

Meccanica e Dinamica

- 1) Un aereo in fase di decollo impiega circa 40 s per raggiungere la velocità di decollo di 300 km/h. Quanto valgono l'accelerazione (supposta costante) e lo spazio percorso prima del decollo?

Soluzione:

- **Quanto vale l'accelerazione media (supposta costante)?**

L'accelerazione media è definita come:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

Questa è una equazione vettoriale.

In questo caso il moto è lungo una retta, quindi l'equazione può essere scritta per la sola componente lungo la direzione del moto

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Dalla definizione si ricava quindi che in questo caso l'accelerazione vale:

$$a_m = \frac{300 \text{ km/h} - 0}{40 \text{ s}} = \frac{300 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}}{40 \text{ s}} = 2.08 \text{ m/s}^2$$

- **Quanto vale lo spazio percorso prima del decollo?**

Lo spazio percorso è dato dalla distanza fra la posizione finale e quella iniziale.

$$S = x(t) - x(t_o)$$

Per calcolare lo spazio è necessario conoscere la posizione dell'aereo al tempo $t = 40 \text{ s}$. Le equazioni che descrivono la posizione in funzione del tempo sono dette equazioni del moto.

- **Quali sono le equazioni del moto dell'aereo?**

L'aereo sta accelerando. Il testo dice di considerare l'accelerazione costante.

Le equazioni del moto nel caso di un moto uniformemente accelerato sono date da

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o - \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

E' una equazione vettoriale.

In questo caso avendo un moto lungo una sola direzione, considero la sola componente lungo la direzione del moto.

$$x(t) = x_o - v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Lo spazio percorso quindi in questo caso ($v_o = 0$) sarà dato da

$$S = x(t) - x_o = \frac{1}{2}a_m(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$S = \frac{1}{2}(2.08 \text{ m/s}^2)(40 \text{ s})^2 = 1670 \text{ m}$$

- 2) L'intervallo di tempo fra la percezione di un segnale di arresto (ad esempio un semaforo rosso) e l'applicazione dei freni è, per un automobilista medio, di 0.7 s . Se l'automobile può decelerare ad un ritmo di 5 m/s^2 , calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto
- da una velocità iniziale di 36 km/h
 - da una velocità iniziale di 72 km/h

Soluzione:

- a) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di 36 km/h**

Come distanza totale si intende la distanza percorsa dal momento in cui si accende il segnale di arresto fino al momento in cui l'auto si ferma completamente.

$$d_{\text{arresto}} = x(t_{\text{arresto}}) - x(t_{\text{segnale}})$$

- **Quanto vale $x(t_{\text{arresto}})$?**

L'automobile che si muove con velocità v_{in} frena con decelerazione costante a partire dal tempo t_{reazione} .

Si muove quindi di moto uniformemente accelerato.

Le equazioni del moto per un moto uniformemente accelerato sono

$$X(t) = X(t_o) + V(t_o)(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

quindi nel momento in cui la macchina si ferma si troverà in

$$x(t_{\text{arresto}}) = x(t_{\text{reazione}}) + v_{in}(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}) + \frac{1}{2}a(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}})^2$$

e la distanza di arresto sarà data da:

$$d_{\text{arresto}} = x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}}) + v_{in}(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}) + \frac{1}{2}a(t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}})^2$$

per calcolare distanza percorsa fino al momento in cui la macchina si ferma devo calcolare $x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}})$ (la distanza percorsa fino al momento in cui comincia a frenare) e $t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}$ (il tempo di frenata).

- **Quanto vale $x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}})$?**

Dal momento in cui si accende il segnale (t_{segnale}) al momento in cui si comincia a frenare (t_{reazione}), la macchina continua a muoversi a velocità costante pari a v_{in} .

Le equazioni del moto per un moto rettilineo uniforme sono date da:

$$x(t) = x(t_o) + v(t_o)(t - t_o)$$

quindi in questo caso

$$x(t_{\text{reazione}}) - x(t_{\text{segnale}}) = v_{in}(t_{\text{reazione}} - t_{\text{segnale}})$$

- **Quanto vale $t_{\text{arresto}} - t_{\text{reazione}}$?**

Il tempo di arresto è il momento in cui l'auto si ferma, ossia il valore di t per cui

$$v(t = t_{\text{arresto}}) = 0$$

Mentre la macchina frena (muovendosi di moto uniformemente accelerato) la sua velocità al tempo t sarà data da:

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

In questo caso particolare (accelerazione negativa a partire da $t_o = t_{reazione}$) $V(t)$ è data da

$$v(t) = v_{in} - a(t - t_{reazione})$$

Quindi

$$v(t = t_{arresto}) = 0 = v_{in} - a(t_{arresto} - t_{reazione})$$

Da cui si ricava:

$$t_{arresto} - t_{reazione} = \frac{v_{in}}{a}$$

Numericamente:

Sostituendo nell'equazione per $d_{arresto}$

$$d_{arresto} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + v_{in} \frac{v_{in}}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_{iniziale}^2}{a} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2} \frac{v_{iniziale}^2}{a}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} d_{arresto} &= v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2} \frac{v_{iniziale}^2}{a} = 36 \text{ km/h} * 0.7, s + \frac{1}{2} \frac{(36 \text{ km/h})^2}{(5 \text{ m/s}^2)} \\ &= \left(36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right) 0.7 \text{ s} + \frac{1}{2} \frac{\left(36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right)^2}{(5 \text{ m/s}^2)} = 17 \text{ m} \end{aligned}$$

- b) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di 72 km/h**

La seconda domanda è una ripetizione della prima, con una diversa velocità iniziale, quindi posso utilizzare la stessa equazione e trovo

$$d'_{arresto} = 54 \text{ m}$$

A questo punto osservo che raddoppiando la velocità la distanza di arresto è triplicata.

Analizzando le equazioni che forniscono la soluzione, si nota che mentre la distanza percorsa nel tempo di reazione dipende linearmente dalla velocità quella percorsa durante la frenata dipende dal quadrato della velocità.

Al crescere della velocità il termine lineare è sempre meno importante, e con buona approssimazione lo spazio di arresto risulta proporzionale al quadrato della velocità.

- 3) Un corpo puntiforme si muove nel piano (x, y) e all'istante $t = 0$ si trova nel punto P_o di coordinate $(x_o = 3 \text{ cm}, y_o = -2 \text{ cm})$.

La sua velocità in quell'istante vale $\vec{v}_o = (v_{x_o} = -2 \text{ cm/s}, v_{y_o} = 5 \text{ cm/s})$.

Sapendo che esso è sottoposto ad una accelerazione costante le cui componenti valgono $a_x = 6 \text{ cm/s}^2$ e $a_y = 4 \text{ cm/s}^2$, calcolare

- la velocità del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$.
- la distanza dal punto P_o in quell'istante.

Ris.: $v(t = 2 \text{ s}) = 16.4 \text{ cm/s}; d = 19.7 \text{ cm}$

Soluzione:

- Quanto vale la velocità del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$?**

La velocità è una grandezza vettoriale:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Il modulo della velocità è dato da:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dalla definizione si ricava che la risposta alla domanda è data da:

$$|v| = \sqrt{v_x(t = 2 \text{ s})^2 + v_y(t = 2 \text{ s})^2}$$

Per rispondere devo quindi calcolare sia v_x che v_y all'istante $t = 2 \text{ s}$.

- Quanto valgono le componenti x e y della velocità?**

La velocità al tempo t in un moto uniformemente accelerato è data da

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o)$$

Questa è un'equazione vettoriale, equivalente a:

$$v_x(t) = v_{x_o} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y(t) = v_{y_o} + a_y(t - t_o)$$

Numericamente:

$$v_x(t = 2 \text{ s}) = -2 \text{ cm/s} + 6 \text{ cm/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 10 \text{ cm/s}$$

$$v_y(t = 2 \text{ s}) = 5 \text{ cm/s} + 4 \text{ cm/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 13 \text{ cm/s}$$

Il modulo della velocità vale quindi:

$$|v| = 16.4 \text{ cm/s}$$

- Quanto vale la distanza fra P_o e P per $t = 2 \text{ s}$?**

La distanza fra due punti è definita come:

$$d = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

Quindi la distanza da calcolare è data da:

$$d = \sqrt{[x(t = 2 \text{ s}) - x_o]^2 + [y(t = 2 \text{ s}) - y_o]^2}$$

Per calcolarla è necessario conoscere le coordinate x e y del corpo all'istante $t = 2 \text{ s}$

- **Quanto valgono le coordinate x e y ?** Le coordinate del punto in funzione del tempo sono descritte dalle equazioni del moto.

Per un moto uniformemente accelerato le equazioni del moto sono date da:

$$\vec{X} = \vec{x}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

Questa è un'equazione vettoriale:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{x_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\y(t) &= y_o + v_{y_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici trovo

$$\begin{aligned}x(t = 2\text{ s}) &= 3\text{ cm} - 2\text{ cm/s} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}6\text{ cm/s}^2(2\text{ s})^2 = 11\text{ cm} \\y(t = 2\text{ s}) &= -2\text{ cm} + 5\text{ cm/s} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}4\text{ cm/s}^2(2\text{ s})^2 = 16\text{ cm}\end{aligned}$$

La distanza fra il punto P e P_o vale quindi:

$$d = \sqrt{(11 - 3)^2 + (16 + 2)^2} = 19.7\text{ cm}$$

4) Si costruisca un grafico (su carta quadrettata) della velocità in funzione del tempo per un oggetto che, partendo da fermo dalla posizione $x = 5\text{ m}$, accelera per 10 s con accelerazione pari a $A = 0.2\text{ m/s}^2$ e poi prosegue a velocità costante.

a) Quanto vale la velocità finale dell'oggetto?

b) Quanto spazio avrà percorso dopo 15 s ? Quanto vale la sua coordinata x ?

$$\text{Ris.: } V_{fin} = 2\text{ m/s}; s = 20\text{ m}; X_{fin} = 25\text{ m}$$

Soluzione:

• **Costruire il grafico $V(t)$ dell'oggetto**

Un grafico è uno dei modi possibili per definire una funzione: nel piano cartesiano una funzione $F(x)$ è disegnata come una curva i cui punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono legati dalla relazione:

$$y_i = F(x_i)$$

Cioè

$$P_i = [x_i, F(x_i)]$$

Il grafico della velocità in funzione del tempo sarà dato quindi da una curva nel piano cartesiano i cui punti hanno coordinate

$$P_i = [t_i, V(t_i)]$$

Per poter disegnare il grafico è quindi necessario conoscere $V(t)$

– **Quale è l'espressione per $V(t)$?**

Il tipo di moto nei primi dieci secondi è di tipo diverso da quello che si ha in seguito.

* **Quale è l'espressione per $V(t)$ nei primi 10 s ?**

Dal testo ricavo che nei primi 10 s il corpo si muove con accelerazione costante. Nei moti uniformemente accelerati la velocità in funzione del tempo è data da

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

Quindi vuol dire che per $t < 10\text{ s}$

$$V(t) = 0.2\text{ m/s}^2 \cdot t \quad [t < 10\text{ s}]$$

* **Quale è l'espressione per $V(t)$ successivamente?**

Dal testo ricavo che dopo $t = 10\text{ s}$ la velocità rimane costante. Tradotto in formule questo vuol dire che

$$V(t) = V(t = 10\text{ s}) \quad [t > 10\text{ s}]$$

cioè il valore della velocità è pari a quella raggiunta per $t = 10\text{ s}$.

• **Quanto vale la velocità per $t = 10\text{ s}$?** Dall'equazione precedente:

$$V(t = 10\text{ s}) = 0.2\text{ m/s}^2 * 10\text{ s} = 2\text{ m/s}$$

$$V(t) = 2\text{ m/s} \quad (t > 10\text{ s})$$

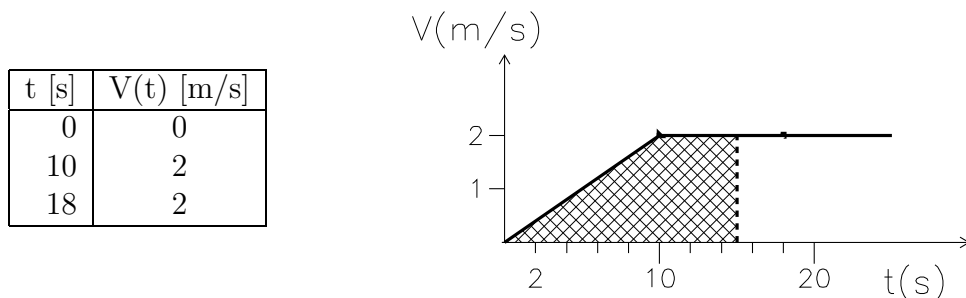
La funzione di cui devo fare il grafico è quindi

$$V(t) = 0.2\text{ m/s}^2 \cdot t \quad (t < 10\text{ s})$$

$$V(t) = 2\text{ m/s} \quad (t > 10\text{ s})$$

Passo ora a disegnare il grafico: dall'espressione di $V(t)$ osservo che si tratta di due spezzoni di retta. Per disegnare ciascuna retta bastano due punti

Costruisco quindi una tabella dei valori e li riporto nel grafico



- a) **Quanto vale la velocità finale?** La velocità finale non può che essere pari al valore (costante) della velocità per $V(t > 10 s) = 2 m/s$
- b) **Quanto spazio avrà percorso dopo 15 s?**

Lo spazio percorso dopo 15 s è dato dalla differenza fra la posizione per $x(t = 15 s)$ e quella iniziale:

$$s = x(t = 15 s) - x(t = 0)$$

Per calcolare lo spazio percorso posso

- scrivere le equazioni del moto che danno la posizione in funzione del tempo
- sfruttare il fatto che lo spazio percorso in un intervallo di tempo è dato dall'integrale della velocità in quello stesso intervallo di tempo.

Entrambi questi metodi sono applicabili, bisogna verificare se siano o meno effettivamente utilizzabili in base ai dati del problema.

- Per calcolare lo spazio percorso a partire dalle equazioni del moto sono innanzitutto necessarie le equazioni del moto.

In questo caso il moto è uniformemente accelerato per $0 < t < 10 s$ e rettilineo uniforme per $t > 10 s$, ossia:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t=0) + v(t=0) \cdot t + \frac{1}{2}at^2 & (t < 10 s) \\ x(t) &= x(t=10 s) + v(t=10) \cdot (t-10 s) & (t > 10 s) \end{aligned}$$

dai dati del problema

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 m + 0.1m/s^2 \cdot t^2 & (t < 10 s) \\ x(t) &= x(t=10 s) + 2 m/s \cdot (t-10 s) & (t > 10 s) \end{aligned}$$

Dovendo calcolare $x(t = 15 s)$ devo considerare la seconda di queste formule

$$s = x(t = 15 s) - x(t = 0) = x(t = 10 s) + 2 m/s \cdot (15 - 10 s) - 5 m$$

ma per utilizzarla devo conoscere $x(t = 10 s)$ che non viene fornita dal testo del problema

- **Quanto vale $x(t = 10 s)$**

Posso ricorrere ancora alle equazioni del moto utilizzando stavolta la prima delle due equazioni

$$x(t = 10 s) = 5 m + 0.1m/s^2 \cdot t^2$$

numericamente:

$$x(t = 10 s) = 5 m + 0.1m/s^2 \cdot (10 s)^2 = 15 m$$

Sostituendo si trova quindi:

$$s = x(t = 10 s) + 2 m/s \cdot (15 - 10 s) - 5 m = 15 m + 2 m/s \cdot 5 s - 5 m = 20 m$$

- Per calcolare (graficamente) lo spazio percorso come integrale della velocità devo ricorrere al grafico $V(t)$ (che era stato costruito in precedenza per rispondere alla prima domanda) L'integrale di una curva è dato dall'area l'area sottesa a quella curva.
In questo caso quindi per calcolare lo spazio percorso basta calcolare l'area tratteggiata nel grafico (dividendola magari in triangoli e rettangoli)

$$s = \frac{1}{2}(b \cdot h)_{\text{triangolo}} + (b \cdot h)_{\text{rettangolo}} = \frac{1}{2}(10 \text{ s}) \cdot (2 \text{ m/s}) + (5 \text{ s}) \cdot (2 \text{ m/s}) = 20 \text{ m}$$

In entrambi i casi ho ottenuto lo stesso risultato (come deve essere)

Quanto vale la sua coordinata x per ($t = 15 \text{ s}$)?

Visto che si tratta di un moto lungo un asse, la posizione finale è data da

$$x(t = 15 \text{ s}) = x(t = 0) + s$$

Numericamente:

$$x(t = 15 \text{ s}) = 5 \text{ m} + 20 \text{ m} = 25 \text{ m}$$

5) Una pallina si muove nel piano X-Y con equazioni

$$x(t) = 5 + 0.2t \quad (S.I.) \quad y(t) = -3 + 0.1t^2 \quad (S.I)$$

Disegnare i grafici per $x(t), v_x(t), y(t), v_y(t), v(t)$ per t fra 0 e 10 s.

Calcolare gli angoli iniziali e finali rispetto all'asse x della direzione in cui si muove la pallina.

Ris.: $v_x(t) = 0.2 \text{ m/s}; v_y(t) = 0.2t; \tan(\theta(t)) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$

Soluzione:

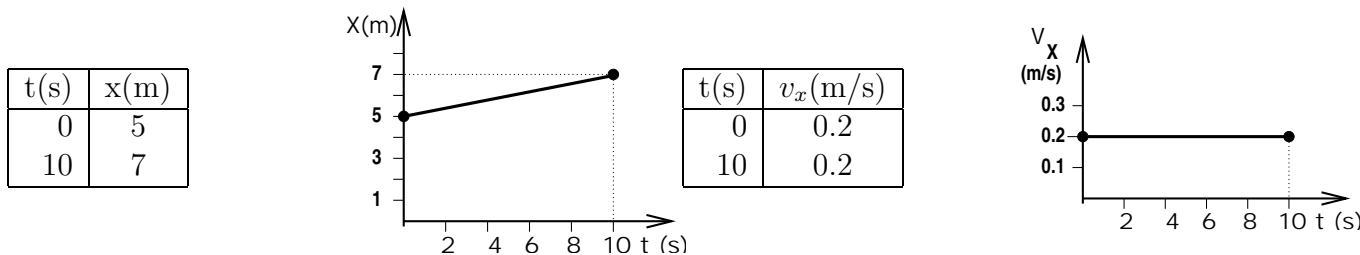
- **Disegnare il grafico per $x(t)$ e $v_x(t)$** Per disegnare un grafico è necessario conoscere il valore di x e di v_x in un numero sufficiente di punti. In questo caso

$$x(t) = 5 + 0.2 \text{ m/s} \cdot t$$

dipende linearmente dal tempo e posso dedurne che

- che la sua rappresentazione grafica è una retta
- che lungo la direzione X l'oggetto si muove a velocità v_x costante e pari a 0.2 m/s, cioè che $v_x(t) = 0.2 \text{ m/s} = \text{cost.}$

Per disegnare una retta sono sufficienti due punti, quindi mi basta calcolare $x(t)$ per $t=0$ e $t=10$ s e riportare i valori in un grafico:



- **Disegnare il grafico per $y(t)$ e $v_y(t)$** Per disegnare un grafico è necessario conoscere il valore di y e di v_y in un numero sufficiente di punti. In questo caso

$$y(t) = -3 \text{ m} + 0.1 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

ha una dipendenza quadratica dal tempo e posso dedurne che

- che la sua rappresentazione grafica è una parabola
- che lungo la direzione Y l'oggetto si muove con accelerazione costante. Sapendo che per un moto uniformemente accelerato

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y(t - t_0)^2$$

si riconosce facilmente che nel nostro caso l'espressione generale per $y(t)$ coincide con quella particolare se si pone $t_0 = 0; y_0 = -3 \text{ m}, v_{y0} = 0$ e $a_y = 0.2 \text{ m/s}^2$.

- per i moti uniformemente accelerati l'espressione generale per $v_y(t)$ è la seguente

$$v_y(t) = v_{y0} + a_y(t - t_0)$$

che in base ai valori precedentemente ricavati si riconduce in questo caso particolare a

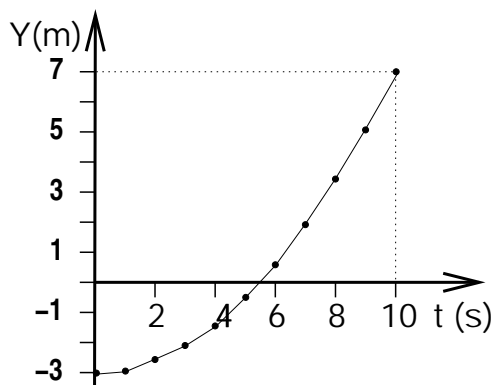
$$v_y(t) = 0.2 \text{ m/s} \cdot t.$$

cioè ad una retta

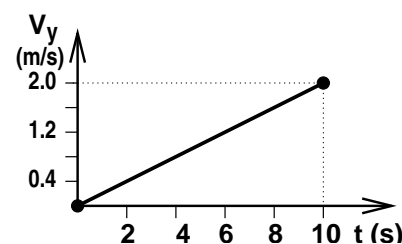
Per fare il grafico di $y(t) = 0.1 m/s^2 \cdot t^2$ devo disegnare una parabola, mentre per disegnare il grafico di $v_y(t) = 0.2 m/s^2 \cdot t^2$ devo disegnare una retta per cui sono sufficienti due punti.

Per disegnare una parabola (o comunque una funzione di cui non si sappia bene l'andamento) è necessario calcolare il valore della funzione in piu' punti, eventualmente "infittendoli" se si vede che la linea spezzata che congiunge i punti assomiglia poco ad una curva continua

t(s)	y(m)
0	-3.0
1	-2.9
2	-2.6
3	-2.1
4	-1.4
5	-0.5
6	0.6
7	1.9
8	3.4
9	5.1
10	7.0



t(s)	$v_y(m/s)$
0	0
10	2



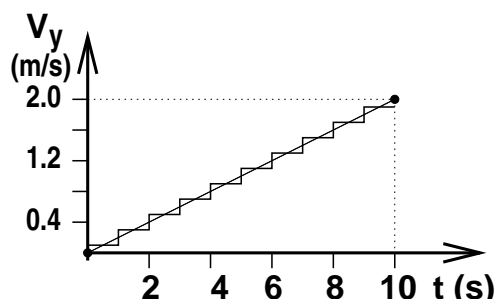
– Soluzione numerica per calcolare i valori di $v_y(t)$

Dalla tabella di valori di $y(t)$ posso calcolare numericamente il valore medio di $v_y(t)$ in ciascun intervallo di tempo come

$$v_y^{medio}(t_1 < t < t_2) = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e ottenere una tabella delle velocità medie che posso riportare nel grafico come una linea spezzata che come si vede consente di riconoscere bene l'andamento lineare della velocità anche senza conoscerne a priori la forma algebrica.

t(s)	$v_y^{medio}(m/s)$
$0 < t < 1$	0.1
$1 < t < 2$	0.3
$2 < t < 3$	0.5
$3 < t < 4$	0.7
$4 < t < 5$	0.9
$5 < t < 6$	1.1
$6 < t < 7$	1.3
$7 < t < 8$	1.5



• Disegnare il grafico per $v(t)$ Per fare il grafico del modulo della velocità devo

– sapere che il modulo di un vettore è definito come

$$|\vec{w}| \equiv \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

e che quindi in questo caso devo fare il grafico della funzione

$$|\vec{v}(t)| \equiv \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

– conoscerne il valore di $v(t)$ in un numero sufficiente di punti, calcolando il valore

* dall'espressione algebrica di $v_x(t)$ e $v_y(t)$

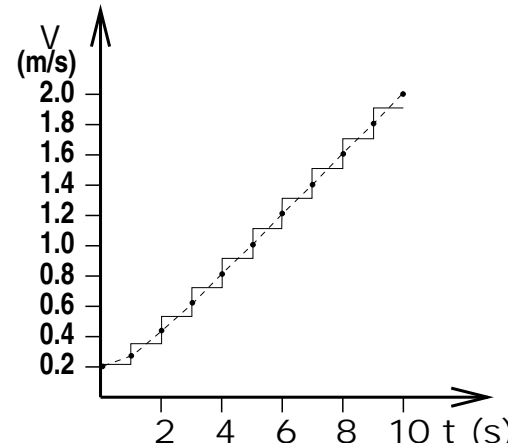
$$|\vec{v}(t)| \equiv \sqrt{(0.2 m/s)^2 + (0.2 m/s)^2 \cdot t^2}$$

* numericamente in ciascun intervallo di tempo usando la tabella di v_y^{medio}

le tabelle ed i grafici che si ottengono nei due casi sono

t(s)	$v(m/s)$
0	0.20
1	0.28
2	0.45
3	0.63
4	0.82
5	1.02
6	1.22
7	1.41
8	1.61
9	1.81
10	2.01

t(s)	$v^{medio}(m/s)$
$0 < t < 1$	0.22
$1 < t < 2$	0.36
$2 < t < 3$	0.54
$3 < t < 4$	0.73
$4 < t < 5$	0.92
$5 < t < 6$	1.12
$6 < t < 7$	1.32
$7 < t < 8$	1.51
$8 < t < 9$	1.71
$9 < t < 10$	1.91



Come si può notare la spezzata consente di apprezzare l'andamento della funzione, anche se per piccoli valori di t non si apprezza molto bene la deviazione dall'andamento lineare.

- 6) Disegnare il grafico della velocità in funzione del tempo ($v(t)$) per un oggetto che si muove lungo l'asse x con velocità iniziale $v_o = 16 \text{ m/s}$, sapendo che ogni secondo la sua velocità viene ridotta del 50%.
 Disegnare il grafico approssimato dell'accelerazione in funzione del tempo
 Disegnare il grafico approssimato dello spazio percorso in funzione del tempo

Soluzione:

- **Disegnare il grafico $v(t)$**

Per disegnare un grafico devo costruire una tabella. In questo caso devo costruire la tabella della velocità per diversi valori del tempo t .

- **Quanto vale la velocità all'istante t_i ?**

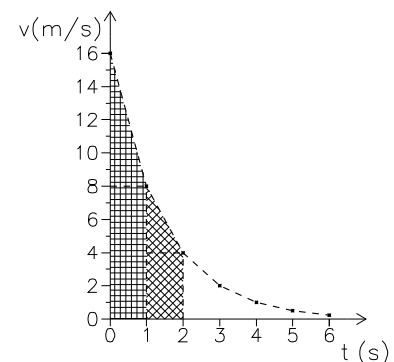
Se ad ogni secondo la velocità diminuisce del 50%, vuol dire che

$$V(t = t_i + 1 \text{ s}) = 0.5V(t_i)$$

Se quindi al tempo $t = 0$ la velocità vale 16 m/s a $t = 0 + 1 \text{ s}$ vale 8 m/s ; se al tempo $t = 1 \text{ s}$ vale 8 m/s al tempo $t = 1 \text{ s} + 1 \text{ s}$ vale $0.5V(t = 1 \text{ s}) = 4 \text{ m/s}$ e così via.

Costruisco la tabella e riporto i valori nel grafico:

t [s]	V(t) [m/s]
0	16
1	8
2	4
3	2
4	1
5	0.5
6	0.25



- **Costruire il grafico APPROSSIMATO dell'accelerazione**

Per ottenere un valore approssimato dell'accelerazione posso per esempio calcolare l'accelerazione media in ogni intervallo di tempo.

- **Quanto vale l'accelerazione media in ciascun intervallo di tempo?**

In ciascun intervallo di tempo

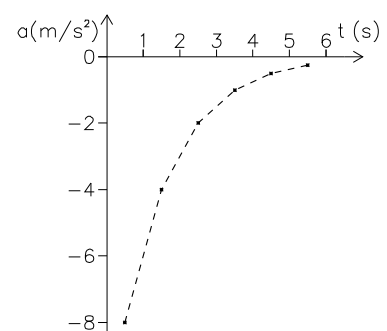
$$a_m = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t}$$

Quindi posso calcolare l'accelerazione media per ciascuno degli intervalli di tempo semplicemente dalla tabella appena costruita come

$$a(t_o + \frac{1}{2}\Delta t) = \frac{v(t_o + \Delta t) - v(t_o)}{\Delta t}$$

A questo punto costruisco la tabella e riporto i valori nel secondo grafico

t [s]	a(t) [m/s^2]
0.5	-8
1.5	-4
2.5	-2
3.5	-1
4.5	-0.5
5.5	-0.25



• **Costruire il grafico (approssimato) dello spazio percorso**

Questo è un moto in cui ne' la velocità ne' l'accelerazione rimangono costanti (sono gli unici "moti semplici" studiati in questo corso)

Per calcolare lo spazio percorso quindi bisogna ricorrere a delle approssimazioni:

- posso considerare la velocità costante in piccoli intervalli di tempo e sommare gli spazi percorsi in ciascun intervallino
- posso approssimare il grafico V(t) con una linea spezzata (equivalente a considerare l'accelerazione costante in ciascun intervallino) e poi calcolare lo spazio percorso come integrale grafico (l'area sottesa al grafico della velocità)

Tutti e due i metodi forniscono una approssimazione; il secondo metodo fornisce una approssimazione migliore.

