

# NOTICINA SULLA DERIVATA FUNZIONALE

## Contents

<b>1 Definizione di derivata funzionale</b>	<b>1</b>
<b>2 Proprietà della derivata funzionale</b>	<b>2</b>
<b>3 Regola di calcolo della derivata funzionale</b>	<b>2</b>
<b>4 Esempio 1 (equazioni di Eulero-Lagrange)</b>	<b>3</b>
<b>5 Esempio 2 (esponenziale)</b>	<b>3</b>

## 1 Definizione di derivata funzionale

Un funzionale è l'analogo infinito dimensionale di una funzione su  $\mathbb{R}^n$  che ad ogni vettore  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  associa il numero (reale o complesso)  $F[u]$ . Più precisamente, un funzionale  $F$  su uno spazio  $\mathcal{B}$  di funzioni "buone"  $u = u(x)$  su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  (con appropriate condizioni al bordo  $\partial\Omega$ ) è una funzione che associa ad ogni  $u \in \mathcal{B}$  un numero (reale o complesso)  $F[u]$ . La derivata funzionale (o derivato variazionale) misura il cambiamento del funzionale in seguito al cambiamento della funzione da cui dipende.

Nel caso finito dimensionale, per ogni  $\epsilon > 0$  e incremento  $h$ , la derivata  $F'_u$  è il funzionale lineare dell'incremento  $h$  definito dall'equazione

$$F[u + \epsilon h] = F[u] + \epsilon F'_u(h) + \text{ordini superiori in } \epsilon,$$

per cui

$$F'_u(h) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \epsilon h] - F[u]}{\epsilon} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} F[u + \epsilon h] \right]_{\epsilon=0}. \quad (1)$$

Inoltre, per la linearità,  $F'_u(h)$  può essere espresso come prodotto scalare:

$$F'_u(h) = \langle F'_u, h \rangle = \sum_k F'_{u_k} h_k, \quad (2)$$

dove  $F'_{u_k}$  e  $h_k$  sono le componenti dei vettori  $F'_u$  e  $h$  rispetto alla base naturale  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si dimostra facilmente che le componenti  $F'_{u_k}$  sono le derivate parziali di  $F$  nel punto  $u$ :

$$F'_{u_k} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} \right)_{x=u} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \epsilon e_k] - F[u]}{\epsilon}, \quad (3)$$

sono cioè le componenti del gradiente di  $F$ .

Il caso infinito-dimensionale è trattato in maniera completamente analoga: si mantiene la definizione (1) di derivata, dove adesso  $u$  e  $h$  sono funzioni:  $u = u(x)$  e  $h = h(x)$ . Si mantiene inoltre la prima uguaglianza di (2), mentre la seconda è sostituita dal prodotto scalare  $L^2$ :

$$F'_u(h) = \langle F'_u, h \rangle = \int F'_u(x) h(x) dx \quad (4)$$

Vale a dire, la somma nell'ultimo membro della (1) è sostituita da un integrale e la derivata parziale è adesso sostituita dalla funzione  $F'_u = F'_u(x)$  che è usualmente

chiamata *derivata funzionale*. Questa funzione è denotata  $\frac{\delta F}{\delta u}$  o, se si vuole mettere in evidenza la dipendenza dall'argomento, con  $\frac{\delta F}{\delta u(x)}$ . Con questa notazione, la (4) si riscrive come

$$F'_u(h) = \int \frac{\delta F}{\delta u(x)} h(x) dx, \quad (5)$$

Dunque, in analogia al caso finito-dimensionale, sarebbe appropriato chiamare la funzione  $\frac{\delta F}{\delta u}$  il gradiente di  $F$ .

Per il caso finito-dimensionale, nella letteratura fisica si preferisce assorbire  $\epsilon$  in  $h$ , porre  $\delta u \equiv \epsilon h$ ,  $\epsilon F'_u(h) \equiv \delta F$  e pensare il differenziale

$$\delta F = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k} \delta x_k$$

come la *variazione prima* della funzione, cioè la variazione della funzione al primo ordine nella variazione  $\delta x = (\delta x_1, \dots, \delta x_d)$  dei suoi argomenti. Analogamente, nel caso infinito-dimensionale

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta u(x)} \delta u(x) dx, \quad (6)$$

è la variazione prima del funzionale  $F$ , cioè la variazione del funzionale al primo ordine nella variazione  $\delta u(x)$  del suo argomento.

**N.B.** La definizione di derivata funzionale può essere resa matematicamente più rigorosa, definendo lo spazio delle funzioni più attentamente. Per esempio, quando lo spazio di funzioni è uno spazio di Banach, la derivata funzionale diventa nota come la *derivata di Fréchet*, mentre si utilizza la *derivata di Gâteaux* su generici spazi localmente convessi. Si noti che gli spazi con prodotto scalare  $L^2$ , se completi, sono spazi di Hilbert e dunque casi particolari di spazi di Banach. Il trattamento più rigoroso permette di generalizzare molti teoremi del calcolo differenziale e di analisi a corrispondenti teoremi di analisi funzionale, oltre a vari nuovi teoremi.

