1. $\mathcal{O}(U)$ è un anello commutativo con unità i cui elementi vengono detti *sezioni*;

2. per ogni aperto $V \subset U$, c'è un omomorfismo di anelli

$$r_{V,U}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$$

detto *restrizione*⁽⁴⁾ che soddisfa

$$r_{W,V} \circ r_{V,U} = r_{W,U}$$

per $W \subset V \subset U$ aperti;

⁽⁴⁾Nel seguito useremo l'usuale notazione $f|_V$ con il significato di $r_{V,U}f$, $f \in \mathcal{O}(U)$.

3. se $U = \bigcup_i U_i$, U_i aperti, e $\{f_i\}$ è una famiglia di sezioni $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che

$$r_{U_i \cap U_j, U_i} f_i = r_{U_i \cap U_j, U_j} f_j$$

per ogni i, j , allora esiste una e una sola sezione $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che

$$r_{U_i, U} f = f_i$$

La coppia (X, \mathcal{O}) è detta *spazio anellato*.

Occorre ora definire i morfismi tra spazi anellati. Data una mappa differenziabile tra due varietà è automaticamente definito il pullback di una funzione nel fascio. Questa volta però gli anelli del fascio sono anelli astratti associati agli aperti e non più anelli di funzioni e quindi non è più sufficiente dare una mappa tra gli spazi topologici, ma occorre dare esplicitamente una famiglia di omomorfismi tra gli anelli dei fasci (che si continua a indicare col termine *pullback*) soddisfacente proprietà analoghe a quelle viste per le varietà differenziabili.

Definizione 1.6. Un *morfismo di spazi anellati*

$$\psi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

è una mappa continua

$$\psi^\sim: X \rightarrow Y$$

e una famiglia di omomorfismi di anelli

$$\psi_V^*: \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X((\psi^\sim)^{-1}(V)) \quad V \subseteq Y \text{ aperto}$$

che commuta con le restrizioni, cioè tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\psi_V^*} & \mathcal{O}_X((\psi^\sim)^{-1}(V)) \\ r_{W,V} \downarrow & & \downarrow r_{(\psi^\sim)^{-1}(W), (\psi^\sim)^{-1}(V)} \\ \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{\psi_W^*} & \mathcal{O}_X((\psi^\sim)^{-1}(W)) \end{array} \quad (1.7)$$

commuti per ogni $W \subset V$ aperto.

Dati due morfismi $\psi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ e $\varphi: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$, si ha il morfismo composto dato dalla composizione dei morfismi sugli spazi topologici e dal pullback

$$(\varphi \circ \psi)_V^* = \psi_{(\varphi^\sim)^{-1}(V)}^* \circ \varphi_V^* \quad V \subseteq Z \text{ aperto}$$

L'identità è data dall'applicazione identica tra gli spazi topologici e tra gli anelli del fascio. Un morfismo è dunque un isomorfismo se è tale sugli spazi topologici e su tutti gli anelli del fascio. Abbiamo così definito la categoria degli spazi anellati.

Osservazione 1.7. In queste definizioni si trovano già alcune delle difficoltà che si incontreranno con le supervarietà. Una varietà differenziabile è essenzialmente un insieme di punti con una serie di strutture geometriche e un morfismo tra varietà un'applicazione fra insiemi che soddisfa certe proprietà legate alle strutture geometriche: un morfismo è cioè noto quando è noto sui punti della varietà. Questo non è più vero per un fascio di anelli, poiché un morfismo non è in generale fissato dalla mappa tra gli spazi topologici sottostanti il fascio. Abbiamo cioè a che fare con oggetti che non sono semplicemente insiemi e morfismi che non sono applicazioni tra insiemi. In altre parole la categoria degli spazi anellati non è una sottocategoria della categoria degli insiemi e questo continua a essere valido per la categoria delle supervarietà che introdurremo tra breve.

Se (X, \mathcal{O}) è uno spazio anellato, un aperto $Y \subseteq X$ diventa uno spazio anellato $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ restringendo il fascio agli aperti contenuti in Y . In questo modo si possono introdurre modelli locali per uno spazio anellato. Prendiamo per esempio $(\mathbb{R}^n, C_n^\infty)$, dove C_n^∞ è il fascio

$$C_n^\infty : U \mapsto C^\infty(U) \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$

e $C^\infty(U)$ è l'algebra delle funzioni lisce reali su U . In questo modo si può dare una definizione equivalente di varietà differenziabile liscia reale (di dimensione n). Essa è uno spazio anellato (X, \mathcal{O}) , con X spazio topologico di Hausdorff secondo-numerabile, localmente isomorfo a $(\mathbb{R}^n, C_n^\infty)$, cioè tale che per ogni $x \in X$ ci sia un intorno aperto V di x e un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $(V, \mathcal{O}|_V)$ isomorfo a $(U, C_n^\infty|_U)$. Analogamente si possono definire le varietà differenziabili analitiche reali o complesse prendendo al posto di $(\mathbb{R}^n, C_n^\infty)$ il fascio degli anelli delle funzioni analitiche reali o complesse rispettivamente su \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n .

Definizione di supervarietà. Analogamente a quanto visto per le varietà differenziabili ordinarie si può dare una definizione di supervarietà. Innanzitutto occorre dare l'equivalente di uno spazio anellato per quanto riguarda gli oggetti supergeometrici. Un *superspazio anellato* è uno spazio topologico X con un fascio di anelli supercommutativi con unità⁽⁵⁾. Tutti i morfismi introdotti precedentemente, ossia i morfismi di restrizione e i pullback, devono essere morfismi di superspazi, cioè preservare la gradazione.

Bisogna poi definire un modello locale, analogamente a quanto fatto per le varietà differenziabili con $(\mathbb{R}^n, C_n^\infty)$. Un *superdominio* $U^{p|q}$ è un superspazio anellato $(U, C_{p|q}^\infty)$ dove U è un aperto in \mathbb{R}^p e $C_{p|q}^\infty$ è il fascio di anelli supercommutativi

$$C_{p|q}^\infty : V \mapsto C^\infty(V)[\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^q] \cong C^\infty(V) \otimes \Lambda(q) \quad V \subseteq U \text{ aperto}$$

⁽⁵⁾In realtà a noi interessano unicamente fasci di superalgebre commutative, secondo la definizione data nel precedente paragrafo.

dove $\Lambda(q)$ è l'algebra esterna con q generatori, i θ^i sono oggetti anticommutanti, cioè soddisfacenti

$$\theta^i \theta^j = -\theta^j \theta^i \quad i, j \in \{1, \dots, q\}$$

(in particolare $(\theta^i)^2 = 0$) e $C^\infty(V)[\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^q]$ è lo spazio dei polinomi formali in $\theta^1, \dots, \theta^q$ con coefficienti nelle funzioni lisce reali su V . Gli elementi di $C_{p|q}^\infty(V)$ (detti come prima *sezioni*) possono quindi essere scritti nella forma

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, q\}} f_I \theta^I \quad (1.8)$$

con $f_I \in C^\infty(V)$ e

$$\theta^I = \theta^{i_1} \dots \theta^{i_r} \quad I = \{i_1, \dots, i_r\}, i_1 < \dots < i_r$$

Si dice che $p|q$ è la dimensione del superdominio. In particolare per $U = \mathbb{R}^p$ si ha il superdominio $\mathbb{R}^{p|q}$.

Osservazione 1.8. Vedremo nell'esempio 2.5 che un superspazio vettoriale finito-dimensionale può essere visto come una supervarietà. Per questo motivo si usa la stessa notazione per il superdominio $\mathbb{R}^{p|q}$ e il superspazio vettoriale $\mathbb{R}^{p|q}$.

Definizione 1.9. Una *supervarietà liscia reale* di dimensione $p|q$ è un superspazio anellato (X, \mathcal{O}) localmente isomorfo a $\mathbb{R}^{p|q}$, con X spazio topologico di Hausdorff secondo-numerabile. Un morfismo tra due supervarietà è un morfismo tra i superspazi anellati corrispondenti.

Dire che (X, \mathcal{O}) è localmente isomorfo a $\mathbb{R}^{p|q}$ significa, come prima, che per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto V di x e un isomorfismo h tra $(V, \mathcal{O}|_V)$ e un opportuno superdominio $U^{p|q}$. Le coppie (V, h) giocano un ruolo analogo alle carte locali per una varietà differenziabile. Le p coordinate canoniche x^i di U (o meglio il loro pullback rispetto ad h in $\mathcal{O}(V)$) sono dette *coordinate pari*, mentre i (pullback dei) q oggetti θ^j sono detti *coordinate dispari*. Sulle supervarietà è possibile dar senso a tutta una serie di concetti tipici delle varietà differenziabili (calcolo differenziale, calcolo integrale, ecc.) in cui le sezioni giocano il ruolo delle funzioni lisce. Utilizzando le $p + q$ "coordinate" (x^i, θ^j) si sviluppa un formalismo locale del tutto simile a quello delle varietà differenziabili ordinarie.

Si possono definire supervarietà analitiche reali o complesse sostituendo il fascio $C_{p|q}^\infty$ con un fascio di polinomi in $\theta^1, \dots, \theta^q$ con coefficienti nelle funzioni analitiche (reali o complesse) su aperti di \mathbb{R}^p o \mathbb{C}^p . Nel seguito ci limiteremo comunque a supervarietà lisce reali.

Esempio 1.10. Sia V un fibrato vettoriale su un'ordinaria varietà differenziabile M ed E il fibrato esterno di V , cioè il fibrato vettoriale su M le cui fibre sono costituite dall'algebra esterna delle fibre di V . Se \mathcal{O}_E è il fascio delle sezioni di E , $E^b = (M, \mathcal{O}_E)$ è una supervarietà. Infatti ogni fibrato vettoriale è localmente

banale e quindi per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x tale che $\pi_V^{-1}(U) \cong U \times V_x$, dove π_V è la proiezione di V in M e $V_x = \pi_V^{-1}(x)$ è la fibra su x . Quindi, se π_E è la proiezione di E in M , $\pi_E^{-1}(U) \cong U \times \Lambda(V_x)$ e $\mathcal{O}_E(U) \cong C^\infty(U) \otimes \Lambda(V_x)$. E^b è dunque una supervarietà di dimensione $p|q$, con $p = \dim M$ e $q = \dim V_x$. Ogni supervarietà è perciò localmente isomorfa a un fibrato esterno banale. Si può dimostrare che per ogni supervarietà liscia reale S esiste un fibrato esterno E tale che S sia globalmente isomorfa a E^b , mentre ciò non è vero per supervarietà analitiche reali o complesse. L'identificazione $S \cong E^b$ non è comunque canonica. Infatti un cambio di coordinate in E deve preservare la struttura di fibrato e non potrà mischiare le coordinate sulle fibre alle coordinate sulla base, mentre in una supervarietà è possibile mischiare coordinate pari e dispari (vedi esempio 1.13). Quindi le supervarietà non sono fibrati esterni.

Varietà ridotta. Prendiamo una supervarietà M di dimensione $p|q$. Allo spazio topologico sottostante la supervarietà (indicato con $|M|$) si può dare una struttura di varietà differenziabile liscia, detta *varietà ridotta* e indicata con M^\sim . M^\sim può essere vista come una sottosupervarietà (nel senso che sarà specificato dalla definizione 1.18) di dimensione $p|0$ immersa in M :

$$j: M^\sim \hookrightarrow M$$

Per far questo si costruisce un fascio di anelli di funzioni reali su $|M|$. Prendiamo un punto $\bar{x} \in |M|$ e una sezione s definita in un suo intorno U . A patto di restringere s a un opportuno aperto $V \ni \bar{x}$ su cui si possano mettere coordinate (x^i, θ^j) , avremo

$$s = s_0(x) + \sum_j s_j(x)\theta^j + \sum_{k<l} s_{kl}(x)\theta^k\theta^l + \dots \in C^\infty(U)[\theta^1, \dots, \theta^q]$$

Diciamo che il *valore* di s in \bar{x} è

$$s^\sim(\bar{x}) = s_0(\bar{x})$$

Questo non dipende dalle coordinate in quanto può essere caratterizzato come l'unico $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $s - \lambda$ non sia invertibile in nessun intorno di \bar{x} ⁽⁶⁾ e l'essere invertibile o meno di una sezione è preservato da un cambio di coordinate, che è un isomorfismo di superalgebra. Al variare di $\bar{x} \in U$ si ha una funzione reale s^\sim su U . Si ha così una mappa $s \mapsto s^\sim$, che è

⁽⁶⁾Una sezione $s \in \mathcal{O}(V)$ è invertibile in un qualche intorno di \bar{x} se e solo se lo è s_0 (come elemento della superalgebra, non come funzione), e poiché s_0 è una funzione continua, se e solo se $s_0(\bar{x}) \neq 0$. Infatti se s_0 è invertibile (opportunamente ristretta), scriviamo

$$s' = s_0^{-1}s = 1 + \sum_j s'_j \theta^j + \dots = 1 - n$$

con n appartenente all'ideale generato dai θ^j . Poiché $n^{q+1} = 0$, s' (e quindi s) è invertibile essendo

$$(1 - n) \left(1 + \sum_{r=1}^q n^r\right) = 1 - n^{q+1} = 1$$

un omomorfismo (di superalgebre) da $\mathcal{O}(U)$ a un'algebra $\mathcal{O}^\sim(U)$ di funzioni reali su U . Si dimostra che

$$\mathcal{O}^\sim : U \mapsto \mathcal{O}^\sim(U) \quad U \subseteq |M| \text{ aperto}$$

è un fascio di anelli localmente isomorfo a $(\mathbb{R}^n, C_n^\infty)$ e quindi $|M|$ assume una struttura di varietà differenziabile liscia reale. L'immersione j è data da $j^\sim = \text{id}_{|M|}$ e dalla famiglia di pullback

$$\begin{array}{ccc} j_U^* : \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}^\sim(U) \\ s & \longmapsto & s^\sim \end{array}$$

Non esiste invece alcuna proiezione canonica $\pi : M \rightarrow M^\sim$ ⁽⁷⁾.

La mappa che associa ad una sezione il suo valore in un punto $m \in M^\sim$ è detta *valutazione in m* e si indica con

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}_m : \mathcal{O}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & s^\sim(m) \end{array} \quad (1.9)$$

Vediamo ora come ad ogni morfismo tra supervarietà sia associato un morfismo tra le rispettive varietà ridotte, detto *morfismo ridotto*. Se \mathcal{J} è il fascio di ideali definito da

$$\mathcal{J}(U) = \{ 3s \in \mathcal{O}(U) \mid s^\sim = 0 \text{ su } U \} \quad (1.10)$$

si ha la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^\sim \rightarrow 0$$

e quindi $\mathcal{O}^\sim \cong \mathcal{O}/\mathcal{J}$ (come fascio di algebre essendo \mathcal{J} un fascio di ideali). Siano M ed N supervarietà e ψ un morfismo tra esse, definito dalla mappa ψ^\sim tra i rispettivi spazi topologici e dal pullback ψ^* . Si mostra facilmente che per ogni $x \in M^\sim$ e per ogni sezione t definita in un intorno di x

$$(\psi^*(t))^\sim(x) = t^\sim(\psi^\sim(x))$$

e quindi in particolare $\psi^*\mathcal{J}_N \subseteq \mathcal{J}_M$. Si ha perciò una mappa $\mathcal{O}_N^\sim \rightarrow \mathcal{O}_M^\sim$, che è il pullback classico di ψ^\sim ⁽⁸⁾. In questo modo si mostra che

$$\psi^\sim : M^\sim \rightarrow N^\sim$$

⁽⁷⁾Se E^b è la supervarietà associata a un fibrato esterno E (vedi esempio 1.10), esiste una proiezione $E^b \rightarrow E^{b^\sim}$ data dalla mappa $f \mapsto f \otimes 1$, $f \in C^\infty(E^{b^\sim})$. Nell'esempio 1.13 vedremo che, per una generica supervarietà, una proiezione di questo tipo non può essere stabile per cambio di coordinate.

⁽⁸⁾Consideriamo due varietà differenziabili classiche viste come spazi anellati e un morfismo (di spazi anellati) tra di esse. In questo caso le sezioni sono le funzioni lisce sulle varietà. Si può dimostrare che il pullback che compare nella definizione 1.6 di morfismo deve necessariamente essere l'usuale pullback dato dal morfismo tra gli spazi topologici.

è un morfismo (cioè una mappa differenziabile) tra le varietà ridotte. Inoltre, poiché per le varietà differenziabili definire un morfismo è equivalente a definire il suo pullback, si vede come la parte topologica ψ^\sim di un morfismo ψ tra supervarietà sia fissata dalla definizione del pullback ψ^* . L'assegnazione $\psi \mapsto \psi^\sim$ commuta con le composizioni, cioè⁽⁹⁾

$$(\psi \circ \varphi)^\sim = \psi^\sim \circ \varphi^\sim$$

Per descrivere le proprietà di una supervarietà è spesso conveniente parlare in termini di relazioni tra morfismi. Questo ci servirà in particolare per definire un supergruppo di Lie e verrà ulteriormente sviluppato parlando di funtore dei punti. Per ora vediamo semplicemente come si può parlare dei punti della varietà ridotta in termini di morfismi (ci servirà per esempio per definire l'identità di un supergruppo). Per una varietà differenziabile classica i punti sono in corrispondenza coi morfismi da \mathbb{R}^0 nella varietà stessa. Questo continua a essere valido per quanto riguarda le supervarietà.

Lemma 1.11. *Se M è una supervarietà, i morfismi*

$$\psi: \mathbb{R}^{0|0} \rightarrow M$$

sono in corrispondenza biunivoca coi punti della varietà ridotta M^\sim . Inoltre se $x = \psi^\sim(0)$, allora $\psi^ = \text{ev}_x$.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{0|0}) = \mathbb{R}$. Quindi il pullback

$$\psi^*: \mathcal{O}_M \rightarrow \mathbb{R}$$

deve mandare la parte dispari di \mathcal{O}_M in 0 e

$$\mathcal{J}_M \subseteq \ker \psi^*$$

con \mathcal{J}_M definito dalla (1.10). Poiché $\mathcal{O}_M^\sim \cong \mathcal{O}_M / \mathcal{J}_M$, ψ^* è completamente determinato dal pullback del morfismo ridotto

$$(\psi^\sim)^*: \mathcal{O}_M^\sim \rightarrow \mathbb{R}$$

Quindi per dare un morfismo $\psi: \mathbb{R}^{0|0} \rightarrow M$ è sufficiente dare il suo morfismo ridotto $\psi^\sim: \mathbb{R}^0 \rightarrow M^\sim$ che è esattamente un punto di M^\sim . Inoltre dovendo commutare

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(M) & \xrightarrow{\psi^*} & \mathbb{R} \\ j^* \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \mathcal{O}^\sim(M) & \xrightarrow{(\psi^\sim)^*} & \mathbb{R} \end{array}$$

⁽⁹⁾L'assegnazione

$$\begin{cases} M \mapsto M^\sim & M \text{ supervarietà} \\ \psi \mapsto \psi^\sim & \psi \text{ morfismo} \end{cases}$$

è quindi un funtore dalla categoria delle supervarietà a quelle delle varietà differenziabili.

con $j: M^\sim \hookrightarrow M$, si ha

$$\psi^*(s) = s^\sim(\psi^\sim(0)) \quad s \in \mathcal{O}(M) \quad \square$$

La differenza sostanziale rispetto al caso classico è che i morfismi da $\mathbb{R}^{0|0}$ alla supervarietà permettono di esplorare solo i punti della varietà ridotta, mentre non dicono nulla sulla parte dispari del fascio. Per esempio non è più vero l'analogo del fatto che date due varietà differenziabili X ed Y e due morfismi

$$\varphi, \psi: X \rightarrow Y$$

si ha $\varphi = \psi$ se e solo se $\varphi \circ x = \psi \circ x$ per ogni $x: \mathbb{R}^0 \rightarrow X$. Per le supervarietà è necessario considerare anche morfismi da altre supervarietà e non più solo da $\mathbb{R}^{0|0}$; vedremo ciò parlando del funtore dei punti. È comunque da notare che anche classicamente i morfismi da \mathbb{R}^0 identificano i punti come elementi di un insieme astratto e non dicono nulla sulla topologia della varietà.

$\mathbb{R}^{0|0}$ ha la proprietà di essere un *oggetto terminale* per la categoria delle supervarietà, cioè da ogni supervarietà S esiste uno ed un solo morfismo da S in $\mathbb{R}^{0|0}$, che indichiamo con $!_S^{(10)}$. Se M è una supervarietà e x un punto di M^\sim , indichiamo sempre con x il rispettivo morfismo $\mathbb{R}^{0|0} \rightarrow M$ e con \hat{x} il morfismo

$$\hat{x} = x \circ !_S: S \rightarrow M \quad (1.11)$$

Chiaramente $\hat{x}^*: s \mapsto \text{ev}_x(s) \cdot 1$, $s \in \mathcal{O}(M)$.

Morfismi in coordinate locali. Si può provare il seguente risultato (la prima affermazione viene direttamente dalla definizione di morfismo).

Teorema 1.12. *Sia $U^{p|q}$ una sottovarietà aperta di $\mathbb{R}^{p|q}$ con coordinate (y^i, φ^j) . Se M è una supervarietà e $\psi: M \rightarrow U^{p|q}$ un morfismo allora*

$$\begin{cases} f_i = \psi^*(y^i) \in \mathcal{O}_M(M)_0 & 1 \leq i \leq p \\ g_j = \psi^*(\varphi^j) \in \mathcal{O}_M(M)_1 & 1 \leq j \leq q \end{cases}$$

Viceversa date p sezioni $f_i \in \mathcal{O}_M(M)_0$ e q sezioni $g_j \in \mathcal{O}_M(M)_1$, esiste un unico morfismo ψ tale che

$$\begin{cases} f_i = \psi^*(y^i) & 1 \leq i \leq p \\ g_j = \psi^*(\varphi^j) & 1 \leq j \leq q \end{cases} \quad (1.12)$$

⁽¹⁰⁾ $!_S^\sim$ manda tutti i punti di S^\sim in 0, mentre il pullback necessariamente è dato da

$$!_S^*: \lambda \mapsto \lambda \cdot 1 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

dovendo essere un omomorfismo di algebre.

Supponiamo che anche M sia un superdominio $V^{k|l}$ con coordinate canoniche (x^i, θ^j) . Una sezione $s \in \mathcal{O}(U)$ può essere scritta al solito come

$$s = s_0 + \sum_j s_j \varphi^j + \cdots \quad s_0, s_j, \dots \in C^\infty(U)$$

Poiché il pullback ψ^* è un omomorfismo di superalgebre, avremo

$$\psi^*(s) = \psi^*(s_0) + \sum_j \psi^*(s_j) \psi^*(\varphi^j) + \cdots = \psi^*(s_0) + \sum_j \psi^*(s_j) g_j + \cdots$$

Resta da stabilire la forma del pullback per funzioni in $C^\infty(U)$; si trova che è uno sviluppo di Taylor formale nelle θ^j , troncato dalla loro nilpotenza, cioè scrivendo $f_i = r_i + n_i$ con $r_i \in C^\infty(V)$ e

$$n_i = \sum_{|I| \neq 0 \text{ pari}} n_{iI} \theta^I \in \mathcal{J}(V) \quad n_{iI} \in C^\infty(V)$$

si ha che

$$\psi^*(s_0) = \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma} s_0 \left(r^1(x^1, \dots, x^l), \dots, r^p(x^1, \dots, x^l) \right) n^\gamma$$

con $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $\gamma_i \in \mathbb{N}$, $\gamma! = \prod_i \gamma_i!$, $|\gamma| = \sum_i \gamma_i$, $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\prod_i \partial (y^i)^{\gamma_i}}$, $n^\gamma = \prod_i n_i^{\gamma_i}$. Si tratta di una somma finita poiché tutti gli n_i sono nilpotenti.

Nel caso in cui M non sia un superdominio, il pullback di una generica sezione si ottiene, come nel caso classico, per incollaggio. Quindi, almeno localmente, un morfismo $\psi: M \rightarrow N$ si può scrivere formalmente come

$$(x, \theta) \rightarrow (y, \varphi) \quad \begin{cases} y = f(x, \theta) \\ \varphi = g(x, \theta) \end{cases} \quad (1.13)$$

dando a questo il significato della (1.12).

Esempio 1.13. Prendiamo $\psi: \mathbb{R}^{1|2} \rightarrow \mathbb{R}^{1|2}$ definito da

$$\begin{cases} \bar{x} = 2x + x\theta^1\theta^2 \\ \bar{\theta}^1 = \theta^1 + x\theta^2 \\ \bar{\theta}^2 = \theta^2 \end{cases}$$

dove (x, θ^1, θ^2) e $(\bar{x}, \bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)$ sono rispettivamente le coordinate delle due copie di $\mathbb{R}^{1|2}$. Presa una sezione

$$s = s_0 + s_1 \bar{\theta}^1 + s_2 \bar{\theta}^2 + s_{12} \bar{\theta}^1 \bar{\theta}^2 \quad s_i \in C^\infty(\mathbb{R})$$

il suo pullback sarà

$$\begin{aligned} \psi^*(s) &= \psi^*(s_0) + \psi^*(s_1) \psi^*(\bar{\theta}^1) + \psi^*(s_2) \psi^*(\bar{\theta}^2) + \psi^*(s_{12}) \psi^*(\bar{\theta}^1) \psi^*(\bar{\theta}^2) \\ &= \psi^*(s_0) + \psi^*(s_1) (\theta^1 + x\theta^2) + \psi^*(s_2) \theta^2 + \psi^*(s_{12}) \theta^1 \theta^2 \end{aligned}$$

con (il primo passaggio è puramente formale!)

$$\begin{aligned} (\psi^*(s_i))(x) &= s_i(2x + x\theta^1\theta^2) \\ &= s_i(2x) + s'_i(2x)x\theta^1\theta^2 + \frac{1}{2}s''_i(2x)(x\theta^1\theta^2)^2 + \dots \\ &= s_i(2x) + s'_i(2x)x\theta^1\theta^2 \end{aligned}$$

In particolare ψ è un isomorfismo⁽¹¹⁾, cioè un cambio di coordinate. Da qui si vede che, mentre l'immersione $j: \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{1|2}$ data da

$$\begin{aligned} j^*: \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}^\sim \\ s &\longmapsto s_0 = s^\sim \end{aligned}$$

è ben definita, una proiezione $\pi: \mathbb{R}^{1|2} \rightarrow \mathbb{R}^1$ data da

$$\begin{aligned} \pi^*: \mathcal{O}^\sim &\longrightarrow \mathcal{O} \\ s_0 &\longmapsto s_0 \end{aligned}$$

non sarebbe stabile per cambio di coordinate.