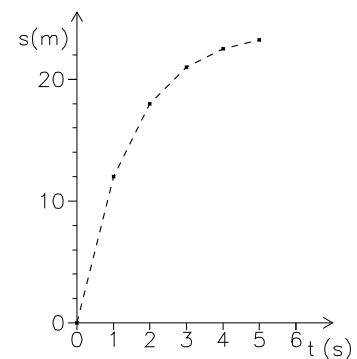
- **Quanto vale lo spazio percorso in ciascun intervallo di tempo?**

Lo spazio percorso in ciascun intervallo di tempo (Δs) sarà dato dall'area del trapezio corrispondente (come evidenziato dalle aree tratteggiate del grafico per $v(t)$):

$$S(t_o + 1 s) - S(t_o) = \frac{1}{2} \Delta V \Delta t + V(t = t_o + 1 s) \Delta t$$

Costruisco così un'altra tabella e ottengo l'ultimo grafico:

t [s]	Δs [m]	s [m]
0	0	0
1	12	12
2	6	18
3	3	21
4	1.5	22.5
5	0.75	23.25



Nota matematica

Dal punto di vista matematico la funzione che in ogni punto diminuisce (o aumenta) proporzionalmente al valore della funzione stessa è la funzione esponenziale:

$$\frac{df}{dx} = -K f$$

Questa è una *equazione differenziale* e la sua soluzione è data da:

$$f(t) = f(t = 0)e^{-Kt} + cost$$

Equazioni simili si trovano spesso in fisica (decadimento delle sostanze radioattive, oscillazioni smorzate) e anche in molti fenomeni biologici (ad esempio assorbimento o smaltimento di nutrienti, farmaci, scorie)

Il problema poteva essere riformulato matematicamente come:

- trovare le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ che soddisfano l'equazione

$$\frac{dv(t)}{dt} = -K v(t)$$

o anche

$$a(t) = -K v(t)$$

sapendo che $v(0) = 16 m/s$ e $v(1) = 8 m/s$

- trovare la funzione

$$s(T) = \int_0^T v(t) dt$$

Dal punto di vista matematico la prima delle due equazioni ha soluzione generale:

$$v(t) = v_0 e^{-Kt}$$

Imponendo i valori “noti” si ottengono due relazioni che permettono di ricavare K e v_0 :

$$\begin{aligned} 16 \text{ m/s} &= v_0 e^0 \\ 8 \text{ m/s} &= v_0 e^{-K \cdot 1} \end{aligned}$$

da cui $v_0 = 16 \text{ m/s}$ e $K = \ln 2 = 0.693$
 Matematicamente quindi si otterrebbe:

$$\begin{aligned} V(t) &= 16e^{-t \ln 2} \quad [m/s] \\ a(t) &= -16 \ln 2 e^{-t \ln 2} \quad [m/s^2] \\ s(t) &= \frac{16}{\ln 2} (1 - e^{-t \ln 2}) \end{aligned}$$

Confrontando i risultati esatti con quelli approssimati:

t [s]	V [m/s] approx	V [m/s] esatta
0	16	16
1	8	8
2	4	4
3	2	2
4	1	1
5	0.5	0.5
6	0.25	0.25

t [s]	a [m/s ²] approx	a [m/s ²] esatta
0.5	-8	-7.84
1.5	-4	-3.92
2.5	-2	-1.96
3.5	-1	-0.98
4.5	-0.5	-0.49
5.5	-0.25	-0.25

t [s]	s [m] approx	s [m] esatto
0	0	0
1	12	11.54
2	18	17.31
3	21	20.2
4	22.5	21.64
5	23.25	22.36

si può notare come l'approssimazione fatta sovrastimi l'accelerazione di circa il 2%, e lo spazio percorso di circa il 5%.

La rappresentazione grafica delle funzioni, unitamente al calcolo grafico (ovviamente approssimato) di derivate ed integrali ha permesso di ottenere una soluzione ragionevolmente “vicina” a quella vera anche per problemi matematicamente molto difficili

- 7) Un corpo di massa 2 kg si muove in un piano orizzontale partendo dal punto di coordinate $P_o = (3, -2)\text{ m}$ con velocità iniziale $V_o = (-2, 5)\text{ m/s}$ sotto l'azione di una forza di componenti $F = (5, 2)\text{ N}$
- Di che tipo di moto si tratta?
 - Quanto valgono le componenti x e y dell'accelerazione?
 - Si dica come varia la componente x della velocità nel tempo e se ne costruisca il grafico.
 - Scrivere l'equazione oraria del moto lungo la coordinata x .

$$\text{Ris.: Uniformemente accelerato; } \vec{a} = (2.5, 1, 0)\text{ m/s}^2; v_x(t) = -2\text{ m/s} + 2.5\text{ m/s}^2 \cdot t;$$

$$x(t) = 3\text{ m} - 2\text{ m/s} \cdot t + 1.25\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Soluzione:

- a) **Stabilire di che tipo di moto di tratta.**

Questo significa stabilire a che tipo di accelerazione è sottoposto (costante o meno). L'accelerazione è legata alla risultante delle forze.

Il corpo si muove sotto l'azione di una forza le cui componenti sono costanti, quindi sotto l'azione di una forza costante (sia in modulo che direzione)

La forza è data da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

quindi se la forza è costante anche l'accelerazione è costante. Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

- b) **Calcolare le componenti dell'accelerazione.**

Dall'equazione appena scritta

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Questa è una equazione vettoriale, equivalente a

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m}$$

Il testo afferma che il moto si svolge su un piano orizzontale, quindi si può trascurare la componente lungo l'asse z

Le componenti della forza vengono date nel testo: $F_x = 5\text{ N}$, $F_y = 2\text{ N}$, quindi

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5\text{ N}}{2\text{ kg}} = 2.5\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{2\text{ N}}{2\text{ kg}} = 1\text{ m/s}^2$$

- c) **Scrivere l'equazione per $v_x(t)$ e farne il grafico**

- Scrivere l'equazione** Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o)$$

che (essendo una equazione vettoriale) equivale a dire

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y(t) = v_{oy} + a_y(t - t_o)$$

Quindi l'espressione per $v_x(t)$ è data da

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

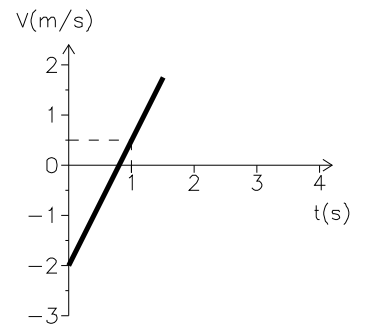
Numericamente

$$v_x(t) = v_{ox} + a_x(t - t_o) = -2\text{ m/s} + 2.5\text{ m/s}^2 \cdot t$$

- Fare il grafico

Per costruire un grafico devo prima costruire una tabella e poi riportare i punti su in grafico. In questo caso devo fare il grafico di una retta, quindi sono sufficienti due punti.

t [s]	V(t) [m/s]
0	-2
1	0.5



d) Scrivere l'equazione oraria del moto lungo la coordinata x , ovvero $x(t)$

Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato le equazioni del moto sono date da

$$\vec{X} = \vec{X}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

che è una equazione vettoriale, quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\ y(t) &= y_o + v_{oy}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2 \\ z(t) &= z_o + v_{oz}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_z(t - t_o)^2 \end{aligned}$$

L'equazione oraria del moto lungo la coordinata x è data da

$$x(t) = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$x(t) = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 = 3\text{ m} - 2\text{ m/s} \cdot t + \frac{1}{2}2.5\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

- 8) Un pallone viene lanciato da terra con un angolo di 45° e ricade a terra ad una distanza di 35 m dal punto in cui è stato lanciato.
- Quanto tempo impiega il pallone a tornare a terra?
 - Quanto vale (in modulo) la velocità iniziale?
 - Quale altezza massima raggiunge il pallone?

Soluzione:

- a) **Quanto tempo impiega il pallone a ricadere?**

Il tempo impiegato dal pallone a ricadere al suolo è l'intervallo di tempo fra l'istante in cui si trova nella posizione $(x = x_o, z = z_o)$ e quello in cui si trova nella posizione $(x = x_o + 35\text{ m}, z = z_o)$, ossia so che

$$\begin{aligned}x(t = t_{cad}) &= x_o + 35\text{ m} \\z(t = t_{cad}) &= z_o\end{aligned}$$

Le equazioni che danno $x(t)$ e $z(t)$ sono dette equazioni del moto.

- Quali sono le equazioni del moto per il pallone?**

In questo caso si tratta del moto di caduta di un grave, ossia di un moto uniformemente accelerato in cui l'accelerazione è quella di gravità.

In generale le equazioni di un moto uniformemente accelerato sono:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2$$

equivalenti a

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{xo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2 \\y(t) &= y_o + v_{yo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_y(t - t_o)^2 \\z(t) &= z_o + v_{zo}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_z(t - t_o)^2\end{aligned}$$

nel caso della caduta dei gravi, l'accelerazione ha componenti $\vec{a} = (0, 0, -g)$ quindi le equazioni del moto sono date da

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o + v_{xo}(t - t_o) \\y(t) &= y_o + v_{yo}(t - t_o) \\z(t) &= z_o + v_{zo}(t - t_o) - \frac{1}{2}g(t - t_o)^2\end{aligned}$$

Per utilizzare le equazioni del moto bisogna conoscere la velocità iniziale.

- **Quanto vale la velocità iniziale?** La direzione iniziale del moto indica la direzione della velocità iniziale.

Se la direzione della velocità forma un angolo θ nel piano $x - z$, questo vuol dire che le componenti della velocità sono

$$\vec{v} = (|v| \cos \theta, 0, |v| \sin \theta)$$

visto che la velocità iniziale ha un angolo $\theta = 45^\circ$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se ne ricava che

$$\vec{v}_o = \left(\frac{V}{\sqrt{2}}, 0, \frac{V}{\sqrt{2}} \right)$$

Le equazioni del moto diventano quindi

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt \\z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Imponendo che per $t = t_{cad}$

$$\begin{aligned}x(t = t_{cad}) &= x_o + 35 m \\z(t = t_{cad}) &= z_o\end{aligned}$$

si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite (V e t_{cad})

$$\begin{aligned}x_{cad} &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt_{cad} \\0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}Vt_{cad} - \frac{1}{2}gt_{cad}^2\end{aligned}$$

Risolvendo (ad esempio per sostituzione) ottengo:

$$\begin{aligned}t_{cad} &= \sqrt{\frac{2x_{cad}}{g}} \\V &= \sqrt{x_{cad}g}\end{aligned}$$

Numericamente (dalla prima equazione):

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2x_{cad}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 m}{9.8 m/s^2}} = 2.67 s$$

b) **Quanto vale (in modulo) la velocità iniziale?**

Sostituendo nella seconda delle equazioni precedenti:

$$V = \sqrt{x_{cad}g} = \sqrt{35 m * 9.8 m/s^2} = 18.5 m/s$$

c) **Quanto vale l'altezza massima raggiunta?**

L'altezza massima è definita come il valore massimo di $z(t)$ che il pallone raggiunge nel corso del suo moto:

$$z_{max} = \max(z(t))$$

Per trovare z_{max} posso:

- utilizzare la conservazione dell'energia: sul pallone agisce la forza peso (che è una forza conservativa)

In questo caso quindi quando il pallone sale aumenta la sua energia potenziale gravitazionale a spese dell'energia cinetica

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = 0$$

- trovare analiticamente il valore t per cui la funzione $z(t)$ ha un massimo. in entrambi i casi devo trovare il valore t_{max} tale che

$$z_{max} = z(t = t_{max})$$

e calcolare il valore di z in quell'istante.

- osservare che il momento in cui il pallone raggiunge il punto più alto della sua traiettoria è quello in cui inverte il suo moto lungo la direzione z .

Bisogna ora valutare se e come questi criteri possano essere utilizzati in questo caso particolare

- la conservazione dell'energia implica che

$$\Delta E_{cin} = -\Delta E_{pot}$$

ossia

$$E_{cin}^{alto} - E_{cin}^{in} = -(E_{pot}^{alto} - E_{pot}^{in})$$

L'energia cinetica è definita come

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

L'energia potenziale gravitazionale (rispetto ad un livello h_o) è data da

$$E_{pot} = mg(h - h_o)$$

quindi la conservazione dell'energia può essere riscritta come:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) - \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in} = mg(z_{in} - z_o) - mg(z - z_o)$$

ossia:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + mg(z - z_{in}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in}$$

dove $z - z_{in}$ è l'altezza rispetto al terreno del pallone.

Il valore di massimo di z si avrà in corrispondenza del valore minimo dell'energia cinetica.

Per calcolare z_{max} bisogna determinare $(v_x^2 + v_z^2)_{min}$.

- **Quanto vale $(v_x^2 + v_z^2)_{min}$?**

La forza peso agisce solo lungo la direzione verticale. Non essendoci forze che agiscano lungo la direzione x necessariamente v_x (e quindi v_x^2) rimane costante.

La velocità lungo la direzione z è data da

$$v_z(t) = v_{zin} - gt$$

Il minimo valore possibile per v_z^2 è ovviamente 0.

Quindi

$$(v_x^2 + v_z^2)_{min} = v_{xin}^2$$

Sostituendo nell'espressione per la conservazione dell'energia ($z_o = 0$)

$$mgz_{max} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{in} - \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)_{min} = \frac{1}{2}m(v_{zin}^2)$$

Avendo già calcolato in precedenza che

$$v_{zin} = \frac{1}{\sqrt{2}}V = \sqrt{\frac{x_{cad}g}{2}}$$

si ottiene

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_{zin}^2}{g} = \frac{1}{4}x_{cad}$$

- Per trovare analiticamente il valore massimo di $z(t)$ posso imporre che la derivata prima si annulli:

$$\frac{d}{dt}z(t) = 0$$

La derivata della componente $z(t)$ è per definizione la componente z della velocità:

$$\frac{d}{dt}z(t) = v_z(t)$$

Il valore massimo di z si ha cioè quando

$$v_z(t_{max}) = 0$$

- Il momento in cui il pallone inverte il suo moto lungo l'asse verticale è quello in cui la componente z della velocità da positiva diventa negativa. In altre parole quando $z = z_{max}$ la componente v_z della velocità è zero:

$$v_z(t_{max}) = 0$$

In altre parole devo trovare il valore di t che soddisfa la condizione:

$$v_z(t = t_{max}) = 0$$

- **In quale istante la componente z della velocità si annulla?**

Per un moto uniformemente accelerato la componente z della velocità è data da:

$$v_z(t) = v_{zo} + a(t - t_o)$$

in questo caso

$$v_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}V - gt$$

La condizione precedentemente scritta quindi implica che

$$v_z(t = t_{max}) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}V - gt_{max}$$

da cui

$$t_{max} = \frac{V}{\sqrt{2}g} = \sqrt{\frac{x_{cad}}{2g}} = \frac{1}{2}t_{cad}$$

Il tempo che ci mette ad arrivare in alto è la metà di quello che ci mette a salire e poi ricadere, come ci si doveva aspettare. (Sarebbe stato corretto affermare subito che $t_{max} = \frac{1}{2}t_{cad}$)

L'altezza massima raggiunta vale:

$$z_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}V \frac{t_{cad}}{2} - \frac{1}{2}g \frac{t_{cad}^2}{4} = \frac{x_{cad}}{2} - \frac{x_{cad}}{4} = \frac{1}{4}x_{cad}$$

Numericamente

$$z_{max} = \frac{1}{4}x_{cad} = 8.75 \text{ m}$$

- 9) Un blocco di massa 0.1 kg , inizialmente fermo, posto su una guida lunga 5 m ed inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale, viene trascinato verso l'alto da una forza di intensità pari a 2 N , diretta parallelamente alla guida. Se si trascurano gli attriti
- Quanto vale l'accelerazione del corpo?
 - Quanto tempo impiega il blocco per arrivare in cima alla guida?
 - Quanto vale la sua velocità finale?
 - Se invece la guida non è priva di attriti, ma esercita una forza di attrito costante e pari al 20% del peso del corpo, quanto varranno l'accelerazione, il tempo impiegato a risalire la guida e la velocità finale?

$$\text{Ris.: } a = 15.1 \text{ m/s}^2; t = 0.82 \text{ s } v_{fin} = 12.3 \text{ m/s } a' = 13.4 \text{ m/s}^2; t' = 0.87 \text{ s}; v'_{fin} = 11.5 \text{ m/s}$$

Soluzione:

- a) **Calcolare l'accelerazione del corpo**

La legge di Newton mi dice che l'accelerazione è legata alla risultante delle forze da

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Quindi per calcolare l'accelerazione devo calcolare la risultante delle forze sul corpo.

- **Calcolare la risultante delle forze**

La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale delle forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{f}_i$$

Per calcolarla devo quindi identificare le forze agenti sul corpo (in modulo direzione e verso)

Il testo del problema mi dice che c'è una forza (F_T) che trascina il corpo lungo la guida.

Sicuramente agisce anche la forza di gravità (F_P), che è diretta verso il basso.

Ci sarà poi una reazione vincolare data dalla guida (F_V), che "impedisce" al corpo di "cadere dentro" la guida.

La reazione vincolare è sicuramente perpendicolare alla guida e deve essere tale da annullare la risultante delle forze nella direzione perpendicolare alla guida. Disegnando il grafico delle forze applicate al corpo, osservo che il sistema di coordinate più comodo per esprimere le componenti delle forze è quello con l'asse x parallelo alla guida e l'asse y perpendicolare ad essa.

Scrivendo le componenti delle forze in questo sistema di coordinate, posso calcolare la risultante

$$F_{Rx} = F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx}$$

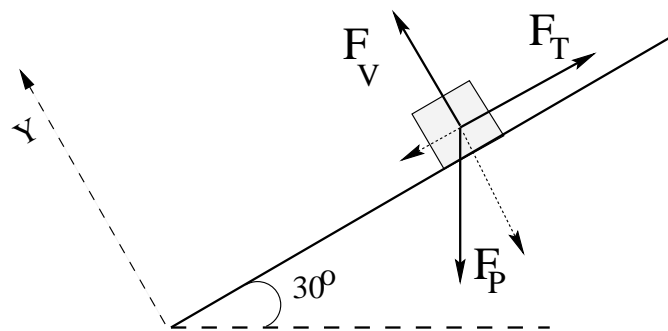
$$F_{Ry} = F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy}$$

Cioè

$$F_{Rx} = -mg \sin \theta + F_T$$

$$0 = -mg \cos \theta + F_V$$

(La reazione vincolare deve bilanciare esattamente la componente della forza peso perpendicolare alla guida)



A questo punto ho ottenuto la soluzione

$$a = \frac{F_T - mg \sin \theta}{m}$$

Numericamente

$$a = \frac{2 \text{ N} - 0.1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 30}{0.1 \text{ kg}} = 15.1 \text{ m/s}^2$$

b) **Calcolare il tempo che impiega ad arrivare in cima**

Mi chiede quindi di calcolare il valore di t_{sal} per cui

$$x(t_{sal}) = L$$

dove L è la lunghezza della guida.

Avendo formulato la domanda in questo modo, è abbastanza chiaro che per calcolare t_{sal} posso ricorrere alle equazioni del moto, che in questo caso è uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

usando i dati del problema ($x_o = 0$ e $v_o = 0$),

$$L = \frac{1}{2}at_{sal}^2$$

cioè

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

Numericamente:

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{15 \text{ m/s}^2}} = 0.82 \text{ s}$$

c) **Calcolare la velocità finale**

La velocità finale è la velocità che raggiunge quando arriva in cima, ossia la velocità che il corpo ha quando $t = t_{sal}$.

Per calcolare la velocità finale posso usare l'equazione (valida nel caso di un moto uniformemente accelerato)

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

calcolandola per $t = t_{sal}$, cioè

$$v_{fin} = at_{sal} = \sqrt{2aL}$$

Numericamente

$$v_{fin} = \sqrt{2 \cdot 15.1 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}} = 12.3 \text{ m/s}$$

d) **Considerare la presenza di attrito**

L'ultima domanda mi chiede di rifare tutti questi conti nell'ipotesi che la guida eserciti una forza di attrito costante.

Questo significa che devo tener conto di una ulteriore forza nel calcolo della risultante (usata per calcolare l'accelerazione).

$$\begin{aligned} F'_{Rx} &= F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx} + F_{Ax} \\ F'_{Ry} &= F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy} + F_{Ay} \end{aligned}$$

Per inserire la forza di attrito nel calcolo della risultante devo conoscerne il modulo, la direzione ed il verso.

- **Quali sono le componenti della forza di attrito?**

Una forza di attrito è una forza che si oppone al moto e che è sempre parallela alla direzione del moto, ma ha verso opposto. Questo mi dice subito che se il corpo si muove parallelamente alla guida verso l'alto, la forza di attrito sarà diretta sempre parallela alla guida ma verso il basso.

Nel sistema di coordinate che abbiamo utilizzato $F_{Ax} = -|F_A|$, $F_{Ay} = 0$

Mi rimane da calcolarne il modulo. Il testo del problema mi dice che la forza di attrito (F_A) è pari al 20% del peso del corpo.

Questa affermazione si traduce in una equazione:

$$|F_A| = \frac{20}{100}|F_P|$$

cioè

$$|F_A| = 0.2mg \quad \vec{F}_A = (-0.2mg; 0)$$

La risultante delle forze F'_R sarà data da

$$\begin{aligned} F'_{Rx} &= -mg \sin \theta + F_T - 0.2mg = F_T - mg(\sin \theta + 0.2) \\ 0 &= -mg \cos \theta + F_{Vy} \end{aligned}$$

Da cui si ricava immediatamente

$$a' = \frac{F'_R}{m} = \frac{F_T - mg(\sin \theta + 0.2)}{m}$$

Numericamente

$$a' = \frac{2 \text{ N} - 0.1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2(0.5 + 0.2)}{0.1 \text{ kg}} = 13.4 \text{ m/s}^2$$

Il nuovo valore del tempo di salita e della velocità finale si trovano semplicemente sostituendo a con a' nelle rispettive formule. Numericamente

$$t'_{sal} = 0.87 \text{ s} \quad v'_{fin} = 11.5 \text{ m/s}$$

- 10) Un uomo di massa 70 kg salta da un'altezza di 1 m con velocità iniziale nulla. Se cade senza piegare le gambe si ferma in 0.1 s , mentre piegando le gambe si arresta in 0.5 s . Calcolare l'accelerazione media e la forza media nei due casi.

Soluzione:

- a) **Calcolare l'accelerazione media e la forza media esercitata durante l'impatto col terreno**

L'accelerazione media che mi si chiede di calcolare è definita come

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Nel caso specifico (la velocità finale è zero), la velocità "iniziale" è quella che ha prima di toccare terra

$$a_m = -\frac{v_{terra}}{\Delta t}$$

Per rispondere devo calcolare la velocità con cui arriva a terra (e non quella dal momento in cui salta da fermo al momento in cui arriva a terra e si ferma, perché in quel caso l'accelerazione media è zero!)

- **Calcolare la velocità con cui arriva a terra**

La velocità con cui arriva a terra è quella acquistata dopo una caduta dall'altezza di 1 m . Si tratta di un moto di caduta libera di un grave, quindi posso utilizzare le equazioni del moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a g

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

Nel caso specifico (considero l'asse delle coordinate verso il basso)

$$v(t) = gt$$

La velocità con cui arriva a terra è quella raggiunta all'istante t_{cad} (tempo impiegato a cadere)

$$v_{terra} = gt_{cad}$$

- **Quanto vale il tempo di caduta?**

Per calcolare il tempo di caduta l'unico dato che ho è che

$$z_f = z(t_{cad}) = z_o + h = z_o + 1\text{ m}$$

Posso scrivere l'equazione del moto $z(t)$

$$z(t) = z_o + v_{oz} + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Nel nostro caso, con i dati del problema (e con la nostra scelta del sistema di coordinate)

$$z(t) = z_o + \frac{1}{2}gt^2$$

Quindi si ricava

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo nell'equazione della velocità ottengo

$$v_{terra} = \sqrt{2gh}$$

Avrei potuto ottenere più rapidamente lo stesso risultato osservando che durante il salto l'energia si conserva

$$E_{pot\ g}^{in} + E_{cin}^{in} = E_{pot\ g}^{fin} + E_{cin}^{fin}$$

da cui

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{terra}^2$$

L'accelerazione media nell'impatto col terreno vale quindi:

$$a_m = -\frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 1\ m \cdot 9.8\ m/s^2}}{0.1\ s} = -44.3\ m/s^2$$

(il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso l'alto)

Mi si chiede inoltre di calcolare la forza media.

La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Quindi

$$F_m = ma_m$$

Numericamente

$$F_m = 70\ kg \cdot (-44.3\ m/s^2) = -3100\ N$$

- b) **Calcolare le stesse grandezze nel caso in cui, piegando le gambe durante l'impatto col terreno, il tempo di impatto si allunghi fino a 0.5 s.**

Dato che la velocità con cui si arriva a terra è la stessa, si tratta di calcolare a_m e F_m usando un diverso valore per Δt Numericamente ottengo:

$$a'_m = -8.85\ m/s^2 \quad F'_m = -620\ N$$

Allungando il tempo di impatto di un fattore 5, sia l'accelerazione media che la forza media esercitate durante l'impatto si sono ridotte proporzionalmente

- 11) Calcolare la velocità periferica di un corpo di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ che si muove con velocità angolare $\omega = 0.6 \text{ rad/s}$ lungo una circonferenza di raggio $r = 1 \text{ m}$. Quanto valgono l'accelerazione e la forza centripeta?

Soluzione:

- Quanto vale la velocità periferica?

La velocità periferica in un moto circolare uniforme è data da

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Numericamente:

$$v = \omega r = 0.6 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = 0.6 \text{ m/s}$$

- Quanto vale l'accelerazione centripeta?

L'accelerazione in un moto circolare uniforme è sempre diretta verso il centro e costante in modulo:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

Numericamente quindi:

$$|a_c| = \omega^2 r = (0.6 \text{ rad/s})^2 \cdot 1 \text{ m} = 0.36 \text{ m/s}^2$$

- Quanto vale la forza centripeta?

La risultante delle forze che agiscono sul corpo è data da:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Nel caso di un moto circolare uniforme quindi

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

è costante in modulo e sempre diretta verso il centro (centripeta) In questo caso quindi

$$|F| = m|a_c| = 0.5 \text{ kg} \cdot 0.36 \text{ m/s}^2 = 0.18 \text{ N}$$

12) La luna ruota con un periodo di 28 giorni attorno alla terra su una traiettoria approssimativamente circolare.

- Quanto vale la velocità angolare della luna?
- Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?
- Quanto vale la velocità della luna?

($M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$)

Ris.: $\omega = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$; $R_L = 3.9 \cdot 10^8 \text{ m}$; $v_L = 10^3 \text{ m/s}$

Soluzione:

a) **Quanto vale la velocità angolare della luna**

La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Un moto circolare uniforme ha per definizione velocità angolare costante

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cost} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Quindi la velocità angolare della luna vale

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Numericamente

$$\omega = \frac{2\pi}{28 \text{ giorni}} = \frac{2\pi}{28(24 \cdot 3600 \text{ s})} = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

b) **Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?**

In un moto circolare uniforme il raggio dell'orbita è legato all'accelerazione centripeta (conseguenza alla forza centripeta) dalla relazione:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

nonchè alla velocità periferica dalla relazione:

$$v = \omega r$$

Il problema non fornisce il valore di tali quantità per cui è necessario analizzare se è possibile o meno calcolarle

• **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

L'accelerazione centripeta è legata alla forza centripeta

$$F_c = M_L a_c$$

– **Quanto vale la forza centripeta?** La forza centripeta non può che essere data dalla forza di attrazione gravitazionale terra-luna.

La forza di attrazione gravitazionale terra-luna è data dalla legge di gravitazione universale

$$F = G \frac{M_T M_L}{R^2}$$

quindi l'accelerazione centripeta della luna vale:

$$a_c = G \frac{M_T}{R^2}$$

dall'espressione per l'accelerazione centripeta in termini di velocità angolare si ricava che

$$G \frac{M_T}{R^2} = \omega^2 R$$

da cui

$$R = \sqrt[3]{G \frac{M_T}{\omega^2}}$$

Numericamente

$$R = \sqrt[3]{G \frac{M_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{6.7 \cdot 10^{-11} N m^2 / kg^2 \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{(2.6 \cdot 10^{-6} rad/s)^2}} = 3.9 \cdot 10^8 m$$

c) **Quanto vale la velocità della luna**

La velocità in un moto circolare uniforme è data da:

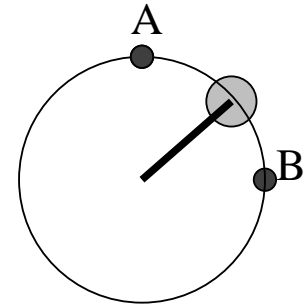
$$v = \omega r$$

Quindi

$$v = \omega R = 2.6 \cdot 10^{-6} rad/s \cdot 3.9 \cdot 10^8 m/s = 10^3 m/s$$

13) Una massa $M = 100\text{ g}$ è collegata all'asse di un motore tramite un'asta rigida di lunghezza $L = 60\text{ cm}$ e ruota su un piano verticale con velocità di 2 m/s .

- a) Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?
- b) Cosa si può dire della risultante delle forze lungo la traiettoria?
- c) Spiegare a quali forze (indicandone modulo direzione e verso) è soggetta la massa M durante la rotazione, e calcolare il valore della risultante e della forza esercitata dall'asta nei punti A e B della traiettoria.