## 2 Proprietà della derivata funzionale

Come la derivata di una funzione, la derivata funzionale soddisfa le seguenti proprietà, dove  $F[u]$  e  $G[u]$  sono funzionali.

Linearità:

$$\frac{\delta(\alpha F + \beta G)}{\delta u(x)} = \alpha \frac{\delta F}{\delta u(x)} + \beta \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad \alpha \text{ e } \beta \text{ costanti}$$

Regola del prodotto:

$$\frac{\delta(FG)}{\delta u(x)} = \frac{\delta F}{\delta u(x)} G + F \frac{\delta G}{\delta u(x)}$$

Regola della derivata composta. Se  $f$  è una funzione differenziabile

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f(u)]}{\delta u(x)} &= \frac{\delta F[f(u)]}{\delta f(u(x))} \frac{df(u(x))}{du(x)} \\ \frac{\delta f(F[u])}{\delta u(x)} &= \frac{df(F[u])}{dF[u]} \frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} \end{aligned}$$

## 3 Regola di calcolo della derivata funzionale

Segue immediatamente alla definizione (1) combinata con la (5):

$$\int \frac{\delta F}{\delta u(x)} h(x) dx = \left[ \frac{d}{d\epsilon} F[u + \epsilon h] \right]_{\epsilon=0} \quad (7)$$

Inoltre, la (7) fornisce immediatamente la regola di calcolo formale

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \left[ \frac{d}{d\epsilon} F[u + \epsilon \delta_x] \right]_{\epsilon=0}, \quad (8)$$

dove  $\delta_x$  è la delta di Dirac centrata in  $x$ . Applicando la formula precedente al funzionale  $F[u] = u(y)$ , per  $y$  fissato, ed essendo per questo funzionale  $F[u + \epsilon \delta_x] = (u + \epsilon \delta_x)(y) = u(y) + \epsilon \delta(x - y)$ , si ottiene

$$\frac{\delta u(y)}{\delta u(x)} = \delta(x - y). \quad (9)$$

Questa relazione, congiuntamente alla regola della derivata della funzione composta, permette molto spesso un calcolo veloce della derivata funzionale.

## 4 Esempio 1 (equazioni di Eulero-Lagrange)

Calcoliamo la derivata funzionale di funzionali del tipo

$$F[u] = \int f(x, u(x), \nabla u(x)) dx. \quad (10)$$

Applichiamo la regola (7). Allora per variazioni  $h = h(x)$  che si annullano al bordo di integrazione

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta F}{\delta u(x)} h(x) dx &= \left[ \frac{d}{d\epsilon} \int f(x, u + \epsilon h, \nabla u + \epsilon \nabla h) dx \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int \left( \frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial \nabla u} \cdot \nabla h \right) dx \\ &= \int \left[ \frac{\partial f}{\partial u} h + \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \nabla u} h \right) - \left( \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla u} \right) h \right] dx \\ &= \int \left[ \frac{\partial f}{\partial u} h - \left( \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla u} \right) h \right] dx \\ &= \int \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla u} \right) h(x) dx. \end{aligned}$$

Poiché  $h$  è una funzione arbitraria, si arriva al risultato

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla u} \quad (11)$$

La condizione di annullamento di questa derivata porta alle usuali equazioni di Eulero-Lagrange per  $u = u(x)$ .

L'equazione (11) per la derivata funzionale può essere generalizzata al caso che comprende derivate di ordine superiore.

## 5 Esempio 2 (esponenziale)

Sia

$$F[u] = e^{\int u(x)g(x)dx}$$

e calcoliamone la derivata funzionale usando la regola (8):

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F[u]}{\delta u(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \epsilon \delta_x] - F[u]}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\int (u(x) + \epsilon \delta(x-y))g(x)dx} - e^{\int u(x)g(x)dx}}{\epsilon} \\
 &= e^{\int u(x)g(x)dx} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon \int \delta(x-y)g(x)dx} - 1}{\epsilon} \\
 &= e^{\int u(x)g(x)dx} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon g(y)} - 1}{\epsilon} \\
 &= e^{\int u(x)g(x)dx} g(y).
 \end{aligned}$$

Così,

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(y)} = F[u]g(y).$$

Osserviamo infine che questo risultato segue immediatamente dalla regola della funzione composta e dalla (9):

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F[u]}{\delta u(y)} &= e^{\int u(x)g(x)dx} \frac{\delta}{\delta u(y)} \left[ \int u(x)g(x)dx \right] \\
 &= e^{\int u(x)g(x)dx} \left[ \int \delta(x-y)g(x)dx \right] \\
 &= F[u]g(y)
 \end{aligned}$$