Prodotto di supervarietà. Date due supervarietà M ed N , si può dimostrare che esiste il loro prodotto binario⁽¹²⁾

$$M \xleftarrow{\pi_M} M \times N \xrightarrow{\pi_N} N$$

⁽¹¹⁾L'inverso è dato da

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\bar{x} - \frac{1}{4}\bar{x}\bar{\theta}^1\bar{\theta}^2 \\ \theta^1 = \bar{\theta}^1 - \frac{1}{2}\bar{x}\bar{\theta}^2 \\ \theta^2 = \bar{\theta}^2 \end{cases}$$

⁽¹²⁾Dati due oggetti X e Y in una categoria, si dice *prodotto binario* un oggetto Z e due morfismi (detti *proiezioni*)

$$X \xleftarrow{\pi_X} Z \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

tali che per ogni

$$X \xleftarrow{f} W \xrightarrow{g} Y$$

esista un unico morfismo $h: W \rightarrow Z$ per cui

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow \wr & \downarrow h & \searrow \wr \\ X & \xleftarrow{\pi_X} Z \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

commuti; in altre parole

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W, Z) &\longrightarrow \text{Hom}(W, X) \times \text{Hom}(W, Y) \\ h &\longmapsto (\pi_X \circ h, \pi_Y \circ h) \end{aligned}$$

è una biiezione. Si vede facilmente come il prodotto binario di due oggetti (ove esista) sia unico a meno di isomorfismi. Usualmente si indica Z con $X \times Y$ e l'unico morfismo h con $\langle f, g \rangle$. Il prodotto binario si estende a più di due oggetti notando che $(W \times X) \times Y \cong W \times (X \times Y)$. Esempi di prodotto binario sono il prodotto cartesiano per gli insiemi, la somma diretta per spazi vettoriali, il prodotto diretto per i gruppi.

In particolare si trova che $(M \times N)^\sim \cong M^\sim \times N^\sim$ e che π_M^\sim e π_N^\sim sono le usuali proiezioni del prodotto delle varietà ridotte. Se M ed N sono superdomini $U^{p|q}$ e $V^{r|s}$, con coordinate rispettivamente (x^i, θ^j) e (y^k, φ^l) , in $U^{p|q} \times V^{r|s}$ si possono mettere coordinate

$$(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^p, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^r, \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^q, \bar{\varphi}^1, \dots, \bar{\varphi}^s)$$

per cui le proiezioni assumono l'usuale forma

$$\pi_M \begin{cases} x^i = \bar{x}^i \\ \theta^j = \bar{\theta}^j \end{cases} \quad \pi_N \begin{cases} y^k = \bar{y}^k \\ \varphi^l = \bar{\varphi}^l \end{cases} \quad (1.14)$$

Questo è vero localmente per tutte le supervarietà.

Calcolo differenziale. Per implementare il calcolo differenziale su una supervarietà si osserva innanzitutto che un campo vettoriale su un'ordinaria varietà differenziabile è una derivazione dell'algebra delle funzioni sulla varietà. Analogamente, utilizzando la nozione di derivazione di una superalgebra (vedi definizione 1.4), si dà la seguente definizione.

Definizione 1.14. Un *campo vettoriale* su una supervarietà M è una derivazione del fascio \mathcal{O}_M , cioè una famiglia di derivazioni di superalgebra

$$D_V: \mathcal{O}_M(V) \rightarrow \mathcal{O}_M(V) \quad V \subseteq M^\sim \text{ aperto}$$

compatibile con le restrizioni.

Si può chiaramente parlare di campi vettoriali definiti su un aperto $U \subseteq M^\sim$; la definizione resta invariata, ristretta agli aperti $V \subseteq U$. I campi vettoriali formano un fascio di \mathcal{O}_M -moduli detto *fascio tangente* e indicato con $\mathcal{T}(M)$.

Si può introdurre un formalismo del tutto analogo a quello del calcolo differenziale ordinario. Se $M = U^{p|q}$ con coordinate (x^i, θ^j)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_I s_I \theta^I \right) = \sum_I \frac{\partial s_I}{\partial x^i} \theta^I \quad (1.15a)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j} \left(\sum_{j \notin I} s_I \theta^I + \sum_{j \in I} s_{j,I} \theta^j \theta^I \right) = \sum_{j \notin I} s_{j,I} \theta^I \quad (1.15b)$$

$s_I \in C^\infty(U)$, sono derivazioni rispettivamente pari e dispari della superalgebra delle sezioni. Esse sono le uniche derivazioni rispettivamente pari e dispari per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} &= \delta_{ij} & \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} &= 0 \\ \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} &= 0 & \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^j} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Si dimostra che le derivazioni di $\mathcal{O}(U)$ formano un $\mathcal{O}(U)$ -modulo libero isomorfo a $\mathcal{O}(U)^{p|q}$ e che le (1.15) sono una sua base omogenea. Se indichiamo con (y^1, \dots, y^{p+q}) tutto il set di coordinate, una derivazione X si scrive in componenti come nel caso classico:

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad a_i = X(y^i)$$

Per una generica supervarietà M di dimensione $p|q$, il fascio tangente $\mathcal{T}(M)$ è localmente isomorfo al modulo libero $\mathcal{O}(U)^{p|q}$.

Anche nel caso supergeometrico vale la formula di derivazione a catena. Se

$$\psi: U^{p|q} \rightarrow V^{m|n}$$

è un morfismo e (y^i) e (z^k) sono coordinate rispettivamente in $U^{p|q}$ e $V^{m|n}$, allora per ogni $f \in \mathcal{O}(V)$ si ha

$$\frac{\partial \psi^*(f)}{\partial y^i} = \sum_j \frac{\partial \psi^*(z^j)}{\partial y^i} \psi^* \left(\frac{\partial f}{\partial z^j} \right) \quad (1.16)$$

Come nel caso classico si può definire il concetto di vettore applicato in un punto (della varietà ridotta) e di spazio tangente. Fissato un punto $m \in M^\sim$, si introduce una nozione di equivalenza tra le sezioni definite in un qualche intorno di m . Due sezioni $f \in \mathcal{O}(U)$ e $g \in \mathcal{O}(V)$, U e V aperti contenenti m , sono equivalenti se e solo se esiste un aperto W con $m \in W \subseteq U \cap V$, per cui $f|_W = g|_W$. Le classi di equivalenza sono dette *germi* e formano una superalgebra \mathcal{O}_m detta *stalk*. $[f]_m$ indica il germe in \mathcal{O}_m a cui appartiene una sezione f . La mappa $f \mapsto [f]_m$ è un omomorfismo di superalgebre.

Definizione 1.15. Un *vettore tangente* a M in m (omogeneo di grado $p(\xi)$) è una derivazione dello stalk \mathcal{O}_m in \mathbb{R} cioè una mappa lineare

$$\xi: \mathcal{O}_m \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\xi([f][g]) = \xi([f])g^\sim(m) + (-1)^{p(\xi)p([f])} f^\sim(m)\xi([g])$$

Se X è un campo vettoriale definito in un intorno di m ,

$$X|_m = \text{ev}_m \circ X: [f] \mapsto (X(f))^\sim(m) \quad [f] \in \mathcal{O}_m$$

è un vettore in m della stessa parità di X . Si dimostra che i vettori tangenti in m formano un superspazio vettoriale della stessa dimensione di M , indicato con $T_m(M)$, e che, se (x^i, θ^j) sono coordinate locali e $p|q = \dim M$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m = \text{ev}_m \frac{\partial}{\partial x^i} \quad 1 \leq i \leq p$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)_m = \text{ev}_m \frac{\partial}{\partial\theta^j} \quad 1 \leq j \leq q$$

formano una base omogenea. È quindi chiaro che dato un vettore $\tau \in T_m(M)$ è sempre possibile trovare un campo vettoriale (non unico) $X \in \mathcal{T}(M)$ che estenda τ , cioè tale che⁽¹³⁾

$$X|_m = \tau \quad (1.17)$$

Se $\varphi: M \rightarrow N$ è un morfismo, $m \in M^\sim$ e $n = \varphi^\sim(m)$, allora

$$\begin{aligned} d\varphi_m: T_m(M) &\longrightarrow T_n(N) \\ \xi &\longmapsto \xi \circ \psi^* \end{aligned} \quad (1.18)$$

è un morfismo di superspazi detto *mappa tangente*. Se $(y^i) = (x^k, \theta^l)$ e $(z^j) = (t^r, \varphi^s)$ sono coordinate (pari e dispari) in un intorno di m ed n rispettivamente, dalla (1.16) si ritrova l'usuale formula

$$d\varphi_m: \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m \mapsto \sum_j \left(\frac{\partial z^j}{\partial y^i}\right)^\sim(m) \left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_n$$

(dove z^k sta per $\psi^*(z^k)$); $d\psi_m$ in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial t^r}{\partial x^k}\right)^\sim(m) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \varphi^s}{\partial \theta^l}\right)^\sim(m) \end{pmatrix}$$

in cui si evidenzia come $d\psi_m$ sia una mappa pari.

Si possono provare i seguenti risultati, analoghi a quelli classici.

Teorema 1.16. *Sia M una supervarietà e $m \in M^\sim$. Siano*

$$f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$$

p sezioni pari e q sezioni dispari definite in un intorno V di m . Sia infine ψ l'unico morfismo

$$\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^{p|q} \quad \begin{cases} \psi^*(x^i) = f_i \\ \psi^*(\theta^j) = g_j \end{cases}$$

con (x^i, θ^j) coordinate di $\mathbb{R}^{p|q}$. Sono allora fatti equivalenti

1. *le sezioni (f_i, g_j) formano un sistema di coordinate per M in m , cioè ψ è un isomorfismo di supervarietà da un intorno di m in M a un intorno di $\psi^\sim(m)$ in $\mathbb{R}^{p|q}$;*

⁽¹³⁾Se, in coordinate locali (y^i) , $\tau = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_m$, $a_i \in \mathbb{R}$, basta prendere $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial y^i}$ in un intorno di m ed estenderlo arbitrariamente altrove.

2. $d\psi_m: T_m(M) \rightarrow T_{\psi^{-1}(m)}(\mathbb{R}^{p|q})$ è un isomorfismo;

3. si ha

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{\sim}(m) \det \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{\sim}(m) \neq 0$$

Corollario 1.17. Se $\psi: M \rightarrow N$ è un morfismo tale che $d\psi_m$ è biiettivo ovunque, allora $\psi^{\sim}: M^{\sim} \rightarrow N^{\sim}$ è una mappa aperta. Se inoltre ψ^{\sim} è biiettivo, allora ψ è un isomorfismo di supervarietà.

Un morfismo ψ è detto *immersione in m* se $d\psi_m$ è iniettivo, *submersione in m* se è surgettivo.

Definizione 1.18. Se M è una supervarietà, una *sottovarietà* di M è una coppia (N, j) , con N supervarietà e $j: N \rightarrow M$ morfismo, tale che (N^{\sim}, j^{\sim}) è una sottovarietà di M^{\sim} (in senso classico) e j è un'immersione di supervarietà.

Integrazione. Diamo appena un cenno di teoria dell'integrazione su una supervarietà. Su un superdominio $U^{p|q}$ (con coordinate (x^i, θ^j)) si può introdurre l'integrale di Berezin, che è una forma lineare definita sulle sezioni a supporto compatto⁽¹⁴⁾. Per

$$s = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, q\}} s_I \theta^I \quad s_I \in C_c^\infty(U)$$

essa è data da

$$\int \left(\sum_I s_I \theta^I \right) d^p x d^q \theta = \sum_I \left(\int_U s_I d^p x \right) \left(\int \theta^I d^q \theta \right)$$

dove $\int_U d^p x$ è un usuale integrale rispetto a una qualche misura su U e

$$\int \theta^I d^q \theta = \begin{cases} 0 & \text{se } |I| < q \\ 1 & \text{se } |I| = q \text{ cioè se } I = \{1, 2, \dots, q\} \end{cases}$$

cioè $\int d^q \theta = \frac{\partial}{\partial \theta^q} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta^1}$; quindi

$$\int s = \int_U s_Q d^p x \quad Q = \{1, 2, \dots, q\}$$

La scelta di questo integrale è dovuta al buon comportamento rispetto a un cambio di variabili (vedi [17, § 4.6]). Nel prossimo paragrafo vedremo che anche per le supervarietà si può parlare di partizioni dell'unità (lemma 1.23). Grazie ad esse si può estendere l'integrazione a una generica supervarietà sprovvista di coordinate globali, esattamente come avviene per le ordinarie varietà differenziabili.

⁽¹⁴⁾Parlando di sezioni su un superdominio questa richiesta ricade sui coefficienti in $C_c^\infty(U)$, in generale vale la definizione 1.22.

1.5 Topologia del fascio

Seguendo [9], introduciamo una topologia nelle superalgebre che costituiscono il fascio su una supervarietà M . Per far questo occorre definire gli *operatori differenziali* $\text{Diff}(M)$ su M . In particolare si definiscono per induzione gli *operatori differenziali di grado k* $\text{Diff}_k(M) \subseteq \mathbf{End}(\mathcal{O}(M))$: $\text{Diff}_0(M) \cong \mathcal{O}(M)$ è lo spazio degli operatori moltiplicativi e, se si è definito $\text{Diff}_{k-1}(M)$,

$$\text{Diff}_k(M) = \{ D \in \mathbf{End}(\mathcal{O}(M)) \mid [D, f] \in \text{Diff}_{k-1}(M), \forall f \in \mathcal{O}(M) \}$$

dove $[D, f]$ è il commutatore in $\mathbf{End}(\mathcal{O}(M))$, cioè

$$[D, f] = Df - (-1)^{p(D)p(f)} fD$$

o se si preferisce

$$[D, f](s) = D(fs) - (-1)^{p(D)p(f)} fD(s) \quad s \in \mathcal{O}(M)$$

Si ha

$$\text{Diff}_{k-1}(M) \subseteq \text{Diff}_k(M) \quad (1.19)$$

e si definisce

$$\text{Diff}(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Diff}_k(M)$$

che è una sottosuperalgebra di $\mathbf{End}(\mathcal{O}(M))$. In particolare

$$\text{Diff}_1(M) = \mathcal{O}(M) \oplus \mathcal{T}(M)$$

Inoltre

$$U \mapsto \text{Diff}(U) \quad U \subseteq M^\sim \text{ aperto}$$

è un fascio di \mathcal{O}_M -moduli. Si può dimostrare che se U è un aperto che ammette $p+q$ coordinate (x^i, θ^j) , allora ogni $D \in \text{Diff}(U)$ si scrive in modo unico come una somma finita

$$D = \sum_{\gamma, J} a_{\gamma J} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^{|J|}}{\partial \theta^J} \quad a_{\gamma J} \in \mathcal{O}(U) \quad (1.20)$$

con $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $\gamma_i \in \mathbb{N}$, e $J \subseteq \{1, \dots, q\}$.

Si può quindi introdurre in ogni superalgebra $\mathcal{O}(U)$, $U \subseteq M^\sim$, una famiglia di seminorme

$$\|s\|_{K,D} = \sup_{x \in K} |(D(s))^\sim(x)| \quad (1.21)$$

con $s \in \mathcal{O}(U)$, $K \subseteq U$ compatto e $D \in \text{Diff}(U)$. Questa famiglia di seminorme induce una topologia in $\mathcal{O}(U)$ che è la più debole topologia che rende tutte le seminorme continue. Quindi tutti gli insiemi del tipo

$$\{t \in \mathcal{O}(U) \mid \|t - s\|_{K,D} < \varepsilon\}$$

con $s \in \mathcal{O}(U)$, $K \subseteq U$ compatto, $D \in \text{Diff}(U)$ e $\varepsilon > 0$ fissati sono aperti e le loro intersezioni finite formano una base per la topologia. In [9, § 2] si afferma che $\mathcal{O}(U)$ con questa topologia è uno spazio localmente convesso⁽¹⁵⁾ e completo, così come la sua complessificazione $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Inoltre, per la (1.20) e poiché U è σ -compatto, cioè esprimibile come unione al più numerabile di compatti, la topologia considerata è generata da una famiglia numerabile di seminorme e quindi è metrizzabile (vedi [12, § 5.2]). Uno spazio vettoriale localmente convesso, metrizzabile e completo è detto spazio di Fréchet.

Lemma 1.19. *Sia U un aperto con coordinate (x^i, θ^j) e $\{s_n\}$ una successione con $s_n \in \mathcal{O}(U)$. Se, usando la notazione (1.8), scriviamo*

$$s_n = \sum_I s_{nI} \theta^I \quad s_{nI} \in C^\infty(U)$$

allora $\{s_n\}$ tende a 0 in $\mathcal{O}(U)$ se e solo se, per ogni I , la successione di funzioni $\{s_{nI}\}$ tende a 0 uniformemente sui compatti con tutte le derivate.

Dimostrazione. $\{s_n\}$ tende a 0 se e solo se $\|s_n\|_{K,D}$ tende a 0 per ogni compatto $K \subseteq U$ e ogni $D \in \text{Diff}(U)$. Se D è espresso dalla (1.20), allora

$$(D(s_n))^\sim = \sum_{\gamma, I} (-1)^{\frac{|\gamma|(|I|-1)}{2}} a_{\gamma I} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} s_{nI}$$

Basta infine tener conto della definizione (1.21) delle seminorme e del fatto che le $a_{\gamma I}$ sono funzioni continue e quindi limitate su un compatto. \square

Lemma 1.20. *Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M^\sim ed $\{s_n\} \subset \mathcal{O}(M)$ una successione.*

1. $\{s_n\}$ tende a s in $\mathcal{O}(M)$ se e solo se, per ogni U_i , $\{s_n|_{U_i}\}$ tende a $s|_{U_i}$ in $\mathcal{O}(U_i)$.
2. $\{s_n\}$ è di Cauchy se e solo se, per ogni U_i , $\{s_n|_{U_i}\}$ è di Cauchy.

⁽¹⁵⁾Secondo la definizione data in [12] uno spazio localmente convesso è uno spazio vettoriale con una famiglia di seminorme che separano i punti (cioè tali che un vettore con tutte le seminorme nulle sia il vettore nullo). Con questa definizione la sua topologia naturale (cioè la più debole topologia in cui l'operazione di somma e tutte le seminorme sono continue) è di Hausdorff.

Dimostrazione. A patto di sostituire $\{s_n\}$ con $\{s_n - s\}$ possiamo supporre $s = 0$. Come prima perché $\{s_n\}$ tenda a 0 devono tendere a 0 tutte le sue seminorme. Fissiamo $D \in \text{Diff}(M)$ e $K \subseteq M^\sim$ compatto. Sia $\{V_j\}$ un ricoprimento finito di K tale che ogni V_j sia un aperto a chiusura compatta con $\overline{V_j} \subseteq U_i$ per qualche i . Se per ogni U_i , $\{s_n|_{U_i}\}$ tende a 0, allora $\|s_n\|_{K,D}$ tende a 0 poiché

$$\|s_n\|_{K,D} \leq \sum_j \|s_n\|_{K \cap \overline{V_j}, D}$$

L'altra implicazione è ovvia.

Per la seconda parte della dimostrazione si procede allo stesso modo tenendo conto che una successione è di Cauchy se, per ogni $D \in \text{Diff}(M)$ e K compatto, $\|s_n\|_{K,D}$ è una successione di Cauchy. \square

Chiaramente tutti gli operatori differenziali (e in particolare le derivazioni) sono continui con questa topologia. Vedremo tra poco che i pullback sono continui. In particolare se M è una supervarietà e $m \in M^\sim$, la mappa di valutazione (1.9) $\text{ev}_m = m^*$ è continua, così come è continuo un vettore $\tau \in T_m(M)$ poiché può sempre essere scritto come $\tau = X|_m = \text{ev}_m X$, con $X \in \mathcal{T}(M)$ opportuno (vedi (1.17)).

Proposizione 1.21. *Se $\psi: M \rightarrow N$ è un morfismo, il suo pullback*

$$\psi^*: \mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

è continuo.

Dimostrazione. Essendo una mappa lineare tra spazi metrizzabili, è sufficiente mostrare che per ogni successione $\{s_n\} \subset \mathcal{O}(N)$ tendente a 0, tende a 0 la successione $\{\psi^*(s_n)\} \subset \mathcal{O}(M)$. Si può inoltre considerare un ricoprimento $\{U_i\}$ di M^\sim tale che, per ogni i , U_i sia coordinatizzabile ed esista un aperto V_i coordinatizzabile con $\psi^\sim(U_i) \subseteq V_i$. Per il lemma 1.20 e considerando che $(\psi^*(s_n))|_{U_i} = (\psi^*(s_n|_{V_i}))|_{U_i}$ si può quindi supporre che M ed N ammettano coordinate globali (rispettivamente (y^i) e (z^j)). Al solito bisogna mostrare che, per ogni K compatto e per ogni $D \in \text{Diff}(M)$, $\|\psi^*(s_n)\|_{K,D}$ tende a 0. Se $D \in \text{Diff}_0(M)$, cioè $D = a \in \mathcal{O}(M)$,

$$\|\psi^*(s_n)\|_{K,a} = \sup_{x \in K} |(a\psi^*(s_n))^\sim(x)| = \sup_{x \in K} |a^\sim(x)| |s_n^\sim(\psi^\sim(x))|$$

tende a 0 essendo $\psi^\sim(K)$ compatto. Se $D = \frac{\partial}{\partial y^i}$ (considerando la (1.16))

$$\begin{aligned} \|\psi^*(s_n)\|_{K, \frac{\partial}{\partial y^i}} &= \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial \psi^*(s_n)}{\partial y^i} \right)^\sim(x) \right| \\ &\leq \sum_j \sup_{x \in K} \left| \left(\frac{\partial \psi^*(z^j)}{\partial y^i} \psi^* \left(\frac{\partial s_n}{\partial z^j} \right) \right)^\sim(x) \right| \end{aligned}$$

tende a 0 poiché, essendo $\frac{\partial \psi^*(z^j)}{\partial y^i} \in \mathcal{O}(M)$ e la successione $\{\frac{\partial s_n}{\partial z^j}\}$ tendente a 0, si ritrova il caso precedente. Nel caso generale D sarà della forma (1.20) e, per la definizione stessa di derivazione, ci si riconduce facilmente a una somma di termini che, per quanto visto sopra, tendono a 0. \square

Consideriamo ora il prodotto

$$M \xleftarrow{\pi_M} M \times N \xrightarrow{\pi_N} N$$

di due supervarietà. Il prodotto tensore algebrico $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$ può essere immerso in $\mathcal{O}(M \times N)$ mediante la mappa

$$\begin{aligned} \iota: \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N) &\longrightarrow \mathcal{O}(M \times N) \\ f \otimes g &\longmapsto \pi_M^*(f) \cdot \pi_N^*(g) \end{aligned} \quad (1.22)$$

(vedremo tra breve che è iniettiva). Questo continua a essere valido per ogni sottovarietà aperta e l'immersione ι commuta con le restrizioni. Considerando aperti $U \subseteq M^\sim$ e $V \subseteq N^\sim$ con coordinate rispettivamente (x^i, θ^j) e (y^k, φ^l) e due sezioni $f = \sum_I f_I \theta^I \in \mathcal{O}(U)$ e $g = \sum_J g_J \varphi^J \in \mathcal{O}(V)$, si ha chiaramente (vedi (1.14))

$$f \otimes g \mapsto \pi_U^*(f) \cdot \pi_V^*(g) = \sum_{I,J} f_I g_J \theta^I \varphi^J \quad f_I \in C^\infty(U), g_J \in C^\infty(V) \quad (1.23)$$

da cui si ricava in particolare l'iniettività della (1.22). Dalla (1.22) si può vedere che $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$ è una sottoalgebra di $\mathcal{O}(M \times N)$ con moltiplicazione

$$(f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2) = (-1)^{p(g_1)p(f_2)} (f_1 \cdot f_2) \otimes (g_1 \cdot g_2)$$

Si ha dunque un sottofascio $\mathcal{O}_M \otimes \mathcal{O}_N$ di $\mathcal{O}_{M \times N}$.

In [8] si afferma che se X ed Y sono due varietà differenziabili, allora $C^\infty(X) \otimes C^\infty(Y)$ è denso in $C^\infty(X \times Y)$ rispetto alla stessa topologia introdotta all'inizio del paragrafo. Vediamo ora che questo risultato continua ad essere valido per le supervarietà. L'estensione ai superdomini risulta immediata, mentre per il caso generale occorre introdurre le partizioni dell'unità. In [9, § 2] si dà la definizione di supporto per una sezione e si dimostra il seguente risultato.

Definizione 1.22. Se $f \in \mathcal{O}(M)$, M supervarietà, si definisce *supporto* di f (indicato con $\text{supp } f$) il complemento in M^\sim dell'insieme di tutti i punti $x \in M^\sim$ tali che $f|_V = 0$ per un qualche intorno V di x .

In particolare $\text{supp } f$ è chiuso.

Lemma 1.23. Sia M una supervarietà e $\{V_j\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di M^\sim . Allora esiste un raffinamento localmente finito $\{U_i\}$ di $\{V_j\}$ e una famiglia di sezioni $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(M)_0$ tali che $\text{supp } f_i \subseteq U_i$ e $\sum_i f_i = 1$.

Diciamo che la famiglia $\{f_i\}$ è una *partizione dell'unità subordinata al ricoprimento* $\{V_j\}$.

Proposizione 1.24. *Siano M ed N due supervarietà. Allora l'immersione del prodotto tensore algebrico $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$ in $\mathcal{O}(M \times N)$ mediante ι costituisce una sottoalgebra densa.*

Dimostrazione. Resta da provare la densità. Consideriamo innanzitutto due superdomini $U^{p|q}$ e $V^{r|s}$. Avremo

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U) &\cong C^\infty(U) \otimes \Lambda(q) \\ \mathcal{O}(V) &\cong C^\infty(V) \otimes \Lambda(s)\end{aligned}$$

Per il risultato di densità classico e poiché

$$\Lambda(q) \otimes \Lambda(s) \cong \Lambda(q + s)$$

$\mathcal{O}(U) \otimes \mathcal{O}(V)$ è denso in

$$\mathcal{O}(U \times V) \cong C^\infty(U \times V) \otimes \Lambda(q + s)$$

Consideriamo ora due supervarietà qualsiasi M ed N e fissiamo una sezione $s \in \mathcal{O}(M \times N)$. Una base dei suoi intorni è costituita dagli aperti del tipo

$$\Delta_s = \{g \in \mathcal{O}(M \times N) \mid \|g - s\|_{K_\sigma, D_\sigma} < \varepsilon_\sigma, 1 \leq \sigma \leq n\} \quad (1.24)$$

con $\varepsilon_\sigma > 0$, $D_\sigma \in \text{Diff}(M \times N)$ e $K_\sigma \subseteq M^\sim \times N^\sim$ compatto. Mostriamo che in ognuno di questi intorni esiste una sezione $t \in \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$. Per come sono definite le seminorme, possiamo in particolare considerare un unico compatto K dato dall'unione dei K_σ . Inoltre, per la (1.19), possiamo considerare tutti i D_σ dello stesso grado k .

Siano $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\beta\}$ due ricoprimenti di M^\sim e N^\sim rispettivamente, con gli U_α e i V_β aperti coordinatizzabili a chiusura compatta. Se $\{f_i\}$ e $\{g_j\}$ sono partizioni dell'unità subordinate rispettivamente a $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\beta\}$, allora $\{\varphi_{ij} = f_i \otimes g_j\}$ è una partizione dell'unità di $M \times N$ subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ di aperti coordinatizzabili a chiusura compatta. Infatti $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}(M \times N)_0$, $S_{ij} = \text{supp } \varphi_{ij} \subseteq U_\alpha \times V_\beta$ per un qualche α e β , $\{S_{ij}\}$ è un ricoprimento localmente finito di $M^\sim \times N^\sim$ e⁽¹⁶⁾

$$\sum_i f_i \otimes \sum_j g_j = \sum_{i,j} f_i \otimes g_j = 1$$

⁽¹⁶⁾Le seguenti somme non sono in generale finite, ma diventano tali considerando opportune restrizioni. Quindi ogni membro è uguale all'identità su un ricoprimento di $M^\sim \times N^\sim$ e quindi ovunque.