Ris.: $T = 1.88\text{ s}$; $a_c = 6.67\text{ m/s}^2$; $\vec{F}_R = -m\omega^2\vec{r}$; $\vec{F}_{asta}(A) = (0, 0, 0.31)\text{ N}$;
 $\vec{F}_{asta}(B) = (0, -0.67, 0.98)\text{ N}$

Soluzione:

a) **Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?**

• **Quanto vale il periodo del moto?**

Il periodo del moto (si tratta di un moto circolare uniforme) è definito come il tempo impiegato per compiere un giro. Dato che il modulo della velocità in un moto circolare uniforme è costante, questo significa che

$$vT = 2\pi r$$

quindi

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Numericamente:

$$T = \frac{2\pi 60\text{ cm}}{2\text{ m/s}} = \frac{2\pi 60(0.01\text{ m})}{2\text{ m/s}} = 1.88\text{ s}$$

• **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

– L'accelerazione è definita come

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

– L'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme è data da

$$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r}$$

ed è sempre parallela al raggio, diretta verso il centro. Per calcolarla devo conoscere ω .

* La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

. In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante. In un periodo $\Delta\theta = 2\pi$ e $\Delta t = T$, quindi ricavo subito

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$

Quindi

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Numericamente:

$$a_c = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60\text{ cm}} = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60(0.01\text{ m})} = 6.67\text{ m/s}^2$$

b) Quanto vale la risultante delle forze?

- La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

- La risultante delle forze in un moto qualsiasi è legata all'accelerazione dalla legge di Newton, che è

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

quindi nel caso specifico del moto circolare uniforme:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_c = -m\omega^2\vec{r}$$

la risultante delle forze ha modulo costante pari a $m\omega^2r$, mentre la sua direzione è parallela al raggio della circonferenza e diretta verso il centro.

Numericamente

$$|F_R| = ma_c = 100 \text{ g} \cdot 6.67 \text{ m/s}^2 = 0.1 \text{ kg} \cdot 6.67 \text{ m/s}^2 = 0.67 \text{ N}$$

- c) **A quali forze è soggetta la massa M durante la rotazione ?** Le forze che agiscono sono la forza peso (\vec{F}_P) e la reazione vincolare dell'asta (\vec{F}_V)

- d) **Modulo direzione e verso delle forze ?** Il fatto che l'oggetto si muova di moto circolare uniforme mi permette di conoscere in ogni posizione la risultante delle due forze:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

- **Modulo direzione e verso della forza peso?** La forza peso è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a Mg
- **Modulo direzione e verso della reazione vincolare?** La reazione vincolare non è nota direttamente.

E' noto solo il valore della sua risultante con la forza peso:

$$\vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

quindi

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Quanto vale la reazione vincolare in A e in B ? Punto per punto

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Dato che è una equazione vettoriale mi rappresenta in realtà una equazione per ciascuna componente:

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= -F_{Px} - m\omega^2r_x \\ F_{Vy} &= -F_{Py} - m\omega^2r_y \\ F_{Vz} &= -F_{Pz} - m\omega^2r_z \end{aligned}$$

per calcolare la reazione vincolare devo quindi scrivere le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} in A e B .

- **Quali sono le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} ?**

Per scrivere le componenti di un vettore devo fissare un sistema di riferimento.

In questo caso per esempio x perpendicolare al foglio, y orizzontale e z verticale.

In questo sistema di riferimento $\vec{F}_P = (0, 0, -mg)$ mentre $\vec{r} = (0, r \cos \theta, r \sin \theta)$ dove θ è l'angolo formato dal raggio con l'asse orizzontale.

Nel punto A $\vec{r}(A) = (0, 0, r)$, nel punto B $\vec{r}(B) = (0, r, 0)$. Quindi

$$\begin{aligned}F_{Vx}(A) &= -F_{Px} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{Vy}(A) &= -F_{Py} - m\omega^2 r_y = 0 \\F_{Vz}(A) &= -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = mg - m\omega^2 r\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}F_{Vx}(B) &= -F_{Px} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{Vy}(B) &= -F_{Py} - m\omega^2 r_y = -m\omega^2 r \\F_{Vz}(B) &= -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = mg\end{aligned}$$

Numericamente

$$\begin{aligned}\vec{F}_V(A) &= (0, 0, mg - m\omega^2 r) = (0, 0, 0.31) N & |F_V(A)| &= 0.31 N \\ \vec{F}_V(B) &= (0, -m\omega^2 r, mg) = (0, -0.67, 0.98) N & |F_V(B)| &= 1.41 N\end{aligned}$$

- 14) Un corpo di massa $M = 50\text{ g}$ ruota su un piano orizzontale, vincolato tramite una molla, lunga 80 cm , ad un centro di rotazione C . Sapendo che la frequenza di rotazione è pari a 0.5 s^{-1} , si calcolino:
- Velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta
 - Il valore della forza esercitata dalla molla su M
 - Se la lunghezza a riposo della molla vale 60 cm , quanto vale la sua costante elastica?
 - Sapreste indicare il nuovo valore che il raggio di rotazione assumerebbe se la frequenza di rotazione dimezzasse?

Ris.: a) $\omega = 3.14\text{ rad/s}$, $v = 2.5\text{ m/s}$, $a_c = 7.9\text{ m/s}^2$; b) $F = 0.4\text{ N}$; c) $k = 1.98\text{ N/m}$; d) $r = 64\text{ cm}$

Soluzione:

- a) **Calcolare la velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta**

- **velocità angolare** La velocità angolare è definita

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo (e quindi alla frequenza definita come $f = T^{-1}$, dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Numericamente quindi

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3.14\text{ rad} \cdot 0.5\text{ s}^{-1} = 3.14\text{ rad/s}$$

- **velocità periferica** è definita come

$$V_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo, frequenza e velocità angolare dalle relazioni

$$V_p = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = \omega R$$

Numericamente quindi

$$V_p = \omega R = 3.14\text{ rad/s} \cdot 0.8\text{ m} = 2.5\text{ m/s}$$

- **accelerazione centripeta** Per un oggetto che si muova di moto circolare uniforme, la risultante delle forze deve essere tale che

$$\vec{F}_R = -m\omega^2 \vec{R}$$

dunque l'accelerazione deve valere

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} = -\omega^2 \vec{R}$$

ed essere sempre diretta verso il centro di rotazione Numericamente

$$|\vec{a}| = \omega^2 |\vec{R}| = (3.14\text{ rad/s})^2 (0.8\text{ m}) = 7.9\text{ m/s}^2$$

- b) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** L'accelerazione consente di calcolare la risultante delle forze

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

In questo caso l'unica forza agente nel piano orizzontale è quella della molla (nel piano verticale c'è ovviamente la forza peso, ma essa è bilanciata dalla reazione vincolare che mantiene la pallina sul piano orizzontale)

Quindi

$$\vec{F}_R = \text{somma forze} = \vec{F}_M$$

La forza esercitata dalla molla è costante in modulo ed è sempre diretta verso il centro di rotazione

Numericamente:

$$|\vec{F}_M| = |m\vec{a}| = 0.05 \text{ kg} \cdot 7.9 \text{ m/s}^2 = 0.4 \text{ N}$$

- c) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** La forza elastica esercitata da una molla è data da

$$\vec{F}_M = -K(\vec{L} - \vec{L}_0)$$

Quindi in questo caso

$$\vec{F}_M = -K(\vec{R} - \vec{R}_0) = -m\omega^2\vec{R}$$

ossia

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0}$$

Numericamente

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{0.05 \text{ kg} \cdot (3.14 \text{ rad/s})^2 0.8 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} = 1.97 \text{ N/m}$$

- d) **Calcolare il raggio di rotazione se la frequenza dimezza**

Ovviamente la costante elastica della molla rimane la stessa

$$\frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{m\omega'^2 R'}{R' - R_0}$$

da cui si ottiene la relazione

$$R' = \frac{R_0}{1 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)}$$

Numericamente

$$R' = \frac{0.6 \text{ m}}{1 - (0.5)^2 \left(1 - \frac{0.6 \text{ m}}{0.8}\right)} = 0.64 \text{ m}$$

- 15) Un'automobile di massa 1200 kg , partendo da ferma, raggiunge la velocità di 100 km/h in 12 s .
- Quanto valgono l'accelerazione e lo spazio percorso (supponendo che il moto sia uniformemente accelerato)?
 - Quanto vale la variazione di energia cinetica? Quanto vale il lavoro compiuto sull'auto?
 - Quanto varrebbe la potenza media sviluppata dal motore (trascurando l'attrito)?

$$\text{Ris.: } a_m = 2.3\text{ m/s}^2, \quad s = 165\text{ m}; \quad \Delta E_{cin} = 460\text{ kJ} = L; \quad P = 38\text{ kW}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale l'accelerazione media?**

L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t}$$

Numericamente

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t} = \frac{100\text{ km/h} - 0\text{ km/h}}{12\text{ s}} = \frac{100 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}}{12\text{ s}} = 2.3\text{ m/s}^2$$

Quanto vale lo spazio percorso?

Lo spazio percorso è definito come

$$S = x(t = 12\text{ s}) - x(t = 0)$$

La posizione di un corpo ad un certo istante è data dalle equazioni del moto.

- **Quali sono le equazioni del moto?** In questo caso il moto è da considerarsi uniformemente accelerato, quindi le equazioni del moto sono date da

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

In questo caso la velocità iniziale era nulla quindi

$$S = x(t) - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$S = \frac{1}{2}a_m(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}2.3\text{ m/s}^2(12\text{ s})^2 = 165\text{ m}$$

- b) **Quanto vale la variazione di energia cinetica?**

La variazione di energia cinetica è definita come

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in}$$

L'energia cinetica di un corpo è definita come

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

quindi

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Numericamente

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}1200\text{ kg} \cdot (100\text{ km/h})^2 = \frac{1}{2}1200\text{ kg} \cdot \left(100 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}\right)^2 = 460\text{ kJ}$$

Quanto vale il lavoro compiuto sull'automobile?

- Il lavoro compiuto sull'automobile è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

- Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro è legato alla variazione di energia cinetica

$$L = \Delta E_{cin}$$

Entrambe sono applicabili al caso in questione.

Visto che in questo caso la variazione di energia cinetica è stata appena calcolata:

$$L = \Delta E_{cin} = 460 \text{ kJ}$$

- c) **Quanto vale la potenza media del motore (trascurando gli attriti?)**

La potenza è definita come

$$P = \frac{L_{mot}}{\Delta t}$$

Per calcolare la potenza sviluppata dal motore devo conoscere il lavoro compiuto dal motore. Nell'ipotesi di poter trascurare gli attriti, il lavoro compiuto dalle forze di attrito è nullo, quindi il lavoro compiuto sull'automobile è uguale a quello compiuto dal motore. Quindi la potenza media sarà data da

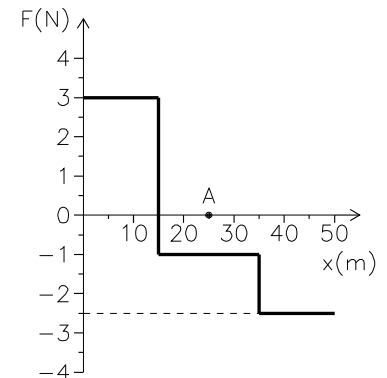
$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{460 \text{ kJ}}{12 \text{ s}} = 38 \text{ kW}$$

(ovviamente nella realtà sarà maggiore...!)

- 16) Il grafico in figura mostra l'andamento della forza in funzione della posizione per una forza conservativa parallela all'asse x .

Un oggetto di massa $M = 300\text{ g}$ viene posto con velocità iniziale nulla nel punto di coordinate $x = 0$

- Quanto lavoro compie la forza F quando l'oggetto si sposta dal punto $x = 0$ al punto $x = A$ indicato in figura?
- Quanto vale la velocità dell'oggetto in $x = A$?
- Quale dei due punti ha energia potenziale maggiore?
- Per quale valore di x la velocità dell'oggetto è massima?
- Costruire per punti il grafico dell'energia potenziale in funzione di x .



Ris.: $L = 35\text{ J}$; $v_A = 15\text{ m/s}$; $x_{v_{max}} = 15\text{ m}$

Soluzione:

- a) **Quanto vale il lavoro da $x = 0$ ad $x = A$?**

Il lavoro compiuto da una forza è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Per calcolare il lavoro devo quindi calcolare l'integrale della forza.

In questo caso mi viene fornito il grafico di $F(x)$ quindi posso calcolare l'integrale graficamente. Per calcolare graficamente l'integrale devo calcolare l'area sottesa dalla curva $F(x)$ fra i due estremi di integrazione (in questo caso $x = 0$ e $x = A$)

$$L_{0 \rightarrow A} = 3\text{ N} \cdot (15\text{ m} - 0) - 1\text{ N} \cdot (25\text{ m} - 15\text{ m}) = 35\text{ J}$$

- b) **Quanto vale la velocità per $x = A$?**

- La velocità è definita come

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

- Per un oggetto che si muove sotto l'azione di una forza costante

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)$$

in questo caso la forza è costante e pari a $F_1 = 3\text{ N}$ per $0\text{ m} < x < 15\text{ m}$ ed è ancora costante ma pari a $F_2 = -1\text{ N}$ per $15\text{ m} < x < 35\text{ m}$ quindi

$$V(t_A) = V(t_{15}) + \frac{F_2}{m}(t - t_{15})$$

in cui $V(t_{15})$ è il valore della velocità che ha all'istante in cui passa per $x = 15\text{ m}$ e il valore t_A per cui $x(t_A) = A$.

- Quanto vale la velocità in $x = 15\text{ m}$?**

$$V(t_{15}) = V(0) + \frac{F_1}{m}t_{15}$$

visto che $V(0) = 0$

$$V(t_{15}) = \frac{F_1}{m}t_{15}$$

per calcolarla però bisogna conoscere il valore di t_{15} per cui l'oggetto passa per la posizione $x = 15\text{ m}$

* **Quanto vale t_{15} ?** t_{15} è definito come l'istante per cui

$$X(t_{15}) = X_{15}$$

Visto che in questo caso la forza è costante l'equazione del moto è quella di un moto uniformemente accelerato:

$$X(t) = X(0) + V(0)t + \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t^2$$

in questo caso $V(0) = 0$ e $X(0) = 0$ quindi:

$$X(t_{15}) = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t_{15}^2$$

per cui

$$X_{15} = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t_{15}^2$$

ossia

$$t_{15} = \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}}$$

Numericamente:

$$t_{15} = \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \text{ g} \cdot 15 \text{ m}}{3 \text{ N}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3 \text{ kg} \cdot 15 \text{ m}}{3 \text{ N}}} = 1.73 \text{ s}$$

si può quindi calcolare $V(t_{15})$

$$V(t_{15}) = \frac{F_1}{m} t_{15} = \frac{F_1}{m} \sqrt{\frac{2 m X_{15}}{F_1}} = \sqrt{\frac{2 F_1 X_{15}}{m}}$$

Numericamente:

$$V(t_{15}) = \sqrt{\frac{2 F_1 X_{15}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \text{ N} \cdot 15 \text{ m}}{0.3 \text{ kg}}} = 17.32 \text{ m/s}$$

– **Quanto vale $t_A - t_{15}$?** t_A è definito come l'istante per cui

$$X(t_A) = X_A$$

Visto che in questo caso la forza è costante l'equazione del moto è quella di un moto uniformemente accelerato a partire dall'istante t_{15} con posizione iniziale $X(t_{15})$ e velocità iniziale $V(t_{15})$

$$X(t) = X(t_{15}) + V(t_{15})(t - t_{15}) + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m} (t - t_{15})^2$$

Si può anche scrivere in termini di $\Delta X = X_A - X_{15}$ e $\Delta t = t_A - t_{15}$:

$$\Delta X = V(t_{15})\Delta t + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m} \Delta t^2$$

la cui soluzione è

$$\Delta t = -\frac{V_{15}m}{F_2} \pm \sqrt{\left(\frac{V_{15}m}{F_2}\right)^2 + \frac{2m\Delta x}{F_2}}$$

Ho due possibili soluzioni, entrambe positive (che corrispondono a due possibili successivi passaggi per lo stesso punto)

Devo quindi prendere il primo dei due, cioè la soluzione:

$$\Delta t = -\frac{V_{15}m}{F_2} - \sqrt{\frac{V_{15}m^2}{F_2} + \frac{2m\Delta X}{F_2}}$$

Numericamente:

$$\Delta t = -\frac{17.32 \text{ m/s} \cdot 0.3 \text{ kg}}{-1 \text{ N}} - \sqrt{\left(\frac{17.32 \cdot 0.3 \text{ kg}}{-1 \text{ N}}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{-1 \text{ N}}} = 0.62 \text{ s}$$

a questo punto la velocità in A è data da:

$$V(t_A) = V(t_{15}) + \frac{F_2}{m} \Delta t = 17.32 \text{ m/s} - \frac{1 \text{ N}}{0.3 \text{ kg}} \cdot 0.62 \text{ s} = 15.3 \text{ m/s}$$

- In base al teorema dell'energia cinetica

$$L = \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

in questo caso la velocità iniziale è zero:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = L$$

Quindi:

$$v_A = \sqrt{\frac{2L}{m}}$$

Numericamente

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 \text{ J}}{300 \text{ g}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 \text{ J}}{0.3 \text{ kg}}} = 15.3 \text{ m/s}$$

Utilizzando il teorema dell'energia cinetica il calcolo è molto più rapido e lineare.

- c) **In quale dei due punti l'energia potenziale è maggiore?**

La differenza di energia potenziale è definita come

$$E_2^{pot} - E_1^{pot} = -L_{1 \rightarrow 2}$$

in questo caso

$$E_A^{pot} - E_0^{pot} = -L_{0 \rightarrow A} = -35 \text{ J}$$

quindi l'energia potenziale è maggiore in $x = 0$

- d) **Per quale valore di x la velocità dell'oggetto è massima?**

In base al teorema delle forze vive

$$\Delta E_{cin} = L$$

l'energia cinetica (e quindi la velocità) continuano ad aumentare fintanto che il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento Δx è positivo. Dal grafico si vede subito che il lavoro è positivo fino a $x = 15 \text{ m}$, quindi la velocità massima si avrà per $x = 15 \text{ m}$

- e) **Costruire un grafico dell'energia potenziale in funzione di x**

Per costruire un grafico è necessario costruire una tabella dell'energia potenziale per un sufficiente numero di punti della variabile x

L'energia potenziale è definita come

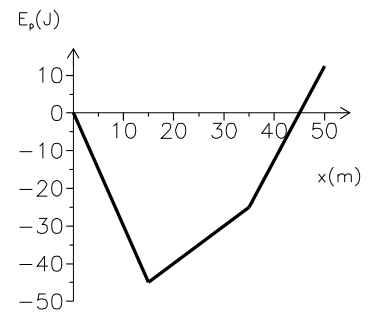
$$E(x)^{pot} - E_0^{pot} = -L_{0 \rightarrow x}$$

il valore della costante E_0^{pot} è arbitrario e può essere considerato ad esempio uguale a 0.

Il lavoro $L_{0 \rightarrow x}$ può essere calcolato graficamente.

Dal grafico della forza osservo che nei tratti in cui la forza è costante il lavoro sarà rappresentato da una retta che può essere disegnata con due punti

x [m]	$-L_{0 \rightarrow x}$ [J]
0	0
15	-45
35	-25
45	0



17) Una pallina di massa 150 g viene lasciata cadere da un'altezza di 120 cm.

a) Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?

Ad ogni rimbalzo la pallina perde il 20% della sua energia.

b) Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?

c) E dopo il secondo?

Ris.: $v = 4.85 \text{ m/s}$; $h' = 0.96 \text{ m}$; $h'' = 0.77 \text{ m}$

Soluzione:

a) **Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?** Devo calcolare la velocità con cui la pallina cade a terra partendo (con velocità iniziale nulla) da un'altezza h , cioè

$$v_{H=0}$$

La forza che agisce sulla pallina è la forza peso.

- La forza peso è una forza costante $F_p = mg$.
- L'accelerazione di gravità è costante (e uguale per tutti i corpi).
- La forza peso è una forza conservativa la cui energia potenziale è data da $E_{pot}^{gr} = mgh$
- Visto che l'accelerazione di gravità è costante, posso scrivere le equazioni della pallina come quelle di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato (lungo la direzione z)
La velocità (in funzione del tempo) per un moto uniformemente accelerato è data da:

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

In questo caso l'accelerazione è $-g$ (diretta verso il basso) e la velocità iniziale è nulla:

$$v(t) = -g(t - t_o)$$

Per calcolare la velocità un attimo prima di toccare terra, devo calcolare l'intervallo di tempo ($t_{H=0} - t_{H=h}$) necessario perchè la pallina arrivi a terra partendo da una quota h

In altre parole dobbiamo trovare il valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ tale che

$$z(t_{H=0}) = 0$$

- **Per quale valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ si ha che $z(t_{H=0}) = 0$?** Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato, l'equazione del moto è data da:

$$z(t) = z_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

quindi

$$z(t) - z_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

in questo caso $z_o = h$ e $z(t_{H=0}) = 0$ quindi si ottiene

$$h = \frac{1}{2}g(t_{terra} - t_o)^2$$

da cui si ricava che

$$t_{H=0} - t_{H=h} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Quindi la velocità quando tocca terra vale:

$$v_{H=0} = -g(t_{H=0} - t_{H=h}) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

- La velocità è legata all'energia cinetica

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}}$$

Visto che la massa è nota, calcolare la velocità finale è equivalente a calcolare l'energia cinetica finale

- **Quanto vale l'energia cinetica poco prima di toccare terra?** Posso considerare il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_{cin} = L$$

Quindi l'energia cinetica per $H = 0$ è legata all'energia cinetica alla quota $H = h$ dalla relazione:

$$E_{cin}^{H=0} = L + E_{cin}^{H=h} = L_{h \rightarrow 0}$$

In questo caso l'energia cinetica iniziale è nulla (perchè la pallina parte da ferma) quindi per calcolare l'energia cinetica finale basta calcolare il lavoro compiuto sulla pallina.

- * **Quanto vale il lavoro compiuto sulla pallina?**

- Il lavoro è definito come:

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

In questo caso la forza è la forza peso ($F_p = mg$) costante e parallela allo spostamento della pallina, quindi

$$L_{h \rightarrow 0} = \vec{F}_p s$$

Lo spostamento è uguale all'altezza h quindi

$$L = mgh$$

- Per una forza conservativa il lavoro è legato alla variazione di energia potenziale

$$L_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}^A - E_{pot}^B$$

Visto che la pallina cade sotto l'azione della forza peso, che è una forza conservativa la cui energia potenziale $E_{pot}^{gr} = mg(h - h_o)$

$$L_{h \rightarrow 0} = mg(h - h_o) - mg(0 - h_o) = mgh$$

Il lavoro compiuto sulla pallina vale:

$$L = mgh$$

L'energia cinetica finale della pallina vale:

$$E_{cin}^{H=0} = mgh$$

La velocità sarà quindi data da:

$$v_{H=0} = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = \sqrt{2gh}$$

- Posso considerare la conservazione dell'energia:

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

- **Quale è l'espressione dell'energia totale?** L'energia totale meccanica è data dalla somma dell'energia cinetica e delle (varie) energie potenziali.

In questo caso l'unica forza che agisce è la forza peso quindi devo considerare solo la sua energia potenziale. L'energia totale in questo caso quindi è data da

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}^{gr} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

La conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

può essere riscritta

$$\frac{1}{2}mv_{H=h}^2 + mg(h - h_o) = \frac{1}{2}mv_{H=0}^2 + mg(0 - h_o)$$

Visto che $v_{H=h} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_{H=0}^2 = mgh$$

da cui

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh}$$

Numericamente

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 120 \text{ cm}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1.2 \text{ m}} = 4.85 \text{ m/s}$$

- b) **Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?**

Devo calcolare l'altezza raggiunta se rimbalza dopo aver perso il 20% della sua energia.

- **Quanto vale l'energia dopo il primo rimbalzo?** L'energia della pallina sarà

$$E' = E - \Delta E$$

Il testo dice che ΔE è il 20% di E ossia

$$\Delta E = \frac{20}{100}E$$

quindi

$$E' = E - \frac{20}{100}E = 0.8E$$

L'energia viene persa solo nel momento in cui tocca terra, mentre risale invece l'energia è conservata.

- Posso considerare la conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h'} = E'$$

l'espressione dell'energia totale è

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

Visto che nel punto più' alto $v = 0$

$$mgh_{max} = E_{tot}$$

da cui

$$h' = \frac{E'}{mg} = 0.8 \frac{E}{mg} = 0.8h$$

- Subito dopo il rimbalzo la pallina ha solo energia cinetica: posso calcolare la sua velocità e usare le equazioni del moto uniformemente accelerato per calcolare l'altezza massima
- Posso usare il teorema dell'energia cinetica per calcolare il lavoro che deve compiere la forza peso per fermare la pallina (e da lì risalire allo spazio che deve percorrere in verticale)
- Il lavoro della forza peso può anche essere calcolato usando la variazione della sua energia potenziale.

Il risultato è

$$h' = 0.8h$$

Numericamente:

$$h' = 0.8 \cdot 120 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$$

c) **Quale altezza raggiunge dopo il secondo rimbalzo?**

Dopo il secondo rimbalzo la pallina avrà perso il 20% dell'energia che gli era rimasta dopo il primo rimbalzo:

$$E'' = 0.8E'$$

di conseguenza

$$h'' = 0.8h' = (0.8)^2h$$

Numericamente:

$$h'' = (0.8)^2h = 0.64 \cdot 120 \text{ cm} = 77 \text{ cm}$$

- 18) Una gru solleva un carico di 5000 kg alla velocità costante di 0.1 m/s
- Supponendo di poter trascurare gli attriti, quanto lavoro compie il motore in un secondo?
 - Quanto varrebbe in questo caso la potenza sviluppata dal motore?
 - Quanto vale la forza di attrito, sapendo che nella realtà il motore sviluppa una potenza di 10 kW ?

Soluzione:

- a) **Quanto vale il lavoro compiuto dalla gru in un secondo?**

- Il lavoro compiuto da una forza è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

per calcolare il lavoro del motore devo conoscere la forza esercitata dal motore in modulo e direzione.

D'altra parte so che il carico si muove a velocità costante in direzione verticale. Si tratta quindi di un moto rettilineo uniforme, in cui la risultante delle forze è nulla.

Le forze che agiscono sono la forza peso e quella esercitata dal motore. Se la loro risultante è zero vuol dire che

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_M$$

quindi la forza esercitata dalla gru ha modulo mg ed è diretta verso l'alto, parallela allo spostamento:

$$L = F_M \cdot \Delta z = mg\Delta z$$

- Il lavoro compiuto è legato alla variazione di energia cinetica (teorema delle forze vive):

$$L = \Delta E_{cin}$$

La variazione di energia cinetica del carico è pari al lavoro compiuto su di esso. In questo caso (se non c'è attrito) le forze che compiono lavoro sono la forza di gravità e quella del motore:

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M$$

Visto che il carico viene sollevato con velocità costante

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M = 0$$

Cioè il motore compie un lavoro di segno opposto a quello della forza di gravità.

$$L_M = -L_{grav}$$

Il lavoro compiuto dalla forza di gravità definisce la differenza di energia potenziale gravitazionale:

$$-L_{grav} = \Delta E_{pot} = mg\Delta z$$

Quindi

$$L_M = \Delta E_{pot} = mg\Delta z$$

- Di quanto si solleva il carico in 1 s ?**

Il carico viene sollevato con velocità costante, cioè

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \text{cost}$$

Quindi

$$\Delta z = v\Delta t$$

$$L = mg \cdot \Delta z = mgv\Delta t$$

Numericamente:

$$L = mgv\Delta t = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 4.9 \cdot 10^3 \text{ J}$$

- b) **Quanto varrebbe la potenza sviluppata dal motore (se si potessero trascurare le forze di attrito)?**

La potenza è definita come

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

quindi in questo caso

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t} = \frac{mgv\Delta t}{\Delta t} = mgv$$

Numericamente

$$P_M = mgv = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m/s} = 4.9 \text{ kW}$$

- c) **Quanto vale la forza di attrito?**

Per ricavare la forza di attrito posso

- aggiungere la forza di attrito nel calcolo della risultante delle forze

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_M + \vec{F}_A$$

Tenendo presente che la forza di gravità è diretta verso il basso e quella motrice verso l'alto la componente z della forza di attrito vale:

$$F_A = mg - F_M$$

- **Quanto vale la forza esercitata dal motore?**

Visto che il carico si muove a velocità costante le forze di attrito e la forza esercitata dal motore saranno costanti.

Il testo fornisce la potenza sviluppata dal motore

- * **Che relazione c'è fra potenza sviluppata e forza esercitata dal motore?**

La potenza sviluppata dal motore è data da

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t}$$

Visto che il carico si muove a velocità costante il lavoro compiuto dal motore è dato da:

$$L_M = F_M v \Delta t$$

quindi

$$P_M = \frac{L_M}{\Delta t} = \frac{F_M v \Delta t}{\Delta t} = F_M v$$

quindi

$$F_M = \frac{P_M}{v}$$

da cui si ricava

$$F_A = mg - \frac{P_M}{v}$$

- includere il lavoro delle forze di attrito nel teorema delle forze vive:

$$\Delta E_{cin} = L_{grav} + L_M + L_A$$

da cui si ricava che il lavoro delle forze di attrito vale

$$L_A = -L_{grav} - L_M$$

- **Quanto vale il lavoro delle forze di attrito?** Se il carico si muove a velocità costante anche la forza di attrito sarà costante

$$L_A = F_A v \Delta t$$

- **Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di gravità?** Il lavoro compiuto dalla forza di gravità è dato da

$$L_{grav} = -\Delta E_{pot}^{grav} = -mg\Delta z = -mgv\Delta t$$

- **Quanto vale il lavoro compiuto dal motore ?** Il lavoro compiuto dal motore è legato alla potenza sviluppata dalla relazione quindi conoscendo il lavoro compiuto dal motore (

$$L_M = P_M \Delta t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$L_A = F_A v \Delta t = mgv\Delta t - P_M \Delta t$$

da cui si ricava che

quello compiuto dalla forza di gravità ($-\Delta E_{pot}$) si ricava che:

$$F_A = mg - \frac{P}{v}$$

Numericamente:

$$F_A = mg - \frac{P_M}{v} = 5000 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 - \frac{10 \text{ kW}}{0.1 \text{ m/s}} = -5.1 \cdot 10^4 \text{ N}$$

La forza di attrito risulta quindi diretta verso il basso

- 19) Una pallina di massa 2 kg , scivola partendo da ferma lungo un piano inclinato e dopo 3 s raggiunge la velocità di 4 m/s
- Quanto vale l'accelerazione ?
 - Quanto vale la variazione di energia cinetica della pallina?
 - Di quanto è variata la sua energia potenziale gravitazionale?
 - Quanto vale il dislivello Δh fra i due estremi del piano inclinato?