In particolare tutti i chiusi S_{ij} sono contenuti in compatti e quindi sono compatti. Essendo $\{S_{ij}\}$ un ricoprimento localmente finito e K compatto,

$$\Gamma = \{ (i, j) \mid K \cap S_{ij} \neq \emptyset \}$$

sarà un insieme finito. Se per ogni $(i, j) \in \Gamma$ prendiamo una sezione

$$t_{ij} \in \mathcal{O}(U_{\alpha(i)}) \otimes \mathcal{O}(V_{\beta(j)})$$

con $S_{ij} \subseteq U_{\alpha(i)} \times V_{\beta(j)}$ e definiamo⁽¹⁷⁾

$$t = \sum_{(i,j) \in \Gamma} \varphi_{ij} t_{ij} \in \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$$

allora, poiché $\sum_{i,j} \varphi_{ij} = 1$,

$$\|t - s\|_{K, D_\sigma} = \left\| \sum_{(i,j) \in \Gamma} \varphi_{ij} (t_{ij} - s) \right\|_{K, D_\sigma}$$

e poiché, per una sezione g , $\text{supp}(D_\sigma g) \subseteq \text{supp } g$

$$\leq \sum_{(i,j) \in \Gamma} \|\varphi_{ij} (t_{ij} - s)\|_{K \cap S_{ij}, D_\sigma}$$

Quindi, fissato un intorno Δ_s di s del tipo (1.24), è possibile scegliere le sezioni t_{ij} in modo che $t \in \Delta_s$, a patto di poter rendere arbitrariamente piccole le quantità

$$\max_{1 \leq \sigma \leq n} \|\varphi_{ij} (t_{ij} - s)\|_{K \cap S_{ij}, D_\sigma}$$

per $(i, j) \in \Gamma$. Procediamo per induzione, ricordando che $\mathcal{O}(U_{\alpha(i)}) \otimes \mathcal{O}(V_{\beta(j)})$ è denso in $\mathcal{O}(U_{\alpha(i)} \times V_{\beta(j)})$. Se $D_1, \dots, D_n \in \text{Diff}_0(M \times N) = \mathcal{O}(M \times N)$ è ovvio. Supponiamo sia vero per $D_1, \dots, D_n \in \text{Diff}_{k-1}(M \times N)$; allora, poiché

$$[D_\sigma, \varphi_{ij}] = D_\sigma \varphi_{ij} - \varphi_{ij} D_\sigma \in \text{Diff}_{k-1}(M \times N)$$

⁽¹⁷⁾Siano $f \in \mathcal{O}(V)$ e $g \in \mathcal{O}(U)$ con $V \subseteq U$ e $\text{supp } g \subseteq V$. Allora $f(g|_V) \in \mathcal{O}(V)$. Per la definizione 1.5 esisterà $h \in \mathcal{O}(U)$ tale che

$$\begin{cases} h|_{(U \setminus \text{supp } g)} = 0 \\ h|_V = f(g|_V) \end{cases}$$

che indichiamo con fg .

e

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{ij}(t_{ij} - s)\|_{K \cap S_{ij}, D_\sigma} &= \sup_{x \in K \cap S_{ij}} |(D_\sigma(\varphi_{ij}(t_{ij} - s)))^\sim(x)| \\
&\leq \|\varphi_{ij}(t_{ij} - s)\|_{K \cap S_{ij}, [D_\sigma, \varphi_{ij}]} \\
&\quad + \sup_{x \in K \cap S_{ij}} |(\varphi_{ij} D_\sigma(t_{ij} - s))^\sim(x)| \\
&\leq \|\varphi_{ij}(t_{ij} - s)\|_{K \cap S_{ij}, [D_\sigma, \varphi_{ij}]} \\
&\quad + \sup_{x \in K \cap S_{ij}} |\varphi_{ij}^\sim(x)| \|t_{ij} - s\|_{K \cap S_{ij}, D_\sigma}
\end{aligned}$$

è vero per $D_1, \dots, D_n \in \text{Diff}_k(M \times N)$. \square

Questo risultato può essere utile nei calcoli poiché due mappe continue da $\mathcal{O}(M \times N)$ in un qualche spazio topologico sono uguali se e solo se coincidono su $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$. Nell'ultima parte del capitolo introduciamo alcune mappe di questo tipo che ci serviranno nel seguito del discorso.

Consideriamo i morfismi $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, $\psi: N_1 \rightarrow N_2$ e

$$\varphi \times \psi: M_1 \times N_1 \rightarrow M_2 \times N_2$$

definito da

$$\begin{array}{ccccc}
& & M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2 \\
& \nearrow \pi_{M_1} & & & \nearrow \pi_{M_2} \\
M_1 \times N_1 & \xrightarrow{\varphi \times \psi} & M_2 \times N_2 & & \\
& \searrow \pi_{N_1} & & & \searrow \pi_{N_2} \\
& & N_1 & \xrightarrow{\psi} & N_2
\end{array}$$

Passando ai pullback in particolare si ha che

$$\begin{aligned}
\pi_{M_1}^* \varphi^* &= (\varphi \times \psi)^* \pi_{M_2}^* \\
\pi_{N_1}^* \psi^* &= (\varphi \times \psi)^* \pi_{N_2}^*
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(M_2) \otimes \mathcal{O}(N_2) & \xrightarrow{\varphi^* \otimes \psi^*} & \mathcal{O}(M_1) \otimes \mathcal{O}(N_1) \\
\downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
\mathcal{O}(M_2 \times N_2) & \xrightarrow{(\varphi \times \psi)^*} & \mathcal{O}(M_1 \times N_1)
\end{array}$$

commuta poiché

$$\begin{array}{ccc}
 f \otimes g & \longmapsto & \varphi^*(f) \otimes \psi^*(g) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{M_2}^*(f) \cdot \pi_{N_2}^*(g) & \longmapsto & \pi_{M_1}^*(\varphi^*(f)) \cdot \pi_{N_1}^*(\psi^*(g)) \\
 & & = \\
 & & (\varphi \times \psi)^*(\pi_{M_2}^*(f) \cdot \pi_{N_2}^*(g))
 \end{array}$$

(essendo i pullback mappe pari, qui non ci sono problemi di segni). Quindi

$$(\varphi \times \psi)^*|_{\mathcal{O}(M_2) \otimes \mathcal{O}(N_2)} = \varphi^* \otimes \psi^*$$

e poiché $(\varphi \times \psi)^*$ è una mappa continua e $\mathcal{O}(M_2) \otimes \mathcal{O}(N_2)$ è denso in $\mathcal{O}(M_2 \times N_2)$ avremo

$$(\varphi \times \psi)^* = \overline{\varphi^* \otimes \psi^*} \quad (1.25)$$

(dove $\overline{\varphi^* \otimes \psi^*}$ è la chiusura di $\varphi^* \otimes \psi^*$). Nel seguito, per comodità, scriveremo $\varphi^* \otimes \psi^*$ al posto di $\overline{\varphi^* \otimes \psi^*}$.

Sia N una supervarietà e $X \in \mathcal{T}(N)$. Su ogni aperto $V \subseteq N^\sim$ con coordinate (z^j) avremo $X|_V = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial z^j}$. Se M è un'altra supervarietà, definiamo il campo vettoriale $I \otimes X \in \mathcal{T}(M \times N)$ come quel campo che ristretto ad aperti del tipo $U \times V$, con $U \subseteq M^\sim$ e $V \subseteq N^\sim$ coordinatizzabili con coordinate rispettivamente (y^i) e (z^j) , risulta

$$(I \otimes X)|_{U \times V} = \sum_j \pi_V^*(a_j) \frac{\partial}{\partial z^j} \quad (1.26)$$

(dove z^j sta per $\pi_V^*(z^j)$). Chiaramente se X ha parità definita, $I \otimes X$ avrà la stessa parità. La definizione è ben posta poiché non dipende dalla scelta delle coordinate. Infatti, per un cambio di coordinate del tipo $(y^i) \rightarrow (y'^k)$ in U e $(z^j) \rightarrow (z'^l)$ in V (nel senso della (1.13)), dalla (1.16) avremo (sottintendendo i pullback)

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \sum_l \frac{\partial z'^l}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z'^l}$$

su V e

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \sum_k \frac{\partial y'^k}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial y'^k} + \sum_l \frac{\partial z'^l}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z'^l} = \sum_l \frac{\partial z'^l}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z'^l}$$

su $U \times V$, poiché $\frac{\partial y'^k}{\partial z^j} = 0$ per ogni j e k .

Confrontando la (1.23) e la (1.26) si vede che $I \otimes X$ agisce sugli elementi decomponibili come

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X: \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N) & \longrightarrow & \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N) \\
 f \otimes g & \longmapsto & (-1)^{p(X)p(f)} f \otimes X(g)
 \end{array} \quad (1.27)$$

Essendo le derivazioni continue, $I \otimes X: \mathcal{O}(M \times N) \rightarrow \mathcal{O}(M \times N)$ è proprio la chiusura della mappa (1.27) e ciò, tra l'altro, giustifica la notazione usata. In modo del tutto analogo si può definire il campo vettoriale $X \otimes I \in \mathcal{T}(N \times M)$ che sarà la chiusura di

$$\begin{aligned} X \otimes I: \mathcal{O}(N) \otimes \mathcal{O}(M) &\longrightarrow \mathcal{O}(N) \otimes \mathcal{O}(M) \\ f \otimes g &\longmapsto X(f) \otimes g \end{aligned}$$

Siano al solito M ed N supervarietà a sia $n \in N^\sim$. Definiamo

$$I \otimes \text{ev}_n: \mathcal{O}(M \times N) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

come il pullback di

$$\langle \text{id}_M, \hat{n} \rangle: M \rightarrow M \times N$$

(\hat{n} definito dalla (1.11)), o analogamente di

$$\text{id}_M \times n: M \times \mathbb{R}^{0|0} \rightarrow M \times N$$

essendo $M \cong M \times \mathbb{R}^{0|0}$. In termini di diagrammi commutativi avremo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(M) & & \\ \pi_M^* \downarrow & \searrow \text{id}_M^* = I & \\ \mathcal{O}(M \times N) & \xrightarrow[\text{I} \otimes \text{ev}_n]{\langle \text{id}_M, \hat{n} \rangle^*} & \mathcal{O}(M) \\ \pi_N^* \uparrow & \nearrow \hat{n}^* = 1 \cdot \text{ev}_n & \\ \mathcal{O}(N) & & \end{array}$$

Chiaramente $I \otimes \text{ev}_n$ è continuo (è il pullback di un morfismo) e per la (1.25) è la chiusura di

$$\begin{aligned} I \otimes \text{ev}_n: \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N) &\longrightarrow \mathcal{O}(M) \otimes \mathbb{R} \cong \mathcal{O}(M) \\ f \otimes g &\longmapsto f \cdot \text{ev}_n(g) \end{aligned}$$

Volendo conoscere l'azione di $I \otimes \text{ev}_n$ in coordinate locali, consideriamo aperti $U \subseteq M^\sim$ e $V \subseteq N^\sim$ con coordinate rispettivamente $(\alpha^r) = (x^i, \theta^j)$ e $(\beta^s) = (y^j, \varphi^k)$. Per il teorema 1.12, è sufficiente conoscere l'azione di $I \otimes \text{ev}_n$ sulle coordinate di $U \times V$ e poiché

$$\begin{aligned} (I \otimes \text{ev}_n)(\pi_M^*(\alpha^r)) &= \alpha^r \\ (I \otimes \text{ev}_n)(\pi_N^*(\beta^s)) &= 1 \cdot \text{ev}_n(\beta^s) \end{aligned}$$

avremo

$$(I \otimes \text{ev}_n): \sum_{I,J} f_{IJ}(\cdot, \cdot) \theta^I \varphi^J \mapsto \sum_I f_{I\emptyset}(\cdot, n) \theta^I \quad f_{IJ} \in C^\infty(U \times V) \quad (1.28)$$

Analogamente definiamo

$$\text{ev}_n \otimes I: \mathcal{O}(N \times M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

come il pullback di

$$\langle \hat{n}, \text{id}_M \rangle: M \rightarrow N \times M$$

Fissiamo ora un punto $n \in N^\sim$ e un vettore $\tau \in T_n(N)$ e definiamo

$$I \otimes \tau: \mathcal{O}(M \times N) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

come

$$I \otimes \tau = (I \otimes \text{ev}_n)(I \otimes X)$$

con $X \in \mathcal{T}(N)$ tale che $X|_n = \tau$ e

$$\tau \otimes I: \mathcal{O}(N \times M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

come

$$\tau \otimes I = (\text{ev}_n \otimes I)(X \otimes I)$$

La definizione non dipende dalla scelta di X (sugli elementi decomponibili è ovvio). Per $f \otimes g \in \mathcal{O}(M) \otimes (N)$ avremo

$$\begin{aligned} (I \otimes \tau)(f \otimes g) &= (-1)^{p(\tau)p(f)} f \otimes \tau(g) \\ (\tau \otimes I)(f \otimes g) &= \tau(f) \otimes g \end{aligned}$$

Proposizione 1.25. *Per ogni sezione $s \in \mathcal{O}(M \times N)$ fissata,*

$$\begin{aligned} N^\sim &\longrightarrow \mathcal{O}(M) \\ x &\longmapsto (I \otimes \text{ev}_x)(s) \end{aligned}$$

è una mappa continua. Inoltre se $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow N^\sim$ è una curva differenziabile,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{O}(M) \\ t &\longmapsto (I \otimes \text{ev}_{\gamma(t)})(s) \end{aligned}$$

è derivabile e se γ è tangente per $t = 0$ ad un vettore $\tau \in T_{\bar{x}}(N^\sim)$, allora

$$\left(\frac{d}{dt} (I \otimes \text{ev}_{\gamma(t)})(s) \right)_{t=0} = (I \otimes dj_{\bar{x}}(\tau))(s)$$

con $j: N^\sim \hookrightarrow N$. Analogamente per ogni $s' \in \mathcal{O}(N \times M)$, $x \mapsto (\text{ev}_x \otimes I)(s')$ è una mappa continua e

$$\left(\frac{d}{dt} (\text{ev}_{\gamma(t)} \otimes I)(s') \right)_{t=0} = (dj_{\bar{x}}(\tau) \otimes I)(s')$$

Dimostrazione. Fissiamo $\bar{x} \in N^\sim$ e sia V un intorno coordinatizzabile di \bar{x} . Sia $\{x_n\} \subset V$ una successione tendente a \bar{x} (nella topologia della varietà differenziabile N^\sim). Siano

$$\begin{aligned} f_n &= (I \otimes \text{ev}_{x_n})(s) \\ f &= (I \otimes \text{ev}_{\bar{x}})(s) \end{aligned}$$

Mostriamo che la successione $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(M)$ tende a f . Sia $U \subseteq M^\sim$ un aperto coordinatizzabile e sia

$$s|_{U \times V} = \sum_{I,J} s_{IJ} \theta^I \varphi^J \quad s_{IJ} \in C^\infty(U \times V)$$

dove le θ e le φ sono coordinate dispari rispettivamente di U e V . Poiché per $x \in V$

$$((I \otimes \text{ev}_x)(s))|_U = (I \otimes \text{ev}_x)(s|_{U \times V})$$

per la (1.28) avremo

$$\begin{aligned} f_n|_U &= \sum_I f_{nI} \theta^I & f_{nI}(\cdot) &= s_{I\emptyset}(\cdot, x_n) \\ f|_U &= \sum_I f_I \theta^I & f_I(\cdot) &= s_{I\emptyset}(\cdot, \bar{x}) \end{aligned}$$

Per ogni I , poiché $s_{I\emptyset} \in C^\infty(U \times V)$, la successione di funzioni $\{f_{nI}\}$ tende a f_I uniformemente sui compatti con tutte le derivate. Quindi, per il lemma 1.19, $\{f_n|_U\}$ tende a $f|_U$ per ogni aperto coordinatizzabile U e, per il lemma 1.20, $\{f_n\}$ tende a f .

Per mostrare la derivabilità consideriamo una successione $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tendente a 0 (con $\gamma(t_n) \in V$, V intorno coordinatizzabile di $\bar{x} = \gamma(0)$) e

$$g_n = \frac{(I \otimes \text{ev}_{\gamma(t_n)})(s) - (I \otimes \text{ev}_{\gamma(0)})(s)}{t_n}$$

Avremo

$$g_n|_U = \sum_I g_{nI} \theta^I \quad g_{nI}(\cdot) = \frac{s_{I\emptyset}(\cdot, \gamma(t_n)) - s_{I\emptyset}(\cdot, \gamma(0))}{t_n}$$

Chiaramente $\{g_n|_U\}$ tenderà a

$$h = \sum_I h_I \theta^I \in \mathcal{O}(U) \quad h_I = \left(\frac{d}{dt} s_{I\emptyset}(\cdot, \gamma(t)) \right)_{t=0}$$

Perciò, per ogni U coordinatizzabile, $\{g_n|_U\}$ converge e quindi è di Cauchy. Per il lemma 1.20, $\{g_n\}$ è di Cauchy ed essendo $\mathcal{O}(M)$ completo, converge.

Infine, per la (1.18), $dj_{\bar{x}}(\tau) = \tau \circ j^*$ e poiché, per $v \in \mathcal{O}(N)$, $j^*(v) = v^\sim$

$$dj_{\bar{x}}(\tau)(v) = \tau(v^\sim) = \left(\frac{d}{dt} v^\sim(\gamma(t)) \right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} \text{ev}_{\gamma(t)}(v) \right)_{t=0}$$

e quindi, per $u \otimes v \in \mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$,

$$\left(\frac{d}{dt} (I \otimes \text{ev}_{\gamma(t)})(u \otimes v) \right)_{t=0} = u \otimes dj_{\bar{x}}(\tau)(v) = (I \otimes dj_{\bar{x}}(\tau))(u \otimes v)$$

(ricordiamo $dj_{\bar{x}}(\tau) \in T_{\bar{x}}(N)_0$). Per la densità di $\mathcal{O}(M) \otimes \mathcal{O}(N)$, questo completa la dimostrazione.

Per quanto riguarda la mappa $x \mapsto (\text{ev}_x \otimes I)(s')$, $s' \in \mathcal{O}(N \times M)$, si procede allo stesso identico modo. \square

Sia $\tau \in T_n(N)$, $n \in N^\sim$. Se $\varphi: M \times N \rightarrow M$ è un morfismo tale che⁽¹⁸⁾

$$\varphi\langle \text{id}_M, \hat{n} \rangle = \text{id}_M \quad (1.29)$$

cioè $(I \otimes \text{ev}_n)\varphi^* = I$, allora

$$(I \otimes \tau)\varphi^*: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

è una derivazione di $\mathcal{O}(M)$, cioè un campo vettoriale su M , della stessa parità di τ . Infatti se $f, g \in \mathcal{O}(M)$, ricordando che i pullback sono omomorfismi di superalgebre, $I \otimes \text{ev}_n$ è un pullback e $I \otimes X$ è una derivazione di $\mathcal{O}(M \times N)$, abbiamo

$$\begin{aligned} (I \otimes \tau)\varphi^*(f \cdot g) &= (I \otimes \text{ev}_n)(I \otimes X)(\varphi^*(f) \cdot \varphi^*(g)) \\ &= (I \otimes \text{ev}_n)\left((I \otimes X)\varphi^*(f) \cdot \varphi^*(g) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p(X)p(f)} \varphi^*(f) \cdot (I \otimes X)\varphi^*(g) \right) \\ &= ((I \otimes \tau)\varphi^*(f)) \cdot g + (-1)^{p(X)p(f)} f \cdot ((I \otimes \tau)\varphi^*(g)) \end{aligned}$$

Analogamente se $\varphi': N \times M \rightarrow M$ è un morfismo tale che

$$\varphi'\langle \hat{n}, \text{id}_M \rangle = \text{id}_M \quad (1.30)$$

allora

$$(\tau \otimes I)\varphi'^*: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{O}(M)$$

è una derivazione di $\mathcal{O}(M)$.

⁽¹⁸⁾Vedremo come i morfismi che implementano la moltiplicazione di un supergruppo o l'azione di un supergruppo su una supervarietà soddisfano la (1.29) o la (1.30).

Capitolo 2

Supergruppi di Lie

In questo capitolo, seguendo [17, cap. 7], diamo una definizione di supergruppo di Lie e di azione su una supervarietà. Successivamente vediamo come il lemma di Yoneda, un'importante risultato della teoria delle categorie, permetta di estendere il concetto di "punto" ad oggetti come i supergruppi che non sono insiemi. Infine, sempre seguendo [17, cap. 7], vediamo che, in modo del tutto analogo a quanto avviene nel caso classico, ad ogni supergruppo di Lie è associata una superalgebra di Lie delle stesse dimensioni.

2.1 Definizione

Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile che è anche un gruppo la cui moltiplicazione e inverso sono mappe differenziabili, cioè morfismi di varietà. Vogliamo definire l'analogo per le supervarietà. Poiché una supervarietà non è semplicemente un'insieme (vedi osservazione 1.7), non ha senso parlare di moltiplicazione tra elementi della supervarietà. Si possono invece definire due morfismi (di supervarietà) m ed i che soddisfino gli stessi assiomi della moltiplicazione ed inverso di un gruppo classico. Bisogna inoltre fissare un'identità. Nel caso classico l'identità è un elemento del gruppo che può essere pensato come un morfismo da \mathbb{R}^0 al gruppo. Allo stesso modo per una supervarietà si può fissare un punto della varietà ridotta cioè, come abbiamo visto con il lemma 1.11, un morfismo da $\mathbb{R}^{0|0}$ alla supervarietà e dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. Un *supergruppo di Lie reale* G è una supervarietà liscia reale con tre morfismi

$$m: G \times G \rightarrow G$$

$$i: G \rightarrow G$$

$$e: \mathbb{R}^{0|0} \rightarrow G$$

detti *moltiplicazione*, *inverso* e *unità* che rendano commutativi i seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \times G & & \\
 & \nearrow \text{id}_G \times m & & \searrow m & \\
 G \times G \times G & & & & G \\
 & \searrow m \times \text{id}_G & & \nearrow m & \\
 & & G \times G & & \\
 & & & & \\
 & & G \times G & & \\
 & \nearrow \langle \text{id}_G, \hat{e} \rangle & & \searrow m & \\
 G & \xrightarrow{\text{id}_G} & G & & G \\
 & \searrow \langle \hat{e}, \text{id}_G \rangle & & \nearrow m & \\
 & & G \times G & & \\
 & & & & \\
 & & G \times G & & \\
 & \nearrow \langle \text{id}_G, i \rangle & & \searrow m & \\
 G & \xrightarrow{\hat{e}} & G & & G \\
 & \searrow \langle \hat{e}, \text{id}_G \rangle & & \nearrow m & \\
 & & G \times G & &
 \end{array}$$

dove, come nella (1.11), $\hat{e} = e \circ !_G$, cioè tali che

$$m \circ (\text{id}_G \times m) = m \circ (m \times \text{id}_G) \quad (2.1a)$$

$$m \circ \langle \text{id}_G, \hat{e} \rangle = m \circ \langle \hat{e}, \text{id}_G \rangle = \text{id}_G \quad (2.1b)$$

$$m \circ \langle \text{id}_G, i \rangle = m \circ \langle i, \text{id}_G \rangle = \hat{e} \quad (2.1c)$$

Se G è una varietà differenziabile classica si ritrova l'usuale definizione di gruppo di Lie. In questo caso infatti, come detto sopra, m ed i sono le due mappe differenziabili

$$m: (x, y) \mapsto xy$$

$$i: x \mapsto x^{-1}$$

con $x, y \in G$. Prendiamo $x, y, z \in G$; dalla (2.1a) ricaviamo

$$(m \circ (\text{id}_G \times m))(x, y, z) = (m \circ (m \times \text{id}_G))(x, y, z)$$

$$m(x, yz) = m(xy, z)$$

$$x(yz) = (xy)z$$

cioè l'associatività della moltiplicazione. Per quanto riguarda la (2.1b), notiamo innanzitutto che $\hat{e}: x \mapsto e$. Quindi, per $x \in G$, abbiamo

$$\text{id}_G(x) = (m \circ \langle \text{id}_G, \hat{e} \rangle)(x)$$

$$x = m(x, e)$$

$$x = xe$$

e $x = ex$, cioè la definizione di identità. Infine dalla (2.1c) troviamo

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

cioè la definizione di inverso.

Nel caso di G supergruppo di Lie, notiamo in particolare che G^\sim è reso gruppo di Lie dai morfismi ridotti m^\sim , i^\sim ed e^\sim . Infatti basta ricordare che

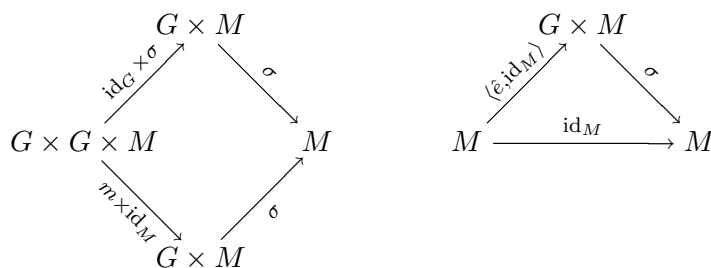
$$(G \times G)^\sim \cong G^\sim \times G^\sim$$

e osservare che, essendo l'assegnazione $\varphi \mapsto \varphi^\sim$ (φ morfismo) funtoriale, cioè commutante con le composizioni, i morfismi ridotti soddisfano le stesse relazioni con G^\sim al posto di G .

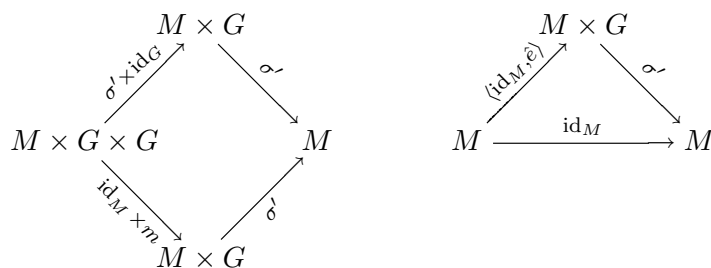
Un *morfismo di supergruppi di Lie* è un morfismo di supervarietà che commuta con m , i ed e . Chiaramente l'immersione $j: G^\sim \hookrightarrow G$ è un morfismo di supergruppi. Se $\varphi: G \rightarrow H$ è un morfismo di supergruppi di Lie, allora il morfismo ridotto $\varphi^\sim: G^\sim \rightarrow H^\sim$ è un morfismo di gruppi di Lie; infatti come sopra $\varphi \mapsto \varphi^\sim$ è funtoriale, quindi se $\varphi \circ i_G = i_H \circ \varphi$, allora $\varphi^\sim \circ i_{G^\sim} = i_{H^\sim} \circ \varphi^\sim$ e così via.