Soluzione:

- a) **Quanto vale l'accelerazione media?**

L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Se l'accelerazione è costante accelerazione istantanea e accelerazione media hanno lo stesso valore. In un piano inclinato (privo di attriti) l'accelerazione è costante. Quindi

$$\vec{a} = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t}$$

Numericamente

$$\vec{a} = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t} = \frac{4\text{ m/s} - 0}{3\text{ s}} = 1.3\text{ m/s}^2$$

- b) **Quanto vale la variazione di energia cinetica?**

La variazione di energia cinetica è definita come

$$\Delta E^{cin} = E_{fin}^{cin} - E_{in}^{cin}$$

L'energia cinetica è definita come

$$E^{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

quindi la variazione di energia cinetica sarà data da

$$\Delta E^{cin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Numericamente:

$$\Delta E^{cin} = \frac{1}{2}2\text{ kg}(4\text{ m/s})^2 - 0 = 16\text{ J}$$

- c) **Quanto vale la sua variazione di energia potenziale gravitazionale?** La variazione di energia potenziale è definita come:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in}$$

- L'energia potenziale della forza peso è data da

$$E_{pot}^{gr} = mg(h - h_o)$$

quindi

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in} = mg(h_{fin} - h_o) - mg(h_{in} - h_o) = mg(h_{fin} - h_{in}) = -mg\Delta h$$

ma per calcolarla è necessario conoscere il dislivello fra i due estremi del piano inclinato.

- In base al principio di conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{in} = E_{tot}^{fin}$$

l'energia totale è data da

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$$

quindi

$$E_{cin}^{in} + E_{pot}^{in} = E_{cin}^{fin} + E_{pot}^{fin}$$

da cui si ricava che

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}^{fin} - E_{pot}^{in} = E_{cin}^{in} - E_{cin}^{fin} = -\Delta E_{cin}$$

Numericamente quindi:

$$\Delta E_{pot} = -\Delta E_{cin} = -16 J$$

d) **Quanto vale il dislivello Δh fra i due estremi del piano inclinato?** Come già visto:

$$\Delta E_{pot}^{grav} = -mg\Delta h$$

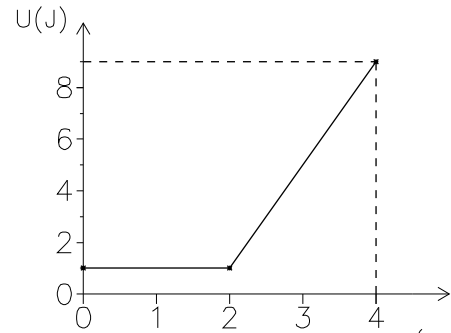
quindi

$$\Delta h = -\frac{\Delta E_{pot}}{mg} = \frac{-16 J}{2 kg 9.8 m/s^2} = 0.82 m$$

- 20) Il grafico in figura rappresenta l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale U di un corpo P di massa $M = 0.5 \text{ kg}$, che si muove su una pista priva di attrito costituita da un tratto orizzontale $A - B$ seguito da un tratto inclinato avente pendenza costante. Nella figura l'asse x rappresenta la coordinata orizzontale del punto P .

Il corpo viene lanciato da A verso B con una velocità iniziale $v_o = 4 \text{ m/s}$.

- Quanto valgono l'energia potenziale e cinetica di P in A e in $x = 2.5 \text{ m}$?
- Si calcoli la coordinata \bar{x} del punto in cui P inverte il suo moto.
- Si tracci sullo stesso grafico di U , il grafico dell'andamento di T (energia cinetica) in funzione di x .



Ris.: $U_0 = 1 \text{ J}$, $E_0 = 4 \text{ J}$, $U_A = 3 \text{ J}$, $E_A = 2 \text{ J}$; $x = 3 \text{ m}$

Soluzione:

- a) Quanto valgono l'energia potenziale e cinetica in A ($x = 0$) e $x = 2,5 \text{ m}$?

• Quanto vale l'energia potenziale?

Visto che mi viene fornito il grafico di $U(x)$, per rispondere bisogna ricavare i valori dal grafico.

- Quanto vale $U(x = 0)$? Il valore $U(x = 0)$ si può leggere direttamente e vale 1 J .
- Quanto vale $U(x = 2.5 \text{ m})$?

Per ricavare il valore a $U(x = 2,5 \text{ m})$ posso usare un righello (ottendo $U(x = 2.5 \text{ m}) \sim 3 \text{ J}$ oppure (visto che la scala non è molto chiara) osservare che per $x > 2 \text{ m}$ $U(x)$ è una retta, cioè

$$U(x > 2 \text{ m}) = U_o + k(x - x_o)$$

e per calcolare k basta fare

$$k = \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

quindi, leggendo dal grafico che $U(x = 2 \text{ m}) = 1 \text{ J}$ e $U(x = 4 \text{ m}) = 9 \text{ J}$

$$k = \frac{9 \text{ J} - 1 \text{ J}}{4 \text{ m} - 2 \text{ m}} = 4 \text{ J/m}$$

quindi l'equazione $U(x > x_o)$ è data da

$$U(x > x_o) = U_o + k(x - x_o) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} U_o &= 1 \text{ J} \\ k &= 4 \text{ J/m} \\ x_o &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Posso quindi calcolare $U(x = 2.5 \text{ m})$ come

$$U(x = 2,5 \text{ m}) = 1 \text{ J} + 4 \text{ J/m}(2.5 \text{ m} - 2 \text{ m}) = 3 \text{ J}$$

• Quanto vale l'energia cinetica?

L'energia cinetica (spesso indicata anche come T è data da:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

- Quanto vale $T(x = 0)$? Dato che conosco la velocità iniziale posso calcolare

$$T(x = 0) = \frac{1}{2}0.5 \text{ kg}(4 \text{ ms})^2 = 4 \text{ J}$$

- **Quanto vale $T(x = 2.5 m)$** Non conosco la velocità in $x = 2.5 m$, quindi devo cercare un'altra relazione.

Se l'energia meccanica è conservata, la somma delle energie cinetica e potenziale è costante. E' applicabile in questo caso perchè il testo del problema parla esplicitamente di guida priva di attriti. Quindi

$$U(x = 0) + T(x = 0) = U(x = 2.5 m) + T(x = 2.5 m) = E_{tot}$$

da cui

$$T(x = 2.5 m) = E_{tot} - U(x = 2.5 m) = U(x = 0) + T(x = 0) - U(x = 2.5 m)$$

Numericamente

$$T(x = 2.5 m) = 1 J + 4 J - 3 J = 2 J$$

b) **Per quale valore di x il moto si inverte?**

Il moto si inverte quando la velocità cambia segno, quindi la coordinata del punto di inversione è quella per cui la velocità si annulla.

Se la velocità è nulla anche l'energia cinetica sarà nulla.

- **Per quale valore di x l'energia cinetica è nulla?**

Dato che in questo problema l'energia meccanica del corpo si conserva

$$U(x) + T(x) = E_{tot}$$

Il punto \bar{x} cercato è quello in cui l'energia cinetica $T(\bar{x} = 0)$ per cui cioè:

$$U(\bar{x}) = E_{tot} = 5 J$$

- **Quale è il valore di x per cui l'energia potenziale è uguale all'energia totale?**

Per calcolare il valore \bar{x} devo conoscere la relazione $U(x)$.

Il grafico $U(x)$ mi viene dato, quindi se le scale sul grafico fossero abbastanza chiare potrei leggere direttamente il valore di x per cui $U(x) = 5 J$ (con un righello si ottiene $\bar{x} = 3$).

In alternativa posso ricorrere all'espressione algebrica per $U(x)$ (già ricavata precedentemente)

$$U(x) = U_o + k(x - x_o)$$

quindi

$$U_o + k(\bar{x} - x_o) = E_{tot}$$

da cui si ottiene:

$$\bar{x} = \frac{E_{tot} - U_o}{k} + x_o$$

Numericamente

$$\bar{x} = \frac{5 J - 1 J}{4 J/m} + 2 m = 3 m$$

c) **Costruire il grafico di $T(x)$** Per fare il grafico di $T(x)$ devo avere una tabella del suo valore in un certo numero (significativo) di punti.

Può essere utile cercare una espressione algebrica per $T(x)$.

In questo caso, visto che l'energia si conserva

$$T(x) + U(x) = T(x_o) + U(x_o)$$

Questo mi dice subito che

$$T(x) = T(x_o) - [U(x) - U(x_o)]$$

Dal grafico di $U(x)$ si vede subito che fino a $x = 2 m$ $U(x) = U(x_0)$, quindi $T(x) = T(x_0)$ (è costante)

$$T(x) = \text{cost} = T(x = 0) = 4 J \quad [x < 2 m]$$

Mentre per $x > 2 m$, visto che

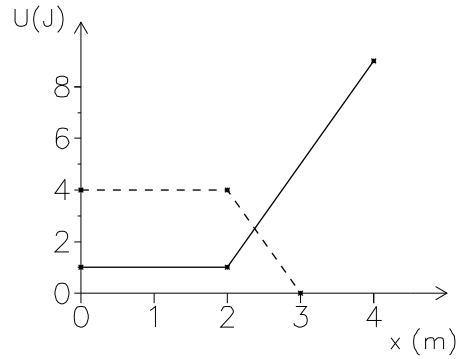
$$U(x) = U_0 + 4 J/m(x - 2 m) \quad [x > 2 m]$$

avrò

$$T(x) = T_0 - 4 J/m(x - 2 m) \quad [x > 2 m]$$

Per disegnare il grafico quindi costruisco la tabella

x [m]	T [J]
0	4
2	4
3	0



21) Un peso di 12 kg è appeso ad una fune lunga 8 m . Il peso viene spostato lateralmente fino a quando la fune forma un angolo di 30° con la verticale.

a) Di quanto è aumentata l'energia potenziale gravitazionale del sasso?

b) Se il peso viene abbandonato a se stesso e comincia a pendolare avanti e indietro, con quale velocità transita per il punto più basso della traiettoria?

Nei punti attorno al punto più basso della traiettoria il peso si muove con velocità praticamente costante e quindi il suo moto si può approssimare ad un moto circolare uniforme.

c) Quale forza (si indichi direzione intensità e verso) deve applicare la fune al peso in quel punto?

Soluzione:

a) **Calcolare la variazione di energia potenziale gravitazionale del sasso**

$$\Delta E^{pot\ grav} = E_{alto}^{pot\ grav} - E_{basso}^{pot\ grav}$$

L'energia potenziale gravitazionale (rispetto ad una quota di riferimento) è data da

$$E^{pot\ grav} = mgh + cost$$

Quindi la differenza di energia potenziale vale

$$\Delta E^{pot\ grav} = E_{alto}^{pot\ grav} - E_{basso}^{pot\ grav} = mg\Delta h$$

Per rispondere devo calcolare la differenza di quota del sasso.

• **Calcolare la differenza di quota**

Usando un pò di trigonometria dalla figura si ricava che

$$\Delta h = L - L \cos \theta$$

Quindi la differenza di energia potenziale fra la quota del sasso quando è sollevato e la quota più bassa è data da:

$$\Delta E^{pot\ grav} = mg\Delta h = mgL(1 - \cos \theta) = 12\text{ kg} \cdot 9.8\text{ m/s}^2 \cdot 8\text{ m} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 126\text{ J}$$

b) **Calcolare la velocità con cui transita per il punto più basso della traiettoria quando viene lasciato libero**

Per rispondere devo trovare una relazione fra la velocità e qualcuna delle grandezze note del problema.

Ad esempio la velocità è legata all'energia cinetica, che a sua volta se non ci sono attriti è legata alla variazione di energia potenziale appena calcolata.

$$E_{basso}^{cin} + E_{basso}^{pot} = E_{alto}^{cin} + E_{alto}^{pot}$$

quindi

$$E_{basso}^{cin} = E_{alto}^{cin} + E_{alto}^{pot} - E_{basso}^{pot}$$

Visto che il sasso viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla

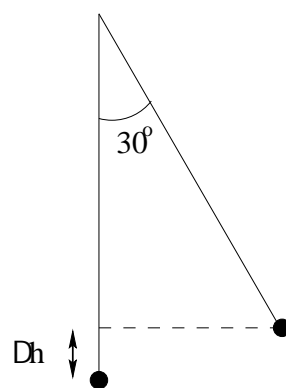
$$E_{basso}^{cin} = \frac{1}{2}mv_{basso}^2 = E_{alto}^{pot} - E_{basso}^{pot} = mg\Delta h$$

Quindi la velocità del sasso vale

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$$

Numericamente

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2 \cdot 9.8\text{ m/s}^2 \cdot 8\text{ m} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 4.6\text{ m/s}$$



c) **Calcolare la forza che applica la fune al peso nel punto piú basso della traiettoria.**

La forza applicata dalla fune è solo una delle forze in gioco (c'è anche la forza di gravità).
La risultante delle forze agenti sul sasso sarà quindi

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{fune} + \vec{F}_{peso}$$

pertanto per calcolare la forza esercitata dalla fune in quel punto bisogna conoscere la risultante delle forze in quel punto

$$\vec{F}_{fune} = \vec{F}_R - \vec{F}_{peso}$$

questa è una equazione vettoriale che corrisponde a

$$F_{fune\ x} = F_{Rx} - F_{Px}$$

$$F_{fune\ y} = F_{Ry} - F_{Py}$$

$$F_{fune\ z} = F_{Rz} - F_{Pz}$$

Le componenti della forza peso (nel sistema di coordinate del disegno) valgono

$$\vec{F}_{peso} = (0, 0, -mg)$$

Bisogna quindi calcolare le componenti della risultante delle forze.

- **Calcolare la risultante delle forze**

La risultante delle forze è legata all'accelerazione del sasso in quel punto

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Il problema quindi si riconduce al calcolo dell'accelerazione del sasso in quel punto.

Il testo afferma che nei punti attorno al punto piú basso della traiettoria si può considerare che il sasso si muova di moto circolare uniforme.

In un moto circolare uniforme l'accelerazione è data da

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \vec{r}$$

ed è sempre diretta verso il centro.

In questo caso quindi l'accelerazione sarà diretta verso l'alto e avrà componenti

$$\vec{a} = (0, 0, \frac{v^2}{L})$$

Di conseguenza la risultante delle forze avrà componenti

$$\vec{F}_R = (0, 0, m\frac{v^2}{L})$$

Le componenti della forza esercitata dalla fune sono quindi:

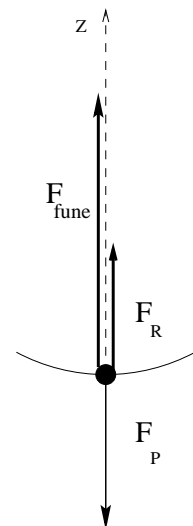
$$F_{fune\ x} = F_{Rx} - F_{Px} = 0$$

$$F_{fune\ y} = F_{Ry} - F_{Py} = 0$$

$$F_{fune\ z} = F_{Rz} - F_{Pz} = m\frac{v^2}{L} + mg$$

Numericamente

$$F_{fune\ z} = m\frac{v^2}{L} + mg = 12\text{ kg}\left(\frac{(4.6\text{ m/s})^2}{8\text{ m}} + 9.8\text{ m/s}^2\right) = 150\text{ N}$$



22) Si considerino valide le equazioni della meccanica classica. Un elettrone ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}C$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31}kg$) è in moto circolare uniforme ad una distanza $r = 0.5 \cdot 10^{-8}cm$ attorno ad un nucleo di carica $Z = 2$.

- Quanto vale l'energia potenziale elettrica dell'elettrone?
- Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?
- Quanto vale la sua energia totale?

Successivamente l'elettrone viene portato su un'orbita di raggio doppio della precedente.

- Di quanto sono variata l'energia potenziale e l'energia cinetica dell'elettrone?
- Quanto lavoro è stato necessario compiere sull'elettrone per portarlo sull'orbita più esterna?

Soluzione:

- Quanto vale l'energia potenziale elettrica dell'elettrone?**

L'energia potenziale può essere definita solo per forze conservative.

L'energia potenziale (di un punto A rispetto ad un punto O) è definita come

$$E_{pot}(A) - E_{pot}(O) = -L_{O \rightarrow A}$$

dove $L_{O \rightarrow A}$ è il lavoro compiuto dalla forza conservativa quando il corpo si muove da O ad A

- Quanto vale $L_{O \rightarrow A}$**

Il lavoro è definito come

$$L_{O \rightarrow A} = \int_0^A \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

La forza elettrica (o coulombiana fra due cariche è data da

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

diretta sempre lungo la congiungente le due cariche in questo caso quindi

$$L = \int_0^A F(r) \cdot dr = \int_{r_0}^{r_A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \frac{dr}{r^2}$$

Nel caso della forza elettrica (o coulombiana) è convenzione scegliere il punto r_0 come il punto in cui le cariche si trovano a distanza infinita (a cui viene attribuita energia potenziale elettrica nulla):

$$L_{\infty \rightarrow r} = \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \frac{dr}{r^2}$$

questo integrale può essere calcolato e vale

$$L_{\infty \rightarrow r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

(se le cariche sono di segno uguale il campo elettrico compie un lavoro negativo per avvicinarle)

L'energia potenziale elettrostatica dell'elettrone (che si trova a distanza R dal nucleo) vale quindi in questo caso:

$$E_{pot}(R) = -L_{\infty \rightarrow R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e Q_n}{R}$$

Per calcolarla bisogna conoscere la carica del nucleo

- Quanto vale la carica del nucleo?** La carica del nucleo è Z volte la carica elementare:

$$Q_n = Zq_{el} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}C$$

Numericamente quindi l'energia potenziale vale:

$$\begin{aligned} E_{pot}(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R} = 9 \cdot 10^9 N m^2/C^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8}cm} \\ &= 9 \cdot 10^9 N m^2/C^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2}m} = -9.22 \cdot 10^{-18} J \end{aligned}$$

(è negativa perchè bisogna compiere del lavoro dall'esterno per allontanare l'elettrone dal nucleo)

b) **Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?** L'energia cinetica è definita come

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Quanto vale la velocità dell'elettrone?** L'elettrone sta ruotando (di moto circolare uniforme) intorno al nucleo.

– La velocità è legata alla velocità angolare

$$v = \omega r$$

r è noto ma ω no

– la velocità è legata al periodo il periodo non è noto

$$V = \frac{2\pi r}{T}$$

– la velocità è legata all'accelerazione centripeta

$$a_c = -\frac{v^2}{r}$$

e quindi alla forza centripeta

$$F_c = -m\frac{v^2}{r}$$

La forza centripeta non può che essere dovuta all'attrazione elettrica fra elettrone e nucleo e quindi in qualche modo può' essere ricavata:

* **Quanto vale la forza coulombiana fra l'elettrone ed il nucleo?**

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

quindi

$$v^2 = \frac{-F_c r}{m} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \frac{qQ}{r}$$

Il prodotto della cariche qQ è negativo, quindi il quadrato della velocità è (come deve) positivo...

L'energia cinetica quindi vale:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \frac{qQ}{r}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

(l'energia cinetica è positiva perchè qQ è negativo) Numericamente:

$$E_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} = -\frac{1}{2} 9 \cdot 10^9 N/C^2 m^2 \frac{(-1.6 \cdot 10^{-19}C)(3.2 \cdot 10^{-19}C)}{0.5 \cdot 10^{-8}cm} = 4.61 \cdot 10^{-18} J$$

Si può notare che l'energia cinetica ha una espressione molto simile all'energia potenziale:

$$E_{cin} = -\frac{1}{2}E_{pot}$$

e questo è vero qualsiasi sia il valore di R

c) **Quanto vale l'energia totale dell'elettrone?**

L'energia totale è data dalla somma di energia cinetica e potenziale:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$$

grazie all'osservazione precedente (o anche usando i valori numerici)

$$E_{tot} = -4.61 \cdot 10^{-19} J$$

d) **Di quanto variano l'energia potenziale e quella cinetica se il raggio raddoppia?** La variazione di energia cinetica e potenziale sono date da:

$$\Delta E_{pot} = E'_{pot} - E_{pot}$$

$$\Delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin}$$

• **Quanto valgono l'energia cinetica e potenziale se il raggio raddoppia?**

$$E'_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r'}$$

$$E'_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r'}$$

visto che $r' = 2r$

$$E'_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{2r} = \frac{1}{2} E_{pot}$$

$$E'_{cin} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{2r} = \frac{1}{2} E_{cin}$$

sia l'energia cinetica che quella potenziale sono dimezzate

quindi

$$\Delta E_{pot} = E'_{pot} - E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} - E_{pot} = -\frac{1}{2} E_{pot}$$

$$\Delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin} = \frac{1}{2} E_{cin} - E_{cin} = -\frac{1}{2} E_{cin}$$

Numericamente:

$$\Delta E_{pot} = -\frac{1}{2} E_{pot} = 4.61 \cdot 10^{-19} J$$

$$\Delta E_{cin} = -\frac{1}{2} E_{cin} = -2.31 \cdot 10^{-19} J$$

L'energia potenziale è aumentata (le cariche di segno opposto si sono allontanate) mentre quella cinetica è diminuita (visto che sono più lontane la forza coulombiana è minore e quindi è minore anche la velocità di rotazione)

e) **Quanto lavoro è stato necessario compiere per portare l'elettrone sull'orbita più esterna?**

Il principio di conservazione dell'energia afferma che

$$\Delta E_{tot} = L$$

in questo caso la variazione di energia totale è la somma delle variazioni di energia cinetica e potenziale:

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{cin}$$

Numericamente:

$$L = 4.6 \cdot 10^{-19} J - 2.3 \cdot 10^{-19} J = 2.3 \cdot 10^{-19} J$$

come era ovvio aspettarsi è necessario compiere del lavoro positivo per allontanare l'elettrone su un'orbita più esterna.

23) Un fascetto di elettroni ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9 \cdot 10^{-31} kg$) ha energia cinetica iniziale pari a $2 eV$. Gli elettroni attraversano una zona (lunga $0.5 m$) in cui è presente un campo elettrico costante, antiparallelo alla direzione di volo degli elettroni, di intensità pari a $E = 80 kV/m$.

- Quanto lavoro compie la forza elettrica su ciascun elettrone?
- Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra i due estremi della regione attraversata dagli elettroni?
- Quanto vale l'energia cinetica finale degli elettroni?

$$Ris.: L = 6.4 \cdot 10^{-15} J; \quad \Delta V = -40 kV; \quad E_{fin} = 40 keV = 6.4 \cdot 10^{-15} J$$

Soluzione:

a) **Quanto lavoro compie la forza elettrica su ciascun elettrone?**

- Il lavoro è definito come

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Per poter calcolare il lavoro bisogna scrivere le componenti della forza e dello spostamento.

– **Quanto vale la forza che agisce sull'elettrone?**

- La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- La forza è legata al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

(definizione di campo elettrico) il campo elettrico in questo caso è costante e antiparallelo alla direzione degli elettroni

$$\vec{E} = (-E, 0, 0)$$

Le componenti della forza sono date quindi da:

$$\vec{F} = q_e \vec{E}$$

visto che q_e è negativa, la forza elettrica è costante e parallela alla direzione di volo degli elettroni che quindi si muovono lungo una linea retta.

– **Quanto vale lo spazio percorso?** Lo spazio percorso è pari alla lunghezza della zona in cui è presente il campo elettrico

$$\Delta x = 0.5 m$$

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = F_x \Delta x = q_e E_x \Delta x$$

- Il lavoro è legato alla variazione di energia cinetica dalla relazione

$$L = \Delta E_{cin}$$

per calcolarla dovrei conoscere la velocità finale ed iniziale (quindi questa relazione anche se valida non è utilizzabile)

- Il lavoro di una forza conservativa è legato alla variazione di energia potenziale:

$$L_{1 \rightarrow 2} = -\Delta E_{pot} = -(E_{pot2} - E_{pot1}) = E_{pot1} - E_{pot2}$$

– **Quanto vale la differenza di energia potenziale?**

Ricordando che l'energia potenziale è legata alla differenza di potenziale elettrico da:

$$\Delta E_{pot} = q\Delta V$$

e che nel caso di un campo elettrico costante

$$\Delta V = E\Delta x$$

ossia

$$V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1)$$

quindi:

$$E_{pot1} - E_{pot2} = q(V_1 - V_2) = qE(x_2 - x_1)$$

conoscendo quindi l'energia potenziale si ottiene

$$L_{1 \rightarrow 2} = E_{pot1} - E_{pot2} = q_e E_x \Delta x$$

Numericamente:

$$L = q_e E_x \Delta x = (-1.6 \cdot 10^{-19} C)(-80 kV/m)0.5 m = 6.4 \cdot 10^{-15} J$$

- b) **Quanto vale la differenza di potenziale elettrico?** La differenza di potenziale elettrico è definita come

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}}{q} = -\frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q} = \frac{L_{2 \rightarrow 1}}{q}$$

Avendo già calcolato il lavoro si ottiene:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q}$$

Numericamente:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{q} = \frac{6.4 \cdot 10^{-15} J}{-1.6 \cdot 10^{-19} C} = -40 kV$$

- c) **Quanto vale l'energia cinetica finale degli elettroni?**

- L'energia cinetica è definita come

$$\frac{1}{2}mv^2$$

quindi

$$\Delta E_{cin} = E_{cin2} - E_{cin1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

ma per calcolarla dovrei conoscere velocità iniziali e finali

- il teorema dell'energia cinetica afferma che

$$\Delta E_{cin} = L$$

Avendo in precedenza calcolato il lavoro posso quindi ottenere

$$E_{cin2} = E_{cin1} + L$$

Numericamente quindi:

$$\begin{aligned} E_{cin2} = E_{cin1} + L &= 2 eV + 6.4 \cdot 10^{-15} J = 2 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} J) + 6.4 \cdot 10^{-15} J \\ &= 6.4 \cdot 10^{-15} J = 6.4 \cdot 10^{-15} \left(\frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} eV \right) = 40 keV \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di eV , (energia acquistata da un elettrone attraverso una differenza di potenziale pari a $1V$) posso anche dire subito che se l'elettrone attraversa una $\Delta V = 40 kV$ la sua energia cinetica aumenta di $40 keV$

- 24) Per spostare $3.1 \cdot 10^{15}$ elettroni ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$) da un punto A ad un punto B è necessario compiere un lavoro (positivo) di $200 J$.
- Quanto vale la carica totale degli elettroni?
 - Quanto vale la differenza di energia potenziale elettrostatica delle cariche fra A e B ?
 - Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra A e B ?

$$\text{Ris.: a) } Q = -5 \cdot 10^{-3} C; \quad \text{b) } \Delta E_{pot} = 200 J; \quad \text{c) } \Delta V = -40 kV$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la carica totale degli elettroni?**

La carica totale è definita come la somma delle singole cariche (in questo caso elettroni) quindi

$$Q_{tot} = N_{elettroni} q_e$$

Numericamente:

$$Q_{tot} = N_{elettroni} q_e = 3.1 \cdot 10^{15} \cdot (-1.6 \cdot 10^{-19} C) = -5 \cdot 10^{-3} C$$

- b) **Quanto vale la differenza di energia potenziale elettrostatica delle cariche fra A e B ?**

La differenza di energia potenziale elettrostatica è definita come

$$\Delta E_{pot}^{el} = E_{pot}^{el}(B) - E_{pot}^{el}(A) = -L_{A \rightarrow B}$$

quindi

$$\Delta E_{pot}^{el} = -L_{A \rightarrow B}$$

dove $L_{A \rightarrow B}$ è il lavoro *che compiono le forze del campo*. Il lavoro compiuto dalle forze del campo è l'opposto di quello che si compie (dall'esterno) contro di esse:

$$L_{A \rightarrow B} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{est}$$

Numericamente quindi

$$\Delta E_{pot}^{el} = -L_{A \rightarrow B} = \mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{est} = 200 J$$

- c) **Quanto vale la differenza di potenziale elettrico fra A e B ?**

La differenza di potenziale elettrico è definita come la differenza di energia potenziale elettrostatica per unità di carica:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}^{el}}{Q}$$

Numericamente:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{pot}^{el}}{Q} = \frac{200 J}{-5 \cdot 10^{-3} C} = -40 kV$$

Idraulica e Fluidi

- 1) L'acqua di un ruscello cade da una cascata alta 10 m con velocità iniziale praticamente nulla. Quanto vale la velocità dell'acqua alla base della cascata?