Per definire un'azione di un supergruppo di Lie G su una supervarietà M si procede allo stesso modo. Se G ed M sono oggetti classici, un'azione è una mappa differenziabile $G \times M \rightarrow M$ che soddisfa certe relazioni. Il caso supergeometrico è del tutto analogo.

Definizione 2.2. Un'azione sinistra di un supergruppo di Lie G su una supervarietà M è un morfismo $\sigma: G \times M \rightarrow M$ tale che commutino



con $\hat{e} = e \circ !_M$. Un'azione destra di G su M è un morfismo $\sigma': M \times G \rightarrow M$ tale che commutino



Come prima verifichiamo che per oggetti classici si ritrova l'usuale definizione. Per esempio per un'azione sinistra $\sigma: (x, m) \mapsto x.m$ si ha

$$\begin{aligned} (\sigma \circ (\text{id}_G \times \sigma))(x, y, m) &= (\sigma \circ (\sigma \times \text{id}_M))(x, y, m) \\ \sigma(x, y.m) &= \sigma(xy, m) \\ x.(y.m) &= (xy).m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_M(m) &= (\sigma \circ \langle \hat{e}, \mathrm{id}_M \rangle)(m) \\ m &= \sigma(e, m) \\ m &= e.m\end{aligned}$$

con $x, y \in G$ ed $m \in M$.

Come già detto sopra, non ha senso parlare di moltiplicazione tra elementi di un supergruppo di Lie. Si può però generalizzare il concetto di punto per dar senso a una scrittura del tipo

$$\begin{aligned}m: G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy\end{aligned}$$

anche nel caso supergeometrico. Per far questo si introduce il funtore dei punti di una supervarietà. In questa visione un “punto” della supervarietà G è un morfismo $S \rightarrow G$ da una qualche supervarietà S . Si estende cioè l’idea che i punti della varietà ridotta G^\sim siano morfismi $\mathbb{R}^{0|0} \rightarrow G$ e ciò permette di esplorare anche la parte dispari del fascio su G . Precisamente il funtore dei punti di G è l’assegnazione

$$S \mapsto \mathrm{Hom}(S, G) \quad S \text{ supervarietà}$$

Il fatto che il funtore dei punti porti la stessa informazione della supervarietà stessa è assicurato dal lemma di Yoneda, un risultato di teoria delle categorie valido in un contesto molto più ampio. Seguendo [13] vediamo i risultati del lemma di Yoneda utili ai nostri scopi.

2.2 Il lemma di Yoneda

Nota 2.3. Per quanto si dirà nel seguito è necessario che nelle categorie considerate, presi due oggetti X e Y , i morfismi tra essi, indicati con $\mathrm{Hom}(X, Y)$, costituiscano un insieme. Tutte le categorie di nostro interesse soddisfano questa condizione e sono dette *localmente piccole*.

Ricordiamo che date due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} , si dice *funtore covariante* una legge $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ che assegna ad ogni oggetto X in \mathbf{C} un oggetto $F(X)$ in \mathbf{D} e ad ogni morfismo f in \mathbf{C} un morfismo $F(f)$ in \mathbf{D} in modo che

1. se $f: X \rightarrow Y$ morfismo in \mathbf{C} , allora $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$;
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ per ogni f, g morfismi in \mathbf{C} ;
3. $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni oggetto X in \mathbf{C} .

Se dice *funtore controvariante* un’analogo legge $F': \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ che soddisfi

1'. se $f: X \rightarrow Y$ morfismo in \mathbf{C} , allora $F'(f): F'(Y) \rightarrow F'(X)$;

2'. $F'(f \circ g) = F'(g) \circ F'(f)$ per ogni f, g morfismi in \mathbf{C} ;

3'. $F'(\text{id}_X) = \text{id}_{F'(X)}$ per ogni oggetto X in \mathbf{C} .

Notiamo che un funtore mappa sempre isomorfismi in isomorfismi.

Un funtore covariante $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ si dice

- *fedele* se per ogni $f, g: X \rightarrow Y$ in \mathbf{C} , $F(f) = F(g)$ implica $f = g$;
- *pieno* se per ogni coppia di oggetti X e Y in \mathbf{C} e ogni $h: F(X) \rightarrow F(Y)$ in \mathbf{D} , esiste $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{C} tale che $F(f) = h$.

Cioè per ogni coppia di oggetti X e Y

$$F|_{\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)}: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

è iniettivo se F è fedele ed è surgettivo se F è pieno. Un funtore fedele e pieno costituisce quindi una famiglia di biezioni fra $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ al variare di X ed Y in \mathbf{C} . Non si dice nulla sull'inniettività o surgettività sugli oggetti.

Dati due funtori covarianti (controvarianti) $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, si dice *trasformazione naturale* una legge $\Phi: F \rightarrow G$ che ad ogni oggetto X in \mathbf{C} assegna un morfismo $\Phi_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathbf{D} in modo che

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y) \end{array} \quad (2.2)$$

commuti per ogni morfismo $f: X \rightarrow Y$ ($f: Y \rightarrow X$) in \mathbf{C} .

Fissate due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} , i funtori controvarianti fra esse formano una categoria $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]_c$ in cui gli oggetti sono i funtori stessi e i morfismi le trasformazioni naturali tra essi⁽¹⁾. La trasformazione identica per un funtore F è data da $(\text{id}_F)_X = \text{id}_{F(X)}$. La composizione di due trasformazioni naturali $\Phi: F \rightarrow G$ e $\Psi: G \rightarrow H$ è invece data da $(\Psi \circ \Phi)_X = \Psi_X \circ \Phi_X$. Un *isomorfismo naturale* è un isomorfismo in questa categoria. Una trasformazione naturale Φ è un isomorfismo se e solo se Φ_X è un isomorfismo per ogni X ; in questo caso $(\Phi^{-1})_X = (\Phi_X)^{-1}$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾Ovviamente si può fare un discorso analogo per i funtori covarianti tra \mathbf{C} e \mathbf{D} , ma non serve al fine di enunciare il lemma di Yoneda.

⁽²⁾Se $\Phi: F \rightarrow G$ è un isomorfismo naturale, allora $(\Phi^{-1})_X \circ \Phi_X = \text{id}_{F(X)}$ e $\Phi_X \circ (\Phi^{-1})_X = \text{id}_{G(X)}$. Viceversa se $\Phi: F \rightarrow G$ è una trasformazione naturale con Φ_X isomorfismo per ogni X , $\tilde{\Phi}_X = (\Phi_X)^{-1}$ è una trasformazione naturale da G a F in

Sia **Set** la categoria degli insiemi e consideriamo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}: \mathbf{C} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X, Y & \longmapsto & \text{Hom}(X, Y) \\ \uparrow f, g \quad \downarrow & \longmapsto & \downarrow g \circ - \circ f \\ X', Y' & \longmapsto & \text{Hom}(X', Y') \end{array}$$

dove

$$\begin{array}{ccc} g \circ - \circ f: \text{Hom}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(X', Y') \\ \varphi & \longmapsto & g \circ \varphi \circ f \end{array}$$

Si dice che Hom è un bifuntore controvariante nella prima variabile e covariante nella seconda, nel senso che, fissato un oggetto Y in \mathbf{C} ,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\cdot, Y): \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \longmapsto & \text{Hom}(X, Y) \\ \uparrow f & \longmapsto & \downarrow - \circ f \\ X' & \longmapsto & \text{Hom}(X', Y) \end{array} \quad (2.3)$$

è un funtore controvariante e analogamente, fissato un oggetto X , $\text{Hom}(X, \cdot)$ è un funtore covariante.

Indichiamo $\text{Hom}(X, Y)$ con $Y(X)$ e il funtore $\text{Hom}(\cdot, Y)$ con $Y(\cdot)$. Al variare di Y in \mathbf{C} si trova una famiglia di funtori controvarianti

$$Y(\cdot): \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

In questo modo si definisce un funtore covariante

$$\begin{array}{ccc} h: \mathbf{C} & \longrightarrow & [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]_{\mathbf{C}} \\ Y & \longmapsto & Y(\cdot) \\ \downarrow g & \longmapsto & \downarrow g \circ - \\ Y' & \longmapsto & Y'(\cdot) \end{array} \quad (2.4)$$

quanto, riferendosi alla (2.2), si ha

$$\begin{aligned} \Phi_Y \circ F(f) &= G(f) \circ \Phi_X \\ (\Phi_Y)^{-1} \circ \Phi_Y \circ F(f) \circ (\Phi_X)^{-1} &= (\Phi_Y)^{-1} \circ G(f) \circ \Phi_X \circ (\Phi_X)^{-1} \\ F(f) \circ (\Phi_X)^{-1} &= (\Phi_Y)^{-1} \circ G(f) \end{aligned}$$

Quindi $\tilde{\Phi} \circ \Phi = \text{id}_F$ e $\Phi \circ \tilde{\Phi} = \text{id}_G$, cioè $\tilde{\Phi}$ è l'inverso di Φ .

dove $g \circ -$ è la trasformazione naturale definita da

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi \dashv \longrightarrow & g \circ \varphi & \\
 \downarrow & \begin{array}{ccc} Y(X) & \xrightarrow{g \circ -} & Y'(X) \\ \downarrow - \circ f & & \downarrow - \circ f \\ Y(X') & \xrightarrow{g \circ -} & Y'(X') \end{array} & \downarrow \\
 \varphi \circ f \dashv \longrightarrow & g \circ \varphi \circ f &
 \end{array}$$

Il funtore h è chiaramente iniettivo sugli oggetti.

Lemma 2.4 (di Yoneda). *Il funtore $h: \mathbf{C} \rightarrow [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]_c$ è pieno e fedele, cioè per ogni coppia di oggetti X e Y in \mathbf{C}*

$$\mathrm{Hom}_{[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]_c}(X(\cdot), Y(\cdot)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$$

Dimostrazione. Fissati due oggetti X e Y in \mathbf{C} , consideriamo la mappa $h_{X,Y} = h|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$

$$\begin{array}{ccc}
 h_{X,Y}: \mathrm{Hom}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X(\cdot), Y(\cdot)) \\
 \varphi & \dashv \longrightarrow & \varphi \circ -
 \end{array}$$

e definiamo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{h}_{X,Y}: \mathrm{Hom}(X(\cdot), Y(\cdot)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X, Y) \\
 \Phi & \dashv \longrightarrow & \Phi_X(\mathrm{id}_X)
 \end{array}$$

Mostriamo che sono una la mappa inversa dell'altra.

Si ha infatti

$$\varphi \xrightarrow{h_{X,Y}} \varphi \circ - \xrightarrow{\tilde{h}_{X,Y}} \varphi \circ \mathrm{id}_X = \varphi$$

per $\varphi: X \rightarrow Y$ e

$$\Phi \xrightarrow{\tilde{h}_{X,Y}} \Phi_X(\mathrm{id}_X) \xrightarrow{h_{X,Y}} \Phi_X(\mathrm{id}_X) \circ -$$

per $\Phi: X(\cdot) \rightarrow Y(\cdot)$. Consideriamo un oggetto S e un morfismo $\chi: S \rightarrow X$ in \mathbf{C} . Per le (2.2) e (2.3)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{id}_X \dashv \longrightarrow & \Phi_X(\mathrm{id}_X) & \\
 \downarrow & \begin{array}{ccc} X(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & Y(X) \\ \downarrow - \circ \chi & & \downarrow - \circ \chi \\ X(S) & \xrightarrow{\Phi_S} & Y(S) \end{array} & \downarrow \\
 \chi \dashv \longrightarrow & \Phi_S(\chi) & \Phi_X(\mathrm{id}_X) \circ \chi
 \end{array}$$

commuta e quindi $\Phi_X(\mathrm{id}_X) \circ - = \Phi$. \square

Il funtore h prende il nome di *immersione di Yoneda* e permette di vedere \mathbf{C} come una sottocategoria piena⁽³⁾ di $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]_c$.

In generale $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]_c$ è più grande di \mathbf{C} . Un funtore $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ si dice *rappresentabile* se è naturalmente isomorfo a un funtore nell'immagine dell'immersione di Yoneda, cioè a un funtore del tipo $X(\cdot)$, per un qualche oggetto X di \mathbf{C} . Se $X(\cdot)$ è isomorfo a un altro funtore $X'(\cdot)$, per il lemma di Yoneda, X e X' sono isomorfi. Quindi un funtore rappresentabile identifica un oggetto di \mathbf{C} a meno di isomorfismi. Per esempio se X e Y sono due oggetti in \mathbf{C} per cui esiste prodotto binario, il funtore $T \mapsto X(T) \times Y(T)$ è rappresentato da $X \times Y$ (definito a sua volta a meno di isomorfismi), cioè è naturalmente isomorfo a $T \mapsto (X \times Y)(T)$. Infatti per come è definito il prodotto binario

$$\begin{aligned} X(T) \times X(T) &\longrightarrow (X \times Y)(T) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

è una biiezione e $\langle \varphi, \psi \rangle \circ f = \langle \varphi \circ f, \psi \circ f \rangle$ per ogni $f: T' \rightarrow T$.

2.3 Il funtore dei punti

Consideriamo la categoria \mathbf{S} delle supervarietà (lisce e reali). Se X è una supervarietà, il funtore $X(\cdot)$ è detto *funtore dei punti* di X e se S è un'altra supervarietà, $X(S) = \text{Hom}(S, X)$ è detto *insieme degli S -punti* di X . In particolare per il lemma 1.11 gli elementi di $X(\mathbb{R}^{0|0}) = \text{Hom}(\mathbb{R}^{0|0}, X)$ sono i punti della varietà ridotta.

Il lemma di Yoneda mette in corrispondenza biunivoca morfismi tra supervarietà e trasformazioni naturali tra i rispettivi funtori dei punti. In questo modo si può dare un morfismo tra due supervarietà, che non è semplicemente un'applicazione tra insiemi (vedi osservazione 1.7), come una famiglia

$$\{ \psi_S: X(S) \rightarrow Y(S) \mid S \text{ supervarietà} \}$$

di applicazioni tra insiemi, con la richiesta che soddisfi la (2.2), cioè che

$$\psi_S \circ (- \circ f) = (- \circ f) \circ \psi_{S'} \quad (2.5)$$

per ogni morfismo $f: S' \rightarrow S$ ⁽⁴⁾. Questo in molti casi risulta conveniente.

Come già accennato, tutto ciò è particolarmente utile nel caso dei supergruppi di Lie. Sia G un supergruppo di Lie. L'immersione di Yoneda (2.4) permette di convertire i morfismi introdotti nella definizione 2.1 in trasformazioni naturali ed essendo

$$(G \times G)(\cdot) \cong G(\cdot) \times G(\cdot)$$

⁽³⁾Una sottocategoria si dice piena se, per ogni coppia di oggetti, essa contiene tutti i morfismi tra essi presenti nella categoria più grande.

⁽⁴⁾Si dice anche che la famiglia $\{\psi_S\}$ è *funtoriale in S* .

si ha che, per ogni supervarietà S , l'insieme $G(S) = \text{Hom}(S, G)$ assume struttura di gruppo. Esplicitamente

$$\begin{aligned} m_S: G(S) \times G(S) &\longrightarrow G(S) \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto m \circ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ i_S: G(S) &\longrightarrow G(S) & e_S: \mathbf{1} &\longrightarrow G(S) \\ \varphi &\longmapsto i \circ \varphi & \bullet &\longmapsto \hat{e} = e \circ !_S \end{aligned}$$

sono la moltiplicazione, l'inverso e l'identità che rendono $G(S)$ un gruppo. Infatti, se $\varphi_i: S \rightarrow G$, dalle relazioni (2.1) si ha

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_3 &= m \circ \langle m \circ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle, \varphi_3 \rangle = m \circ (m \times \text{id}_G) \circ \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle \\ &= m \circ (\text{id}_G \times m) \circ \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle = m \circ \langle \varphi_1, m \circ \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle \rangle \\ &= \varphi_1 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_3) \\ \varphi \cdot \varphi^{-1} &= m \circ \langle \varphi, i \circ \varphi \rangle = m \circ \langle \text{id}_G, i \rangle \circ \varphi = e \circ !_G \circ \varphi = e \circ !_S = e_{G(S)} \end{aligned}$$

e così via. In particolare $G(\mathbb{R}^{0|0}) \cong G^\sim$ come gruppo astratto ($G(\mathbb{R}^{0|0})$ non ha infatti struttura di gruppo topologico).

Se S' è un'altra supervarietà e $f: S' \rightarrow S$ un morfismo, poiché m_S è functoriale in S , cioè soddisfa una relazione analoga alla (2.5), abbiamo che

$$- \circ f: G(S) \rightarrow G(S')$$

è un omomorfismo di gruppi. Quindi il funtore $G(\cdot)$ prende valori nella categoria dei gruppi \mathbf{Gp} . Inoltre se $\psi: G \rightarrow G'$ è un morfismo di supergruppi di Lie, per ogni supervarietà S ,

$$\psi_S: G(S) \rightarrow G'(S)$$

è un omomorfismo di gruppi, poiché per definizione $m_{G'} \circ (\psi \times \psi) = \psi \circ m_G$. In conclusione l'immersione di Yoneda mappa la categoria dei supergruppi di Lie in $[\mathbf{S}, \mathbf{Gp}]_c$.

Consideriamo un funtore $F \in [\mathbf{S}, \mathbf{Gp}]_c$ che sia rappresentato da una supervarietà G . Poiché moltiplicazione, inverso e identità di $F(S) \cong G(S)$ devono essere functoriali in S , per il lemma di Yoneda definiscono tre morfismi che soddisfano le (2.1) e rendono G un supergruppo di Lie. Un supergruppo di Lie può dunque essere identificato, a meno di isomorfismi, con un funtore controvariante rappresentabile dalla categoria delle supervarietà a quella dei gruppi.

Un'azione $\sigma: G \times M \rightarrow M$ di un supergruppo di Lie su una supervarietà è in corrispondenza con una famiglia di azioni sugli insiemi $M(S)$

$$\begin{aligned} \sigma_S: G(S) \times M(S) &\longrightarrow M(S) \\ (\varphi, \chi) &\longmapsto \varphi \cdot \chi \end{aligned} \tag{2.6}$$

che sia functoriale in S .

Esempio 2.5. Prendiamo il superdominio $\mathbb{R}^{p|q} = (\mathbb{R}^p, C_{p|q}^\infty)$ con le coordinate canoniche (x^i, θ^j) . Se S è una supervarietà, un morfismo $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^{p|q}$ è dato fissando i pullback

$$\begin{cases} f_i = \varphi^*(x^i) & 1 \leq i \leq p \\ g_j = \varphi^*(\theta^j) & 1 \leq j \leq q \end{cases}$$

con $f_i \in \mathcal{O}_S(S)_0$ e $g_j \in \mathcal{O}_S(S)_1$ sezioni definite globalmente su S . Cioè gli elementi di $\mathbb{R}^{p|q}(S)$ sono vettori del tipo $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ e $\mathbb{R}^{p|q}(S)$ è un gruppo abeliano con

$$(f_i, g_j) + (f'_i, g'_j) = (f_i + f'_i, g_j + g'_j)$$

dove le somme nel membro destro sono in $\mathcal{O}_S(S)$. Preso un morfismo $\psi: S' \rightarrow S$, $\varphi \circ \psi \in \mathbb{R}^{p|q}(S')$ può essere scritto come $(\psi^*(f_i), \psi^*(g_j))$, ed essendo $\psi^*(f_i + f'_i) = \psi^*(f_i) + \psi^*(f'_i)$

$$- \circ \psi: \mathbb{R}^{p|q}(S) \rightarrow \mathbb{R}^{p|q}(S')$$

è un omomorfismo di gruppi. Quindi il funtore $\mathbb{R}^{p|q}(\cdot)$ prende valori in \mathbf{Gp} e $\mathbb{R}^{p|q}$ è un supergruppo di Lie abeliano (vedi esempio 2.7). La legge del gruppo si può scrivere simbolicamente come

$$(x^i, \theta^j) + (x'^i, \theta'^j) = (x^i + x'^i, \theta^j + \theta'^j)$$

nel senso specificato sopra.

Consideriamo ora un morfismo di superspazi vettoriali $T: \mathbb{R}^{p|q} \rightarrow \mathbb{R}^{r|s}$ che in forma matriciale si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} a_{ki} & 0 \\ 0 & b_{lj} \end{pmatrix} \quad a_{ki}, b_{lj} \in \mathbb{R}$$

T diventa un morfismo tra le supervarietà $\mathbb{R}^{p|q}$ e $\mathbb{R}^{r|s}$ definendo la trasformazione naturale

$$\begin{aligned} T_S: \mathbb{R}^{p|q}(S) &\longrightarrow \mathbb{R}^{r|s}(S) & \begin{cases} u_k = \sum_i a_{ki} f_i \\ v_l = \sum_j b_{lj} g_j \end{cases} \\ (f_i, g_j) &\longmapsto (u_k, v_l) \end{aligned}$$

con $f_i, u_k \in \mathcal{O}_S(S)_0$ e $g_j, v_l \in \mathcal{O}_S(S)_1$. È una trasformazione naturale poiché, come prima, il pullback di un morfismo $\psi: S' \rightarrow S$ è un morfismo di \mathbb{R} -superalgebre. Inoltre, per ogni S , T_S è un omomorfismo di gruppi e quindi la trasformazione naturale considerata è un morfismo di supergruppi. Chiaramente la mappa $T \mapsto \{T_S\}_S$ è iniettiva e commuta con la composizione di morfismi.

In questo modo si può associare ad ogni superspazio vettoriale (reale) un supergruppo di Lie (reale) e ad ogni morfismo tra superspazi un morfismo tra supergruppi. Essendo questa assegnazione funtoriale ed iniettiva possiamo pensare alla categoria dei superspazi vettoriali finito-dimensionali (reali) come ad una sottocategoria della categoria dei supergruppi di Lie (reali) e quindi delle supervarietà.

Esempio 2.6. Consideriamo il superspazio vettoriale $\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q}) \cong \mathbb{R}^{p^2+q^2|2pq}$. Per quanto visto nel precedente esempio possiamo pensare a $\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ come ad una supervarietà. Un morfismo $\varphi: S \rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ può essere espresso mediante una matrice $(p+q) \times (p+q)$

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} f_{ij} & g_{\alpha\beta} \\ g_{\gamma\delta} & f_{kl} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} f_{ij}, f_{kl} &\in \mathcal{O}_S(S)_0 \\ g_{\alpha\beta}, g_{\gamma\delta} &\in \mathcal{O}_S(S)_1 \end{aligned}$$

Definiamo in $(\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q}))(S)$ l'usuale prodotto righe per colonne. Essendo funtoriale in S determina una legge di composizione

$$\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q}) \times \mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q}) \rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$$

Vogliamo cercare una sottovarietà aperta di $\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ che sia un supergruppo rispetto a questa legge di composizione, cioè un aperto $U \subset \mathbb{R}^{p^2+q^2}$ tale che tutti gli $U^{p^2+q^2|2pq}(S)$ siano gruppi rispetto al prodotto righe per colonne. In particolare, per esplorare la varietà ridotta, consideriamo i morfismi $t: \mathbb{R}^{0|0} \rightarrow \mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$; poiché

$$M_t = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & b_{kl} \end{pmatrix} \quad a_{ij}, b_{kl} \in \mathbb{R}$$

è invertibile se e solo se $\det a_{ij} \det b_{kl} \neq 0$, avremo $U \subseteq V = \mathbf{GL}(p) \times \mathbf{GL}(q)$.

Vediamo che, per ogni supervarietà S ed ogni morfismo $\varphi: S \rightarrow V^{p^2+q^2|2pq}$, M_φ è invertibile e che quindi $U = V$. Per far ciò utilizziamo un risultato dimostrato in [17, § 3.6]: sia A una superalgebra commutativa e

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata con elementi in A tale che i minori M_1 e M_4 siano costituiti da elementi pari e i minori M_2 e M_3 da elementi dispari; allora M è invertibile se e solo se

$$\det M_1 \det M_4 \in A^*$$

dove A^* è il gruppo delle unità (cioè degli elementi invertibili) di A . Quindi M_φ è invertibile se e solo se

$$\det f_{ij} \det f_{jk} \in \mathcal{O}_S^*(S)$$

Notiamo ora che $\det f_{ij} \in \mathcal{O}_S^*(S)$ se e solo se $(\det f_{ij})^\sim(x) \neq 0$ per ogni $x \in S^\sim$ e che $(\det f_{ij})^\sim = \det(f_{ij}^\sim)$, essendo la proiezione $\mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{O}^\sim(S)$ un omomorfismo di superalgebre. Dal momento che

$$M_{\varphi^\sim} = \begin{pmatrix} f_{ij}^\sim & 0 \\ 0 & f_{kl}^\sim \end{pmatrix}$$

è la matrice dei pullback del morfismo ridotto, M_φ è invertibile se e solo se, per ogni $x \in S^\sim$, $\det M_{\varphi^\sim}(x) \neq 0$, cioè se e solo se $M_{\varphi^\sim}(x) \in V$.

Il superdominio $U^{p^2+q^2|2pq}$, con $U = \mathbf{GL}(p) \times \mathbf{GL}(q)$, diventa dunque un supergruppo di Lie rispetto alla restrizione della legge di composizione sopra introdotta e viene indicato con $\mathbf{GL}(p|q)$. Per esempio $\mathbf{GL}(1|1)$ è la sottovarietà aperta di $\mathbb{R}^{2|2}$ (con le coordinate canoniche $(x^1, x^2, \theta^1, \theta^2)$) definita da $x^1 \cdot x^2 \neq 0$ con il prodotto (indicato simbolicamente)

$$\begin{pmatrix} x^1 & \theta^1 \\ \theta^2 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 & \theta'^1 \\ \theta'^2 & x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 x'^1 + \theta^1 \theta'^2 & x^1 \theta'^1 + x'^2 \theta^1 \\ x'^1 \theta^2 + x^2 \theta'^2 & x^2 x'^2 + \theta^2 \theta'^1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2.7. Sia G un supergruppo di Lie. Possiamo considerare, accanto alla moltiplicazione $m: G \times G \rightarrow G$,

$$\begin{aligned} m': G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto yx \end{aligned}$$

Nuovamente una scrittura di questo genere assume un significato preciso utilizzando il funtore dei punti: m' è il morfismo definito dalla trasformazione naturale

$$\begin{aligned} m'_S: G(S) \times G(S) &\longrightarrow G(S) \\ (\varphi_S, \chi_S) &\longmapsto \chi_S \cdot \varphi_S \end{aligned}$$

considerando, come al solito, che $G(S) \times G(S) \cong (G \times G)(S)$. È una trasformazione naturale poiché per ogni $\psi: S' \rightarrow S$

$$\begin{array}{ccc} G(S) \times G(S) & \xrightarrow{m'_S} & G(S) \\ (-\circ\psi) \times (-\circ\psi) \downarrow & & \downarrow -\circ\psi \\ G(S') \times G(S') & \xrightarrow{m'_{S'}} & G(S') \end{array}$$

commuta essendo, per la funtorialità della moltiplicazione,

$$(\chi_S \circ \psi) \cdot (\varphi_S \circ \psi) = (\chi_S \cdot \varphi_S) \circ \psi$$

Possiamo dire che un supergruppo di Lie è *abeliano* se $m' = m$. Tutti i super-spazi $\mathbb{R}^{p|q}$ sono chiaramente supergruppi abeliani, mentre i supergruppi $\text{GL}(p|q)$ non lo sono. $\text{GL}(1|1)$ è un supergruppo di Lie non abeliano con gruppo ridotto abeliano.