Ris.: $v=14$ m/s

Soluzione:

- **Quanto vale la velocità dell'acqua alla base della cascata?**

Per rispondere posso

- considerare che l'acqua cade sotto l'azione della forza di gravità.
- utilizzare il principio di conservazione dell'energia in meccanica:

$$\Delta E_{cin} = L$$

- applicare il teorema di Bernoulli (conservazione dell'energia per unità di volume nel caso dei liquidi)

$$P_{in} + dgh_{in} + \frac{1}{2}dgv_{in}^2 = P_{fin} + dgh_{fin} + \frac{1}{2}dgv_{fin}^2$$

La condizione di applicabilità in tutti i casi è che siano trascurabili le forze di attrito (o viscosità visto che si tratta di liquidi).

Vediamo ora se e come queste leggi possono essere utilizzate in questo caso particolare

- Visto che l'acqua cade sotto l'azione della forza di gravità il suo moto è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9.8$ m/s diretta verso il basso.

La sua velocità in funzione del tempo sarà data da

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

Visto che g è diretta verso il basso, e che la velocità iniziale è zero, posso limitarmi a considerare la sola coordinata z (diretta verso il basso)

$$v_z(t) = gt$$

Per calcolare la velocità dell'acqua alla base della cascata bisogna calcolare il tempo necessario a cadere, ossia t_{cad}

- * **Quanto tempo impiega l'acqua a raggiungere il fondo della cascata?**

$$z(t_{cad}) = z_{fin}$$

Le equazioni del moto lungo la coordinata z nel caso di caduta dei gravi (avendo scelto la direzione z verso il basso) sono date da

$$z(t) = z_o + v_z t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$z(t_{cad}) - z_o = \frac{1}{2}gt^2 = \Delta h$$

quindi

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}$$

per cui

$$v_{fin} = v_z(t_{cad}) = gt_{cad} = g\sqrt{\frac{2\Delta h}{g}} = \sqrt{2g\Delta h}$$

– Per utilizzare il teorema dell'energia cinetica devo conoscere il lavoro compiuto sull'acqua (dalla forza di gravità):

* **Quanto vale** L_{grav} Il lavoro della forza di gravità è pari alla variazione di energia potenziale gravitazionale:

$$L_{grav} = mg\Delta h$$

quindi

$$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = \frac{1}{2}mv_{in}^2 + mg\Delta h$$

da cui (considerando che la velocità iniziale è nulla)

$$v_{fin} = \sqrt{2g\Delta h}$$

– per applicare il teorema di Bernoulli

$$\frac{1}{2}dgv_{fin}^2 = \frac{1}{2}dgv_{in}^2 + dg(h_{in} - h_{fin}) + P_{in} - P_{fin}$$

devo conoscere v_{in} , $(h_{in} - h_{fin})$, P_{in} e P_{fin} tutte date dal testo (la pressione è ovunque quella atmosferica), quindi:

$$v_{fin} = \sqrt{2g\Delta h}$$

Numericamente:

$$v_{fin} = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}} = 14 \text{ m/s}$$

2) Un tubo rigido orizzontale avente sezione pari a 1 cm^2 , attraversato da una portata di 5 cc/s , si restringe per un breve tratto fino ad una sezione di 1 mm^2 .

a) Quanto vale la velocità del liquido nei due tratti del tubo?

b) Se la pressione assoluta nel tratto di tubo più largo vale $P = 1\text{ atm}$, quanto valgono la pressione assoluta e quella trasmurale nel tratto di tubo più stretto? (Si consideri il liquido come ideale con densità pari a quella dell'acqua)

$$\text{Ris.: } v_1 = 5\text{ cm/s}; v_2 = 5\text{ m/s}; P_2 = 8.9 \cdot 10^4\text{ Pa}; P_2^t = -1.25 \cdot 10^4\text{ Pa}$$

Soluzione:

a) **Quanto vale la velocità del liquido nei due tratti del tubo?**

La velocità media del liquido è legata alla portata dalla relazione

$$V = \frac{Q}{S}$$

In questo caso quindi

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{5\text{ cc/s}}{1\text{ cm}^2} = \frac{5\text{ cm}^3/\text{s}}{1\text{ cm}^2} = 5\text{ cm/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{s_2} = \frac{5\text{ cc/s}}{1\text{ mm}^2} = \frac{5\text{ cm}^3/\text{s}}{10^{-2}\text{ cm}^2} = 5\text{ m/s}$$

b) **Quanto vale la pressione assoluta nel tratto di tubo più stretto?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- Il teorema di Bernoulli (che esprime la la conservazione dell'energia per unità di volume nei liquidi) afferma che

$$P + dgh + \frac{1}{2}dv^2 = \text{cost}$$

In questo caso il testo dice esplicitamente di considerare il liquido ideale e che il tubo ha pareti rigide, di conseguenza il teorema di Bernoulli è applicabile.

In base al teorema di Bernoulli l'energia per unità di volume nel tratto di tubo più largo (1) deve essere uguale a quella nel tratto di tubo più stretto (2):

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

Visto che il tubo è orizzontale $h_1 = h_2$ quindi

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2)$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{atm} + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2) = 1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} + \frac{1}{2}10^3\text{ kg/m}^3((5\text{ cm/s})^2 - (5\text{ m/s})^2) = \\ &1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} + \frac{1}{2}10^3\text{ kg/m}^3((5 \cdot 10^{-2}\text{ m/s})^2 - (5\text{ m/s})^2) = \\ &1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} - 1.25 \cdot 10^4\text{ Pa} = 0.89 \cdot 10^5\text{ Pa} \end{aligned}$$

Quanto vale la pressione trasmurale?

La pressione trasmurale è definita come

$$P_t = P_{int} - P_{est}$$

La pressione esterna è pari a P_{atm} quindi:

$$P_t = P_{int} - P_{atm} = 0.89 \cdot 10^5\text{ Pa} - 1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} = -1.25 \cdot 10^4\text{ Pa}$$

- 3) Attraverso un tubo fluiscono $5 \ell/min$ di acqua. L'estremità B del tubo si trova 50 cm più in alto dell'estremità A ed è aperta e a contatto con l'atmosfera. La sezione del tubo in A vale 2 cm^2 e quella in B vale 0.5 cm^2 .
- Quanti cm^3 di acqua fluiscono dal tubo in 3 s ?
 - Quanto vale la velocità media dell'acqua in A ed in B ?
 - Trascurando la viscosità dell'acqua, quanto vale la pressione in A ?

Soluzione:

- a) **Quanti cm^3 di acqua fluiscono dal tubo in 3 s ?**

Il volume di liquido per unità di tempo che fuoriesce dal tubo è per definizione dato dalla portata:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

quindi

$$\Delta V = Q\Delta t$$

Numericamente:

$$\Delta V = Q\Delta t = 5 \ell/min \cdot 3 \text{ min} = 15 \ell = 15 \cdot (1000 \text{ cm}^3) = 1.5 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$$

- b) **Quanto vale la velocità media dell'acqua in A ed in B ?** Per un liquido incompressibile la portata e la velocità media sono legati dalla relazione:

$$Q = v \cdot S = \text{cost}$$

dove S è la sezione del condotto. Da questa relazione si ricava quindi che:

$$v = \frac{Q}{S} = \text{cost}$$

Da cui la soluzione:

$$v_A = \frac{Q}{S_A} \qquad v_B = \frac{Q}{S_B}$$

Numericamente

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{5 \ell/min}{2 \text{ cm}^2} = \frac{5 \frac{1000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}}}{2 \text{ cm}^2} = 41.7 \text{ cm/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{5 \ell/min}{0.5 \text{ cm}^2} = \frac{5 \frac{1000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}}}{0.5 \text{ cm}^2} = 1.67 \text{ m/s}$$

- c) **quanto vale la pressione in A ?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- Per un liquido ideale che scorra in un condotto con pareti rigide si può scrivere (teorema di Bernoulli) la relazione:

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 = \text{cost}$$

che esprime la conservazione dell'energia meccanica per unità di volume.

La definizione è ovviamente sempre applicabile; in questo caso è applicabile anche il teorema di Bernoulli dato che il testo indica esplicitamente di trascurare la viscosità dell'acqua.

- per utilizzare la definizione dovrei conoscere la forza agente sulle pareti del tubo (che non è ricavabile dai dati del problema)

- per utilizzare il teorema di Bernoulli

$$P_A = P_B + dg(h_B - h_A) + \frac{1}{2}d(v_B^2 - v_A^2) = cost$$

devo conoscere P_B , $h_B - h_A$, $v_B^2 - v_A^2$. Tutti i dati necessari sono forniti dal problema (le velocità sono state calcolate per rispondere alla domanda precedente).

Visto che l'unica incognita in questa equazione è proprio P_A , il teorema di Bernoulli mi consente di scrivere la soluzione:

$$P_A = P_B + dg(h_B - h_A) + \frac{1}{2}d(v_B^2 - v_A^2)$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} P_A &= 1 \text{ atm} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ cm} + \frac{1}{2}10^3 \text{ kg/m}^3((1.67 \text{ m/s})^2 - (41.7 \text{ cm/s})^2) \\ &= 1.013 \cdot (10^5 \text{ Pa}) + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} + \frac{1}{2}10^3 \text{ kg/m}^3(2.8 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 0.17 \text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &= 1.10 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

- 4) Quanto deve valere al massimo la pressione assoluta nella bocca di una persona che voglia bere dell'acqua con una cannuccia lunga 30 cm?
 Quanto vale la pressione relativa?
 (Si supponga di mantenere la cannuccia verticale con l'estremità inferiore che pesca appena al di sotto del livello dell'acqua)

Soluzione:

- **Quale è il valore massimo della pressione nella bocca che permette di bere?**

- La pressione assoluta è definita come $\frac{F}{S}$.
- Il valore di pressione assoluta presente nella bocca deve essere tale da consentire di aspirare l'acqua attraverso la cannuccia (tenuta verticale).
- Per poter bere l'acqua deve risalire nella cannuccia.
- La differenza di pressione ai capi della cannuccia deve essere tale da consentire all'acqua di risalire per una quota di 30 cm rispetto alla quota nel bicchiere.

- * **Che relazione c'è fra la pressione nella bocca e il ΔP ai capi della cannuccia?**

$$\Delta P = P_{alto} - P_{basso}$$

- **Quanto vale la P_{alto} ?** La pressione assoluta nella bocca è uguale alla pressione assoluta dell'acqua all'estremo superiore della cannuccia.

$$P_{bocca} = P_{alto}$$

- **Quanto vale P_{basso} ?** Alla superficie del liquido nel bicchiere agisce invece la pressione atmosferica: visto che la cannuccia pesca appena nel bicchiere

$$P_{basso} = P_{atm}$$

$$\Delta P = P_{bocca} - P_{atm}$$

- **Quale è il minimo valore di ΔP che consente all'acqua di risalire nella cannuccia?**

- * Se il liquido è ideale (o la caduta di pressione dovuta alla viscosità è trascurabile) posso utilizzare il teorema di Bernoulli.

In base al teorema di Bernoulli la differenza di pressione fra due punti è data da

$$\Delta P = P_A - P_B = dg(h_B - h_A) + \frac{1}{2}d(v_B^2 - v_A^2)$$

quindi (nell'ipotesi di poter trascurare la viscosità dell'acqua) nel caso dell'esercizio

$$\Delta P = dg(h_{bicch} - h_{bocca}) + \frac{1}{2}d(v_{bicch}^2 - v_{bocca}^2)$$

Nel bicchiere il liquido è praticamente fermo quindi

$$P_{bocca} = P_{atm} + dg(h_{bicch} - h_{bocca}) - \frac{1}{2}dv_{bocca}^2$$

Poiché il bicchiere si trova più in basso della bocca $h_{bicch} - h_{bocca} = -L$ quindi

$$P_{bocca} = P_{atm} - dgL - \frac{1}{2}dv_{bocca}^2$$

* La legge di Poiseuille

$$\Delta P = RQ$$

permette di calcolare la caduta di pressione dovuta alla resistenza idraulica della canuccia, ma in questo caso la cannucchia è verticale

$$P_{bocca} = P_{atm} - dgL - \frac{1}{2}dv_{bocca}^2$$

Il valore di pressione nella bocca dipende dalla velocità del liquido, e deve essere tanto più basso tanto maggiore è la velocità.

Il massimo valore di pressione nella bocca che consenta di aspirare liquido, si avrà quando la velocità dell'acqua è trascurabile:

$$P_{bocca}^{max} = P_{atm} - dgL$$

Numericamente:

$$P_{bocca}^{max} = P_{atm} - dgL = 1 \text{ atm} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ cm} = \\ 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} - 3 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0.98 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Un'osservazione: questo risultato è stato ottenuto nell'ipotesi di poter trascurare la viscosità dell'acqua. D'altra parte il valore massimo di pressione si ha quando la velocità dell'acqua è trascurabile. Visto che gli effetti dovuti alla viscosità dipendono dalla velocità del liquido, se la velocità è trascurabile anche la dissipazione di energia dovuta alla viscosità sarà trascurabile.

L'applicabilità del teorema di Bernoulli (non giustificabile a priori) in un certo senso viene garantita in base al risultato ottenuto.

- **Quanto vale la pressione relativa nella bocca?**

La pressione relativa è definita come

$$P_{rel} = P_{ass} - P_{atm}$$

Applicando la definizione

$$P_{rel \text{ bocca}} = P_{ass \text{ bocca}} - P_{atm} = (P_{atm} - dgL) - P_{atm} = -dgL$$

Numericamente

$$P_{rel \text{ bocca}} = -dgL = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ cm} = 3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

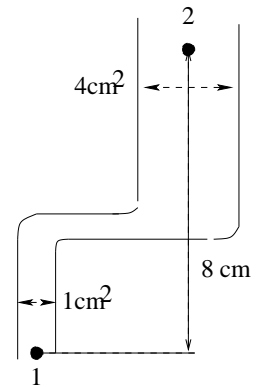
5) Un liquido di densità 10^3 kg/m^3 scorre in un condotto (a pareti rigide) avente le caratteristiche indicate in figura.

Se il liquido è fermo e la pressione assoluta nel punto 1 vale $P_1 = 1 \text{ atm}$

- quanto vale la pressione assoluta nel punto 2?
- quanto vale la pressione relativa all'atmosfera?
- le forze di pressione attorno al punto 2 sollecitano il tubo a contrarsi o a dilatarsi?

Se invece il liquido è in moto con portata Q e si suppone di poter trascurare la viscosità:

- la differenza di pressione $\Delta P = P_2 - P_1$ aumenta o diminuisce? (spiegare).
- esiste un valore di Q per cui $\Delta P = 0$?



Soluzione:

a) **Quanto vale la pressione assoluta nel punto P_2 ?**

La pressione assoluta è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

Fra le leggi che mettono in relazione la pressione di un liquido in un punto con altre grandezze ci sono:

- il teorema di Bernoulli

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dV_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dV_2^2$$

esprime la conservazione dell'energia nel caso di fluidi ideali: privi di viscosità e incompressibili.

- la legge di Poiseuille

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q$$

permette di calcolare la dissipazione di energia nei liquidi viscosi in moto laminare per tubi cilindrici orizzontali a pareti rigide

- la legge di Laplace

$$\Delta P = \frac{\tau}{r}$$

che mette in relazione la tensione delle pareti di un tubo con la pressione esercitata sul fluido al suo interno.

Passiamo a considerare le condizioni di applicabilità:

- Il teorema di Bernoulli è certamente applicabile perchè il liquido è fermo e quindi non dissipa energia a causa della sua eventuale viscosità.
- La legge di Poiseuille non è direttamente applicabile perchè il tubo non è orizzontale (e in ogni caso qui il liquido è fermo e non dissipa energia)
- La legge di Laplace è applicabile.

Rimango quindi con due leggi applicabili: passo a valutare quale posso utilizzare in questo caso specifico in base ai dati del problema:

- per calcolare P_2 usando il teorema di Bernoulli

$$P_2 = P_1 + dg(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2)$$

devo conoscere P_1 , d , $h_1 - h_2$ e $(v_1^2 - v_2^2)$.

P_1 e d sono date nel testo, $h_1 - h_2$ è chiaramente ricavabile dal disegno (-8 cm , il segno meno deriva dal fatto che 1 è più in basso di 2), e le due velocità sono nulle (perchè il testo dice che il liquido è fermo).

$$P_1 = P_2 + dg(h_1 - h_2)$$

fornisce la soluzione richiesta.

- Per calcolare P_2 usando la legge di Laplace

$$P_2 = P_1 + \frac{\tau}{R}$$

devo conoscere P_1, R e τ . P_1 è data da testo, R è ricavabile dal disegno ($R = 2\text{ cm}$ pari alla metà del diametro) ma il valore di τ non è dato e non è ricavabile da altri dati del problema.

Numericamente

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 + dg(h_1 - h_2) = 1\text{ atm} + 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 9.8\text{ m/s}^2 \cdot (-8\text{ cm}) \\ &= 1.013 \cdot 10^5\text{ Pa} - 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 9.8\text{ m/s}^2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}\text{ m} = 1.021 \cdot 10^5\text{ Pa} \end{aligned}$$

- b) **Quanto vale la pressione relativa all'atmosfera?**

La pressione relativa all'atmosfera (o pressione relativa) è definita come

$$P_{rel} = P_{ass} - P_{atm}$$

dalla definizione quindi ricavo la risposta

$$P_{rel2} = P_{ass2} - P_{atm} = -dg\Delta h =$$

Numericamente

$$P_{rel2} = -dg\Delta h = -784\text{ Pa}$$

- c) **Le forze di pressione attorno al punto 2 sollecitano il tubo a contrarsi o a dilatarsi?**

Se la forza agente dall'esterno è maggiore (in modulo) di quella agente dall'interno ovviamente il tubo sarà sollecitato a contrarsi, se è vero il contrario esso verrà sollecitato a dilatarsi.

Per rispondere devo quindi stabilire se la forza di pressione esercitata dall'esterno è maggiore (o minore) di quella esercitata dall'interno.

La forza di pressione esercitata su un "pezzetto" di parete di area ΔS vale

$$F = P\Delta S$$

quindi la forza esercitata dall'esterno e dall'interno saranno rispettivamente date da:

$$F_{est} = P_{est}\Delta S$$

$$F_{int} = P_{int}\Delta S$$

da cui si ricava (l'ovvia) conseguenza che le forze di pressione esercitate dall'esterno sono maggiori (o minori) di quelle esercitate dall'interno a seconda che la pressione esterna sia maggiore (o minore) di quella interna.

Tirando le somme: la pressione (assoluta) esterna è maggiore di quella interna, quindi le forze di pressione esterne sono maggiori delle forze di pressione interne, quindi le forze di pressione tenderanno a var contrarre il tubo.

- d) **Se il liquido fosse in movimento ΔP aumenta o diminuisce?**

- ΔP è definito come

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

dal teorema di Bernoulli è stato ricavato che

$$P_2 - P_1 = -dg\Delta h + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2)$$

quindi per stabilire se $P_2 - P_1$ aumenta o diminuisce devo stabilire se $v_1^2 - v_2^2$ è maggiore o minore di 0.

- **Come sono legate fra loro v_1 e v_2 ?** La velocità di un liquido incompressibile in ciascun punto del condotto è legato alla portata (che deve mantenersi costante) dalla relazione

$$Q = vS$$

quindi indicando con s_1 e S_2 la sezione del tubo nei due punti si ha

$$v_1 s_1 = v_2 S_2$$

$$v_1 = \frac{S_2}{s_1} v_2$$

dalla relazione fra le due velocità si ricava che

$$v_1^2 = \left(\frac{S_2}{s_1}\right)^2 v_2^2 > v_2^2$$

quindi all'aumentare della portata il termine

$$\frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2)$$

diventa un numero positivo sempre maggiore e la differenza

$$P_2 - P_1 = -dg\Delta h + \frac{1}{2}dv_2^2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{s_1}\right)^2\right)$$

tende a diventare sempre meno negativa

- e) **Esiste un valore di Q per cui $\Delta P = 0$?** Dalla risposta precedente si ricava che questo accade per il valore di Q per cui v_2 soddisfa la seguente relazione:

$$dg\Delta h = \frac{1}{2}dv_2^2 \left(\left(\frac{S_2}{s_1}\right)^2 - 1\right)$$

ossia

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{S_2}{s_1}\right)^2 - 1}}$$

- 6) Calcolare la velocità media dell'acqua in un tubo di diametro 20 mm , se la portata vale 2 l/min . Il moto è laminare o turbolento?

Soluzione:

- **Quanto vale la velocità media dell'acqua ?**

La velocità media dell'acqua in un tubo è legata alla portata dalla relazione

$$v = \frac{Q}{S}$$

- **Quanto vale la sezione del tubo?** In questo caso si tratta di un tubo circolare, di diametro noto e la sezione vale

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

la velocità media vale quindi:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Numericamente:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2\text{ l/min}}{\pi (20\text{ mm})^2} = \frac{4 \cdot 2 \frac{1000\text{ cm}^3}{60\text{ s}}}{\pi (2\text{ cm})^2} = 10.5\text{ cm/s}$$

- **Il moto è laminare o turbolento?**

- **Cosa si intende per moto laminare?**

Il moto di un fluido è detto laminare se i filetti di liquido scorrono l'uno sopra l'altro senza mescolarsi.

- **Quali criteri permettono di distinguere fra regime laminare e turbolento?**

La transizione fra regime laminare e turbolento avviene tipicamente quando la velocità media nel condotto supera la velocità critica.

Il valore della velocità critica in un condotto si raggiunge tipicamente quando il numero di Reynolds definito come

$$\mathcal{R} = \frac{vdr}{\eta}$$

vale circa $1000 \div 1200$.

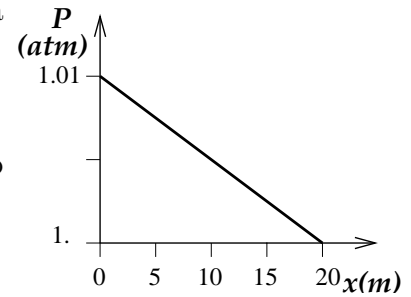
Per stabilire se il moto è laminare o turbolento (ossia se la velocità è minore o maggiore della velocità critica) basta calcolare il valore del numero di Reynolds. In questo caso

$$\mathcal{R} = \frac{vdr}{\eta} = \frac{10.5\text{ cm/s} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 10\text{ mm}}{10^{-3}\text{ Pa s}} = \frac{0.105\text{ m/s} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 10^{-2}\text{ m}}{10^{-3}\text{ Pa s}} = 1050$$

In questo caso quindi non è possibile stabilire a priori se si tratti di regime laminare o turbolento: siamo nell'intervallo di valori per cui è possibile la transizione fra i due regimi.

- 7) In un tubo orizzontale di raggio 0.2 cm scorre un liquido viscoso di densità 0.9 g/cm^3 con portata pari a $5\text{ cm}^3/\text{s}$.

Il grafico rappresenta la pressione assoluta del liquido in funzione della posizione lungo il tubo.



- Quanto è lungo il tubo?
- Quanto vale la differenza di pressione ai capi del tubo?
- Quale perdita di energia subisce l'unità di volume di liquido passando attraverso il tubo?
- Quanto vale la resistenza idraulica del tubo?
- Quanto vale la viscosità del liquido?

Ris.: $L = 20\text{ m}$; $\Delta P = 0.01\text{ atm}$; $\Delta E/V = 10^3\text{ J/m}^3$; $R = 2 \cdot 10^8\text{ Pa s/m}^3$; $\eta = 6.3 \cdot 10^{-5}\text{ Pa s}$

Soluzione:

- a) **Quanto è lungo il tubo?** La lunghezza del tubo può essere letta dal grafico (è il tratto in cui in base alla legge di Poiseuille si ha una caduta di pressione lineare) ed è pari a

$$L = 20\text{ m}$$

- b) **Quanto vale la differenza di pressione ai capi del tubo?**

La differenza di pressione ai capi del tubo è definita come

$$\Delta P = P_{ingr} - P_{uscita}$$

o anche

$$\Delta P = P(\ell = 0) - P(\ell = L)$$

Il grafico fornisce la pressione assoluta lungo il tubo, ed in particolare ai suoi estremi:

$$P(\ell = 0) = 1.01\text{ atm}; \quad P(\ell = L) = 1\text{ atm}$$

quindi

$$\Delta P = P(\ell = 0) - P(\ell = L) = 1.01\text{ atm} - 1\text{ atm} = 0.01\text{ atm}$$

- c) **Quanto vale la perdita di energia per unità di volume del liquido?**

- La perdita di energia per unità di volume è pari al lavoro delle forze viscosse (per unità di volume).
- La caduta di pressione del liquido lungo il tubo è pari al lavoro delle forze viscosse per unità di volume.
- La perdita di energia per unità di volume è quindi uguale alla caduta di pressione. In questo caso quindi:

$$\frac{\Delta E}{V} = \Delta P$$

Numericamente:

$$\frac{\Delta E}{V} = \Delta P = 0.01\text{ atm} = 0.01 \cdot 10^5\text{ Pa} = 10^3\text{ J/m}^3$$

- d) **Quanto vale la resistenza idraulica del condotto?** La resistenza idraulica è definita come:

$$R = \frac{\Delta P}{Q}$$

Tutti i dati sono noti, quindi:

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{0.01\text{ atm}}{5\text{ cm}^3/\text{s}} = \frac{0.01 \cdot 10^5\text{ Pa}}{5 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s}} = 2 \cdot 10^8\text{ Pa s/m}^3$$

- e) **Quanto vale la viscosità del liquido?**

- la viscosità η è definita come il coefficiente di proporzionalità fra la forza per unità di area che si oppone allo scorrimento (con velocità relativa v_r) di due lamelle di liquido separate da una distanza Δx :

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_r}{\Delta x}$$

- la resistenza idraulica di un tubo cilindrico è legata alle sue dimensioni ed alla viscosità dalla relazione

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

In questo caso la resistenza idraulica e le dimensioni geometriche del tubo sono note, quindi:

$$\eta = \frac{R\pi r^4}{8L}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{R\pi r^4}{8L} &= \frac{2 \cdot 10^8 \text{ Pa s/m}^3 \cdot 3.14 \cdot (0.2 \text{ cm})^4}{8 \cdot 20 \text{ m}} \\ &= \frac{2 \cdot 10^8 \text{ Pa s/m}^3 \cdot 3.14 \cdot (2 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4}{8 \cdot 20 \text{ m}} \\ &= \frac{2 \cdot 10^8 \text{ Pa s/m}^3 \cdot 3.14 \cdot 16 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4}{8 \cdot 20 \text{ m}} = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s} \end{aligned}$$

- 8) In una tubatura orizzontale di raggio pari a 0.3 cm e lunga 50 cm , scorre olio (densità 0.8 g/cm^3 , viscosità $3 \cdot 10^3\text{ Pa s}$).
- Quanto vale la portata massima del tubo, se si vuole che il moto sia laminare?
 - Quale differenza di pressione deve essere applicata agli estremi del tubo per mantenere tale portata?
 - Quanto lavoro deve compiere la pompa su ogni ℓ di olio che lo attraversa?
 - Quale potenza viene assorbita dalla pompa, se il suo rendimento è pari al 60%?

Soluzione:

- a) **Quale è il massimo valore della portata per cui si ha ancora moto laminare?**

• **Portata:**

La portata (volume per unità di tempo) è definita come

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

La portata è anche legata alla velocità media del fluido dalla relazione

$$Q = v \cdot S$$

- **Flusso laminare:** Il moto di un fluido è detto laminare se i filetti di liquido scorrono l'uno sopra l'altro senza mescolarsi.

La transizione fra regime laminare e turbolento avviene tipicamente quando la velocità media nel condotto supera la velocità critica.

Il valore massimo della portata sarà dunque dato dal valore di Q per cui la velocità media raggiunge il valore critico.

$$Q_{max} = Q(v_{crit})$$

Il valore massimo della portata (se si vuole che il moto sia laminare) vale quindi:

$$Q_{max} = v_{crit}S$$

- **Quanto vale la velocità critica?** Il valore della velocità critica in un condotto si raggiunge tipicamente quando il numero di Reynolds vale circa 1000.

– **Come è definito il numero di Reynolds?** Il numero di Reynolds è definito come

$$\mathcal{R} = \frac{vdr}{\eta}$$

quindi

$$v_{crit} = 1000 \frac{\eta}{dr}$$

Quindi

$$Q_{max} = v_{crit}S = 1000 \frac{\eta}{dr} (\pi r^2) = 1000 \frac{\pi \eta r}{d}$$

Numericamente

$$Q_{max} = 1000 \frac{\pi \eta r}{d} = 1000 \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s} \cdot 0.3 \text{ cm}}{0.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 3.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 35 \text{ cm}^3/\text{s}$$

- b) **Calcolare la differenza di pressione ai capi del tubo necessaria per mantenere la portata massima**

La differenza di pressione ai capi del tubo è definita come

$$\Delta P = P_{ingr} - P_{uscita}$$

- la pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

(in quanto definizione è sempre applicabile ma non è utile in questo caso perchè mancano i dati)

- il teorema di Bernoulli (conservazione dell'energia per i liquidi) afferma che

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

applicabile nel caso di fluidi ideali (non viscosi e incomprimibili)

In questo caso si parla esplicitamente di fluido viscoso, e quindi non è applicabile.

- la legge di Poiseuille permette di calcolare la perdita di energia per unità di volume (dovuta alla viscosità) per un liquido che scorre in un tubo circolare, rigido, orizzontale:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q$$

E' certamente applicabile in questo caso e tutti i fdati necessari sono noti.