2.4 Azione del gruppo ridotto

Nota 2.8. Sia G un gruppo topologico localmente compatto e σ -compatto (per esempio un gruppo di Lie). Una rappresentazione di G in uno spazio vettoriale topologico V è un omomorfismo di G nel gruppo degli automorfismi continui di V . Una rappresentazione π è detta *fortemente continua* se la mappa

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow V \\ g &\longmapsto \pi(g)v \end{aligned}$$

è continua per ogni $v \in V$; è detta *continua* se la mappa

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto \pi(g)v \end{aligned}$$

è continua. In [18, § 4.1] si dimostra che se V è uno spazio barrellato (tra cui si trovano gli spazi di Fréchet, Banach, Hilbert e ovviamente gli spazi finito-dimensionali) allora una rappresentazione è continua se e solo se è fortemente continua (questo in generale non è vero per V localmente convesso).

Sia G un supergruppo di Lie, M una supervarietà e $\sigma: G \times M \rightarrow M$ un'azione sinistra. Consideriamo il morfismo $\tilde{\sigma}: G^\sim \times M \rightarrow M$ dato dalla composizione

$$G^\sim \times M \xrightarrow{j \times \text{id}_M} G \times M \xrightarrow{\sigma} M$$

Chiaramente è un'azione sinistra di G^\sim (visto come supergruppo con dimensione dispari 0) su M . Poiché G^\sim è un gruppo ordinario possiamo

dare all'azione $\tilde{\sigma}$ una forma più classica. Fissiamo un elemento $g \in G^\sim$ e consideriamo il morfismo $\tilde{\sigma}_g: M \rightarrow M$ dato indifferentemente da

$$M \xrightarrow{\langle \hat{g}, \text{id}_M \rangle} G^\sim \times M \xrightarrow{\tilde{\sigma}} M$$

o

$$M \xrightarrow{\langle \hat{g}, \text{id}_M \rangle} G \times M \xrightarrow{\sigma} M$$

In questo modo ad un'azione di un supergruppo di Lie si può associare un'azione del gruppo ridotto vista come una famiglia di endomorfismi di M

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}: G^\sim &\longrightarrow \text{Hom}(M, M) \\ g &\longmapsto \tilde{\sigma}_g = \sigma \langle \hat{g}, \text{id}_M \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

tale che $\tilde{\sigma}_g \tilde{\sigma}_{g'} = \tilde{\sigma}_{gg'}$ per ogni $g, g' \in G^\sim$. Infatti, grazie al lemma di Yoneda, basta osservare che, per ogni supervarietà S , all'azione σ è associata un'azione del gruppo $G(S)$ su $M(S)$ (vedi (2.6)) e che $\tilde{\sigma}_g$ è il morfismo associato alla trasformazione naturale

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_g^S: M(S) &\longrightarrow M(S) \\ \varphi_S &\longmapsto \hat{g} \cdot \varphi_S \end{aligned}$$

($\hat{g} = g \circ !_S$) e dunque, poiché $\hat{g} \cdot (\hat{g}' \cdot \varphi_S) = (\hat{g} \cdot \hat{g}') \cdot \varphi_S$, si avrà $\tilde{\sigma}_g^S \circ \tilde{\sigma}_{g'}^S = \tilde{\sigma}_{gg'}^S$.

Analogamente ad un'azione destra $\sigma': M \times G \rightarrow M$ si può associare un'azione destra del gruppo ridotto

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}': G^\sim &\longrightarrow \text{Hom}(M, M) \\ g &\longmapsto \tilde{\sigma}'_g = \sigma' \langle \text{id}_M, \hat{g} \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

con $\tilde{\sigma}'_g \tilde{\sigma}'_{g'} = \tilde{\sigma}'_{g'g}$.

In particolare se $M = G$ e $\sigma = \sigma' = m$ abbiamo rispettivamente

$$l_g = m \langle \hat{g}, \text{id}_G \rangle \quad (2.9)$$

e

$$r_g = m \langle \text{id}_G, \hat{g} \rangle \quad (2.10)$$

che possiamo chiamare *azione regolare sinistra* e *destra* di G^\sim su G . Le due azioni commutano, cioè

$$l_g r_{g'} = r_{g'} l_g$$

per ogni $g, g' \in G^\sim$ (si può mostrare utilizzando il lemma di Yoneda e osservando che, per ogni supervarietà S , le azioni regolari sinistra e destra del gruppo $G(S)$ su se stesso commutano).

Passando ai pullback, dalla (2.7) abbiamo

$$\tilde{\sigma}_g^* = (\text{ev}_g \otimes I) \sigma^* \quad (2.11)$$

e dalla (2.8)

$$\tilde{\sigma}'_g = (I \otimes \text{ev}_g)\sigma'^*$$

Per come si comporta il pullback rispetto alla composizione di morfismi, sono rispettivamente un'azione lineare destra e una sinistra di G^\sim sul superspazio $\mathcal{O}(M)$. Entrambe le azioni sono pari, cioè preservano la gradazione. Per la proposizione 1.25, le mappe

$$\begin{aligned} g &\mapsto \tilde{\sigma}_g^*(s) = (\text{ev}_g \otimes I)\sigma^*(s) \\ g &\mapsto \tilde{\sigma}'_g(s) = (I \otimes \text{ev}_g)\sigma'^*(s) \end{aligned}$$

sono continue per ogni $s \in \mathcal{O}(M)$.

Abbiamo visto al § 1.5 che $\mathcal{O}(M)$ è uno spazio di Fréchet. Per quanto detto nella nota 2.8, $g \mapsto \tilde{\sigma}'_g$ è una rappresentazione continua e pari del gruppo di Lie G^\sim nel superspazio vettoriale $\mathcal{O}(M)$.

2.5 Superalgebra di Lie di un supergruppo di Lie

Ad ogni gruppo di Lie G si associa un'algebra di Lie costituita dai campi vettoriali su G invarianti a sinistra (o a destra); si vede che essi costituiscono una sottoalgebra di Lie finito-dimensionale dell'algebra di Lie dei campi vettoriali su G , isomorfa (come spazio vettoriale) allo spazio tangente all'identità. Tutto ciò può essere trasferito ai supergruppi di Lie.

Nel caso classico l'invarianza a sinistra per un campo vettoriale X è data dalla richiesta che per ogni $x, y \in G$

$$(dl_x)_y X|_y = X|_{xy}$$

con $l_x: y \mapsto xy$. Questa relazione può essere riscritta in modo che si adatti al caso supergeometrico. Un campo vettoriale X su un supergruppo di Lie G è detto *invariante a sinistra* se soddisfa⁽⁵⁾

$$(I \otimes X)m^* = m^*X$$

⁽⁵⁾Nel caso in cui G sia un ordinario gruppo di Lie si tratta effettivamente di una riscrittura della relazione precedente. Se m è la moltiplicazione del gruppo e (x^i) , (y^j) e (z^k) sono coordinate rispettivamente in un intorno di x , y e xy , si ha

$$(dl_x)_y X|_y = \sum_{j,k} X^j(y) \frac{\partial z^k \circ m}{\partial y^j}(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right)_{xy} \quad X|_{xy} = \sum_k X^k(xy) \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right)_{xy}$$

e, per ogni $f \in C^\infty(G)$,

$$\begin{aligned} ((I \otimes X)m^*(f))(x, y) &= \sum_j X^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j} f(m(x, y)) = \sum_{j,k} X^j(y) \frac{\partial z^k \circ m}{\partial y^j}(x, y) \frac{\partial f}{\partial z^k}(xy) \\ (m^*X(f))(x, y) &= \sum_k X^k(xy) \frac{\partial f}{\partial z^k}(xy) \end{aligned}$$

con $I \otimes X$ definito dalla (1.26). Analogamente un campo vettoriale X' è detto *invariante a destra* se soddisfa⁽⁶⁾

$$(X' \otimes I)m^* = m^*X'$$

I campi vettoriali invarianti a sinistra (o a destra) costituiscono una sottoalgebra della superalgebra di Lie dei campi vettoriali su G . L'invarianza è cioè preservata dalle usuali parentesi definite dalla (1.6); infatti per $X, Y \in \text{Lie}(G)$ ⁽⁷⁾

$$m^*[X, Y] = [I \otimes X, I \otimes Y]m^* = (I \otimes [X, Y])m^*$$

Così per i campi invarianti a destra.

Se $e \in G$ è l'identità di G ed m la sua moltiplicazione, per la (2.1b), la relazione (1.29) è soddisfatta per $n = e$ e $\varphi = m$. Quindi, fissato un vettore $\tau \in T_e(G)$,

$$X_\tau = (I \otimes \tau)m^* \quad (2.12)$$

è un campo vettoriale su G con la stessa parità di τ .

Teorema 2.9. *Sia G un supergruppo di Lie.*

1. *La superalgebra di Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G è generata dai campi vettoriali del tipo (2.12) con $\tau \in T_e(G)$.*

2. *$\text{Lie}(G)$ è una superalgebra di Lie delle stesse dimensioni di G .*

3. *La mappa*

$$\begin{aligned} T_e(G) &\longrightarrow \text{Lie}(G) \\ \tau &\longmapsto X_\tau = (I \otimes \tau)m^* \end{aligned}$$

è un isomorfismo di superspazi vettoriali e il suo inverso è

$$\begin{aligned} \text{Lie}(G) &\longrightarrow T_e(G) \\ X &\longmapsto X|_e = \text{ev}_e X \end{aligned}$$

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto che X_τ è invariante a sinistra. Per l'associatività della moltiplicazione (2.1a) e per la (1.25) abbiamo

$$(I \otimes m^*)m^* = (m^* \otimes I)m^*$$

⁽⁶⁾Oppure $(I \otimes X')m'^* = m'^*X'$, con m' definito nell'esempio 2.7.

⁽⁷⁾La seconda uguaglianza è immediata sugli elementi decomponibili $f \otimes g \in \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ e quindi per la proposizione 1.24, come già notato, vale su tutto $\mathcal{O}(G \times G)$.

e quindi

$$\begin{aligned}
(I \otimes X_\tau)m^* &= (I \otimes (I \otimes \tau)m^*)m^* \\
&= (I \otimes I \otimes \tau)(I \otimes m^*)m^* \\
&= (I \otimes I \otimes \tau)(m^* \otimes I)m^* \\
&= m^*(I \otimes \tau)m^* \\
&= m^*X_\tau
\end{aligned}$$

dove i vari passaggi sono giustificati dal solito argomento di densità.

La mappa $\tau \mapsto X_\tau$ è chiaramente un morfismo di superspazi vettoriali (abbiamo già visto che preserva la gradazione). Vediamo che per ogni $a \in G^\sim$ il morfismo di superspazi vettoriali

$$\begin{array}{ccc}
T_e(G) & \longrightarrow & T_a(G) \\
\tau & \longmapsto & X_{\tau|a}
\end{array}$$

è iniettivo e che, per $a = e$, $X_{\tau|e} = \tau$; quest'ultima affermazione mostra in particolare che $\tau \mapsto X_\tau$ è una mappa iniettiva con inverso sinistro $X \mapsto X|_e$. Abbiamo innanzitutto

$$\text{ev}_a(I \otimes \tau) = \tau(\text{ev}_a \otimes I)$$

poiché, per $f \otimes g \in \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$,

$$\begin{aligned}
\text{ev}_a(I \otimes \tau)(f \otimes g) &= (-1)^{p(\tau)p(f)} \text{ev}_a(f)\tau(g) \\
\tau(\text{ev}_a \otimes I)(f \otimes g) &= \text{ev}_a(f)\tau(g)
\end{aligned}$$

e $\text{ev}_a(f) = 0$ se $p(f) = 1$. Quindi

$$X_{\tau|a} = \text{ev}_a(I \otimes \tau)m^* = \tau(\text{ev}_a \otimes I)m^* = \tau(m\langle \hat{a}, \text{id}_G \rangle)^* = \tau l_a^*$$

dove l_a è dato dalla (2.9). Poiché l_a^* è un isomorfismo (con inverso $l_{a^{-1}}^*$), $X_{\tau|a} \neq 0$ se $\tau \neq 0$; inoltre, se $a = e$, $X_{\tau|e} = \tau$.

Per provare il teorema resta da mostrare che i campi vettoriali del tipo X_τ generano il superspazio vettoriale dei campi invarianti a sinistra. Sia $\{\tau_i\}$ una base omogenea di $T_e(G)$. Consideriamo i campi vettoriali X_{τ_i} . Per ogni $a \in G^\sim$, per quanto visto sopra, i vettori $X_{\tau_i|a}$ saranno linearmente indipendenti. In [17, § 4.7] si afferma che questa è una condizione sufficiente perché i campi X_{τ_i} siano una base dell' $\mathcal{O}(G)$ -modulo dei campi vettoriali su G . Quindi, per ogni $X \in \mathcal{J}(G)$, si avrà

$$X = \sum_i f_i X_{\tau_i} \quad f_i \in \mathcal{O}(G)$$

e, se π_1 e π_2 sono le proiezioni di $G \times G$, per la (1.22)

$$I \otimes X = \sum_i \pi_2^*(f_i)(I \otimes X_{\tau_i})$$

Se X è invariante a sinistra dovrà essere

$$\sum_i \pi_2^*(f_i)(I \otimes X_{\tau_i})m^* = m^* \sum_i f_i X_{\tau_i}$$

Componendo entrambi i membri con $I \otimes \text{ev}_e$ e tenendo conto che $I \otimes \text{ev}_e$ è un pullback e quindi un omomorfismo di algebre, $(I \otimes \text{ev}_e)m^* = I$ e $(I \otimes \text{ev}_e)\pi_2^* = \text{ev}_e$, avremo

$$\begin{aligned} (I \otimes \text{ev}_e) \sum_i \pi_2^*(f_i)m^* X_{\tau_i} &= (I \otimes \text{ev}_e)m^* \sum_i f_i X_{\tau_i} \\ \sum_i f_i \tilde{}(e) X_{\tau_i} &= \sum_i f_i X_{\tau_i} \end{aligned}$$

Quindi, poiché i campi X_{τ_i} sono linearmente indipendenti su $\mathcal{O}(G)$, le f_i sono costanti e i campi X_{τ_i} sono una base di $\text{Lie}(G)$ come spazio vettoriale. \square

Analogamente

$${}_{\tau}X = (\tau \otimes I)m^*$$

con $\tau \in T_e(G)$ è un campo vettoriale invariante a destra. Al variare di $\tau \in T_e(G)$ si ha la superalgebra di Lie dei campi invarianti a destra su G .

Proposizione 2.10. *La superalgebra di Lie dei campi invarianti a destra è l'algebra opposta⁽⁸⁾ della superalgebra di Lie dei campi invarianti a sinistra.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare

$$[X_{\tau}, X_{\sigma}]|_e = -[{}_{\tau}X, {}_{\sigma}X]|_e$$

Notiamo innanzitutto che

$$\tau(\sigma \otimes I) = (-1)^{p(\tau)p(\sigma)}\sigma(I \otimes \tau)$$

Infatti sugli elementi decomponibili $f \otimes g \in \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ abbiamo

$$\tau(\sigma \otimes I)(f \otimes g) = \sigma(f)\tau(g)$$

$$\sigma(I \otimes \tau)(f \otimes g) = (-1)^{p(\tau)p(f)}\sigma(f)\tau(g)$$

e $\sigma(f) = 0$ se $p(\sigma) \neq p(f)$. Quindi, poiché $X_{\tau}|_e = {}_{\tau}X|_e = \tau$, cioè

$$\text{ev}_e(I \otimes \tau)m^* = \text{ev}_e(\tau \otimes I)m^* = \tau$$

si trova

$$\begin{aligned} \text{ev}_e[{}_{\tau}X, {}_{\sigma}X] &= \tau(\sigma \otimes I)m^* - (-1)^{p(\tau)p(\sigma)}\sigma(\tau \otimes I) \\ &= (-1)^{p(\tau)p(\sigma)}\sigma(I \otimes \tau) - \tau(I \otimes \sigma) \\ &= -\text{ev}_e[X_{\tau}, X_{\sigma}] \end{aligned} \quad \square$$

⁽⁸⁾L'algebra opposta di una superalgebra di Lie è definita al solito dal prodotto (1.4). Come nel caso classico

$$[X, Y] = -[X, Y]^{\text{opp}}$$

Vogliamo ora scrivere un campo invariante a sinistra X_τ in coordinate locali. Consideriamo un aperto $U \subseteq G^\sim$ con coordinate (y^i) e fissiamo un intorno V di e con coordinate (z^j) . Ricordando che $X_\tau = (I \otimes \text{ev}_e)(I \otimes Y)m^*$ con $Y|_e = \tau$, dalle (1.16), (1.26) e (1.28), per $\tau = \left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)_e$, avremo

$$X_\tau = \sum_r \left(\frac{\partial m^r}{\partial z^k} \right)_e \frac{\partial}{\partial y^r} \quad (2.13)$$

dove $\left(\frac{\partial m^r}{\partial z^k}\right)_e$ è la sezione ottenuta prendendo $(m^*(y^r))|_{U \times V}$ in coordinate (y^i, z^j) , derivando rispetto a z^k e sostituendo alle z^j il loro valore in e (in particolare 0 per le coordinate dispari).

Esempio 2.11. Consideriamo il supergruppo $G = \text{GL}(1|1)$ (vedi esempio 2.6) e scriviamo la sua superalgebra di Lie \mathfrak{g} nelle coordinate canoniche $(x^1, x^2, \theta^1, \theta^2)$. Indichiamo simbolicamente il prodotto con

$$\begin{pmatrix} x^1 & \theta^1 \\ \theta^2 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 & \theta'^1 \\ \theta'^2 & x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''^1 & \theta''^1 \\ \theta''^2 & x''^2 \end{pmatrix}$$

nel senso che

$$\begin{aligned} m^*(x''^1) &= x^1 x'^1 + \theta^1 \theta'^2 & m^*(\theta''^1) &= x^1 \theta'^1 + x'^2 \theta^1 \\ m^*(x''^2) &= x^2 x'^2 + \theta^2 \theta'^1 & m^*(\theta''^2) &= x^1 \theta'^2 + x^2 \theta'^2 \end{aligned}$$

La (2.13) permette di calcolare esplicitamente la mappa $T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g}$, che sarà data da

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_e &\mapsto X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \left(\frac{\partial}{\partial \theta^1} \right)_e &\mapsto T_1 = -\theta^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)_e &\mapsto X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} & \left(\frac{\partial}{\partial \theta^2} \right)_e &\mapsto T_2 = -\theta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\{X_1, X_2\}$ è una base di \mathfrak{g}_0 e $\{T_1, T_2\}$ è una base di \mathfrak{g}_1 . Se si calcolano esplicitamente le parentesi di Lie si trova

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0 & [X_1, T_1] &= T_1 \\ [T_1, T_1] &= 0 & [X_1, T_2] &= -T_2 \\ [T_2, T_2] &= 0 & [X_2, T_1] &= -T_1 \\ [T_1, T_2] &= -X_1 - X_2 & [X_2, T_2] &= T_2 \end{aligned}$$

Esempio 2.12. Più in generale vogliamo vedere che $\text{Lie}(\text{GL}(p|q)) \cong \mathfrak{gl}(p|q)$, dove $\mathfrak{gl}(p|q)$ è al solito $\mathbf{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ con le parentesi (1.5). Se indichiamo con (y^{ij}) le coordinate canoniche di $\text{GL}(p|q)$ (pari e dispari), l'identificazione è data da

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(p|q) &\longrightarrow T_e(\text{GL}(p|q)) \\ A &\longmapsto \sum_{i,j} \lambda_{ij} A_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial y^{ij}} \right)_e \end{aligned}$$

con

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i \leq p \text{ e } j > p \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ad esempio per $GL(1|1)$, mantenendo le notazioni dell'esempio precedente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto X_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto X_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto T_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto T_2$$

Prendiamo $A, B \in \mathfrak{gl}(p|q)$. Se $\tau_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}} \right)_e$, avremo

$$\text{ev}_e X_A X_B (y^{ij}) = A(I \otimes B) m^*(y^{ij})$$

per come è definita la moltiplicazione in $GL(p|q)$

$$\begin{aligned} &= \sum_k A(I \otimes B)(y^{ik} \otimes y^{kj}) \\ &= \sum_{k,m,n} A(y^{ik}) ((-1)^{p(y^{mn})p(y^{ik})} \lambda_{mn} B_{mn} \tau_{mn}(y^{kj})) \end{aligned}$$

poiché $\tau_{mn}(y^{kj}) = \delta_{mk} \delta_{nj}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,r,s} (-1)^{p(y^{kj})p(y^{ik})} \lambda_{rs} \lambda_{kj} A_{rs} B_{kj} \tau_{rs}(y^{ik}) \\ &= \sum_k (-1)^{p(y^{kj})p(y^{ik})} \lambda_{ik} \lambda_{kj} A_{ik} B_{kj} \end{aligned}$$

ed essendo $(-1)^{p(y^{kj})p(y^{ik})} \lambda_{ik} \lambda_{kj} = \lambda_{ij}$

$$= \lambda_{ij} (AB)_{ij}$$

Quindi $[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$.

Se G e G' sono supergruppi di Lie e $\varphi: G \rightarrow G'$ un morfismo di supergruppi, allora abbiamo la mappa

$$D\varphi: \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G')$$

detta *differenziale di φ* , definita da

$$(D\varphi(X))|_{e'} = d\varphi_e(X|_e) \quad (2.15)$$

dove e ed e' sono le identità di G e G' .

Teorema 2.13. *$D\varphi$ è un morfismo di superalgebre.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che essendo φ un morfismo di supergruppi

$$\varphi m_G = m_{G'}(\varphi \times \varphi)$$

e per la (1.25)

$$m_G^* \varphi^* = (\varphi^* \otimes \varphi^*) m_{G'}^* \quad (2.16)$$

Quindi per $\tau, \sigma \in T_e(G)$

$$\begin{aligned} \text{ev}_e(I \otimes \tau)m_G^*(I \otimes \sigma)m_G^*\varphi^* &= \tau(I \otimes \sigma)(\varphi^* \otimes \varphi^*)m_{G'}^* \\ &= \tau\varphi^*(I \otimes d\varphi_e(\sigma))m_{G'}^* \\ &= d\varphi_e(\tau)(I \otimes d\varphi_e(\sigma))m_{G'}^* \\ &= \text{ev}_{e'}(I \otimes d\varphi_e(\tau))m_{G'}^*(I \otimes d\varphi_e(\sigma))m_{G'}^* \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} d\varphi_e([(I \otimes \tau)m^*, (I \otimes \sigma)m^*]_e) &= \\ &= [(I \otimes d\varphi_e(\tau))m_{G'}^*, (I \otimes d\varphi_e(\sigma))m_{G'}^*]_{e'} \quad \square \end{aligned}$$

Corollario 2.14. *Per un supergruppo di Lie G si ha $\text{Lie}(G^\sim) \cong \text{Lie}(G)_0$.*

Dimostrazione. La mappa tangente dj_e dell'immersione $j: G^\sim \hookrightarrow G$ è iniettiva e preserva la parità, quindi $dj_e(T_e(G^\sim)) \subseteq T_e(G)_0$; inoltre $\dim T_e(G^\sim) = \dim T_e(G)_0$. Dunque

$$\text{Lie}(G^\sim) \cong T_e(G^\sim) \cong T_e(G)_0 \cong \text{Lie}(G)_0$$

come spazi vettoriali. Per il teorema 2.13

$$\text{Lie}(G^\sim) \cong \text{Lie}(G)_0$$

come algebre di Lie. □

In [17, § 7.1] si afferma che per i supergruppi di Lie valgono molti dei risultati noti per i gruppi di Lie e che tutti i problemi topologici riguardano unicamente il gruppo ridotto G^\sim . In particolare si enuncia il seguente risultato.

Proposizione 2.15. *Siano G e G' due supergruppi di Lie e \mathfrak{g} e \mathfrak{g}' le rispettive superalgebre. Se $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ è un morfismo (di superalgebre), allora perché esista un morfismo $\varphi: G \rightarrow G'$ tale che $D\varphi = \alpha$ è necessario e sufficiente che esista un morfismo $\varphi_0: G^\sim \rightarrow G'^\sim$ tale che $D\varphi_0 = \alpha|_{\mathfrak{g}_0}$.*

Capitolo 3

Super coppie di Harish-Chandra

In questo capitolo introduciamo le super coppie di Harish-Chandra. Come affermato in [5], esse costituiscono una categoria equivalente a quella dei supergruppi di Lie. Quella di super coppia diventa cioè una definizione di supergruppo alternativa alla definizione incontrata nel capitolo precedente. Le super coppie di Harish-Chandra sono oggetti relativamente semplici e il loro utilizzo risulterà particolarmente vantaggioso parlando di teoria delle rappresentazioni. Negli ultimi due paragrafi vedremo esplicitamente il passaggio da supergruppo a super coppia e come un'azione di un supergruppo possa essere descritta nel linguaggio delle super coppie.

3.1 Definizione

Definizione 3.1. Si dice *super coppia di Harish-Chandra* una coppia (G_0, \mathfrak{g}) dove G_0 è un gruppo di Lie classico e \mathfrak{g} è una superalgebra di Lie con le proprietà che

1. G_0 agisce su \mathfrak{g} con un'azione pari, cioè

$$\begin{aligned} G_0 \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, X) &\longmapsto g.X \end{aligned}$$

è un'azione lineare e continua⁽¹⁾ tale che, per ogni $g \in G_0$, la mappa $X \mapsto g.X$ sia un omomorfismo di superalgebra, cioè preservi la parità e soddisfi

$$g.[X, Y] = [g.X, g.Y] \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

2. $\text{Lie}(G_0) = \mathfrak{g}_0$;

⁽¹⁾Trattandosi di una rappresentazione di G nello spazio finito-dimensionale \mathfrak{g} è continua se e solo se $g \mapsto g.X$ è continua per ogni $X \in \mathfrak{g}$ (vedi nota 2.8).

3. l'azione di \mathfrak{g}_0 su \mathfrak{g} è il differenziale dell'azione di G_0 , ossia se $X \in \mathfrak{g}_0$ e $Y \in \mathfrak{g}^{(2)}$

$$[X, Y] = \left(\frac{d}{dt} \exp(tX).Y \right)_{t=0} \quad (3.1)$$

Osservazione 3.2. In [15, § 2.11] si afferma che se G è un gruppo di Lie reale, allora ogni rappresentazione $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$ in uno spazio vettoriale finito-dimensionale V è analitica se e solo se è continua. Il fatto che l'azione di G_0 su \mathfrak{g} sia continua e che \mathfrak{g} sia uno spazio vettoriale finito-dimensionale assicura che la (3.1) abbia senso.