Per ottenere una portata pari a Q_{max} è necessario che la pompa mantenga fra i due capi del tubo una differenza di pressione pari a:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q_{max}$$

Numericamente

$$\begin{aligned} \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q_{max} &= \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} Pa \cdot 50 cm}{\pi (0.3 cm)^4} 35 cm^3/s \\ &= \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} Pa \cdot 0.5 m}{\pi (3 \cdot 10^{-3} m)^4} 35 (10^{-2} m)^3/s \\ &= \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} Pa \cdot 0.5 m}{\pi 3^4 \cdot 10^{-12} m^4} 35 \cdot 10^{-6} m^3/s = 1.65 \cdot 10^3 Pa \end{aligned}$$

c) **Quanto lavoro deve compiere la pompa su ogni ℓ di olio che la attraversa?**

- Il lavoro è definito come

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

(sempre applicabile)

- Nel caso di un fluido il lavoro compiuto dalle forze di pressione per spostare un volumetto dV è dato da

$$L = P dV$$

(sempre applicabile)

- Il teorema dell'energia cinetica afferma che

$$\Delta E_{cin} = L_{tot}$$

(sempre applicabile)

- Il lavoro delle forze conservative è legato alla variazione di energia potenziale

$$\Delta E_{pot} = -L_{cons}$$

(valido per l'appunto solo per forze conservative: certamente non applicabile per le forze viscosse)

- Nel caso di un moto stazionario (in presenza di attrito o viscosità il lavoro “motore” è uguale al lavoro delle forze di attrito

$$L_{motore} = L_{attrito}$$

(è una diretta conseguenza del principio di conservazione dell'energia ed è quindi sempre applicabile)

Il lavoro compiuto dalla pompa (per mantenere un flusso stazionario) deve essere tale da compensare la perdita di energia del liquido dovuta alla viscosità.

$$L_{pompa} = L_{attrito}$$

- **Quanto vale l'energia persa (per viscosità) da ogni ℓ di olio che attraversa il circuito?**

La legge di Poiseuille calcola la caduta di pressione ai capi del tubo proprio considerando la perdita di energia per unità di volume del liquido, causata dalla viscosità

$$\Delta P = \frac{L_{attrito}}{V}$$

quindi

$$L_{pompa} = \Delta P \cdot V$$

Numericamente

$$L_{pompa} = \Delta P \cdot V = 1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 1 \ell = 1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 10^{-3} m^3 = 1.65 J$$

- d) **Quanto vale la potenza assorbita dalla pompa se il rendimento è pari al 60%.**

- **Potenza:** la potenza è definita come lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

- **Rendimento:** Il rendimento è definito come

$$\epsilon = \frac{P_{utilizzata}}{P_{assorbita}}$$

la $P_{assorbita}$ sarà data da:

$$P_{assorbita} = \frac{P_{utilizzata}}{\epsilon}$$

La potenza utilizzata è data dal lavoro per unità di tempo utilizzato per far circolare il liquido

$$P_{utilizzata} = \frac{L_{pompa}}{\Delta t}$$

Poichè come abbiamo visto il lavoro compiuto dalla pompa è dato da

$$L_{pompa} = \Delta P \cdot V$$

Questo vuol dire che

$$P_{utilizzata} = \Delta P \frac{V}{\Delta t} = \Delta P \cdot Q$$

Quindi la potenza assorbita sarà data da:

$$P_{assorbita} = \frac{P_{utilizzata}}{\epsilon} = \frac{\Delta P \cdot Q}{\epsilon}$$

Numericamente:

$$P_{assorbita} = \frac{\Delta P \cdot Q}{\epsilon} = \frac{1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 35 cm^3/s}{\frac{60}{100}} = \frac{1.65 \cdot 10^3 Pa \cdot 35 \cdot 10^{-6} m^3/s}{\frac{60}{100}} = 9.6 \cdot 10^{-2} W$$

- 9) Un circuito idraulico è costituito da un tubo di diametro 2 mm lungo 2 m (collegato ad una pompa) in cui scorre acqua ($\eta = 10^{-3}\text{ Pa s}$) con una portata di $1\text{ cm}^3/\text{s}$
- Quanto vale la velocità media dell'acqua nel tubo? Il moto è laminare o turbolento?
 - Quanto vale la resistenza idraulica del condotto? Quale differenza di pressione deve essere applicata ai capi del circuito e quale potenza viene erogata dalla pompa?
 - Se ad un certo punto, il tubo viene parzialmente ostruito per un tratto lungo 10 cm , al punto da dimezzarne il diametro per quel tratto, quanto vale la nuova resistenza idraulica del circuito?
 - Di quanto deve aumentare in percentuale la potenza erogata dalla pompa per mantenere costante la portata?

$$\text{Ris.: } v = 31.9\text{ cm/s}; \text{ laminare}; R = 5.1 \cdot 10^9\text{ Pa s/m}^3; \Delta P = 5.2 \cdot 10^3\text{ Pa}; P = 5\text{ mW}; \\ R' = 8.9 \cdot 10^9\text{ Pa s/m}^3; 75\%$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la velocità media dell'acqua nel tubo?**

La velocità media è legata alla portata dalla relazione

$$Q = v_m S$$

quindi:

$$v_m = \frac{Q}{S}$$

la portata è data, la sezione può essere ricavata conoscendo il diametro

- Quanto vale la sezione del tubo?** L'area del cerchio $A = \pi r^2$ quindi

$$S = \frac{1}{4} \pi d^2$$

$$v_m = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Numericamente:

$$v_m = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1\text{ cm}^3/\text{s}}{3.14 \cdot (2\text{ mm})^2} = \frac{4 \cdot 1\text{ cm}^3/\text{s}}{3.14 \cdot (0.2\text{ cm})^2} = 31.85\text{ cm/s}$$

Il moto è laminare o turbolento?

- il moto di un fluido è detto laminare se i filetti di liquido scorrono gli uni sugli altri senza mescolarsi
- la transizione fra moto laminare e turbolento si ha quando la velocità media del liquido supera la velocità critica
- la velocità critica si ha in corrispondenza di valori del numero di Reynolds pari a circa 1000
- il numero di Reynolds è definito come

$$\mathcal{R} = \frac{v_m dr}{\eta}$$

per stabilire se il moto è laminare o turbolento devo calcolare il numero di Reynolds:

$$\mathcal{R} = \frac{v_m dr}{\eta}$$

Numericamente:

$$\mathcal{R} = \frac{v_m dr}{\eta} = \frac{31.85\text{ cm/s} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 1\text{ mm}}{10^{-3}\text{ Pa s}} \\ = \frac{0.3185\text{ m/s} \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 \cdot 10^{-3}\text{ m}}{10^{-3}\text{ Pa s}} = 320$$

il numero di Reynolds è minore di 1000, quindi il moto è laminare.

b) Quanto vale la resistenza idraulica del condotto?

- La resistenza (o impedenza) idraulica è definita come

$$R = \frac{\Delta P}{Q}$$

- Nel caso di flusso laminare in tubi cilindrici rigidi l'impedenza idraulica può essere calcolata e vale

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

in questo caso quindi:

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} = \frac{8 \cdot 10^{-3} Pa s \cdot 2 m}{3.14(1 mm)^4} = \frac{8 \cdot 10^{-3} Pa s \cdot 2 m}{3.14(10^{-3} m)^4} = 5.1 \cdot 10^9 Pa s/m^3$$

Quale differenza di pressione deve essere applicata ai capi del circuito?

In base alla definizione di resistenza idraulica

$$\Delta P = RQ$$

quindi

$$\Delta P = RQ = 5.1 \cdot 10^9 Pa s/m^3 \cdot 1 cm^3/s = 5.1 \cdot 10^9 Pa s/m^3 \cdot 10^{-6} m^3/s = 5.21 \cdot 10^3 Pa$$

Quale potenza viene erogata dalla pompa?

- La potenza erogata è pari all'energia per unità di tempo fornita dalla pompa.
- La differenza di pressione ai capi del circuito è pari all'energia per unità di volume fornita dalla pompa al liquido
- L'energia per unità di tempo sarà quindi pari all'energia fornita per unità di volume moltiplicata per la portata (unità di volume per unità di tempo)

$$P_{erogata} = \Delta P Q$$

Numericamente:

$$P_{erogata} = \Delta P Q = 5.21 \cdot 10^3 Pa \cdot 1 cm^3/s = 5.21 \cdot 10^3 Pa \cdot 10^{-6} m^3/s = 5 mW$$

c) Quanto vale la resistenza idraulica se il tubo viene parzialmente ostruito?

In questo caso si avranno due tratti di tubo: uno lungo $L' = L - \Delta x$ di raggio r , uno lungo Δx di raggio $r' = r/2$

La resistenza idraulica sarà data dalla resistenza idraulica totale dei due tratti di tubo.

- **Quanto vale la resistenza idraulica totale dei due tratti di tubo?** La resistenza idraulica è definita come

$$\Delta P = R \cdot Q$$

Visto che ΔP è l'energia per unità di volume dissipata a causa della viscosità, se il liquido attraversa due tratti di tubo l'energia persa per unità di volume sarà data dalla somma delle energie perse nei due tratti:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = (R_1 + R_2) \cdot Q$$

la nuova resistenza idraulica sarà dunque data da:

$$R' = R_1 + R_2$$

dove

$$R_1 = \frac{8\eta(L - \Delta x)}{\pi r^4} \quad R_2 = \frac{8\eta\Delta x}{\pi(\frac{r}{2})^4}$$

Quindi in questo caso

$$R' = R_1 + R_2 = \frac{8\eta(L - \Delta x)}{\pi r^4} + \frac{8\eta\Delta x}{\pi(\frac{r}{2})^4} = \frac{8\eta}{\pi r^4}(L + 15\Delta x) = R(1 + 15\frac{\Delta x}{L})$$

$$R' = R(1 + 15\frac{\Delta x}{L}) = R(1 + 15\frac{0.1m}{2m}) = R \cdot 1.75 = 8.9 \cdot 10^9 Pa s/m^3$$

d) **Di quanto deve aumentare in percentuale la potenza erogata dalla pompa?**

L'aumento percentuale di potenza richiesto alla pompa è dato da

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \times 100 = \frac{\mathcal{P}' - \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \times 100$$

Come già visto la potenza erogata è legata alla differenza di pressione e alla portata (e di conseguenza alla resistenza idraulica) dalla relazione:

$$\mathcal{P} = \Delta P Q = (RQ)Q = RQ^2$$

quindi

$$\frac{\mathcal{P}' - \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \times 100 = \frac{R' - R}{R} \times 100$$

Numericamente

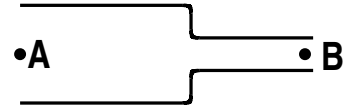
$$\frac{R' - R}{R} \times 100 = \frac{1.75R - R}{R} \times 100 = 75\%$$

10) Un circuito idraulico è costituito da due tubi collegati come in figura in cui scorre acqua con una portata di $5 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Il tubo A (di raggio 1 cm) è lungo 5 m mentre il tubo B (di raggio 2 mm) è lungo 10 m .

Trascurando la viscosità dell'acqua (Bernoulli):

- a) quanto valgono le velocità nei tubi A e B.
- b) quanto vale la differenza di pressione fra l'inizio del tubo A e la fine del tubo B.



Sapendo invece che la viscosità dell'acqua vale 10^{-3} Pa s , calcolare:

- c) la differenza di pressione fra l'inizio del tubo A e la fine del tubo B
- d) il moto è laminare?

Soluzione:

- a) **Quanto valgono v_A e v_B ?**

La velocità media del liquido è legata alla portata dalla relazione

$$V = \frac{Q}{S}$$

La portata nel tubo è nota, la sezione del tubo può essere ricavata dal raggio:

$$S = \pi r^2$$

In questo caso quindi:

$$v_A = \frac{Q}{\pi r_A^2} = \frac{5 \text{ cm}^3/\text{s}}{3.14 (1 \text{ cm})^2} = 1.6 \text{ cm/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{\pi r_B^2} = \frac{5 \text{ cm}^3/\text{s}}{3.14 (2 \text{ mm})^2} = \frac{5 \text{ cm}^3/\text{s}}{3.14 (0.2 \text{ cm})^2} = 40 \text{ cm/s}$$

- b) **Quanto varrebbe $P_A - P_B$ trascurando la viscosità dell'acqua?**

Se posso ignorare la viscosità dell'acqua (ossia la dissipazione di energia), posso utilizzare Bernoulli (cons. energia per unità di volume)

$$\frac{E}{V} = P + dgh + \frac{1}{2}dv^2 = \text{cost}$$

L'energia per unità di volume in A deve essere uguale all'energia per unità di volume in B quindi

$$P_A + dgh_A + \frac{1}{2}dv_A^2 = P_B + dgh_B + \frac{1}{2}dv_B^2$$

da cui in base ai dati del problema

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}d(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \left((0.4 \text{ m/s})^2 - (0.016 \text{ m/s})^2 \right) = 80 \text{ Pa}$$

La pressione in B è leggermente diminuita perchè è aumentata l'energia cinetica per unità di volume.

- c) **Quanto vale $P_A - P_B$ se la viscosità dell'acqua vale 10^{-3} Pa s ?**

Se la viscosità non è trascurabile devo considerare che l'energia per unità di volume non si conserva, ma che c'è una dissipazione

$$\frac{E_{in}}{V} = \frac{E_{fin}}{V} + \frac{E_{diss}}{V}$$

Sostituendo l'espressione dell'energia per unità di volume nei punti A e B si ottiene, nel caso che l'acqua scorra da A verso B

$$P_A + dgh_A + \frac{1}{2}dv_A^2 = P_B + dgh_B + \frac{1}{2}dv_B^2 + \frac{E_{diss}}{V}$$

cioè

$$P_A - P_B = 80 Pa + \frac{E_{diss}}{V}$$

(Se invece l'acqua scorresse da B verso A la risposta giusta è $P_A - P_B = 80 Pa - \frac{E_{diss}}{V}$)

• **Quanto vale l'energia dissipata per unità di volume?**

Per i tubi cilindrici rigidi la perdita di energia per unità di volume si può calcolare come (legge di Poiseuille)

$$\frac{E_{diss}}{V} = RQ = Q(R_1 + R_2) = Q \left[\frac{8\eta L_1}{\pi r_1^4} + \frac{8\eta L_2}{\pi r_2^4} \right]$$

Numericamente

$$\frac{E_{diss}}{V} = 5 \text{ cm}^3/\text{s} \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}}{3.14} \left[\frac{5 \text{ m}}{(1 \text{ cm})^4} + \frac{10 \text{ m}}{(2 \text{ mm})^4} \right] 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}}{3.14} \left[\frac{5 \text{ m}}{10^{-8} \text{ m}^4} + \frac{10 \text{ m}}{16 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \right]$$

Quindi in definitiva la caduta di pressione fra A e B tenendo conto della viscosità dell'acqua è

$$P_A - P_B = 80 Pa + \frac{E_{diss}}{V} = 880 Pa$$

(se l'acqua scorresse da B verso A il risultato sarebbe $P_A - P_B = -720 Pa$)

La caduta di pressione dovuta alla dissipazione di energia è molto maggiore di quella dovuta alla sua conversione in energia cinetica.

d) **Il moto è laminare?**

Per stabilire se il moto è laminare devo calcolare il numero di Reynolds e verificare se sia sempre (cioè in ogni tratto del circuito idraulico) minore di $1000 \div 1200$

• **Come è definito il numero di Reynolds?**

$$\mathcal{R} = \frac{vdr}{\eta}$$

Nel tratto largo $v = v_A$; $r = r_A$ quindi

$$\mathcal{R}_A = \frac{v_A dr_A}{\eta} = \frac{1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m/s } 10^3 \text{ kg/m}^3 0.01 \text{ m}}{10^{-3} \text{ Pa s}} = 160$$

nel tratto più stretto $v = v_B$; $r = r_B$

$$\mathcal{R}_B = \frac{v_B dr_B}{\eta} = \frac{0.4 \text{ m/s } 10^3 \text{ kg/m}^3 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10^{-3} \text{ Pa s}} = 800$$

risulta laminare in entrambi i casi.

Termodinamica

1) In un recipiente di volume $V = 20 \ell$ sono contenute 0.5 moli di N_2 (PM=28) alla temperatura di $27^\circ C$.

- a) Quanto vale la densità dell'azoto all'interno del recipiente?
- b) Quanto vale la pressione all'interno del recipiente?
- c) Quanto valgono l'energia media traslazionale e la velocità media delle molecole?
- d) Quanto valgono l'energia totale di una singola molecola e l'energia interna del gas?

(Si consideri l'azoto un gas perfetto)

$$\text{Ris.: } d = 0.7 \text{ kg/m}^3; \quad P = 0.615 \text{ atm}; \quad E_{tr} = 6.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}; \quad v = 520 \text{ m/s}; \quad E_{tot} = 1.03 \cdot 10^{-20} \text{ J}; \\ U = 3.1 \text{ kJ}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la densità dell'azoto nel recipiente?**

La densità è definita come

$$d = \frac{m}{V}$$

- **Quanto vale la massa dell'azoto nel recipiente?**

La massa è legata al numero di moli dalla definizione di peso molecolare:

$$m = n PM$$

quindi

$$d = \frac{n PM}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 28 \text{ g/mole}}{20 \ell} = 0.7 \text{ g/l} = 0.7 \text{ kg/m}^3$$

- b) **Quanto vale la pressione all'interno del recipiente?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- nel caso dei gas perfetti vale la relazione

$$PV = nRT$$

quindi

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Numericamente:

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/moli K} \cdot 300 \text{ K}}{20 \ell} = 0.615 \text{ atm}$$

- c) **Quanto valgono l'energia media traslazionale e la velocità media delle molecole?**

L'energia media traslazionale di una molecola è definita come

$$E_{tr} = \frac{1}{2} m v_m^2$$

la teoria cinetica dei gas afferma che la temperatura è legata all'energia cinetica traslazionale media delle molecole dalla relazione

$$\frac{3}{2} kT = E_{tr}$$

dove

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.31 \text{ J/mole K}}{6 \cdot 10^{23} \text{ particelle/mole}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

è detta costante di Boltzmann. quindi

$$E_{tr} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} J/K \cdot 300 K = 6.2 \cdot 10^{-21} J$$

La velocità di traslazione media delle molecole è data da

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tr}}{m}}$$

e la massa di ciascuna molecola può essere ricavata dal peso molecolare

$$m = \frac{PM}{N_A}$$

quindi (ricordando l'espressione di E_{tr} e la definizione di k)

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tr}N_A}{PM}} = \sqrt{\frac{3RT}{PM}}$$

Numericamente:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{PM}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 J/mole K \cdot 300 K}{28 g/mole}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 J/mole K \cdot 300 K}{28 \cdot 10^{-3} kg/mole}} = 520 m/s$$

d) **Quanto valgono l'energia totale di una singola molecola e l'energia interna del gas?**

L'energia totale di una singola molecola è data dalla traslazione, rotazionale, vibrazionale e potenziale.

Nel caso dei gas perfetti l'energia potenziale (o di legame) è nulla.

Ognuno dei "gradi di libertà" di una molecola ha in media energia pari a

$$E = \frac{1}{2}kT$$

Nel caso di una molecola biatomica oltre ai tr gradi di libertà di traslazione (corrispondenti all'energia cinetica traslazionale) si hanno altri due gradi di libertà:

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT$$

quindi

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT = 1.03 \cdot 10^{-20} J$$

L'energia interna del gas è data dalla somma delle energia delle singole molecole:

$$U = \sum_i E_{tot} = N E_{tot}$$

Il numero totale di molecole si può ricavare a partire dal numero di moli:

$$N = n N_A$$

quindi (ricordando la definizione di k)

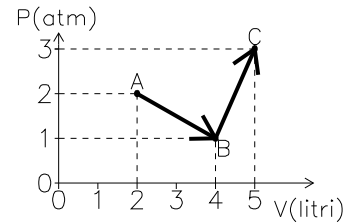
$$U = N E_{tot} = n N_A \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}nRT$$

numericamente:

$$U = \frac{5}{2}nRT = 3.1 kJ$$

2) 0.2 moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione indicata in figura. Calcolare:

- a) le temperature T_A , T_B e T_C
- b) la variazione complessiva di energia interna nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$
- c) il lavoro totale compiuto $L_{A \rightarrow C}$
- d) il calore complessivamente assorbito (con il relativo segno)



Ris.: $T_A = T_B = 244 K, T_C = 915 K; \Delta U = 1670 J, L = 500 J; Q = 2170 J$

Soluzione:

a) **Quanto valgono le temperature T_A , T_B e T_C ?**

Si tratta di un gas perfetto, per cui deve valere la legge dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

da cui

$$T = \frac{PV}{nR}$$

per calcolare T ho quindi bisogno di conoscere il numero di moli (n) la pressione (P) ed il volume (V).

I valori di pressione non vengono dati in forma numerica ma devono essere ricavati dal grafico: Utilizzando i dati della tabella:

	P [atm]	V [ℓ]
A	2	2
B	1	4
A	3	5

$$T_A = \frac{PV}{nR} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 2 \ell}{0.02 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 244 K$$

$$T_B = \frac{PV}{nR} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 4 \ell}{0.02 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 244 K$$

$$T_C = \frac{PV}{nR} = \frac{3 \text{ atm} \cdot 5 \ell}{0.02 \text{ mol} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 915 K$$

b) **Quanto vale la variazione di energia interna nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$**

La variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

dove U (energia interna) è una funzione di stato che dipende soltanto dalla temperatura.

- L'energia interna è definita come la somma delle energie cinetiche e potenziali delle molecole.
- la variazione di energia interna è legata al calore e al lavoro dal primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q_{ass} - \mathcal{L}_{gas} = Q_{ass} + L_{est}$$

- la variazione di energia interna è legata al calore specifico a volume costante dalla relazione

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

Tutte queste relazioni sono applicabili (cioè valide) nel caso in questione.

Verifichiamo se sono utilizzabili in pratica:

- per utilizzare la definizione di energia interna devo ricorrere al modello corpuscolare del gas perfetto:

Nel caso di un gas perfetto l'energia potenziale è zero, quindi devo calcolare la variazione di energia cinetica delle molecole.

$$\Delta U = \Delta E_{cin} \cdot N_{molecole}$$

L'energia cinetica media di una molecola vale

$$E_{cin} = \frac{\nu}{2} kT$$

dove T è la temperatura, $k = \frac{R}{N_A}$ è la costante di Boltzmann e ν è il numero di gradi di libertà che vale 3 per gas monoatomici e 5 per gas biatomici.

$$\Delta U = \Delta E_{cin} \cdot N_{molecole} = \frac{\nu}{2} \frac{R}{N_A} \Delta T \cdot N_{molecole} = \frac{\nu}{2} R \frac{N_{molecole}}{N_A} \Delta T = \frac{\nu}{2} R n \Delta T$$

In questo caso il gas è monoatomico quindi $\nu = 3$

$$\Delta U = \frac{\nu}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} 0.02 \text{ moli} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (915 - 244) \text{ K} = 1670 \text{ J}$$

- per utilizzare il primo principio della termodinamica devo conoscere il lavoro e il calore scambiato. Mentre il lavoro compiuto dal gas posso in qualche modo ricavarlo dal grafico $P(V)$, non saprei come calcolare il calore assorbito in una trasformazione in cui cambiano sia P che V . Quindi il primo principio (ancorché valido) in questo caso non è utile in pratica.
- per calcolare la variazione di energia interna devo conoscere il calore specifico a volume costante del gas.

– **Quanto vale il calore specifico a volume costante di un gas perfetto**

In base alla teoria cinetica dei gas i calori specifici molari dei gas perfetti valgono:

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{3}{2} R & (\text{monoatomici}) \\ c_v &= \frac{5}{2} R & (\text{biatomici}) \\ c_p &= c_v + R \end{aligned}$$

in questo caso il gas è monoatomico quindi

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

quindi

$$\Delta U = n c_v \Delta T = n \frac{3}{2} R \Delta T$$

Numericamente:

$$\Delta U = n \frac{3}{2} R \Delta T = 0.02 \text{ moli} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (915 - 244) \text{ K} = 1670 \text{ J}$$

c) **Quanto vale il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$?**

Il lavoro compiuto da un gas è definito come

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_A^C P dV$$

L'integrale di una funzione è dato dall'area al di sotto della curva. Avendo il grafico di $P(V)$ posso calcolare l'integrale graficamente scomponendola ad esempio in un rettangolo (base da 2 a 5 ℓ e altezza da 0 a 1 atm) e due triangoli (il primo con base da 2 a 4 ℓ e altezza da 1 a 2 atm; il secondo con base da 4 a 5 ℓ e altezza da 1 a 3 atm)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A \rightarrow B \rightarrow C} &= (5 - 2) \ell \cdot (1 - 0) \text{ atm} + \frac{1}{2} (4 - 2) \ell \cdot (2 - 1) \text{ atm} + \frac{1}{2} (5 - 1) \ell \cdot (3 - 1) \text{ atm} \\ &= 5 \text{ latm} = 5 \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 500 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto dal gas è positivo (il volume è aumentato)

- d) **Quanto vale il calore complessivamente assorbito nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$**
La quantità di calore assorbito (o ceduto) da un corpo può essere determinata in vari modi: utilizzando i calori specifici, conoscendo le leggi che determinano lo scambio di calore in casi particolari (ad esempio l'irraggiamento) o facendo ricorso al primo principio della termodinamica. In questo caso non posso utilizzare i calori specifici a pressione o volume costante, perchè dal grafico osservo che durante la trasformazione P e V variano contemporaneamente. Il primo principio della termodinamica afferma che in una qualsiasi trasformazione

$$\Delta U = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

E' una relazione sempre applicabile, ed in questo caso ho anche i dati necessari per applicarla.

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}_{gas} = 1670 J + 500 J = 2170 J$$

- 3) 3 ℓ di elio alla pressione di 15 atm si trovano alla temperatura iniziale di 549 K. Il gas viene fatto espandere a pressione costante fino al volume di 6 ℓ e successivamente raffreddato a volume costante fino a tornare al valore iniziale di temperatura.
- Quanto vale la pressione finale?
 - Descrivere la trasformazione sopra indicata nel piano PV.
 - Quanto vale la variazione totale di energia interna del gas nell'intera trasformazione?
 - Quanto lavoro è stato compiuto in totale dal gas?
 - Il gas ha ceduto o assorbito calore? Calcolare la quantità di calore scambiata nella trasformazione.

Ris.: $P_{fin} = 7.5 \text{ atm}$; $\Delta U = 0$; $\mathcal{L}_{gas} = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J}$; $Q_{assorbito} = 1.08 \cdot 10^3 \text{ cal}$

Soluzione:

- a) Quanto vale la pressione finale?

- La legge dei gas perfetti afferma che

$$PV = nRT$$

in questo caso quindi

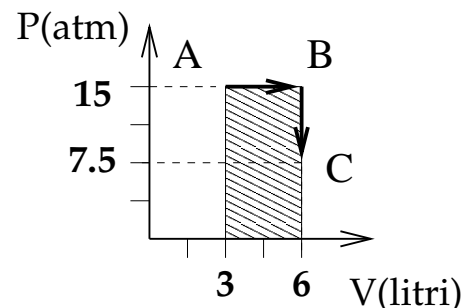
$$P_{fin} = \frac{nRT_{fin}}{V_{fin}}$$

Numericamente:

$$P_{fin} = \frac{nRT_{fin}}{V_{fin}} = \frac{1 \text{ mole} \cdot 0.082 \text{ ℓ atm/moli K} \cdot 549 \text{ K}}{6 \text{ ℓ}} = 7.5 \text{ atm}$$

- b) Costruire il grafico P(V) della trasformazione. Costruisco la tabella e riporto i valori nel grafico:

P(atm)	V [ℓ]
15	3
15	6
7.5	6



- c) Quanto vale la variazione di energia interna nell'intera trasformazione?

La variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

- Il primo principio della termodinamica afferma che

$$\Delta U = Q + L_{est} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

Q e \mathcal{L}_{gas} devono essere calcolate.

- L'energia interna è una funzione di stato che dipende solo dalla temperatura e dallo stato di aggregazione.
- Se non ci sono cambiamenti di stato

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

In questo caso non ci sono cambiamenti di stato e $T_{fin} = T_{in}$, quindi

$$\Delta U = 0$$

d) **Quanto lavoro è stato compiuto dal gas nell'intera trasformazione?**

Il lavoro compiuto da un gas durante una trasformazione è dato da

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV$$

- In questo caso la trasformazione procede in due fasi, prima a pressione costante e poi a volume costante.

Durante la trasformazione a pressione costante

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV = P_{in} \Delta V$$

Durante la trasformazione a volume costante

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV = 0$$

- L'integrale può essere calcolato dal grafico $P(V)$ come area sottesa alla curva che rappresenta la trasformazione, ossia del rettangolo tratteggiato in figura

$$\mathcal{L}_{gas} = (base) \times (altezza) = (V_{fin} - V_{in}) P_{in}$$

Numericamente:

$$\mathcal{L}_{gas} = P_{in} \Delta V = 15 \text{ atm} \cdot 3 \ell = 15(10^5 \text{ Pa}) \cdot 3(10^{-3} \text{ m}^3) = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

e) **Il gas ha ceduto o assorbito calore? Calcolare il calore scambiato.**

Dato che il volume è aumentato (quindi il gas ha compiuto lavoro) e la temperatura è rimasta costante il gas deve aver assorbito calore.

- Il primo principio della termodinamica afferma che

$$\Delta U = Q + L_{est} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

in questo caso $\Delta U = 0$ quindi

$$Q = \mathcal{L}_{gas} = P_{in} \Delta V$$

- La trasformazione procede prima a pressione costante e poi a volume costante. Il calore scambiato nell'intera trasformazione sarà quindi dato da

$$Q = Q_{P_{cost}} + Q_{V_{cost}}$$

- **Quanto vale il calore scambiato nella trasformazione a P_{cost} ?**

Per un gas perfetto il calore scambiato in una trasformazione a P_{cost} è dato da

$$Q_{P_{cost}} = n c_p \Delta T = n c_p (T_A - T_{in})$$

dove T_A è la temperatura raggiunta la termine della trasformazione a P_{cost}

- **Quanto vale il calore scambiato nella trasformazione a V_{cost} ?**

Per un gas perfetto il calore scambiato in una trasformazione a V_{cost} è dato da

$$Q_{V_{cost}} = n c_v \Delta T = n c_v (T_{fin} - T_A)$$

Quindi

$$Q = Q_{P_{cost}} + Q_{V_{cost}} = n c_p (T_A - T_{in}) + n c_v (T_{fin} - T_A)$$

Visto che $T_{in} = T_{fin}$

$$Q = n c_p (T_A - T_{in}) + n c_v (T_{fin} - T_A) = n (c_p - c_v) (T_A - T_{in})$$

ma $c_p - c_v = R$ e inoltre $T_A = \frac{P_{in} V_{fin}}{nR}$ e $T_{in} = \frac{P_{in} V_{in}}{nR}$:

$$Q = nR \frac{P_{in} V_{fin} - P_{in} V_{in}}{nR} = P_{in} \Delta V$$

Numericamente quindi:

$$Q = P_{in} \Delta V = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J} = 1.08 \cdot 10^3 \text{ cal}$$

- 4) Due grammi di azoto (N_2 ; P.M.=28) alla temperatura iniziale di $0^\circ C$ sono posti in un contenitore di volume pari a 2ℓ , dotato di una valvola che si apre quando la pressione interna raggiunge 1.5 atm .
- Quanto vale la pressione iniziale del gas?
 - Quanto vale la temperatura del gas quando la valvola si apre?
 - Quanto calore è stato fornito al gas per raggiungere tale temperatura?

$$\text{Ris.: } P_{in} = 0.8\text{ atm}; \quad T = 512\text{ K}; \quad Q = 85\text{ cal}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la pressione iniziale del gas?**

La pressione iniziale del gas è legata al volume e alla temperatura dalla legge dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

per utilizzarla devo conoscere il numero di moli di gas

- Quanto vale in numero di moli?** Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{molecole}}{N_{Avog}}$$

il numero di moli è legato alla massa dalla relazione

$$n = \frac{m}{P.M.}$$

in questo caso quindi:

$$n = \frac{m}{P.M.} = \frac{2\text{ g}}{28\text{ g/mole}} = 0.07\text{ moli}$$

quindi la pressione iniziale vale

$$P_{in} = \frac{nRT_{in}}{V}$$

numericamente

$$P_{in} = \frac{nRT_{in}}{V} = \frac{0.07\text{ moli} \cdot 0.082\text{ l atm/moli K} \cdot 273\text{ K}}{2\text{ l}} = 0.8\text{ atm}$$

- b) **Quanto vale la temperatura del gas quando la valvola si apre?**

La temperatura del gas nel momento in cui si apre la valvola è legata al volume e alla pressione del gas tramite la legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

La pressione interna (nel momento in cui la valvola si apre) è 1.5 atm mentre volume e numero di moli rimangono costanti:

$$T_{fin} = \frac{P_{fin}V}{nR}$$

Numericamente

$$T_{fin} = \frac{P_{fin}V}{nR} = \frac{1.5\text{ atm} \cdot 2\text{ l}}{0.07\text{ moli} \cdot 0.082\text{ l atm/moli K}} = 522.6\text{ K}$$

- c) **Quanto calore è stato fornito al gas?** La quantità di calore fornita al gas è legata alla differenza di temperatura dalla relazione:

$$Q = nC_{sp}\Delta T$$

- **Quanto vale il calore specifico del gas?**

I calori specifici sono diversi nel caso di trasformazioni a volume costante o a pressione costante. In questo caso nella trasformazione si mantiene costante il volume.

La teoria cinetica dei gas permette di ricavare il calore specifico molare di gas perfetti.

Il calore specifico molare a volume costante nel caso di un gas perfetto vale:

$$c_v = \frac{\nu}{2}R$$

dove ν è il numero di gradi di libertà della molecola (vale 3 per gas monoatomici e 5 per gas biatomici)

In questo caso l'azoto è una molecola biatomica, quindi

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

La quantità di calore assorbita dal gas è data quindi da:

$$Q = nc_v\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T$$

Numericamente:

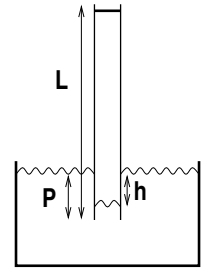
$$Q = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2} \cdot 0.07 \text{ moli} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (522.6 \text{ K} - 273 \text{ K}) = 363 \text{ J} = 86.9 \text{ cal}$$

- 5) Un tubo di sezione 2 dm^2 , alto 1 m è chiuso superiormente da un pistone a tenuta perfettamente scorrevole e di massa trascurabile, mentre l'estremo inferiore è aperto e pesca per 10 cm in una vasca piena d'acqua. Il sistema si trova a 37°C .

All'inizio il pistone si trova all'estremità superiore del tubo ed il livello dell'acqua del tubo è uguale a quello dell'acqua nel recipiente.

- a) Quanto vale il volume occupato dall'aria ed il numero di moli di aria contenute nel tubo?

Se ad un certo punto si mette un peso sopra il pistone, questo si abbassa e anche l'acqua nel tubo scende nel tubo (vedi figura) fino ad una profondità di 8 cm al di sotto del pelo libero dell'acqua nel recipiente.



- b) Quanto vale la pressione assoluta esercitata dal gas?
 c) Quanto vale in queste condizioni il volume occupato dal gas (la temperatura rimane costante)?
 d) Quanto vale la variazione di energia interna del gas?

$$\text{Ris.: } V = 18\ell; \quad n = 0.71\text{ moli}; \quad P = 1.021 \cdot 10^5\text{ Pa}; \quad V_{fin} = 17.86\ell; \quad \Delta U = 0$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale il volume inizialmente occupato dall'aria?**

In base al disegno e al testo inizialmente l'aria occupa tutto il volume del tubo che si trova al di sopra del livello dell'acqua

$$V = \Delta H \cdot S = (L - P) \cdot S$$

Numericamente:

$$V = (L - P) \cdot S = (1\text{ m} - 10\text{ cm}) \cdot 2\text{ dm}^2 = 0.9\text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}^2 = 18\ell$$

- b) **Quante moli sono contenute nel tubo?**

- Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{molecole}}{N_{Av}}$$

- Il numero di moli è legato alla massa di sostanza dalla relazione:

$$m = n \cdot P.M.$$

- Nel caso di un gas perfetto il numero di moli è legato a pressione, volume e temperatura dalla legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

Per poter applicare la legge dei gas perfetti è necessario conoscere la pressione del gas.

- **Quanto vale la pressione dell'aria nel tubo?** La pressione del gas è uguale alla pressione alla superficie dell'acqua che si trova all'interno del tubo.

- * **Quanto vale la pressione sulla superficie dell'acqua?** L'acqua all'interno del tubo è ferma e in comunicazione con l'acqua nel recipiente, su cui agisce la pressione atmosferica.

Se il livello è lo stesso, vuol dire che la pressione che agisce sulla superficie del liquido all'interno del tubo è uguale a quella che agisce sulla superficie del liquido nel recipiente.

$$P_{gas} = P_{atm}$$

Quindi applicando la legge dei gas perfetti

$$n = \frac{PV}{RT}$$

Numericamente:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 18 \ell}{0.082 \ell \text{ atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} = 0.71 \text{ moli}$$

c) **Quanto vale la pressione finale del gas dopo aver posto il peso sul pistone?**

Dopo aver posto un peso sul pistone il livello dell'acqua nel tubo si è abbassato di 8 cm rispetto al livello dell'acqua nel recipiente.

Se il liquido è in equilibrio, vuol dire che la pressione esercitata sulla superficie dell'acqua dall'aria entro il tubo è uguale a quella esercitata dal gas

$$P_{liq} = P_{tubo}$$

• **Quanto vale la pressione assoluta sulla superficie del liquido entro il tubo?**

L'acqua all'interno del tubo è ferma e in comunicazione con l'acqua nel recipiente, su cui agisce la pressione atmosferica.

– La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

– per un liquido ideale può essere applicato il teorema di Bernoulli

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

dato che in questo caso il liquido è fermo la pressione sul pelo dell'acqua nel recipiente e dentro il tubo saranno legate dalla relazione:

$$P_{rec} + dgh_{rec} = P_{tubo} + dgh_{tubo}$$

$$P_{tubo} = P_{atm} + dg(h_{tubo} - h_{rec}) = P_{atm} + dg\Delta h$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} P_{tubo} &= P_{atm} + dg\Delta h = 1 \text{ atm} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ cm} \\ &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.08 \text{ m} = 1.021 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

d) **Quanto vale il volume finale del gas?**

• Il volume è legato alla lunghezza del tubo piena di gas:

$$V_{fin} = \Delta H' \cdot S$$

ma in questo caso non si sa di quanto si sia abbassato il pistone

• Il volume è legato alla pressione e alla temperatura dalla legge di gas perfetti:

$$PV = nRT$$

la temperatura del gas è rimasta costante e il nuovo valore di pressione è stato appena calcolato

quindi

$$V_{fin} = \frac{nRT}{P_{tubo}} = \frac{0.71 \cdot 8.31 \text{ J/mole K} \cdot 310 \text{ K}}{1.021 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 1.79 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 17.9 \ell$$

e) **Quanto vale la variazione di energia interna?**

- L'energia interna è definita come la somma delle energie cinetiche e potenziali delle molecole
- L'energia interna è una funzione di stato che dipende solo dalla temperatura e dallo stato di aggregazione

In questo caso la temperatura non cambia e non ci sono cambiamenti di stato: l'energia interna non cambia:

$$\Delta U = 0$$

- 6) In un cilindro verticale, chiuso superiormente da un pistone scorrevole è contenuto vapor d'acqua saturo (essendo presente sul fondo una piccola quantità di liquido). Inizialmente il volume del recipiente è pari a 50ℓ , la temperatura è di $37^\circ C$ e la pressione è pari a 47 mmHg

Successivamente il pistone viene alzato, mantenendo la temperatura costante, fino al volume di 100ℓ .

- Anche la pressione e la densità del gas si mantengono costanti. Sapete spiegarne il motivo?
- Si calcolino il valore della massa di acqua passata allo stato aeriforme (supponendo valida la legge dei gas perfetti).
- Si calcolino infine il valore del calore assorbito dal sistema ($\lambda_{ev} = 540\text{ cal/gr}$), il lavoro fatto sul sistema, la variazione di energia interna del sistema, precisando il segno di ciascuna di tali quantità)

$$\text{Ris.: } m = 2.2\text{ g}; \quad Q = 1200\text{ cal}; \quad L_{est} = -\mathcal{L}_{gas} = -310\text{ J}; \quad \Delta U = 4.7\text{ kJ}$$

Soluzione:

- a) **Perchè la pressione e la densità del gas si mantengono costanti?**

• **Pressione ?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- Nel caso dei gas perfetti

$$P = \frac{nRT}{V}$$

in questo caso il gas è vapor d'acqua saturo quindi non sarebbe appropriato applicare la legge dei gas perfetti

- La pressione di vapor saturo è il valore di pressione che si stabilisce all'equilibrio in un sistema chiuso in cui siano presenti liquido e vapore.

La pressione di vapor saturo dipende solo dalla temperatura.

All'equilibrio la pressione di vapor d'acqua sarà sempre uguale a quella di vapor saturo fintanto che rimane sul fondo un pó d'acqua. Se la temperatura non cambia anche la pressione di vapor saturo rimane costante.

- **Densità?** La densità del gas è definita

$$d = \frac{m}{V} = \frac{n}{V} PM$$

se la pressione e la temperatura rimangono costanti, rimarrà costante anche n/V

- b) **Calcolare la massa d'acqua passata allo stato aeriforme**

La massa d'acqua passata allo stato aeriforme è data dalla differenza fra la massa allo stato aeriforme prima e dopo l'espansione.

$$M_{ev} = M_{fin} - M_{in}$$

- **Quanto vale la massa d'acqua presente nel recipiente?**

- La massa d'acqua allo stato aeriforme è legata alla densità dalla relazione:

$$M = d_{vap} V$$

dovrei però conoscere la densità del vapor d'acqua.

- La massa d'acqua è ovviamente legata al numero di moli presenti allo stato aeriforme dalla relazione

$$M = n \cdot P.M.$$

- * **Quanto vale il numero di moli di vapor d'acqua?** Il testo suggerisce esplicitamente di usare le relazioni dei gas perfetti.

Per un gas perfetto

$$n = \frac{PV}{RT}$$

La massa d'acqua sotto forma di vapore vale quindi

$$M = \frac{PV}{RT} \cdot PM$$

La massa d'acqua evaporata sarà data quindi da

$$M_{ev} = M_{fin} - M_{in} = \left(\frac{P_{fin}V_{fin}}{RT_{fin}} - \frac{P_{in}V_{in}}{RT_{in}} \right) PM = \frac{P}{RT} (V_{fin} - V_{in}) PM$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} M_{ev} = \frac{P}{RT} (V_{fin} - V_{in}) PM &= \frac{47 \text{ mmHg}}{0.082 \text{ l atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} (100 \text{ l} - 50 \text{ l}) 18 \text{ g/mole} \\ &= \frac{47 \left(\frac{1}{760} \text{ atm} \right)}{0.082 \text{ l atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} 50 \text{ l} 18 \text{ g/mole} = 2.2 \text{ g} \end{aligned}$$

- c) **Quanto vale il calore assorbito dal sistema?** Il calore è l'energia interna trasferita da un corpo all'altro

- il calore assorbito è legato alla variazione di energia interna

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}_{sist}$$

- Il calore assorbito da un corpo se non ci sono cambiamenti di stato è legato al suo aumento di temperatura da

$$Q = mc_{sp} \Delta T$$

ma in questo caso la temperatura rimane costante e l'acqua evapora

- in un cambiamento di stato il calore assorbito è legato alla massa che effettua la transizione di stato:

$$Q = \lambda m_{trans}$$

La massa d'acqua evaporata è stata calcolata ed il calore latente di evaporazione dell'acqua è dato dal problema

Numericamente quindi

$$Q = \lambda M_{ev} = 540 \text{ cal/g} \cdot 2.2 \text{ g} = 1200 \text{ cal}$$

Quanto vale il lavoro compiuto sul sistema?

Il lavoro compiuto sul sistema dall'esterno è uguale e contrario al lavoro compiuto dal sistema.

$$L_{esterno} = -\mathcal{L}_{sist}$$

Il lavoro compiuto dal sistema è quello che il gas ha compiuto nella sua espansione:

$$\mathcal{L}_{sist} = \mathcal{L}_{gas} = \int P dV$$

Dato che la trasformazione è una trasformazione a pressione costante quindi

$$\mathcal{L}_{gas} = P \Delta V$$

Numericamente

$$\mathcal{L}_{gas} = P \Delta V = 47 \text{ mmHg} \cdot 50 \text{ l} = 47(133 \text{ Pa}) \cdot 50(10^{-3} \text{ m}^3) = 310 \text{ J}$$

quindi il lavoro compiuto dall'esterno sul sistema è pari a

$$L_{esterno} = -\mathcal{L}_{gas} = -310 \text{ J}$$

Quanto vale la variazione di energia interna?

- la variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

- La variazione di energia interna può essere calcolata dal primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q + L_{esterno} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

In questo caso sia Q che L (o \mathcal{L}) sono noti

Numericamente:

$$\Delta U = Q + L_{esterno} = 1200 \text{ cal} - 310 \text{ J} = 1200 \cdot (4.18 \text{ J}) - 310 \text{ J} = 4700 \text{ J}$$

Diffusione e membrane

- 1) Calcolare il flusso avvevativo di soluto in un tubicino di sezione 0.1 mm^2 in cui scorrono 0.2 ml al minuto di soluzione 0.02 molare .

$$\text{Ris.: } J_s = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{ moli/cm}^2\text{s}$$

Soluzione:

- **Quanto vale il flusso avvevativo di soluto?**

– **Flusso di soluto** Il flusso di soluto è definito come

$$J_s = \frac{\delta n_s}{A \Delta t}$$

– **Flusso avvevativo:** Il flusso è detto avvevativo quando è dovuto ad un moto di insieme della soluzione.

Per calcolare il flusso avvevativo attraverso il tubicino, devo calcolare il numero di moli di soluto per unità di tempo che passano attraverso una sezione del tubicino trasportate dal moto di insieme della soluzione.

Il numero di moli di soluto trasportate dalla soluzione è direttamente proporzionale al volume della soluzione che passa nel tubo:

$$\delta n_s = C_s \cdot \Delta V$$

e usando la definizione di flusso otterrei:

$$J_s = \frac{C_s \cdot \Delta V}{A \Delta t}$$

- **Quanto vale il volume di soluzione che passa nel tubicino?**

Il volume della soluzione che passa nel tubicino è dato da:

$$\Delta V = Q \Delta t$$

si ottiene quindi:

$$J_s = C_s \frac{Q}{A}$$

o anche (ricordando che velocità media del liquido è data da $v = \frac{Q}{A}$)

$$J_s = C_s v$$

Numericamente

$$\begin{aligned} J_s = C_s \frac{Q}{A} &= 0.02 \text{ moli/l} \frac{0.2 \text{ ml/min}}{0.1 \text{ mm}^2} \\ &= 0.02 \frac{\text{moli}}{10^3 \text{ cm}^3} \frac{0.2 \cdot 10^{-3} \frac{10^3 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}}}{0.1 (0.1 \text{ cm})^2} = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{ moli/cm}^2\text{s} \end{aligned}$$

- 2) Due recipienti molto grandi sono separati fra di loro da un tubicino lungo 5 cm di sezione pari a 1 mm². Nel recipiente di destra si trova una concentrazione 10⁻² molare, mentre a sinistra si trova una concentrazione 10⁻³ molare, ed il liquido nei due recipienti è fermo.
- Quanto vale la differenza di concentrazione?
 - Il flusso è di tipo avvevativo o diffusivo? In quale direzione andrà il flusso di soluto?
 - Quanto vale il flusso di soluto se il coefficiente di diffusione vale $D = 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la differenza di concentrazione?**

La differenza di concentrazione è definita come

$$\Delta C = C_2 - C_1$$

Quindi nel nostro caso

$$\Delta C = C_{destra} - C_{sinistra} = (10^{-2} - 10^{-3}) \text{ mol/l} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$$

- b) **Il flusso è avvevativo o diffusivo?** Il flusso di soluto è definito come:

$$J_s = \frac{\delta n_s}{A \Delta t}$$

(δn_s sta ad indicare le moli di soluto che passano)

• **Flusso avvevativo?**

Il flusso avvevativo si ha quando la soluzione è in movimento e il moto della soluzione trasporta con se le molecole di soluto:

$$J_s^{avv} = C_s v$$

- **Flusso diffusivo?** Il flusso diffusivo è quello che si ha in presenza di una differenza di concentrazione, dalle zone a concentrazione maggiore verso quelle di concentrazione minore, dovuto all'agitazione termica delle molecole.

$$J_s^{diff} = -D \frac{dC}{dx}$$

Il flusso diffusivo è sempre presente se ci sono differenze di concentrazione ma è in generale trascurabile rispetto a quello avvevativo. Diventa importante solo se il liquido è fermo (e quindi il flusso avvevativo è nullo)

Nel nostro caso il testo specifica che il liquido è fermo, quindi il moto è di tipo diffusivo.

Quale è la direzione del flusso?

Avendo stabilito che il flusso è di tipo diffusivo (che come abbiamo detto va da concentrazione maggiore a minore) bisogna stabilire se la concentrazione maggiore è a destra o a sinistra.

$$C_d = 10^{-2} \text{ mol/l} = 0.01 \text{ mol/l}; \quad C_s = 10^{-3} \text{ mol/l} = 0.001 \text{ mol/l}$$

La concentrazione maggiore è a destra, quindi il flusso va da destra a sinistra.

- c) **Quanto vale il flusso di soluto?**

- Il flusso di soluto è definito come

$$J_s = \frac{\delta n_s}{A \Delta t}$$

ma in questo caso non conosco nessuno dei dati necessari

- il flusso di soluto nel caso della diffusione libera è dato dalla legge di Fick

$$J_s^{diff} = -D \frac{dC}{dx}$$

ed abbiamo già stabilito che è applicabile in questo caso D (coefficiente di diffusione) è dato.

- **Quanto vale dC/dx ?** Nel caso di un tubicino sottile fra due grandi recipienti la concentrazione di soluto diminuisce linearmente

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

in altre parole il gradiente (o derivata) della concentrazione è costante.
 ΔC e ΔX sono entrambe note

Quindi

$$J_s^{diff} = -D \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Numericamente

$$\begin{aligned} J_s^{diff} = -D \frac{\Delta C}{\Delta x} &= -10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s} \frac{9 \cdot 10^{-3} \text{ moli}/\ell}{5 \text{ cm}} \\ &= -10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s} \frac{9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{moli}}{1000 \text{ cm}^3}}{5 \text{ cm}} = -1.8 \cdot 10^{-12} \text{ moli}/\text{cm}^2 \text{ s} \end{aligned}$$

(Il segno meno indica la direzione da destra a sinistra)

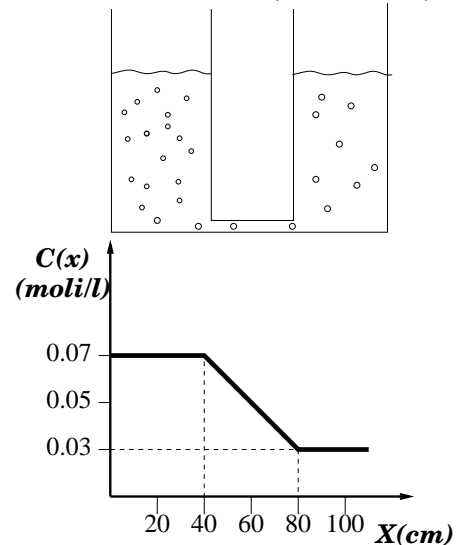
3) Due grandi recipienti sono collegati alla base da un tubicino di sezione pari a 2 mm^2 (vedi figura)

Il grafico sottostante rappresenta la concentrazione di soluto (PM=3600) misurata alla base dei due recipienti in funzione della posizione.

- a) Quanto vale la differenza di concentrazione fra i due recipienti?
- b) Quanto vale la lunghezza del tubicino?

Dopo 5 ore si osserva che sono fluiti attraverso il tubicino $0.54\ \mu\text{g}$ di soluto.

- c) Quanto vale il flusso di soluto (supposto costante)?
- d) Quale è la sua direzione?
- e) Quanto vale il coefficiente di diffusione del soluto?



Ris.: $\Delta C = 0.04\text{ mol/l}$; $\Delta x = 40\text{ cm}$; $J_s = 4.17 \cdot 10^{-13}\text{ mol/cm}^2\text{ s}$; flusso diretto come asse X;
 $D = 4.17 \cdot 10^{-7}\text{ cm}^2/\text{s}$

Soluzione:

a) **Quanto vale la differenza di concentrazione?**

La differenza di concentrazione è definita come

$$\Delta C = C_2 - C_1$$

• **Quanto vale la concentrazione nei due recipienti?**

Il testo non fornisce il valore della concentrazione nei due recipienti.

Il grafico però fornisce il valore della concentrazione misurata alla base dei due recipienti. Leggendo il valore della concentrazione misurata in corrispondenza di ciascun recipiente ottengo

$$C_1 = 0.07\text{ mol/l}; \quad C_2 = 0.03\text{ mol/l}$$

quindi

$$\Delta C = C_2 - C_1 = 0.03\text{ mol/l} - 0.07\text{ mol/l} = -0.04\text{ mol/l}$$

(il segno meno indica il fatto che nel recipiente 2 ho concentrazione minore)

b) **Quanto è lungo il tubicino?** Visto che i due recipienti sono molto grandi, la concentrazione alla base di ciascun recipiente può essere considerata costante.

Lungo il tubicino invece la concentrazione varia in maniera lineare.

Osservando il grafico si osserva che il tubo va da $x = 40\text{ cm}$ a $x = 80\text{ cm}$

Di conseguenza $L = 40\text{ cm}$

c) **Quanto vale il flusso di soluto?**

Il flusso di soluto è definito come

$$J_s = \frac{\delta n_s}{A \Delta t}$$

dove δn_s è il numero di moli che attraversano il tubicino (di area A) nell'intervallo di tempo Δt . L'area A e l'intervallo di tempo sono fornito dal testo del problema

• **Quante moli hanno attraversato il tubicino nell'intervallo di tempo?** Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{part}}{N_A}$$

ed è legato al peso molecolare dalla relazione

$$n = \frac{m}{PM}$$

Il flusso di soluto sarà quindi dato da

$$J_s = \frac{\delta n_s}{A \Delta t} = \frac{\delta m_s}{PM A \Delta t}$$

dove δm_s è la massa di soluto che attraversa il tubicino nell'intervallo di tempo.

Numericamente:

$$\begin{aligned} J_s = \frac{\delta m_s}{PM A \Delta t} &= \frac{0.54 \mu g}{3600 \text{ g/mole} \cdot 2 \text{ mm}^2 \cdot 5 \text{ h}} \\ &= \frac{0.54 \cdot 10^{-6} \text{ g}}{3600 \text{ g/mole} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 5 \cdot 3600 \text{ s}} = 4.17 \cdot 10^{-13} \text{ moli/cm}^2 \text{ s} \end{aligned}$$

d) **Quale è la direzione del flusso di soluto?**

In questo caso si ha diffusione libera.

Nella diffusione libera il flusso di soluto va da concentrazione maggiore a concentrazione minore.

In questo caso il flusso ha la direzione dell'asse x del grafico.

e) **Quanto vale il coefficiente di diffusione?** Il coefficiente di diffusione di un soluto in un particolare solvente è definito come il coefficiente di proporzionalità fra il flusso di soluto e il gradiente di concentrazione:

$$J_s = -D \frac{dC}{dx}$$

In questo caso lungo il tubicino il gradiente di concentrazione è costante e vale

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

quindi

$$D = -J_s \frac{\Delta x}{\Delta C}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} D = -J_s \frac{\Delta x}{\Delta C} &= -4.17 \cdot 10^{-13} \text{ moli/cm}^2 \text{ s} \frac{40 \text{ cm}}{-0.04 \text{ moli/l}} \\ &= -4.17 \cdot 10^{-12} \text{ moli/cm}^2 \text{ s} \frac{40 \text{ cm}}{-0.04 \frac{\text{moli}}{10^3 \text{ cm}^3}} = 4.17 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

- 4) Una membrana permeabile di sezione 1 cm^2 separa due recipienti la cui differenza di concentrazione vale $\Delta C = 0.01\text{ mol}/\ell$.

Si osserva che in 20 minuti attraverso la membrana passano $10\ \mu\text{g}$ di soluto ($PM = 180$).

- Quante moli attraversano la membrana in 1 s ? (Si consideri il flusso costante)
- Quanto vale il flusso di soluto?
- Quanto vale la permeabilità della membrana?

Ris.: a) $n_{1s} = 9.26 \cdot 10^{-11}\text{ moli}$; b) $J_s = 9.26 \cdot 10^{-11}\text{ moli}/\text{cm}^2/\text{s}$ c) $P = 9.26 \cdot 10^{-6}\text{ cm}/\text{s}$

Soluzione:

- a) **Quante moli attraversano la membrana in 1 s?**

- La mole è definita come un numero di particelle di una certa sostanza pari al numero di Avogadro. Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{part}}{N_{Avog}}$$

- Il numero di moli è legato alla massa della sostanza dal peso molecolare:

$$n = \frac{m}{P.M.}$$

quindi:

$$n_{1s} = \frac{M_{1s}}{P.M.}$$

Il peso molecolare è dato

- Quanti grammi di soluto attraversano la membrana in 1 s?** Il testo fornisce il numero di grammi che attraversano la membrana in 20 minuti. Visto che il flusso è costante, la quantità di soluto che passa per unità di tempo è costante.