Definizione 3.3. Un morfismo tra due super coppie di Harish-Chandra (G_0, \mathfrak{g}) e (H_0, \mathfrak{h}) è una coppia di (ψ_0, ψ) dove

1. $\psi_0: G_0 \rightarrow H_0$ è un omomorfismo di gruppi di Lie;
2. $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di superalgebre di Lie;
3. $\psi|_{\mathfrak{g}_0} = d\psi_0$;
4. per ogni $g \in G_0$ e $X \in \mathfrak{g}$

$$\psi(g.X) = \psi_0(g).\psi(X)$$

Osservazione 3.4. Nel caso in cui G_0 sia un gruppo connesso la condizione 4 dipende dalle precedenti. Prendiamo $X \in \mathfrak{g}_0$ e $Y \in \mathfrak{g}$ e consideriamo le funzioni $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \psi(\exp(tX).Y) \\ g(t) &= \psi_0(\exp(tX)).\psi(Y) \end{aligned}$$

Essendo analitiche⁽³⁾ coincidono se coincidono per $t = 0$ con tutte le loro derivate. Chiaramente $f(0) = g(0) = \psi(Y)$. Essendo ψ un omomorfismo di superalgebre e $\psi(X) = d\psi_0(X)$, per la (3.1) abbiamo

$$\begin{aligned} \psi([X, Y]) &= [\psi(X), \psi(Y)] \\ \psi \left(\frac{d}{dt} \exp(tX).Y \right)_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt} \exp(t d\psi_0(X)).\psi(Y) \right)_{t=0} \end{aligned}$$

e poiché $\exp \circ d\psi_0 = \psi_0 \circ \exp$

$$\left(\frac{d}{dt} \psi(\exp(tX).Y) \right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} \psi_0(\exp(tX)).\psi(Y) \right)_{t=0}$$

⁽²⁾In particolare l'azione di G_0 su \mathfrak{g}_0 è l'usuale azione aggiunta.

⁽³⁾Infatti

$$t \mapsto (\mathfrak{g} \ni Y \mapsto \exp(tX).Y)$$

e

$$t \mapsto (\mathfrak{h} \ni Z \mapsto \psi_0(\exp(tX)).Z)$$

sono rappresentazioni di \mathbb{R} in \mathfrak{g} e \mathfrak{h} rispettivamente ed essendo continue, per l'osservazione 3.2, sono analitiche. Inoltre ψ è analitica in quanto mappa lineare tra spazi vettoriali finito-dimensionali.

Per le derivate successive si procede allo stesso modo considerando che dalla (3.1) si ha

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \exp(tX).Y \right)_{t=0} = [X, [X, Y]]$$

e così via. Quindi per ogni $X \in \mathfrak{g}_0$ e $Y \in \mathfrak{g}$

$$\psi(\exp(X).Y) = \psi_0(\exp(X)).\psi(Y)$$

e poiché gli elementi del tipo $\exp X$ generano la parte di G_0 connessa all'identità abbiamo quanto detto sopra.

Vedremo nel prossimo paragrafo che dato un supergruppo di Lie G , il suo gruppo ridotto G^\sim e la sua superalgebra di Lie \mathfrak{g} costituiscono una super coppia di Harish-Chandra.

In [5, § 3.8] si afferma che la categoria dei supergruppi di Lie e quella delle super coppie di Harish-Chandra sono equivalenti⁽⁴⁾, cioè, a meno di isomorfismi, si può associare a ciascun supergruppo di Lie una super coppia di Harish-Chandra e a ogni super coppia di Harish-Chandra un supergruppo di Lie di cui essa sia la corrispondente super coppia. Inoltre dato un morfismo tra due supergruppi di Lie si può associare un morfismo tra le rispettive super coppie di Harish-Chandra, in modo che siano preservate le composizioni. Analogamente per i morfismi tra super coppie di Harish-Chandra.

Le super coppie di Harish-Chandra sono oggetti molto più semplici dei supergruppi di Lie in quanto costituite da due oggetti classici; inoltre i morfismi tra esse sono coppie di applicazioni tra insiemi e non più famiglie di infinite applicazioni. L'equivalenza tra le rispettive categorie permette di pensare a un supergruppo di Lie indifferentemente come a una supervarietà con struttura di gruppo o a una super coppia di Harish-Chandra.

3.2 La super coppia associata a un supergruppo

Se G è un supergruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua superalgebra dei campi invarianti a sinistra, allora (G^\sim, \mathfrak{g}) costituisce una super coppia di Harish-Chandra.

1. Definiamo l'azione di G^\sim su \mathfrak{g} come

$$g.X = r_g^* X r_{g^{-1}}^* \quad g \in G^\sim \text{ e } X \in \mathfrak{g} \quad (3.2)$$

con r_g dato dalla (2.10). Chiaramente è un'azione lineare sinistra su $\mathcal{T}(G)$ ed è pari poiché $g.X$ è una derivazione con la stessa parità di X ;

⁽⁴⁾Due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} si dicono *equivalenti* se esistono due funtori (covarianti) $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tali che il funtore $G \circ F$ sia naturalmente isomorfo al funtore identico $\text{id}_{\mathbf{C}}$ e il funtore $F \circ G$ sia naturalmente isomorfo al funtore identico $\text{id}_{\mathbf{D}}$ (vedi § 2.2; la composizione di funtori e il funtore identico sono definiti nel modo ovvio).

infatti, poiché il pullback di un morfismo è un omomorfismo di algebre e $r_g^* r_{g^{-1}}^* = I$, se $s, t \in \mathcal{O}(G)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (g.X)(s \cdot t) &= r_g^* \left(X(r_{g^{-1}}^*(s)) \cdot r_{g^{-1}}^*(t) \right) \\ &\quad + (-1)^{p(X)p(s)} r_{g^{-1}}^*(s) \cdot X(r_{g^{-1}}^*(t)) \\ &= (g.X)(s) \cdot t + (-1)^{p(X)p(s)} s \cdot (g.X)(t) \end{aligned}$$

Inoltre se $X \in \mathfrak{g}$, anche $g.X \in \mathfrak{g}$; infatti, per la (2.1a),

$$\begin{aligned} (I \otimes r_g^*)m^* &= (I \otimes (I \otimes \text{ev}_g)m^*)m^* \\ &= (I \otimes I \otimes \text{ev}_g)(I \otimes m^*)m^* \\ &= (I \otimes I \otimes \text{ev}_g)(m^* \otimes I)m^* \\ &= m^*(I \otimes \text{ev}_g)m^* \\ &= m^* r_g^* \end{aligned}$$

e quindi

$$(I \otimes g.X)m^* = (I \otimes r_g^*)(I \otimes X)(I \otimes r_{g^{-1}}^*)m^* = m^* r_g^* X r_{g^{-1}}^* = m^*(g.X)$$

(al solito i vari passaggi sono immediati su $\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$; vedi § 1.5). La definizione è perciò ben posta.

Vogliamo ora verificare che la mappa

$$g \mapsto g.X$$

sia continua per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Se (y^i) sono coordinate in un intorno di e e $\tau_i = \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_e$, avremo (vedi teorema 2.9)

$$g.X = \sum_i \alpha_i X_{\tau_i}$$

con $\alpha_i = \text{ev}_e(g.X)(y^i) \in \mathbb{R}$. Dal momento che \mathfrak{g} è finito-dimensionale, è sufficiente verificare la continuità di

$$g \mapsto \text{ev}_e(g.X)(y^i)$$

per ogni i . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{ev}_e(g.X)(y^i) &= \text{ev}_e r_g^* X r_{g^{-1}}^*(y^i) \\ &= \text{ev}_e(I \otimes \text{ev}_g)m^* X(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})m^*(y^i) \\ &= \text{ev}_g(\text{ev}_e \otimes I)m^* X(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})m^*(y^i) \\ &= \text{ev}_g X(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})m^*(y^i) \\ &= \text{ev}_g(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})(X \otimes I)m^*(y^i) \end{aligned}$$

ed essendo $\text{ev}_g(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}}) = \text{ev}_{(g,g^{-1})}$ (è immediato dalla definizione)

$$\begin{aligned} &= \text{ev}_{(g,g^{-1})}(X \otimes I)m^*(y^i) \\ &= ((X \otimes I)m^*(y^i))^\sim(g, g^{-1}) \end{aligned}$$

Quindi, poiché

$$((X \otimes I)m^*(y^i))^\sim \in C^\infty(G^\sim \times G^\sim)$$

abbiamo quanto chiesto.

È infine immediato che $g.[X, Y] = [g.X, g.Y]$ per ogni $g \in G^\sim$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. Per il corollario 2.14, $\text{Lie}(G^\sim) \cong \mathfrak{g}_0$.
3. Fissiamo $X \in \text{Lie}(G^\sim) \cong \mathfrak{g}_0$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Analogamente a quanto detto prima avremo

$$\left(\frac{d}{dt} \exp(tX).Y \right)_{t=0} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \text{ev}_e(\exp(tX).Y)(y^i) \right)_{t=0} X_{\tau_i}$$

Consideriamo ora la mappa

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2) &\longmapsto \text{ev}_e r_{\exp(t_1 X)}^* Y r_{\exp(t_2 X)}^*(y^i) \end{aligned}$$

cioè

$$F(t_1, t_2) = \text{ev}_e(I \otimes \text{ev}_{\exp(t_1 X)})m^*Y(I \otimes \text{ev}_{\exp(t_2 X)})m^*(y^i)$$

La mappa F è differenziabile poiché, similmente a quanto visto sopra,

$$F(t_1, t_2) = ((Y \otimes I)m^*(y^i))^\sim(\exp(t_1 X), \exp(t_2 X))$$

Quindi, dal momento che per la proposizione 1.25⁽⁵⁾

$$\left(\frac{d}{dt} (I \otimes \text{ev}_{\exp(tX)})(s) \right)_{t=0} = (I \otimes X|_e)(s) \quad s \in \mathcal{O}(G \times G)$$

⁽⁵⁾Qui e nel seguito indichiamo allo stesso modo un elemento in $\text{Lie}(G^\sim)$ e il rispettivo elemento in $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie}(G)_0$. In particolare nel membro a sinistra X appartiene a $\text{Lie}(G^\sim)$, mentre in quello a destra è al posto di $Dj(X) \in \mathfrak{g}_0$, $j: G^\sim \hookrightarrow G$.

(e ev_e ed Y sono operatori continui) avremo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \text{ev}_e (\exp(tX).Y)(y^i) \right)_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt} F(t, -t) \right)_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t_1} \right)_{(0,0)} - \left(\frac{\partial F}{\partial t_2} \right)_{(0,0)} \\ &= \text{ev}_e(I \otimes X|_e) m^* Y(y^i) \\ &\quad - \text{ev}_e Y(I \otimes X|_e) m^*(y^i) \\ &= \text{ev}_e[X, Y](y^i) \end{aligned}$$

da cui la (3.1). In particolare se G è un gruppo di Lie ordinario, la (3.2) è l'usuale azione aggiunta.

Esempio 3.5. Vogliamo vedere come è fatta l'azione di $\text{GL}(p|q)^\sim$ su $\mathfrak{gl}(p|q)$. Prendiamo $A \in \text{GL}(p|q)^\sim \cong \text{GL}(p) \times \text{GL}(q)$ e $B \in \mathfrak{gl}(p|q)$. Mantenendo le notazioni dell'esempio 2.12 avremo

$$\begin{aligned} \text{ev}_e(A.X_B)(y^{ij}) &= \text{ev}_e r_A^* X_B r_{A^{-1}}^*(y^{ij}) \\ &= \sum_k \text{ev}_e r_A^* X_B(I \otimes \text{ev}_{A^{-1}})(y^{ik} \otimes y^{kj}) \\ &= \sum_k \text{ev}_e r_A^* X_B(y^{ik})(A^{-1})_{kj} \\ &= \sum_{k,l} \text{ev}_e r_A^*(I \otimes B)(y^{il} \otimes y^{lk})(A^{-1})_{kj} \\ &= \sum_{k,l,r,s} (-1)^{p(y^{rs})p(y^{il})} \text{ev}_e r_A^*(y^{il})(\lambda_{rs} B_{rs} \tau_{rs}(y^{lk}))(A^{-1})_{kj} \\ &= \sum_{k,l,m} (-1)^{p(y^{lk})p(y^{il})} \text{ev}_e(I \otimes \text{ev}_A)(y^{im} \otimes y^{ml})(\lambda_{lk} B_{lk})(A^{-1})_{kj} \\ &= \sum_{k,l,m} (-1)^{p(y^{lk})p(y^{il})} \lambda_{lk} \delta_{im} A_{ml} B_{lk} (A^{-1})_{kj} \end{aligned}$$

e poiché $A_{\alpha\beta} = (A^{-1})_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \leq p$ e $\beta > p$ oppure $\alpha > p$ e $\beta \leq p$

$$= \lambda_{ij} (ABA^{-1})_{ij}$$

Quindi $A.X_B = X_{ABA^{-1}}$. Questo è esattamente quanto avviene nel caso classico.

Prendiamo ora un morfismo di supergruppi di Lie $\psi: G \rightarrow H$ e vediamo che la coppia $(\psi^\sim, D\psi)$ costituisce un morfismo

$$(\psi^\sim, D\psi): (G^\sim, \mathfrak{g}) \rightarrow (H^\sim, \mathfrak{h})$$

1. $\psi^\sim: G^\sim \rightarrow H^\sim$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.
2. $D\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di superalgebre di Lie (vedi teorema 2.13).

3. Chiedere che $(D\psi)|_{\mathfrak{g}_0} = d(\psi^\sim)$ significa chiedere che commuti

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie}(G) & \xrightarrow{D\psi} & \text{Lie}(H) \\ dj_e \uparrow & & \uparrow dj_e \\ \text{Lie}(G^\sim) & \xrightarrow{d(\psi^\sim)} & \text{Lie}(H^\sim) \end{array}$$

Il che è immediato poiché commuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & H \\ j \uparrow & & \uparrow j \\ G^\sim & \xrightarrow{\psi^\sim} & H^\sim \end{array}$$

4. Siano $g \in G^\sim$ e $X \in \mathfrak{g}$ e sia $\tau = X|_e$. Ricordando la definizione di differenziale (2.15), per la (2.16) e poiché

$$\text{ev}_g \psi^* = \text{ev}_{\psi^\sim(g)}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} (D\psi(g.X))|_{e_H} &= \\ &= d\psi_{e_G}((g.X)|_{e_G}) \\ &= \text{ev}_{e_G}(g.X)\psi^* \\ &= \text{ev}_{e_G}(I \otimes \text{ev}_g)m_G^*(I \otimes \tau)m_G^*(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})m_G^*\psi^* \\ &= \text{ev}_{e_G}(I \otimes \text{ev}_g)m_G^*(I \otimes \tau)m_G^*(I \otimes \text{ev}_{g^{-1}})(\psi^* \otimes \psi^*)m_H^* \\ &= \text{ev}_{e_G}(I \otimes \text{ev}_g)m_G^*(I \otimes \tau)m_G^*\psi^*(I \otimes \text{ev}_{\psi^\sim(g^{-1})})m_H^* \\ &= \text{ev}_{e_G}(I \otimes \text{ev}_g)m_G^*\psi^*(I \otimes d\psi_e(\tau))m_H^*(I \otimes \text{ev}_{\psi^\sim(g^{-1})})m_H^* \\ &= \text{ev}_{\psi^\sim(e_G)}(I \otimes \text{ev}_{\psi^\sim(g)})m_H^*(I \otimes d\psi_e(\tau))m_H^*(I \otimes \text{ev}_{\psi^\sim(g^{-1})})m_H^* \\ &= (\psi^\sim(g).D\psi(X))|_{e_H} \end{aligned}$$

Il passaggio inverso da una super coppia di Harish-Chandra a un supergruppo di Lie è invece un problema decisamente più complesso. La ricerca di una costruzione semplice ed esplicita è tuttora una questione aperta.

3.3 Azione di un supergruppo di Lie

In [5, § 3.8] si afferma il seguente risultato.

Teorema 3.6. *Un'azione (sinistra) di un supergruppo di Lie G su una supervarietà M è equivalente ad un'azione del gruppo ridotto G^\sim su M e ad*

un morfismo dalla superalgebra di Lie \mathfrak{g} di G all'algebra opposta della superalgebra di Lie dei campi vettoriali su M che siano compatibili nel senso che il differenziale dell'azione del gruppo ridotto nell'identità coincida con la restrizione del morfismo alla sottoalgebra di Lie \mathfrak{g}_0 .

Seguendo alcune note di V. S. Varadarajan, vediamo come da un'azione di un supergruppo di Lie su una supervarietà $\sigma: G \times M \rightarrow M$ si passi a un'azione della super coppia (G^\sim, \mathfrak{g}) nel senso del precedente teorema.

Abbiamo già visto che ad un'azione sinistra $\sigma: G \times M \rightarrow M$ è associata un'azione del gruppo ridotto data dalla (2.7). Notiamo poi che l'azione σ soddisfa la (1.30) con $n = e$ e $\varphi' = \sigma$: preso un vettore $\tau \in T_e(G)$, $(\tau \otimes I)\sigma^*$ è una derivazione di $\mathcal{O}(M)$. Quindi abbiamo una mappa lineare

$$\begin{aligned} \rho: T_e(G) &\longrightarrow \mathcal{J}(M) \\ \tau &\longmapsto (\tau \otimes I)\sigma^* \end{aligned}$$

Consideriamo ora l'isomorfismo tra $T_e(G)$ e la superalgebra di Lie \mathfrak{g}^r dei campi invarianti a destra su G

$$\begin{aligned} T_e(G) &\longrightarrow \mathfrak{g}^r \\ \tau &\longmapsto {}_\tau X = (\tau \otimes I)m^* \end{aligned}$$

Si ha dunque una mappa lineare $\mathfrak{g}^r \rightarrow \mathcal{J}(M)$. Vediamo che è un omomorfismo di superalgebre di Lie. Innanzitutto mostriamo che

$$({}_\tau X \otimes I)\sigma^* = \sigma^* \rho(\tau) \quad (3.3)$$

cioè che commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G \times M) & \xleftarrow{\sigma^*} & \mathcal{O}(M) \\ {}_\tau X \otimes I \downarrow & & \downarrow \rho(\tau) \\ \mathcal{O}(G \times M) & \xleftarrow{\sigma^*} & \mathcal{O}(M) \end{array}$$

Infatti dalla definizione 2.2 abbiamo che

$$(m^* \otimes I)\sigma^* = (I \otimes \sigma^*)\sigma^*$$

e quindi

$$\begin{aligned} ({}_X X \otimes I)\sigma^* &= ((\tau \otimes I)m^* \otimes I)\sigma^* \\ &= (\tau \otimes I \otimes I)(m^* \otimes I)\sigma^* \\ &= (\tau \otimes I \otimes I)(I \otimes \sigma^*)\sigma^* \\ &= \sigma^*(\tau \otimes I)\sigma^* \\ &= \sigma^* \rho(\tau) \end{aligned}$$

Indicando per comodità con φ il morfismo $\langle \hat{e}, \text{id}_M \rangle: M \rightarrow G \times M$, per la definizione 2.2, abbiamo $\varphi^* \sigma^* = I$. Componendo entrambi i membri della (3.3) con φ^* abbiamo

$$\rho(\tau) = \varphi^*(\tau X \otimes I) \sigma^*$$

La (3.3) mostra che l'immagine di $\mathcal{O}(M)$ rispetto a σ^* è stabile rispetto a tutti i campi del tipo $\tau X \otimes I$ e quindi, poiché $(\sigma^* \varphi^*)|_{\sigma^*(\mathcal{O}(M))} = I$, per $\tau, \sigma \in T_e(G)$

$$\varphi^*(\tau X \otimes I)(\sigma X \otimes I) \sigma^* = \varphi^*(\tau X \otimes I) \sigma^* \varphi^*(\sigma X \otimes I) \sigma^* = \rho(\tau) \rho(\sigma)$$

Da ciò si vede che la corrispondenza $(\tau X \otimes I) \mapsto \rho(\tau)$ è un omomorfismo di superalgebre. Lo stesso si ha chiaramente per $\tau X \mapsto (\tau X \otimes I)$ e quindi per la mappa $\tau X \mapsto \rho(\tau)$.

Poiché, per la proposizione 2.10, $\mathfrak{g}^r = \mathfrak{g}^{\text{opp}}$, si ha che la corrispondenza

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ X_\tau &\longmapsto \rho(\tau) \end{aligned}$$

è un antimorfismo di superalgebre di Lie e quindi, a partire dall'azione σ , abbiamo costruito un omomorfismo di superalgebre $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}(M)^{\text{opp}}$ come richiesto dal teorema.

Infine, per la (2.11) e per la proposizione 1.25, abbiamo che

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \tilde{\sigma}_{\exp(tX)}^*(f) \right)_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt} (\text{ev}_{\exp(tX)} \otimes I) \sigma^*(f) \right)_{t=0} \\ &= (X|_e \otimes I) \sigma^*(f) \\ &= \rho(X|_e)(f) \end{aligned}$$

per ogni $X \in \text{Lie}(G^\sim) \cong \mathfrak{g}_0$ ed ogni $f \in \mathcal{O}(M)$.

Analogamente, data un'azione destra $\sigma': M \times G \rightarrow M$, la (2.8) dà un'azione destra di G^\sim su M e, poiché σ' soddisfa la (1.29) con $n = e$ e $\varphi = \sigma'$, procedendo come sopra si trova un omomorfismo di superalgebre

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ X_\tau &\longmapsto (I \otimes \tau) \sigma'^* \end{aligned} \tag{3.4}$$

compatibile con $\tilde{\sigma}'$, cioè tale che

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{\sigma}'_{\exp(tX)}(f) \right)_{t=0} = (I \otimes X|_e) \sigma'^*(f) \tag{3.5}$$

per ogni $X \in \text{Lie}(G^\sim) \cong \mathfrak{g}_0$ ed ogni $f \in \mathcal{O}(M)$.

Capitolo 4

Rappresentazioni di supergruppi di Lie

In questo capitolo, seguendo [3], introduciamo la definizione di rappresentazione e rappresentazione unitaria di un supergruppo di Lie. Per far questo utilizziamo l'equivalenza tra supergruppi di Lie e super coppie di Harish-Chandra. Definiamo quindi i supergruppi compatti come il sottoinsieme dei supergruppi con gruppo ridotto compatto, dedicandoci successivamente allo studio delle loro rappresentazioni unitarie. In particolare mostriamo la possibilità di estendere ai supergruppi compatti il teorema A.4 riguardante i gruppi compatti classici. Infine affrontiamo il problema della definizione della rappresentazione regolare di un supergruppo, esaminando un possibile approccio ed elencando le principali difficoltà incontrate.

4.1 Definizione

Nota 4.1. Sia π una rappresentazione continua di un gruppo di Lie G in uno spazio vettoriale V localmente convesso e completo (vedi [18, § 4.4] oppure [14, § 0.2] per rappresentazioni in spazi di Banach). Un vettore $v \in V$ si dice liscio se $g \mapsto \pi(g)v$ è una funzione liscia su G . L'insieme dei vettori lisci per π si indica con $C^\infty(\pi)$. Si dimostra che $C^\infty(\pi)$ è un sottospazio denso in V (in particolare i vettori di una rappresentazione finito-dimensionale sono tutti lisci). Si dimostra inoltre che $d\pi(X)$, $X \in \text{Lie}(G)$, definito (dove ha senso) da

$$d\pi(X)u = \left(\frac{d}{dt} \pi(\exp tX)u \right)_{t=0} \quad (4.1)$$

soddisfa

$$d\pi(X)(C^\infty(\pi)) \subseteq C^\infty(\pi)$$

e

$$d\pi([X, Y])u = [d\pi(X), d\pi(Y)]u$$

per $u \in C^\infty(\pi)$ e $X, Y \in \text{Lie}(G)$. Quindi $d\pi$ è una rappresentazione di $\text{Lie}(G)$ in $C^\infty(\pi)$, detta *rappresentazione differenziale* di π . Chiaramente $C^\infty(\pi)$ è stabile rispetto a π .

Vogliamo definire una rappresentazione di un supergruppo di Lie G in un superspazio finito-dimensionale V . In particolare consideriamo $V = \mathbb{R}^{p|q}$. Abbiamo visto nell'esempio 2.6 che $\mathrm{GL}(p|q) = \mathbf{End}(p|q)^{* (1)}$ può essere pensato come un supergruppo di Lie. Viene quindi naturale definire una rappresentazione di G in V come un morfismo (di supergruppi)

$$\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(p|q)$$

Dal precedente capitolo sappiamo che ogni morfismo tra supergruppi di Lie è equivalente a un morfismo tra le rispettive super coppie di Harish-Chandra. Poiché $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(p|q)) \cong \mathfrak{gl}(p|q)$ (vedi esempio 2.12), il morfismo ρ è equivalente al morfismo

$$(\rho^\sim, D\rho): (G^\sim, \mathrm{Lie}(G)) \rightarrow (\mathrm{GL}(p|q)^\sim, \mathfrak{gl}(p|q))$$

Ricordiamo che $\mathrm{GL}(p|q)^\sim$ è lo spazio formato dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ con $A \in \mathrm{GL}(p)$ e $B \in \mathrm{GL}(q)$. Cioè $\mathrm{GL}(p|q)^\sim$ è il gruppo degli elementi invertibili di $\mathrm{End}(p|q) = \mathbf{End}(p|q)_0$, che indicheremo con $\mathrm{Aut}(p|q)$.

Seguendo [3] identifichiamo supergruppi di Lie e super coppie di Harish-Chandra. Una rappresentazione di un supergruppo $G = (G_0, \mathfrak{g})$ in $V = \mathbb{R}^{p|q}$ sarà un morfismo (di super coppie)

$$(\pi_0, \pi): (G_0, \mathfrak{g}) \rightarrow (\mathrm{Aut}(p|q), \mathfrak{gl}(p|q))$$

Dalla definizione 3.3 di morfismo sappiamo che π_0 è una rappresentazione reale (nel senso classico) di G_0 in V con $\pi_0(g)$ pari per ogni $g \in G_0$, π è una rappresentazione di \mathfrak{g} in V (cioè è un omomorfismo di superalgebre tra \mathfrak{g} e $\mathfrak{gl}(p|q)$), $\pi|_{\mathfrak{g}_0} = d\pi_0$ e $\pi(g.X) = \pi_0(g).\pi(X)$ per ogni $g \in G_0$ e ogni $X \in \mathfrak{g}$. L'ultima relazione, per come è definita l'azione di $\mathrm{Aut}(p|q)$ su $\mathfrak{gl}(p|q)$ (vedi esempio 3.5), diventa

$$\pi(g.X) = \pi_0(g).\pi(X) = \pi_0(g)\pi(X)\pi_0(g)^{-1}$$

In fisica si usano solitamente rappresentazioni in spazi vettoriali complessi. Se V è un superspazio complesso finito dimensionale, $\mathrm{Aut}(V)$ sarà un gruppo di Lie complesso. Una rappresentazione pari del gruppo di Lie reale G_0 in V sarà un morfismo $G_0 \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$, dove $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ è $\mathrm{Aut}(V)$ visto come gruppo di Lie reale di dimensione doppia (questo è esattamente quello che si fa parlando di rappresentazioni di gruppi reali in spazi complessi). Allo stesso modo la superalgebra complessa $\mathfrak{gl}(V)$ può essere pensata come una superalgebra reale, anch'essa di dimensione doppia. Si arriva perciò alla seguente definizione.