Posso quindi impostare la proporzione:

$$\frac{M_{1s}}{\Delta t_{1s}} = \frac{M_{20min}}{\Delta t_{20min}} = \text{cost}$$

Da cui

$$M_{1s} = M_{20min} \frac{\Delta t_{1s}}{\Delta t_{20min}}$$

Numericamente:

$$M_{1s} = M_{20min} \frac{\Delta t_{1s}}{\Delta t_{20min}} = 20\ \mu\text{g} \frac{1\text{ s}}{20\text{ min}} = 20 \cdot 10^{-6}\text{g} \frac{1}{20 \cdot 60\text{ s}} = 1.67 \cdot 10^{-8}\text{g}$$

Quindi calcolata la massa di soluto che attraversa la membrana in un secondo posso risalire al corrispondente numero di moli:

$$n_{1s} = \frac{M_{1s}}{P.M.}$$

Numericamente:

$$n_{1s} = \frac{M_{1s}}{P.M.} = \frac{1.67 \cdot 10^{-8}\text{g}}{180\text{ g}/\text{mole}} = 9.26 \cdot 10^{-11}\text{ moli}$$

- b) **Quanto vale il flusso di soluto?**

Il flusso di soluto è definito come

$$J_s = \frac{\Delta n_s}{A \Delta t}$$

quindi posso immediatamente calcolarlo

$$J_s = \frac{\Delta n_s}{A \Delta t} = \frac{9.26 \cdot 10^{-11} \text{moli}}{1 \text{ cm}^2 1 \text{ s}} = 9.26 \cdot 10^{-11} \text{moli/cm}^2 \text{ s}$$

c) **Quanto vale la permeabilità della membrana?**

La permeabilità della membrana è definita come

$$P = \frac{J_s}{\Delta C}$$

ho tutti i dati, quindi

$$\begin{aligned} P = \frac{J_s}{\Delta C} &= \frac{9.26 \cdot 10^{-11} \text{moli/cm}^2 \text{ s}}{10^{-2} \text{moli/l}} = \frac{9.26 \cdot 10^{-11} \text{moli/cm}^2 \text{ s}}{10^{-2} \frac{\text{moli}}{1000 \text{cm}^3}} \\ &= \frac{9.26 \cdot 10^{-11} \text{moli/cm}^2 \text{ s}}{10^{-5} \text{moli/cm}^3} = 9.26 \cdot 10^{-6} \text{cm/s} \end{aligned}$$

- 5) Due recipienti identici separati da una membrana semipermeabile, sono riempiti fino allo stesso livello rispettivamente di acqua pura e soluzione $5 \cdot 10^{-4}$ molare di proteine. Il sistema si trova ad una temperatura di $27^\circ C$ e il coefficiente di filtrazione idraulico della membrana vale $L_p = 10^{-3} \text{moli}/N s$.
- La situazione descritta è una situazione di equilibrio?
 - Quanto vale la pressione osmotica nei due recipienti?
 - Quale è la direzione iniziale del flusso di acqua?
 - Quanto vale inizialmente il flusso di acqua?
 - Abbassando la temperatura, il flusso di acqua attraverso la membrana aumenta o diminuisce?

(Si consideri la densità della soluzione uguale a quella dell'acqua)

Ris.: No; $\Delta\Pi_s = 1.23 \cdot 10^{-2} \text{atm}$; dall'acqua pura verso la soluzione; $J_a = 1.23 \text{moli}/m^2 s$ diminuisce

Soluzione:

- a) **Il sistema è in equilibrio?**

- Quali sono le condizioni di equilibrio?** Perché il sistema sia in equilibrio il flusso (di solvente e/o di soluto) deve essere nullo.

Per quel che riguarda il flusso di soluto, visto che in questo caso abbiamo una membrana perfettamente semipermeabile, il flusso di soluto è sempre zero. (Una membrana è definita perfettamente semipermeabile ad un soluto se non permette il passaggio di quel particolare soluto).

Nel caso di una membrana semipermeabile quindi il sistema è in equilibrio se il flusso di solvente è nullo.

- In quali condizioni il flusso è nullo?** Il flusso di solvente attraverso una membrana semipermeabile è regolato dalla legge

$$J_a = L_p(\Delta P - \Delta\Pi_s)$$

La condizione di equilibrio $J_a = 0$ implica che

$$0 = L_p(\Delta P - \Delta\Pi_s)$$

cioè

$$\Delta P = \Delta\Pi_s$$

Per determinare se il sistema è in equilibrio devo confrontare il valore della differenza di pressione idraulica con quello della differenza di pressione osmotica.

- Quanto vale la differenza di pressione idraulica?** La differenza di pressione idraulica in questo caso è zero (entrambi i recipienti sono riempiti di liquido fino allo stesso livello e la densità è la stessa)
- Quanto vale la differenza di pressione osmotica?** La pressione osmotica è definita come

$$\Pi_s = RTC_s$$

quindi la differenza di pressione osmotica non è zero, visto che la concentrazione non è uguale.

Visto che la differenza di pressione idraulica è zero mentre la differenza di pressione osmotica non è zero, la condizione

$$\Delta P = \Delta\Pi_s$$

non è verificata, quindi si avrà un flusso attraverso la membrana e pertanto la situazione non può dirsi in equilibrio.

b) **Quanto vale la pressione osmotica nei due recipienti?**

La pressione osmotica è definita come

$$\Pi_s = RTC_s$$

Nel primo recipiente (acqua pura) $C_1 = 0$ quindi $\Pi_1 = 0$

Nel secondo recipiente (soluzione) $C_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{molare}$

$$\Pi_s = RTC_2 = 0.082 \ell \text{ atm/mol} K \cdot 300 K \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{moli}/\ell = 1.23 \cdot 10^{-2} \text{ atm}$$

c) **Quale è la direzione iniziale del flusso di acqua ?**

$$J_a = L_p(\Delta P - \Delta \Pi_s)$$

Visto che $\Delta P = 0$ il flusso è dovuto solo alla differenza di pressione osmotica

$$J_a = -L_p \Delta \Pi_s$$

e andrà da concentrazione minore a concentrazione maggiore (cioè dal recipiente con acqua pura verso quello con la soluzione)

d) **Quale è la direzione iniziale del flusso di acqua ?** Dato che

$$J_a = -L_p \Delta \Pi_s$$

si ottiene

$$J_a = -10^{-3} \text{moli}/N s \times 1.23 \cdot 10^{-2} \text{ atm} = -10^{-3} \text{moli}/N s \times 1.23 \cdot 10^{-2} \text{ atm} = -10^{-3} \text{moli}/N s \times 1.23 \cdot 10^3 P$$

e) **Diminuendo la temperatura il flusso aumenta o diminuisce?**

Visto che

$$J_a = -L_p \Delta \Pi_s$$

questo è equivalente a domandare se la differenza di pressione osmotica aumenta o diminuisce quando la temperatura diminuisce.

- **Diminuendo la temperatura la pressione osmotica aumenta o diminuisce?** La pressione osmotica

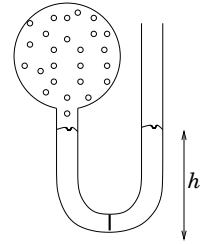
$$\Pi_s = RTC_s$$

è direttamente proporzionale alla temperatura, quindi al diminuire della temperatura diminuisce anche la differenza di pressione osmotica.

se diminuisce la differenza di pressione osmotica diminuisce (in modulo) anche il flusso

- 6) Un tubo ad U è diviso in due parti da una membrana semipermeabile per la CO_2 di area 0.5 cm^2 .

Il ramo di destra è in contatto con l'atmosfera e mentre il ramo sinistro del tubo è collegato ad un recipiente che contiene CO_2 alla pressione di $P_{CO_2} = 1.5 \text{ atm}$.



Inizialmente i due rami contengono acqua fino allo stesso livello.

- a) Quanto valgono inizialmente la differenza di pressione idraulica ed osmotica?

La CO_2 è un gas molto solubile in acqua e dopo un certo tempo nel ramo di sinistra si forma (alla temperatura di $47^\circ C$) una soluzione satura di acqua e CO_2 20 millimolare.

- b) Quanto varrà all'equilibrio la differenza di pressione osmotica?
 c) Se si aspetta quanto basta perchè il sistema raggiunga l'equilibrio, quale dislivello si stabilisce fra i due tubi?

$$\text{Ris.: } \Delta P^{in} = 0.5 \text{ atm}; \quad \Delta \Pi_s^{in} = 0; \quad \Delta \Pi_s^{eq} = 0.525 \text{ atm}; \quad \Delta h = 0.25 \text{ m}$$

Soluzione:

- a) **Quanto valgono inizialmente la differenza di pressione idraulica ed osmotica?**

- **Quanto vale la differenza di pressione idraulica?** La differenza di pressione idraulica ai capi della membrana è definita come

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

dove P_1 e P_2 sono i valori della pressione assoluta nelle immediate vicinanze ai due lati della membrana.

In questo caso quindi

$$\Delta P = P_{destra} - P_{sinistra}$$

- **Quanto vale la pressione idraulica a destra?**

La pressione idraulica alla base del ramo di destra può essere calcolata in base alla legge di Stevino:

$$P_{basso} = P_{alto} + dgh_{destra}$$

la pressione che agisce alla superficie del liquido è pari a P_{atm} quindi

$$P_{destra} = P_{atm} + dgh_{destra}$$

- **Quanto vale la pressione idraulica a sinistra?**

La pressione idraulica alla base del ramo di sinistra può essere calcolata in base alla legge di Stevino:

$$P_{basso} = P_{alto} + dgh_{sinistra}$$

la pressione che agisce alla superficie del liquido è pari a P_{CO_2} quindi

$$P_{sinistra} = P_{CO_2} + dgh_{sinistra}$$

la differenza di pressione idraulica ai capi della membrana è data da

$$\Delta P = P_{destra} - P_{sinistra} = P_{CO_2} - P_{atm} + dg(h_{sinistra} - h_{destra})$$

Visto che inizialmente il livello iniziale nei due rami è lo stesso:

$$\Delta P = P_{CO_2} - P_{atm} = 1.5 \text{ atm} - 1 \text{ atm} = 0.5 \text{ atm}$$

- **Quanto vale la differenza di pressione osmotica?** La differenza di pressione osmotica è definita come

$$\Delta\Pi_s = \Pi_{s_{sinistra}} - \Pi_{s_{destra}}$$

dove Π_s è la pressione osmotica nelle immediate vicinanze ai due lati della membrana semipermeabile.

La pressione osmotica è legata alla concentrazione di soluto dalla relazione

$$\Pi_s = RTC_s$$

ovvero

$$\Delta\Pi_s = RT(C_{sinistra} - C_{destra})$$

In questo caso inizialmente si ha acqua pura in entrambi i rami del tubo ad U . La concentrazione di CO_2 è inizialmente 0 in entrambi i rami, quindi:

$$\Delta\Pi_s = 0$$

- b) **Quanto varrà all'equilibrio la differenza di pressione osmotica?**

$$\Delta\Pi_s = RT(C_{sinistra} - C_{destra})$$

All'equilibrio nel ramo di destra si avrà ancora acqua pura, mentre nel ramo di sinistra si ha una concentrazione 20 *millimolare* di CO_2 quindi

$$\Delta\Pi_s^{eq} = RT(C_{sinistra} - C_{destra}) = RTC_{sinistra}$$

Numericamente:

$$\Delta\Pi_s^{eq} = RTC_{sinistra} = 0.082 \ell \text{ atm/moli } K \cdot 320 K \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ moli/l} = 0.525 \text{ atm}$$

- c) **Quale sarà il dislivello fra i due tubi all'equilibrio?** All'equilibrio il flusso di acqua attraverso la membrana deve essere nullo:

$$J_a = L_p(\Delta P - \Delta P_s) = 0$$

Visto che Questo implica che

$$\Delta P^{eq} = \Delta\Pi_s^{eq}$$

La differenza di pressione idraulica ai capi della membrana è data da

$$\Delta P = P_{CO_2} - P_{atm} + dg(h_{sinistra} - h_{destra})$$

quindi all'equilibrio

$$P_{CO_2} - P_{atm} + dg(h_{sinistra} - h_{destra}) = \Delta\Pi_s^{eq}$$

quindi il dislivello varrà

$$\Delta h = h_{sinistra} - h_{destra} = \frac{\Delta\Pi_s^{eq} + P_{atm} - P_{CO_2}}{dg}$$

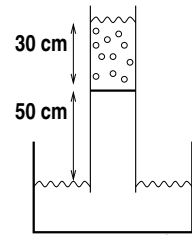
Numericamente:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{\Delta\Pi_s^{eq} + P_{atm} - P_{CO_2}}{dg} = \frac{(0.525 + 1 - 1.5) \text{ atm}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} \\ &= \frac{0.025 \text{ atm}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \frac{0.025 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 0.25 \text{ m} \end{aligned}$$

Il livello della soluzione risulta più alto di 25 *cm* nel ramo di sinistra.

- 7) Un tubo verticale è diviso in due da una membrana semipermeabile allo zucchero. La parte inferiore del tubo (completamente piena d'acqua) pesca in un grande recipiente pieno d'acqua. La membrana si trova ad un'altezza 50 cm dal pelo dell'acqua, e la parte superiore del tubo è riempita fino ad un livello di 30 cm da una soluzione satura 5 millimolare di acqua e zucchero alla temperatura di 7°C

- Quanto valgono la differenza di pressione idraulica e la differenza di pressione osmotica ai capi della membrana?
- Quale è la direzione iniziale del flusso d'acqua?
- Quanto vale il flusso iniziale se il coefficiente di filtrazione idraulico della membrana è $L_p = 3 \cdot 10^{-7} \text{ moli/N s}$?



Ris.: $\Delta P = 0.08 \text{ atm}$; $\Delta \Pi_s = 0.11 \text{ atm}$; dal basso verso l'alto; $J_a = 9 \cdot 10^{-4} \text{ moli/m}^2 \text{ s}$

Soluzione:

- Quanto valgono la differenza di pressione idraulica e la differenza di pressione osmotica ai capi della membrana?**

- Quanto vale la differenza di pressione idraulica?** La differenza di pressione idraulica ai capi della membrana è definita come

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

dove P_1 e P_2 sono i valori della pressione assoluta nelle immediate vicinanze ai due lati della membrana.

In questo caso quindi la pressione deve essere calcolata sulla faccia superiore ed inferiore della membrana

$$\Delta P = P_{sup} - P_{inf}$$

- Quanto vale la pressione idraulica sulla faccia superiore della membrana?**

La pressione idraulica sulla faccia superiore della membrana può essere calcolata in base alla legge di Stevino

$$P_{basso} = P_{alto} + dgh_{sup}$$

dove h_{sup} è il livello della soluzione nel compartimento superiore del tubo la pressione che agisce alla superficie del liquido è pari a P_{atm} quindi

$$P_{sup} = P_{atm} + dgh_{sup}$$

- Quanto vale la pressione idraulica sulla faccia inferiore della membrana?** La pressione idraulica sulla faccia inferiore della membrana può essere calcolata in base alla legge di Stevino

$$P_{basso} = P_{alto} + dgh_{inf}$$

dove h_{sup} è il livello dell'acqua nel compartimento inferiore del tubo la pressione che agisce alla superficie del liquido è pari a P_{atm} quindi

$$P_{atm} = P_{inf} + dgh_{inf}$$

cioè

$$P_{inf} = P_{atm} - dgh_{inf}$$

La differenza di pressione fra le due facce della membrana vale quindi

$$\Delta P = P_{sup} - P_{inf} = dg(h_{sup} + h_{inf})$$

Numericamente

$$\Delta P = dg(h_{sup} + h_{inf}) = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 (30 + 50) \text{ cm} = 8 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0.08 \text{ atm}$$

- **Quanto vale la differenza di pressione osmotica?** La differenza di pressione osmotica è definita come

$$\Delta\Pi_s = \Pi_{s_{sup}} - \Pi_{s_{inf}}$$

dove Π_s è la pressione osmotica nelle immediate vicinanze ai due lati della membrana semipermeabile.

La pressione osmotica è legata alla concentrazione di soluto dalla relazione

$$\Pi_s = RTC_s$$

ovvero

$$\Delta\Pi_s = RT(C_{sup} - C_{inf})$$

In questo caso nel compartimento inferiore si ha acqua pura ($C_{inf} = 0$)

$$\Delta\Pi_s = RTC_{sup}$$

Numericamente:

$$\Delta\Pi_s = RTC_{sup} = 0.082 \ell \text{ atm}/\text{mole K} \cdot 280 \text{ K} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}/\ell = 0.11 \text{ atm}$$

- b) **Quale è la direzione iniziale del flusso di acqua?** La direzione iniziale del flusso di acqua è dal basso verso l'alto perchè la differenza di pressione idraulica (che tende a far scendere l'acqua verso il basso) è insufficiente ad equilibrare la differenza di pressione osmotica (che tende a far diluire la soluzione).
- c) **Quanto vale il flusso iniziale di acqua?** Il flusso di acqua è dato dalla legge

$$J_a = L_p(\Delta P - \Delta P_s)$$

Numericamente

$$\begin{aligned} J_a = L_p(\Delta P - \Delta P_s) &= 3 \cdot 10^{-7} \text{ mol}/\text{N s} (0.11 - 0.08) \text{ atm} \\ &= 3 \cdot 10^{-7} \text{ mol}/\text{N s} \cdot 0.03 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ mol}/\text{m}^2 \text{ s} \end{aligned}$$

Elettricità e Fisica Moderna

- 1) Una candela emette una potenza di circa 1 W ad una lunghezza d'onda media di 5500 \AA
- Quanti fotoni vengono emessi al secondo?
 - A quale distanza massima la candela risulta visibile, se l'intensità di soglia è pari a 10^{-7} W/m^2 ?
- Ris.:* $N = 2.8 \cdot 10^{18}$; $D \simeq 900\text{ m}$

Soluzione:

- a) **Quanti fotoni vengono emessi al secondo?**

L'energia emessa al secondo è data dalla somma delle energie associate a ciascun fotone.

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dn}{dt} E_f$$

L'energia associata a ciascun fotone è data da

$$E_f = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Il numero di fotoni emesso al secondo (dn/dt) sarà quindi dato da:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{1\text{ W} \cdot 5500\text{ \AA}}{6.6 \cdot 10^{-34}\text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{ m/s}} = \frac{1\text{ W} \cdot 5500 \cdot 10^{-10}\text{ m}}{6.6 \cdot 10^{-34}\text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8\text{ m/s}} = 2.8 \cdot 10^{18}\text{ s}^{-1}$$

- b) **A quale distanza massima la candela risulta visibile?**

Perché la candela risulti visibile il flusso incidente deve essere pari a $\Phi_{min} = 10^{-7}\text{ W/m}^2$

L'energia viene emessa uniformemente in tutte le direzioni.

L'energia incidente per unità di area su una superficie sferica a distanza r (area $A = 4\pi r^2$) è pari a

$$\Phi = \frac{dE}{ds dt} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

quindi la distanza massima sarà data da

$$r_{max} = \sqrt{\frac{P}{4\pi\Phi_{min}}} = \sqrt{\frac{1\text{ W}}{4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}\text{ W/m}^2}} \simeq 900\text{ m}$$

- 2) Una fiamma in cui si immettano dei sali di litio, presenta una caratteristica colorazione rossa dovuta ad una riga monocromatica di frequenza pari a $\nu = 4.469 \cdot 10^{14} Hz$.
Si osserva, tramite opportune misure, che tale luce, quando si propaga in acqua, ha una lunghezza d'onda $\lambda = 0.504 \cdot 10^{-6} m$
Quanto vale la velocità della luce rossa del litio in acqua?

$$Ris.: v = 2.25 \cdot 10^8 m/s \simeq 0.75c$$

Soluzione:

- **Quanto vale la velocità della luce rossa del litio in acqua?** La velocità della luce nel vuoto è pari a c (indipendentemente dalla lunghezza d'onda o dalla frequenza). Nei vari mezzi la velocità di propagazione della luce dipende in generale dalla lunghezza d'onda.

In ogni caso per un'onda la velocità di propagazione è legata alla frequenza ν e alla lunghezza d'onda λ dalla relazione

$$v = \lambda\nu$$

In questo caso quindi

$$v = \lambda\nu = 0.504 \cdot 10^{-6} m \cdot 4.469 \cdot 10^{14} Hz = 2.25 \cdot 10^8 m/s \simeq 0.75c$$

(dove c è la velocità della luce nel vuoto)

- 3) Un fascio di radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda pari a $0.7 \mu m$ incide su una superficie. La velocità degli elettroni estratti è pari a $4 \cdot 10^5 m/s$.
- Quanto vale l'energia associata ai fotoni?
 - Quanto vale l'energia cinetica degli elettroni estratti ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$)?
 - Quanto vale l'energia di legame ϕ (misurato in eV) degli elettroni per quella sostanza?
- Ris.:* $E = hc/\lambda = 2.8 \cdot 10^{-19} J$; $E_e = \frac{1}{2}mv^2 = 7.2 \cdot 10^{-20} J$; $\phi = E - E_e = 1.31 eV$

Soluzione:

- a) **Quanto vale l'energia associata ai fotoni**

L'energia associata al fotone per una radiazione *e.m.* di frequenza ν è data da

$$E = h\nu$$

dove h è la costante di Planck ($6.6 \cdot 10^{-34} J s$)

- Quanto vale la frequenza della radiazione elettromagnetica?**

- La frequenza è definita come numero di cicli al secondo.
- La frequenza è legata al periodo dalla relazione

$$\frac{\nu}{T} = 1$$

- La frequenza è legata alla velocità di propagazione dell'onda dalla relazione

$$v = \lambda\nu$$

per la radiazione elettromagnetica la velocità è quella della luce, quindi

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

Quindi

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Numericamente:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} J s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{0.7 \mu m} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} J s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{0.7 \cdot 10^{-6} m} = 2.8 \cdot 10^{-19} J$$

- b) **Quanto vale l'energia cinetica degli elettroni estratti?**

L'energia cinetica è definita come

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

in questo caso quindi (la massa dell'elettrone vale $9 \cdot 10^{-31} kg$)

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}9 \cdot 10^{-31} kg (4 \cdot 10^5 m/s)^2 = 7.2 \cdot 10^{-20} J$$

- c) **Quanto vale l'energia di legame (in eV)?**

- L'energia di legame degli elettroni è pari alla energia di estrazione degli elettroni stessi
- Il fenomeno di estrazione di elettroni da una superficie illuminata da una radiazione elettromagnetica è detto effetto fotoelettrico.

L'effetto fotoelettrico si ha quando l'energia associata alla radiazione elettromagnetica (E) supera un certo valore di soglia ϕ , e l'energia cinetica degli elettroni estratti (E_e) è legata a E e ϕ dalla relazione

$$E_e = E - \phi = h\nu - \phi$$

Quindi

$$\phi = E - E_e = 2.8 \cdot 10^{-19} J - 7.2 \cdot 10^{-20} J = 2.1 \cdot 10^{-19} J$$

il testo chiede di esprimere l'energia in eV

- **A quanti eV corrispondono $2.1 \cdot 10^{-19} J$** L' eV è definito come il lavoro compiuto su una carica elementare attraverso una differenza di potenziale di $1 V$
 - **Quanto lavoro si compie su una carica elementare che attraversa una $\Delta V = 1 V$?** Il lavoro compiuto su una carica è legato alla differenza di potenziale dalla relazione (definizione di potenziale elettrico)

$$L = q\Delta V$$

la carica elementare è pari a $1.6 \cdot 10^{-19} C$ quindi

$$L = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1 V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

quindi

$$1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

quindi

$$\phi = 2.1 \cdot 10^{-19} J = 2.1 \frac{1 eV}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.3 eV$$

- 4) Nello spettro di assorbimento di una certa sostanza si osserva (fra le altre) una riga corrispondente all'assorbimento di radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda pari a $5 \cdot 10^{-7} m$.
- Quale è l'interpretazione delle righe osservate nello spettro di assorbimento di una sostanza?
 - Quanta energia possiede un fotone assorbito nella transizione in questione?
 - Quanto vale l'energia dello stato eccitato, se l'energia dello stato fondamentale vale $-12 eV$?

$$Ris.: E = 3.96 \cdot 10^{-19} J = 2.4 eV; E_0 = -9.6 eV$$

Soluzione:

- a) **Quale è l'interpretazione delle righe di assorbimento di una sostanza?**

Ogni atomo ha un insieme discreto di possibili livelli energetici per gli elettroni.

Di conseguenza l'atomo sarà in grado di acquistare (o perdere) solo quantità discrete di energia che corrispondano alla differenza di energia fra due dei suoi possibili livelli energetici:

$$\Delta E_{ij} = E_i - E_j$$

Questo significa che l'assorbimento (o emissione) di radiazione elettromagnetica avviene solo quando l'energia associata al fotone (E_γ) è pari alla differenza di energia fra due livelli atomici:

$$E_\gamma = \Delta E_{i,j} = E_i - E_j$$

L'insieme delle frequenze che possono essere assorbite (o emesse) da una sostanza è caratteristico della sostanza stessa.

Per stato fondamentale si intende quello corrispondente al più basso livello energetico possibile. Il termine stato eccitato indica genericamente uno stato corrispondente ad un livello energetico superiore a quello fondamentale. Gli stati eccitati emettono spontaneamente radiazione elettromagnetica nelle transizioni che riportano l'atomo verso il suo livello fondamentale.

- b) **Quanta energia possiede un fotone assorbito nella transizione in questione?**

L'energia di un fotone è legata alla frequenza dalla relazione

$$E = h\nu$$

La frequenza e la lunghezza d'onda sono legate alla velocità di propagazione dell'onda:

$$v = \lambda\nu$$

Nel caso della radiazione elettromagnetica la velocità di propagazione è data dalla velocità della luce (c), quindi

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Numericamente:

$$E = h \frac{c}{\lambda} = 6.6 \cdot 10^{-34} J s \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{5 \cdot 10^{-7} m} = 3.96 \cdot 10^{-19} J = 2.4 eV$$

- c) **Quanto vale l'energia dello stato eccitato, se l'energia dello stato fondamentale vale $-12 eV$?**

L'energia assorbita nella transizione dallo stato eccitato allo stato fondamentale è data da:

$$h\nu = \Delta E_{e,f} = E_e - E_f$$

In questo caso particolare l'energia dello stato eccitato sarà data da:

$$E_e = E_f + h\nu$$

Numericamente:

$$E_e = E_f + h\nu = -12 eV + 2.4 eV = -9.6 eV$$

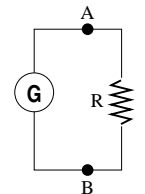
(l'energia dello stato eccitato è superiore, come deve, a quella dello stato fondamentale)

- 5) Una resistenza R è collegata ad un generatore reale di $F.e.m. = 15 V$, ed è attraversata da una corrente di $0.4 A$.
- Disegnare lo schema elettrico equivalente del circuito.
 - Quanto vale la resistenza R se la $d.d.p$ ai suoi capi vale $12 V$?
 - Come dovrebbe essere collegato un voltmetro per misurare questa $d.d.p$?
 - Quanto vale la resistenza interna del generatore?

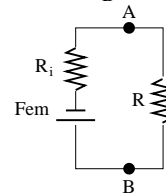
Soluzione:

- a) **Disegnare lo schema elettrico equivalente del circuito.**

La resistenza è collegata ai morsetti (A e B) di un generatore reale secondo questo schema:



Il generatore reale a sua volta può essere schematizzato come un generatore ideale unito ad una resistenza (detta interna):



La resistenza interna schematizza gli effetti di dissipazione all'interno di un generatore reale percorso da corrente.

La $F.e.m$ è definita come il lavoro per unità di carica compiuto (da forze non elettriche) per far compiere alle cariche un giro del circuito.

La differenza di potenziale ai capi del generatore rappresenta invece il lavoro per unità di carica compiuto dalla forza elettrica quando le cariche attraversano gli elementi del circuito elettrico (detti anche utilizzatore)

- b) **Quanto vale la resistenza R se la $d.d.p$ ai suoi capi vale $12 V$?**

La resistenza elettrica è definita (in base alla legge di Ohm) come la costante di proporzionalità fra la differenza di potenziale ai capi di un elemento del circuito e la corrente I che attraversa l'elemento stesso:

$$\Delta V = RI$$

La differenza di potenziale ai capi della resistenza è data del problema e vale $\Delta V = d.d.p. = 12 V$

- Quanto vale la corrente che percorre la resistenza?**

Il testo indica la corrente complessivamente erogata dal generatore.

In questo caso l'unico elemento collegato al generatore è la resistenza R , che sarà percorsa da una corrente I pari a quella erogata dal generatore.

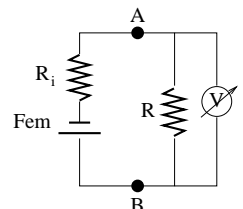
In questo caso quindi

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{12 V}{0.4 A} = 30 \Omega$$

- c) **Come dovrebbe essere collegato un voltmetro per misurare la $d.d.p$ ai capi della resistenza?** Un voltmetro è uno strumento che misura la differenza di potenziale fra due punti. Per poter misurare la differenza di potenziale ai capi di un elemento del circuito è necessario collegare il voltmetro in maniera tale da avere fra i morsetti dello strumento la stessa differenza di potenziale che si ha ai capi dell'elemento (resistenza) da misurare.

Per poter avere la stessa differenza di potenziale ai loro capi, voltmetro e resistenza devono essere collegati in parallelo.

Il corretto collegamento del voltmetro è quindi quello indicato in figura:



d) **Quanto vale la resistenza interna del generatore?**

Si osserva che la differenza di potenziale ai capi di un generatore reale dipende dalla corrente erogata secondo la relazione

$$d.d.p. = F.e.m. - R_i I$$

La *F.e.m.* del generatore e la corrente da esso erogata sono note.

• **Quanto vale la d.d.p. ai capi del generatore?**

La differenza di potenziale ai capi del generatore è definita come la differenza di potenziale (ΔV) esistente fra i suoi morsetti (indicati con A e B nello schema elettrico disegnato precedentemente).

La differenza di potenziale ai capi di un generatore è pari alla differenza di potenziale che si ha ai capi dell'utilizzatore.

In questo caso l'utilizzatore è costituito da una singola resistenza R , quindi la *d.d.p.* ai capi del generatore è uguale alla *d.d.p.* ai capi di R .

Quindi

$$R_i = \frac{F.e.m. - d.d.p.}{I} = \frac{(15 - 12) V}{0.4 A} = 7.5 \Omega$$