Definizione 4.2. Una rappresentazione finito-dimensionale di una super coppia di Harish-Chandra (G_0, \mathfrak{g}) è una tripla (π_0, π, V) dove

⁽¹⁾ $\mathbf{End}(p|q)^*$ è il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbf{End}(p|q)$.

1. V è un superspazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{C} ;
2. π_0 è una rappresentazione di G_0 in V continua e pari (cioè tale che $\pi_0(g)$ sia pari per ogni $g \in G_0$);
3. π è una rappresentazione della superalgebra di Lie \mathfrak{g} in V , cioè una mappa lineare pari $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{End}(V)$ tale che

$$\pi([X, Y]) = \pi(X)\pi(Y) - (-1)^{p(X)p(Y)}\pi(Y)\pi(X)$$

4. $\pi|_{\mathfrak{g}_0} = d\pi_0$;
5. $\pi(g.X) = \pi_0(g)\pi(X)\pi_0(g)^{-1}$ per ogni $g \in G_0$ e $X \in \mathfrak{g}_1$ ⁽²⁾.

Da questo momento ci occuperemo esclusivamente di rappresentazioni in superspazi vettoriali complessi. Se V è un superspazio di Hilbert⁽³⁾, si dice che (π_0, π, V) è una *rappresentazione unitaria* se $\pi(X)^\dagger = -\pi(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Ciò equivale a chiedere che π_0 sia una rappresentazione unitaria di G_0 (in senso classico) e che $\pi(X)^* = -i\pi(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$. Quest'ultima condizione può essere riformulata imponendo che

$$\rho(X) = \zeta\pi(X) \quad \zeta = e^{-i\pi/4} \quad (4.2)$$

sia autoaggiunto per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$.

Vorremmo ora estendere la definizione 4.2 al caso in cui V sia un superspazio topologico infinito-dimensionale, localmente convesso e completo. Il problema è che il differenziale (4.1) di una rappresentazione di un gruppo di Lie non è sempre definito ovunque. In questo caso, cioè, se π_0 è una rappresentazione pari di G_0 in V , $d\pi_0(X)$, $X \in \mathfrak{g}_0$, può essere un operatore non limitato e quindi è eccessivamente restrittivo chiedere che π sia una rappresentazione di \mathfrak{g} in tutto V ; infatti deve essere $\pi(X) = d\pi_0(X)$ per $X \in \mathfrak{g}_0$ e $\pi(X)^2 = \frac{1}{2}\pi([X, X]) = \frac{1}{2}d\pi_0([X, X])$ per $X \in \mathfrak{g}_1$. Si modifica pertanto la definizione in modo che π sia una rappresentazione di \mathfrak{g} in $C^\infty(\pi_0) \subseteq V$ ⁽⁴⁾. Si può dare pertanto la successiva definizione.

⁽²⁾Per $X \in \mathfrak{g}_0$ è automaticamente verificato. Infatti per la (4.1) e poiché

$$g.X = \text{Ad}_g X = \left(\frac{d}{dt} g(\exp tX)g^{-1} \right)_{t=0}$$

si ha

$$\pi_0(g)\pi(X)\pi_0(g)^{-1} = \left(\frac{d}{dt} \pi_0(g(\exp tX)g^{-1}) \right)_{t=0} = \pi_0(g.X)$$

Se G_0 è connesso questa condizione è superflua anche per $X \in \mathfrak{g}_1$ (vedi osservazione 3.4).

⁽³⁾Per la definizione di superspazio di Hilbert e di super aggiunto vedi § 1.1.

⁽⁴⁾Chiaramente $C^\infty(\pi_0) = C^\infty(\pi_0|_{V_0}) \oplus C^\infty(\pi_0|_{V_1})$ e quindi è un sottospazio di V nel senso dei superspazi vettoriali.

Definizione 4.3. Una rappresentazione di una super coppia di Harish-Chandra (G_0, \mathfrak{g}) in uno spazio localmente convesso è una tripla (π_0, π, V) dove

1. V è un superspazio vettoriale complesso, localmente convesso e completo;
2. π_0 è una rappresentazione continua e pari di G_0 in V ;
3. π è una rappresentazione della superalgebra di Lie \mathfrak{g} in $C^\infty(\pi_0)$;
4. $\pi|_{\mathfrak{g}_0} = d\pi_0$ su $C^\infty(\pi_0)$;
5. $\pi(g.X) = \pi_0(g)\pi(X)\pi_0(g)^{-1}$ su $C^\infty(\pi_0)$ per ogni $g \in G_0$ e $X \in \mathfrak{g}_1$.

Per l'unitarietà si richiede che V abbia struttura di superspazio di Hilbert, π_0 sia una rappresentazione unitaria di G_0 in V e $\rho(X) = \zeta\pi(X)$ con dominio $C^\infty(\pi_0)$ sia simmetrico⁽⁵⁾ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$. In questo modo si arriva a una definizione che è equivalente alla seguente.

Definizione 4.4. Una *rappresentazione unitaria* di una super coppia di Harish-Chandra (G_0, \mathfrak{g}) è una tripla $(\pi_0, \rho, \mathcal{H})$ dove

1. \mathcal{H} è un superspazio di Hilbert;
2. π_0 è una rappresentazione unitaria pari di G_0 in \mathcal{H} ;
3. ρ è una mappa lineare di \mathfrak{g}_1 in $\mathbf{End}(C^\infty(\pi_0))_1$ tale che

- (a) per ogni $g \in G_0$ e $X \in \mathfrak{g}_1$

$$\rho(g.X) = \pi_0(g)\rho(X)\pi_0(g)^{-1} \quad (4.3)$$

- (b) $\rho(X)$ con dominio $C^\infty(\pi_0)$ è simmetrico per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$;

- (c) per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}_1$

$$-i d\pi_0([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) + \rho(Y)\rho(X) \quad (4.4)$$

su $C^\infty(\pi_0)$.

⁽⁵⁾Se \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert, un operatore T con dominio $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ denso si dice *simmetrico* se $D(T) \subseteq D(T^*) = \{v \in \mathcal{H} \mid |(Tu, v)| \leq C_v \|u\|, \forall u \in D(T)\}$ e $T = T^*|_{D(T)}$; *autoaggiunto* se è simmetrico e se $D(T) = D(T^*)$. Se T è simmetrico, ha una chiusura \bar{T} , cioè un operatore il cui grafico è la chiusura del grafico di T ; \bar{T} è a sua volta simmetrico. Un operatore simmetrico T si dice *essenzialmente autoaggiunto* se \bar{T} è autoaggiunto; in questo caso $T^* = \bar{T}$ (vedi [12, § 8.2]).

In [3, § 2.3] si dimostra infatti che

$$\rho([Z, X])v = d\pi_0(Z)\rho(X)v - \rho(X)d\pi_0(Z)v$$

per ogni $Z \in \mathfrak{g}_0$, $X \in \mathfrak{g}_1$ e $v \in C^\infty(\pi_0)$ e che quindi, essendo $d\pi_0$ una rappresentazione di \mathfrak{g}_0 in $C^\infty(\pi_0)$ e per la (4.4),

$$\pi: X_0 + X_1 \mapsto d\pi_0(X_0) + \zeta^{-1}\rho(X_1) \quad X_i \in \mathfrak{g}_i$$

è una rappresentazione di \mathfrak{g} in $C^\infty(\pi_0)$. Si dimostra anche che $\rho(X)$ con dominio $C^\infty(\pi_0)$ è essenzialmente autoaggiunto per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$.

Osservazione 4.5. Per la (4.4), $\rho(X)^2 = -\frac{i}{2}d\pi_0([X, X])$. Se per qualche $X \in \mathfrak{g}_1$ si ha $[X, X] = 0$, allora $\rho(X)^2 = 0$. Per $v \in C^\infty(\pi_0)$

$$(\rho(X)^2v, v) = (\rho(X)v, \rho(X)v) = \|\rho(X)v\|^2 = 0$$

e quindi $\rho(X) = 0$. Se esiste una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ di \mathfrak{g}_1 per cui $[X_i, X_i] = 0$, deve essere $\rho = 0$ e quindi la rappresentazione si riduce a una coppia di rappresentazioni unitarie di G_0 in \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 con $d\pi_0|_{[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]} = 0$.

Esempio 4.6. Consideriamo la superalgebra $\mathfrak{su}(2|2)$ (vedi [17, § 3.4]) definita come la sottosuperalgebra di $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{2|2})$ ($\mathbb{C}^{2|2}$ superspazio di Hilbert con l'usuale prodotto scalare) formata dalle matrici X per cui $X^\dagger = -X$, cioè stabili rispetto alla coniugazione

$$\sigma: X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto -X^\dagger = \begin{pmatrix} -\bar{A}^\top & i\bar{C}^\top \\ i\bar{B}^\top & -\bar{D}^\top \end{pmatrix}$$

e con supertraccia nulla, cioè tali che

$$\text{str } X = \text{tr } A - \text{tr } D = 0$$

Gli elementi di $\mathfrak{su}(2|2)_0$ possono essere scritti come

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \text{tr } A & 0 \\ 0 & D - \text{tr } A \end{pmatrix} + \text{tr } A$$

e quindi, ricordando che $\text{tr } A = \text{tr } D$,

$$\mathfrak{su}(2|2)_0 \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$$

($\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$). Come gruppo ridotto dobbiamo prendere un gruppo di Lie che abbia $\mathfrak{su}(2|2)_0$ come algebra. In particolare consideriamo

$$G_0 \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times \mathbb{R}$$

e

$$G'_0 \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$$

Abbiamo rispettivamente un gruppo semplicemente connesso e un gruppo compatto. Occorre ora verificare che l'azione aggiunta di $\mathfrak{su}(2|2)_0$ su $\mathfrak{su}(2|2)_1$ discenda da un'azione del gruppo ridotto. Per G_0 non c'è problema poiché, essendo semplicemente connesso, tutte le rappresentazioni della sua algebra discendono da

rappresentazioni del gruppo. Invece il sottogruppo di G'_0 isomorfo a $U(1)$ non è semplicemente connesso; si ha però $[X, Y] = 0$ per $X \in \mathfrak{u}(1)$ e $Y \in \mathfrak{su}(2|2)$ e quindi l'azione di $\mathfrak{u}(1)$ discende dall'azione banale di $U(1)$ su $\mathfrak{su}(2|2)$. In entrambi i casi avremo

$$g.X = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix}$$

con $X \in \mathfrak{su}(2|2)$, $g \in G_0$ ($g \in G'_0$), $g = (U, V, \alpha)$ con $U, V \in SU(2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in U(1)$). Quindi, poiché $X^\dagger = -X$,

$$\begin{aligned} \pi_0: (U, V, \alpha) &\mapsto \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \\ \pi: X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\mapsto X - \text{tr } A = \begin{pmatrix} A - \text{tr } A & B \\ C & D - \text{tr } A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è una possibile rappresentazione unitaria sia per $(G_0, \mathfrak{su}(2|2))$ che per $(G'_0, \mathfrak{su}(2|2))$. Osserviamo infine che $(G'_0, \mathfrak{su}(2|2))$ è un supergruppo compatto secondo la definizione che daremo nel prossimo paragrafo.

Se $\Pi = (\pi_0, \pi, V)$ e $\Pi' = (\pi'_0, \pi', V')$ sono due rappresentazioni di una super coppia (G_0, \mathfrak{g}) , un morfismo $A: \Pi \rightarrow \Pi'$ è una mappa continua $V \rightarrow V'$ che intreccia π_0 con π'_0 (in particolare manda $C^\infty(\pi_0)$ in $C^\infty(\pi'_0)$) e π con π' . L'insieme dei morfismi di intreccio $\Pi \rightarrow \Pi'$ si indica con $\text{Hom}(\Pi, \Pi')$. Un isomorfismo è un morfismo che ha un inverso continuo. Se esiste un isomorfismo $A: \Pi \rightarrow \Pi'$, si dice che Π e Π' sono *equivalenti*. Se A è unitario si parla di *equivalenza unitaria*. Si può dimostrare che l'equivalenza implica l'equivalenza unitaria. Se V' è un sottospazio chiuso gradato di V invariante rispetto a π_0 e π , si dice che

$$\Pi' = \Pi|_{V'} = (\pi_0|_{V'}, \pi|_{V' \cap C^\infty(\pi_0)}, V')$$

è una *sottorappresentazione* di Π . Una rappresentazione è detta *irriducibile* se non ha sottorappresentazioni non banali.

In [3, § 2.4] si dimostrano i seguenti risultati riguardanti rappresentazioni unitarie. Il secondo è una generalizzazione del lemma di Schur al caso supergeometrico.

Proposizione 4.7. *Se Π è una rappresentazione unitaria e $\Pi' = \Pi|_{\mathcal{H}'}$ una sua sottorappresentazione, allora anche $\Pi'^\perp = \Pi|_{\mathcal{H}'^\perp}$ è una sottorappresentazione di Π e*

$$\Pi = \Pi' \oplus \Pi'^\perp \tag{4.5}$$

Lemma 4.8. *Una rappresentazione unitaria Π è irriducibile se e solo se $\text{Hom}(\Pi, \Pi) \cong \mathbb{C}$.*

4.2 Il caso dei supergruppi di Lie compatti

Vogliamo vedere se è possibile estendere al caso supergeometrico alcuni dei risultati classici sui gruppi compatti riportati in appendice. Poiché, come già detto, gli aspetti topologici di un supergruppo di Lie sono legati esclusivamente al gruppo ridotto, diamo la seguente definizione.

Definizione 4.9. Un *supergruppo di Lie compatto* è un supergruppo di Lie con gruppo ridotto compatto o equivalentemente una super coppia di Harish-Chandra (G_0, \mathfrak{g}) con G_0 compatto.

Notiamo innanzitutto che il teorema A.1 non ha un analogo supergeometrico. Infatti nel prossimo esempio vedremo che non per tutte le rappresentazioni di un supergruppo compatto in un superspazio di Hilbert vale la (4.5) e quindi, a differenza del caso dei gruppi compatti classici, non tutte le rappresentazioni sono unitarizzabili.

Esempio 4.10. Prendiamo la super coppia (G_0, \mathfrak{g}) dove G_0 è il toro unidimensionale che agisce banalmente su $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{1|1}$ (con parentesi banali). Chiamiamo X e Y rispettivamente i generatori di \mathfrak{g}_0 e \mathfrak{g}_1 . La rappresentazione in $\mathbb{C}^{1|1}$ data dalla rappresentazione banale di G_0 e da $\pi(X) = 0$ e $\pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è decomponibile.

Consideriamo una rappresentazione unitaria $\Pi = (\pi_0, \rho, \mathcal{H})$ di un supergruppo di Lie compatto (G_0, \mathfrak{g}) e vediamo come, a partire dal risultato classico enunciato nel teorema A.4, sia possibile costruire una sottorappresentazione irriducibile finito-dimensionale non nulla.

1. π_0 è una rappresentazione del gruppo compatto G_0 in \mathcal{H} . Essendo π_0 pari, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 sono sottospazi π_0 -stabili e, per il teorema A.4, ognuno di essi si decompone in somma diretta di sottospazi omogenei ortogonali irriducibili finito-dimensionali π_0 -stabili.
2. Fissiamo uno di questi sottospazi (indifferentemente contenuto in \mathcal{H}_0 o \mathcal{H}_1) e indichiamolo con $V^{(0)}$. Poiché $V^{(0)}$ è finito-dimensionale, tutti i suoi vettori sono lisci (vedi nota 4.1) e

$$V^{(0)} \subseteq C^\infty(\pi_0) \subseteq \mathcal{H} \quad (4.6)$$

3. Definiamo

$$\begin{cases} V^{(1)} = \sum_{X \in \mathfrak{g}_1} \rho(X)V^{(0)} = \rho(X_1)V^{(0)} + \dots + \rho(X_n)V^{(0)} \\ V^{(k)} = \sum_{X \in \mathfrak{g}_1} \rho(X)V^{(k-1)} \end{cases}$$

dove $\{X_1, \dots, X_n\}$ è una base di \mathfrak{g}_1 . La definizione è ben posta per la (4.6) e perché $\rho(X)C^\infty(\pi_0) \subseteq C^\infty(\pi_0)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$; quindi $V^{(k)} \subseteq C^\infty(\pi_0)$ per ogni k .

Tutti i $V^{(k)}$ sono sottospazi omogenei finito-dimensionali di \mathcal{H} di dimensione

$$\begin{cases} \dim V^{(1)} \leq \dim \mathfrak{g}_1 \cdot \dim V^{(0)} \\ \dim V^{(k)} \leq \dim \mathfrak{g}_1 \cdot \dim V^{(k-1)} \leq (\dim \mathfrak{g}_1)^k \cdot \dim V^{(0)} \end{cases}$$

e di parità

$$p(V^{(k)}) \equiv p(V^{(0)}) + k \pmod{2} \quad (4.7)$$

4. Per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$

$$\rho(X)^2 V^{(0)} \subseteq V^{(0)}$$

Infatti $V^{(0)}$ è π_0 -stabile e, per la (4.4), $\rho(X)^2 = -\frac{i}{2} d\pi_0([X, X])$.

Per la (4.3)

$$\pi_0(g)\rho(X)^2 v = \rho(g.X)^2 \pi_0(g)v$$

per ogni $v \in V^{(0)}$, $X \in \mathfrak{g}_1$ e $g \in G_0$. Quindi

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}_1} \rho(X)^2 V^{(0)}$$

è un sottospazio π_0 -stabile di $V^{(0)}$ ed essendo $V^{(0)}$ irriducibile o

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}_1} \rho(X)^2 V^{(0)} = V^{(0)} \quad (4.8a)$$

oppure

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}_1} \rho(X)^2 V^{(0)} = \{0\} \quad (4.8b)$$

Nel secondo caso

$$0 = (\rho(X)^2 v, v) = (\rho(X)v, \rho(X)v) = \|\rho(X)v\|^2$$

per ogni $v \in V^{(0)}$ e quindi $\rho(X)|_{V^{(0)}} = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$; quindi $V^{(k)} = \{0\}$ per $k \geq 1$ e $\Pi|_{V^{(0)}}$ è una rappresentazione irriducibile finito-dimensionale di (G_0, \mathfrak{g}) .

5. Supponiamo di essere nel caso (4.8a). Ogni $v \in V^{(0)}$ può essere scritto come

$$v = \sum_i \alpha_i \rho(X_i)^2 v_i$$

con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in V^{(0)}$ e $X_i \in \mathfrak{g}_1$ opportuni e quindi, considerando che gli elementi di $V^{(k)}$ sono combinazioni lineari di elementi del tipo $\rho(X_1) \cdots \rho(X_k)v$ con $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}_1$ e $v \in V^{(0)}$,

$$\begin{cases} V^{(0)} \subseteq V^{(2)} \subseteq \dots \subseteq V^{(2r)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}_{p(V^{(0)})} \\ V^{(1)} \subseteq V^{(3)} \subseteq \dots \subseteq V^{(2r+1)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}_{p(V^{(0)})+1} \end{cases} \quad (4.9)$$

6. Tutti i $V^{(k)}$ sono π_0 -stabili; infatti per la (4.3)

$$\begin{aligned}\pi_0(g)\rho(X_1)\rho(X_2)\cdots\rho(X_k) &= \rho(g.X_1)\pi_0(g)\rho(X_2)\cdots\rho(X_k) \\ &= \cdots \\ &= \rho(g.X_1)\rho(g.X_2)\cdots\rho(g.X_k)\pi_0(g)\end{aligned}$$

per ogni $g \in G_0$ e $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}_1$. Ovviamente

$$\rho(X)V^{(k)} \subseteq V^{(k+1)}$$

7. Vediamo come, fissata una base $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ di \mathfrak{g}_1 , ogni vettore di $V^{(k)}$ può essere espresso come combinazione lineare di vettori della forma

$$\rho(X_{i_1})\cdots\rho(X_{i_r})v \quad (4.10)$$

con $v \in V^{(0)}$, $r \leq k$ e $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$; ovviamente, per la (4.7), $r \equiv k \pmod{2}$.

Per $k = 0$ e $k = 1$ è ovvio. Supponiamo sia vero per $V^{(k-1)}$ e $V^{(k)}$ e mostriamo è vero per $V^{(k+1)}$. Prendiamo $w \in V^{(k)}$ della forma (4.10) e consideriamo $\rho(X_j)w$ con $X_j \in B$. Supponiamo $i_{s-1} < j \leq i_s$. Per la (4.4)

$$\begin{aligned}\rho(X_j)w &= \rho(X_j)\rho(X_{i_1})\rho(X_{i_2})\cdots\rho(X_{i_r})v \\ &= -\rho(X_{i_1})\rho(X_j)\rho(X_{i_2})\cdots\rho(X_{i_r})v \\ &\quad - i d\pi_0([X_j, X_{i_1}])\rho(X_{i_2})\cdots\rho(X_{i_r})v\end{aligned}$$

Per il punto 6

$$-i d\pi_0([X_j, X_{i_1}])\rho(X_{i_2})\cdots\rho(X_{i_r})v \in V^{(k-1)}$$

Dopo $s - 1$ passaggi si trova

$$\rho(X_j)w = (-1)^{s-1}\rho(X_{i_1})\cdots\rho(X_j)\rho(X_{i_s})\cdots\rho(X_{i_r})v + w'$$

con $w' \in V^{(k-1)}$. Se $j < i_s$ abbiamo concluso; se $j = i_s$, considerando che $\rho(X_j)^2 = -\frac{i}{2}d\pi_0([X_j, X_j])$, sempre per il punto 6 si ha che $\rho(X_j)w \in V^{(k-1)}$.

In particolare deve essere $r \leq n = \dim \mathfrak{g}_1$ e quindi

$$V^{(n+1)} = \sum_{i=1}^n \rho(X_i)V^{(n)} \subseteq V^{(n-1)}$$

Per la (4.9), $V^{(n-1)} \subseteq V^{(n+1)}$ e quindi

$$V^{(n+1)} = V^{(n-1)} \quad (4.11)$$

8. Per la (4.11)

$$\tilde{V} = V^{(n-1)} \oplus V^{(n)}$$

è un sottospazio gradato di \mathcal{H} , finito-dimensionale e invariante per l'azione di G_0 e \mathfrak{g}_1 , cioè $\Pi|_{\tilde{V}}$ è una sottorappresentazione di Π .

9. Consideriamo un morfismo $T \in \text{Hom}(\Pi|_{\tilde{V}}, \Pi|_{\tilde{V}})$. Essendo $V^{(0)}$ π_0 -irriducibile, per il lemma di Schur (lemma A.3), $T|_{V^{(0)}} = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Preso $w \in V^{(k)}$ nella forma (4.10)

$$Tw = T\rho(X_{i_1}) \cdots \rho(X_{i_r})v = \rho(X_{i_1}) \cdots \rho(X_{i_r})Tv = \lambda w$$

Quindi $T = \lambda I$ e per il lemma 4.8, $\Pi|_{\tilde{V}}$ è irriducibile.

10. Concludendo abbiamo che o $\Pi|_{\tilde{V}}$ o $\Pi|_{V^{(0)}}$ (a seconda che sia verificata la (4.8a) o la (4.8b)) è una sottorappresentazione irriducibile finito-dimensionale di Π .

Da ciò in particolare vediamo che anche per i supergruppi compatti vale un teorema analogo al teorema A.4.

Teorema 4.11. *Se (G_0, \mathfrak{g}) è un supergruppo di Lie compatto:*

1. ogni rappresentazione unitaria irriducibile è finito-dimensionale;
2. ogni rappresentazione unitaria è somma diretta di rappresentazioni irriducibili mutuamente ortogonali.

Dimostrazione. Per quanto detto sopra, ogni rappresentazione unitaria di un supergruppo compatto ha una sottorappresentazione finito-dimensionale non nulla e quindi ogni rappresentazione unitaria irriducibile ha dimensione finita.

Per dimostrare la seconda parte del teorema si può procedere come nel caso classico. Consideriamo l'insieme costituito da tutte le famiglie di sottorappresentazioni di Π irriducibili, finito-dimensionali e mutuamente ortogonali, parzialmente ordinate per inclusione. Ogni sottoinsieme di famiglie totalmente ordinato è maggiorato dall'unione delle famiglie stesse, quindi per il lemma di Zorn⁽⁶⁾ esisterà una famiglia massimale $\{\mathcal{M}_\alpha\}$. Sia \mathcal{N} il complemento ortogonale in \mathcal{H} di $\bigoplus_\alpha \mathcal{M}_\alpha$. Per la proposizione 4.7, $\Pi|_{\mathcal{N}}$ è una sottorappresentazione di Π e quindi, per quanto detto sopra, se $\mathcal{N} \neq \{0\}$ conterrà una sottorappresentazione irriducibile finito-dimensionale non nulla, contraddicendo la massimalità di $\{\mathcal{M}_\alpha\}$. Quindi $\mathcal{N} = \{0\}$ e

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{M}_\alpha \quad \square$$

⁽⁶⁾Il lemma di Zorn afferma che ogni insieme non vuoto e parzialmente ordinato X , con la proprietà che ogni sottoinsieme totalmente ordinato ha un maggiorante in X , possiede un elemento massimale.

Osservazione 4.12. La prima parte del teorema continua ad essere valida anche per una rappresentazione non unitaria in un superspazio di Hilbert. Nella precedente costruzione l'unitarietà viene usata solo per dimostrare le inclusioni (4.9) e l'irriducibilità di $\Pi|_{\tilde{V}}$. Ai fini di dimostrare la prima parte del teorema è però sufficiente trovare una sottorappresentazione finito-dimensionale non nulla: non è necessario che questa sia irriducibile. Si può quindi considerare una rappresentazione $\Pi = (\pi_0, \pi, \mathcal{H})$, unitaria o meno, e procedere come prima (ovviamente sostituendo ρ con $\zeta\pi$). Infatti π_0 è una rappresentazione pari di un gruppo compatto in un superspazio di Hilbert e, per il teorema A.1, è unitarizzabile e conterrà sottorappresentazioni (irriducibili) omogenee finito-dimensionali non nulle. Fissata una di queste rappresentazioni, che indichiamo al solito con $V^{(0)}$, costruiamo

$$\tilde{V} = \bigoplus_{i=0}^n V^{(i)}$$

con $n = \dim \mathfrak{g}_1$. $\Pi|_{\tilde{V}}$ sarà una sottorappresentazione finito-dimensionale (non necessariamente irriducibile) di Π . Quindi tutte le rappresentazioni di supergruppi compatti in superspazi di Hilbert contengono sottorappresentazioni finito-dimensionali non nulle e pertanto tutte le rappresentazioni irriducibili sono finito-dimensionali. La seconda parte del teorema vale invece solo nel caso unitario perché, come già osservato, esistono rappresentazioni in spazi di Hilbert non decomponibili, cioè per cui non vale la (4.5).

Per proseguire nel nostro intento occorrerebbe definire cosa sia la rappresentazione regolare (destra) per un supergruppo di Lie. Vedremo nel prossimo paragrafo che ciò presenta diversi problemi.

4.3 Il problema della rappresentazione regolare

Vogliamo cercare un analogo della rappresentazione regolare di un gruppo classico per un supergruppo di Lie. Se G è un gruppo topologico (localmente compatto e separabile) e μ la sua misura di Haar destra, si definisce una rappresentazione di G in $L^2(G, \mu)$, detta *rappresentazione regolare destra*, tramite

$$R(y): f(x) \mapsto f(xy) \quad x, y \in G \text{ e } f \in L^2(G, \mu)$$

$R(y)$ è cioè il pullback dell'azione destra $\rho(y): x \mapsto xy$ di G su G (notiamo che un'azione destra sul gruppo dà un'azione sinistra sulle funzioni sul gruppo). Si dimostra che la rappresentazione regolare è continua e unitaria nello spazio di Hilbert $L^2(G, \mu)$ (vedi [1, § 5.1]).

Se G è un gruppo di Lie (liscio reale) le funzioni naturali definite su G sono le funzioni lisce $C^\infty(G)$. In generale non ci sono relazioni di inclusione tra $C^\infty(G)$ e $L^2(G, \mu)$. Si possono però considerare le funzioni lisce a supporto compatto $C_c^\infty(G) \subset L^2(G, \mu)$. In particolare la loro complessificazione $C_c^\infty(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è densa in $L^2(G, \mu)$ e stabile rispetto a R ; si può cioè definire la rappresentazione regolare in $C_c^\infty(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, introdurre la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ e

completare $C_c^\infty(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a $L^2(G, \mu)$ secondo questa norma. Consideriamo $X \in \text{Lie}(G)$. Si dimostra⁽⁷⁾

$$dR(X)(f) = \left(\frac{d}{dt} R(\exp tX)f \right)_{t=0} = X(f) \quad f \in C_c^\infty(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

e quindi $dR(X) = X$. In particolare si dimostra $C_c^\infty(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subseteq C^\infty(R)$.

Sia ora G un supergruppo di Lie e \mathfrak{g} la superalgebra dei suoi campi vettoriali invarianti a sinistra. Lo spazio delle funzioni lisce verrà quindi sostituito dallo spazio $\mathcal{O}(G)$ delle sezioni su G : è a partire da qui che in qualche modo vorremmo definire una rappresentazione regolare. Innanzitutto notiamo che la moltiplicazione $m: G \times G \rightarrow G$ può chiaramente essere pensata come un'azione destra di G su G (secondo la definizione 2.2), che possiamo chiamare *azione regolare destra*. Nel § 3.3 abbiamo visto che un'azione destra di un supergruppo di Lie su una supervarietà è equivalente a un'azione destra del gruppo ridotto (nel senso specificato al § 2.4) più un omomorfismo tra la superalgebra del gruppo e la superalgebra dei campi vettoriali sulla supervarietà. L'azione del gruppo ridotto è data dalla (2.8) (che in questo caso coincide con la (2.10)), cioè G^\sim agisce su G mediante la famiglia di morfismi

$$\begin{aligned} r: G^\sim &\longrightarrow \text{Hom}(G, G) \\ g &\longmapsto r_g = m(\text{id}_G, \hat{g}) \end{aligned}$$

dove al solito $\hat{g} = g \circ !_G$. Poiché per $g, g' \in G^\sim$, $r_{g'}r_g = r_{gg'}$ (è un'azione destra), passando ai pullback si ha

$$r_g^* r_{g'}^* = r_{gg'}^*$$

Quindi $g \mapsto r_g^*$ definisce un'azione lineare sinistra di G^\sim sulle sezioni su G , cioè una rappresentazione del gruppo di Lie G^\sim nel superspazio vettoriale $\mathcal{O}(G)$. Abbiamo già visto alla fine del § 2.4 che si tratta di una rappresentazione pari e continua. Notiamo inoltre che il morfismo ridotto r_g^\sim è l'usuale azione regolare destra di G^\sim su G^\sim (in particolare è un diffeomorfismo di G^\sim in se stesso). La (3.4) diventa invece

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{J}(G) \\ X_\tau &\longmapsto (I \otimes \tau)m^* = X_\tau \end{aligned}$$

cioè l'inclusione. Ciò è analogo a quanto avviene nel caso classico. Infine, per avere una rappresentazione in uno spazio complesso, si può considerare la complessificazione $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

In questo modo abbiamo costruito una rappresentazione del supergruppo G (o se si preferisce della super coppia (G^\sim, \mathfrak{g})) nel senso della definizione 4.3; infatti

⁽⁷⁾Si prova cioè che $t^{-1}(R(\exp tX)f - f)$ tende a $X(f)$ in $L^2(G, \mu)$ per t che tende a 0.

1. $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è un superspazio complesso di Fréchet, cioè localmente convesso, completo e metrizzabile (vedi § 1.5);
2. $g \mapsto r_g^* = (I \otimes \text{ev}_g)m^*$, $g \in G^\sim$, è una rappresentazione pari del gruppo ridotto G^\sim in $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ed è continua;
3. $X \mapsto X$, $X \in \mathfrak{g}$, è ovviamente una rappresentazione della superalgebra \mathfrak{g} in tutto $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$;
4. per la (3.5) con $\sigma' = m$, il differenziale della rappresentazione del gruppo ridotto coincide con la rappresentazione di \mathfrak{g}_0 , cioè

$$\left(\frac{d}{dt} r_{\exp(tX)}^*(f) \right)_{t=0} = X(f)$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}_0$ ed $f \in \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$;

5. le due rappresentazioni sono compatibili nel senso che $g.X = r_g^* X r_{g^{-1}}^*$ per $g \in G^\sim$ e $X \in \mathfrak{g}_1$: si tratta proprio della definizione dell'azione di G^\sim su \mathfrak{g} data dalla (3.2).

Esempio 4.13. Prendiamo $G = \text{GL}(1|1)$ (vedi esempi 2.6 e 2.11), il cui gruppo ridotto è $G^\sim = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 x^2 \neq 0\}$ con moltiplicazione

$$(x^1, x^2)(x'^1, x'^2) = (x^1 x'^1, x^2 x'^2)$$

Preso $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \in G^\sim$, l'azione di G^\sim su G si scrive simbolicamente come

$$r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)} : \begin{pmatrix} x^1 & \theta^1 \\ \theta^2 & x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^1 & \theta^1 \\ \theta^2 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 & 0 \\ 0 & \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \bar{x}^1 & \theta^1 \bar{x}^2 \\ \theta^2 \bar{x}^1 & x^2 \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

nel senso che

$$\begin{aligned} r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}^*(x^1) &= x^1 \bar{x}^1 & r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}^*(\theta^1) &= \theta^1 \bar{x}^2 \\ r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}^*(x^2) &= x^2 \bar{x}^2 & r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}^*(\theta^2) &= \theta^2 \bar{x}^1 \end{aligned}$$

Quindi G^\sim agisce su $\mathcal{O}(G)$ come

$$\begin{aligned} r_{(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}^*(f_0(x^1, x^2) + f_1(x^1, x^2)\theta^1 + f_2(x^1, x^2)\theta^2 + f_3(x^1, x^2)\theta^1\theta^2) &= \\ = f_0(x^1 \bar{x}^1, x^2 \bar{x}^2) + f_1(x^1 \bar{x}^1, x^2 \bar{x}^2) \bar{x}^2 \theta^1 &+ \\ + f_2(x^1 \bar{x}^1, x^2 \bar{x}^2) \bar{x}^1 \theta^2 + f_3(x^1 \bar{x}^1, x^2 \bar{x}^2) \bar{x}^1 \bar{x}^2 \theta^1 \theta^2 & \end{aligned}$$

con $f_i \in C^\infty(G^\sim)$. La superalgebra del gruppo agisce sulle sezioni con le derivazioni (2.14).

Per analogia al caso classico si potrebbe inoltre pensare di restringersi alle sezioni a supporto compatto $\mathcal{O}_c(G)$ (vedi definizione 1.22) o alla loro complessificazione $\mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Chiaramente l'essere a supporto compatto

è preservato dalle derivazioni (commutano con le restrizioni) e dall'azione di r_g^* ($g \in G^\sim$); infatti⁽⁸⁾

$$\text{supp } r_g^*(s) \subseteq (r_g^\sim)^{-1}(\text{supp } s)$$

e, poiché r_g^\sim è un diffeomorfismo, $(r_g^\sim)^{-1}(\text{supp } s)$ è compatto.

Problemi aperti. A questo punto sorgono tutta una serie di ostacoli che rendono difficile l'analogia col caso dei gruppi compatti classici. Alcuni di questi ostacoli potrebbero essere superati, altri invece sono dovuti alla natura intrinsecamente diversa di gruppi e supergruppi. In particolare vedremo che dato un supergruppo di Lie (compatto o meno), la sua rappresentazione regolare non potrà in generale essere unitaria.

1. Un primo aspetto negativo dell'approccio fin qui seguito è costituito dal fatto che, mentre la definizione di rappresentazione di supergruppo di Lie viene data in termini di super coppia di Harish-Chandra, la rappresentazione descritta in questo paragrafo agisce sullo spazio delle sezioni, concetto strettamente legato al supergruppo visto come supervarietà e, per altro, assai poco maneggevole. Inoltre abbiamo visto al § 3.2 che, se il passaggio da supergruppo a super coppia è quasi immediato, non esiste invece una costruzione semplice ed esplicita che permetta il passaggio inverso. In altre parole dato un supergruppo in termini di super coppia di Harish-Chandra non si saprebbe come costruire la sua rappresentazione regolare. In [9] si afferma che se G è un supergruppo di Lie di dimensione $p|q$, allora

$$\mathcal{O}(G) \cong C^\infty(G^\sim) \otimes \Lambda(q)$$

vale globalmente (al solito $\Lambda(q)$ è l'algebra esterna con q generatori). Sarebbe interessante studiare come un supergruppo agisca in questo spazio mediante la sua azione regolare e, di conseguenza, definire la rappresentazione regolare del supergruppo in un qualche spazio che contenga, per esempio, la complessificazione di $C_c^\infty(G^\sim) \otimes \Lambda(q)$. Una tale definizione avrebbe il vantaggio di non coinvolgere la struttura di supervarietà di G . D'altra parte definire la rappresentazione regolare a partire dallo spazio delle sezioni renderebbe più evidente le analogie col caso dei gruppi classici.

⁽⁸⁾Sia $\varphi: M \rightarrow N$ un morfismo e $s \in \mathcal{O}(N)$. Allora

$$\text{supp } \varphi^*(s) \subseteq (\varphi^\sim)^{-1}(\text{supp } s)$$

Infatti $x \notin (\varphi^\sim)^{-1}(\text{supp } s)$ se e solo se esiste un intorno V di $\varphi^\sim(x)$ tale che $s|_V = 0$. In questo caso $(\varphi^\sim)^{-1}(V)$ è un intorno di x e, poiché i pullback commutano con le restrizioni (vedi (1.7)),

$$(\varphi^*(s))|_{(\varphi^\sim)^{-1}(V)} = \varphi^*(s|_V) = 0$$

Quindi $x \notin \text{supp } \varphi^*(s)$.

2. Problema ben più grave è che non c'è nessun prodotto scalare naturale tra le sezioni. Volendo procedere come nel caso classico bisognerebbe fissare una *coniugazione* su $\mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, cioè una mappa antilineare

$$\sigma: \mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

con $\sigma^2 = I$ e $\sigma|_{\mathcal{O}_c(G)} = \text{id}$, e poi, introdotto un integrale sul supergruppo, definire un prodotto scalare del tipo

$$(s, t) = \int s \cdot \sigma(t) \quad s, t \in \mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

In effetti alla fine del § 1.4 abbiamo accennato all'esistenza di una nozione di integrazione su una supervarietà data dall'integrale di Berezin⁽⁹⁾. Il problema però è che l'integrale di Berezin ha un kernel molto grande e pertanto non andrebbe bene per definire un prodotto scalare tra le sezioni nel modo che abbiamo detto⁽¹⁰⁾. In questo caso l'unica soluzione sarebbe considerare un qualche spazio quoziente, allontanandosi decisamente da quanto avviene nel caso classico.

Se si trovasse un opportuno prodotto scalare, bisognerebbe a questo punto completare $\mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a superspazio di Hilbert secondo la norma indotta dal prodotto. Si troverebbe uno spazio più grande in cui le derivazioni sarebbero in generale definite solo su un sottospazio denso.

3. Anche se si riuscisse a fare tutto ciò, non sarebbe possibile in generale costruire una rappresentazione unitaria (nel senso della definizione 4.4). Prendiamo per esempio $\text{GL}(1|1)$. Abbiamo visto nell'esempio 2.11 che la parte dispari della sua superalgebra di Lie ha una base $\{T_1, T_2\}$ per cui $[T_i, T_i] = 0$, $i = 1, 2$. Dall'osservazione 4.5 sappiamo che, per una tale supergruppo, l'unico modo di avere una rappresentazione unitaria è che $T_i \mapsto 0$, mentre nel nostro caso abbiamo $T_i \mapsto T_i$ (o $T_i \mapsto \zeta T_i$ usando la (4.2)). Nel prossimo esempio vedremo in un caso molto semplice dove nasce il problema.

Esempio 4.14. Prendiamo $\mathbb{R}^{0|1}$ visto come supergruppo di Lie (vedi esempio 2.5). Il gruppo ridotto è costituito dalla sola identità e e la sua superalgebra è data da

$$\text{Lie}(\mathbb{R}^{0|1})_0 = \{0\} \quad \text{Lie}(\mathbb{R}^{0|1})_1 = \{ \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

⁽⁹⁾Per un supergruppo si potrebbe pensare in particolare di integrare le variabili pari rispetto alla misura di Haar del gruppo ridotto.

⁽¹⁰⁾Supponiamo di avere $p+q$ coordinate globali (x^i, θ^j) e di aver fissato una coniugazione σ . Sia $s \in \mathcal{O}_c(G) \subset \mathcal{O}_c(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ una sezione del tipo $s = s_0 \neq 0$ con $s_0 \in C_c^\infty(G^\sim)$, cioè sia s una sezione non nulla in cui non compaiano variabili dispari. Allora $\int s \cdot \sigma(s) = \int s^2 = 0$. L'unico modo perché l'integrale non sia 0 è che $s \cdot \sigma(s)$ contenga un termine del tipo $s_Q \theta^1 \cdots \theta^q$, $s_Q \in C_c^\infty(G^\sim)$. Quindi $(s, t) \mapsto \int s \cdot \sigma(t)$ non può essere un prodotto scalare.

Chiaramente $\mathbb{R}^{0|1}$ rientra nel caso considerato nell'osservazione 4.5 e, poiché il suo gruppo ridotto ha solo la rappresentazione banale, l'unica rappresentazione unitaria del supergruppo è proprio quella banale. Per quanto riguarda la sua rappresentazione regolare, consideriamo la complessificazione della superalgebra delle sezioni sul gruppo

$$\mathcal{O}_c(\{e\}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{\alpha + \beta\theta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^{1|1} = \mathbb{C}^{1|0} \oplus \mathbb{C}^{0|1}$$

Nella base canonica di $\mathbb{C}^{1|1}$, $X = \frac{\partial}{\partial\theta}$ sarà $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per avere una rappresentazione unitaria l'operatore $\rho(X) = \zeta X$ (vedi (4.2)) dovrebbe essere hermitiano rispetto a un qualche prodotto scalare, ma ciò è chiaramente impossibile. Il prodotto scalare è per altro praticamente fissato dovendo essere $\mathbb{C}^{1|0}$ ortogonale a $\mathbb{C}^{0|1}$ per la definizione di superspazio di Hilbert. Inoltre il fatto che $\mathbb{R}^{0|1}$ sia un supergruppo compatto, mostra che il problema in generale non si risolve neppure per questi particolari supergruppi.

4. Supponiamo per un momento che per qualche supergruppo di Lie compatto sia possibile definire una rappresentazione regolare unitaria e torniamo al problema con cui terminava il paragrafo precedente, cioè quello dell'estensione supergeometrica della teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti. Classicamente si dimostra che la rappresentazione regolare di un gruppo compatto G contiene tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo, ognuna con molteplicità pari alla sua dimensione. Per far questo si associa ad ogni rappresentazione irriducibile (π, V) una famiglia di funzioni continue (e quindi a quadrato integrabile essendo il gruppo compatto) costituita dai cosiddetti elementi di matrice

$$D_{ij}^{\pi}(x) = (\pi(x)e_j, e_i)_V \quad \begin{array}{l} \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base ortonormale di } V, \\ i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } x \in G \end{array}$$

Si mostra poi che, al variare di π , i e j , esse costituiscono una base di $L^2(G, \mu)$ e che, per ogni rappresentazione π fissata, il sottospazio da esse generato si decompone in n sottorappresentazioni equivalenti a π .

Questo fatto non ha un'estensione evidente al caso supergeometrico. Bisognerebbe infatti associare ad ogni rappresentazione unitaria irriducibile una famiglia di sezioni e non più di funzioni. La stessa mappa $x \mapsto \pi(x)$ perde significato in questo contesto, poiché un supergruppo, come più volte notato a partire dall'osservazione 1.7, non è un insieme. Restringersi al solo gruppo ridotto vorrebbe dire perdere tutta l'informazione sulla rappresentazione della parte dispari della superalgebra del gruppo. È possibile che un approccio del tipo ipotizzato al punto 1, se da una parte renderebbe meno evidente l'analogia tra il ruolo delle funzioni e quello delle sezioni, dall'altro possa risultare conveniente a superare questo ostacolo.

Conclusioni

Scopo di questa tesi era studiare la possibilità di estendere alcuni tra i principali risultati sulle rappresentazioni unitarie di gruppi compatti al caso dei supergruppi di Lie compatti. Nel corso della trattazione abbiamo visto come l'analogia tra le due teorie possa arrivare solo fino a un certo punto, a conferma della sostanziale diversità che intercorre tra gruppi e supergruppi.

Il principale ostacolo è costituito dalla mancanza di una rappresentazione regolare unitaria per i supergruppi di Lie. Tale problematica, inserita nel contesto più generale dello studio delle rappresentazioni indotte, potrebbe essere oggetto di ulteriori indagini future. Nonostante ciò è stato possibile provare l'estensione ai supergruppi compatti almeno per il teorema di completa decomponibilità delle rappresentazioni unitarie in sottorappresentazioni irriducibili finito-dimensionali. Inoltre la rappresentazione nello spazio delle sezioni esaminata al § 4.3, pur non essendo unitaria né tanto meno definita in un superspazio di Hilbert, è pur sempre una buona rappresentazione del supergruppo ed è la naturale estensione della definizione classica di rappresentazione regolare. D'altra parte, come si è visto con un semplice esempio (vedi esempio 4.14 a pagina 87), può persino verificarsi il caso estremo in cui la sola rappresentazione unitaria di un supergruppo sia quella banale. Ciò induce a ritenere il requisito di unitarizzabilità eccessivamente restrittivo e a considerare pertanto una classe di rappresentazioni più ampia. Determinare le caratteristiche di tale classe estesa è uno dei principali problemi aperti. Questa è la differenza più significativa rispetto al caso classico.

Un sottoproblema è lo studio delle proprietà del supergruppo che garantiscono l'unitarizzabilità della rappresentazione regolare associata, oppure, più in generale, di rappresentazioni indotte da opportuni sottosupergruppi. Un esempio in tal senso è stato dato in [3]. Per far ciò, almeno per quanto riguarda la rappresentazione regolare, non si può comunque prescindere dal definire un prodotto scalare (eventualmente degenere) nello spazio delle sezioni su un supergruppo o in un qualche spazio ad esso isomorfo.

Visti i successi derivanti dall'uso delle super coppie di Harish-Chandra nello studio delle rappresentazioni dei supergruppi di Lie, sembra ragionevole proseguire in questa direzione. In particolare sarebbe auspicabile definire la rappresentazione regolare direttamente in termini di super coppia, come

accennato nell'ultima parte del § 4.3.

Lo stesso rapporto tra supergruppi e super coppie merita di essere approfondito: abbiamo infatti sottolineato che, sebbene i due concetti siano equivalenti, non esiste una costruzione semplice ed esplicita del supergruppo associato ad una super coppia data. Un approccio alla questione attualmente in fase di studio è basato sull'uso del funtore dei punti. Non è escluso che la soluzione di questo problema possa anche fornire ulteriori elementi nello studio delle rappresentazioni di supergruppi.

Appendice A

Rappresentazioni unitarie di gruppi compatti

Esaminiamo brevemente alcuni dei principali risultati classici della teoria delle rappresentazioni dei gruppi topologici compatti [1, 6, 16].

Sia G un gruppo compatto e π una rappresentazione continua⁽¹⁾ di G in uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H}_π con prodotto scalare (\cdot, \cdot) .

Teorema A.1. *Esiste in \mathcal{H}_π un nuovo prodotto scalare $(\cdot, \cdot)'$ che definisce una norma equivalente a quella iniziale e che rende la rappresentazione π unitaria.*

Questo nuovo prodotto scalare è dato dalla media sul gruppo

$$(u, v)' = \int_G (\pi(x)u, \pi(x)v) d\mu(x) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi$$

con $d\mu$ misura di Haar del gruppo (normalizzata a 1). Si può quindi assumere che tutte le rappresentazioni dei gruppi compatti in spazi di Hilbert siano unitarie, a patto eventualmente di ridefinire il prodotto scalare.

Se π e ρ sono due rappresentazioni di G in \mathcal{H}_π e \mathcal{H}_ρ rispettivamente, si indica con $\text{Hom}(\pi, \rho)$ lo spazio degli *operatori di intreccio* (cioè gli operatori lineari continui $T: \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\rho$ per cui $T\pi(x) = \rho(x)T$ per ogni $x \in G$). Se $\text{Hom}(\pi, \rho)$ contiene isomorfismi, π e ρ sono *equivalenti*. Una rappresentazione è (*topologicamente*) *irriducibile* se non contiene sottospazi invarianti chiusi non banali.

Proposizione A.2. *Se π è una rappresentazione unitaria di un gruppo G (non necessariamente compatto) in uno spazio \mathcal{H}_π e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ è un sottospazio chiuso invariante, allora anche \mathcal{M}^\perp è invariante e π è somma diretta di $\pi|_{\mathcal{M}}$ e $\pi|_{\mathcal{M}^\perp}$.*

⁽¹⁾Vedi nota 2.8. Tutte le rappresentazioni considerate nel seguito sono continue.

Lemma A.3 (di Schur).

1. Una rappresentazione unitaria π di un gruppo G (non necessariamente compatto) è irriducibile se e solo se $\text{Hom}(\pi, \pi)$ contiene solo multipli scalari dell'identità.
2. Due rappresentazioni unitarie irriducibili π_1 e π_2 sono equivalenti se e solo se $\dim \text{Hom}(\pi_1, \pi_2) = 1$, altrimenti $\text{Hom}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$.

Teorema A.4. Se G è un gruppo compatto:

1. ogni rappresentazione irriducibile è finito dimensionale;
2. ogni rappresentazione unitaria è somma diretta di rappresentazioni irriducibili mutuamente ortogonali.

Teorema A.5. Siano π_r e π_s due rappresentazioni unitarie irriducibili di dimensione d_r e d_s di un gruppo compatto G e siano $\{e_k^r\}_k$ e $\{e_k^s\}_k$ basi ortonormali dei rispettivi spazi di Hilbert \mathcal{H}_{π_r} e \mathcal{H}_{π_s} . Allora gli elementi di matrice

$$D_{ij}^{\pi_p}(x) = \left(\pi_p(x) e_j^p, e_i^p \right) \quad p = r, s$$

appartengono a $L^2(G, \mu)$ (μ misura di Haar) e soddisfano la relazione

$$\left(D_{ij}^{\pi_r}, D_{kl}^{\pi_s} \right)_{L^2(G, \mu)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_r \not\sim \pi_s \\ \frac{1}{d_r} \delta_{ik} \delta_{jl} & \text{se } \pi_r = \pi_s \end{cases}$$

Se \hat{G} è l'insieme delle classi di equivalenza delle rappresentazioni unitarie irriducibili di G , allora

$$\{ \sqrt{d_\pi} D_{ij}^\pi \mid [\pi] \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d_\pi \} \subset C(G) \subset L^2(G, \mu) \quad (\text{A.1})$$

costituisce una famiglia ortonormale di funzioni.

Teorema A.6 (di Peter-Weyl). Le funzioni (A.1) sono una base di Hilbert per lo spazio $L^2(G, \mu)$.

Consideriamo la rappresentazione regolare destra R di G in $L^2(G, \mu)$, ossia la rappresentazione definita da $R(y)(f(x)) = f(xy)$ con $x, y \in G$ e $f \in L^2(G, \mu)$ (si dimostra essere continua e unitaria). Fissata una rappresentazione $\pi \in \hat{G}$ di dimensione d_π e $i \in \{1, \dots, d_\pi\}$, sia $\mathcal{H}_{\pi, i}$ il sottospazio di $L^2(G, \mu)$ generato dalle funzioni $\{ \sqrt{d_\pi} D_{ij}^\pi \mid 1 \leq j \leq d_\pi \}$. Allora $R|_{\mathcal{H}_{\pi, i}}$ è una sottorappresentazione (irriducibile) di R equivalente a π e quindi ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di G compare nella decomposizione della rappresentazione regolare destra con molteplicità pari alla sua dimensione:

$$L^2(G, \mu) = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ [\pi] \in \hat{G}}}^{d_\pi} \mathcal{H}_{\pi, i}$$

Bibliografia

- [1] Asim O. Barut e Ryszard Rączka: *Theory of group representations and applications*. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
- [2] Felix A. Berezin: *Introduction to superanalysis*, volume 9 della serie *Mathematical Physics and Applied Mathematics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [3] Claudio Carmeli, Gianni Cassinelli, Alessandro Toigo e Veeravalli S. Varadarajan: *Unitary representations of super Lie groups and applications to the classification and multiplet structure of super particles*. <http://www.ge.infn.it/~gruppo4/homepage.html>, in stampa su *Communications in Mathematical Physics*, 2005.
- [4] Sidney Coleman e Jeffrey Mandula: *All possible symmetries of the S matrix*. *Phys. Rev.*, 159(5):1251–1256, 1967.
- [5] Pierre Deligne e John W. Morgan: *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*. Nel *Quantum fields and strings: a course for mathematicians, Vol. 1, 2 (Princeton, NJ, 1996/1997)*, pagine 41–97. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [6] Gerald B. Folland: *A course in abstract harmonic analysis*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [7] Daniel S. Freed: *Five lectures on supersymmetry*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [8] Alexander Grothendieck: *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 4:73–112 (1954), 1952.
- [9] Bertram Kostant: *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*. Nel *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, pagine 177–306. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 570. Springer, Berlin, 1977.
- [10] Dimitry A. Leites: *Introduction to the theory of supermanifolds*. *Uspekhi Mat. Nauk*, 35(1(211)):3–57, 255, 1980.

-
- [11] Yuri I. Manin: *Gauge field theory and complex geometry*, volume 289 della serie *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [12] Michael Reed e Barry Simon: *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York, 1972.
- [13] Giuseppe Rosolini: *Notes on category theory*. <http://www.disi.unige.it/person/RosoliniG/>, 1995.
- [14] Michael E. Taylor: *Noncommutative harmonic analysis*, volume 22 della serie *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [15] Veeravalli S. Varadarajan: *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974. Prentice-Hall Series in Modern Analysis.
- [16] Veeravalli S. Varadarajan: *An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups*, volume 16 della serie *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [17] Veeravalli S. Varadarajan: *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, volume 11 della serie *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2004.
- [18] Garth Warner: *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188.