

INTRODUZIONE AL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE

Indice

1	Qual è il problema della teoria di Landau?	2
2	Trasformazioni di scala	7
3	Blocchi di spin e decimazioni	10
4	Decimazioni nell'anello di spin	12
5	Il modello di Ising in due dimensioni	25
6	Esponenti critici nel modello di Ising in due dimensioni	34
7	Proprietà generali delle trasformazioni di rinormalizzazione	38
8	Domini di attrazione e classi di universalità	45

9 Linearizzazione nell'intorno di un punto fisso **50**

10 Osservazioni conclusive **53**

1 Qual è il problema della teoria di Landau?

Ritorniamo all'ultima osservazione della penultima lezione: ***la teoria di Landau è basata su ipotesi estremamente generali e plausibili, come è possibile che ci sia un errore?*** Nel suo libro di termodinamica, Callen dà una risposta molto pertinente che riportiamo nella sua interezza.

Che ci sia un errore è indubbio: i fatti sperimentali e la soluzione esatta di Onsager indicano proprio questo. Il problema può allora essere posto come dilemma: ***l'errore è nell'argomento di Landau, o si trova più in profondità, nei fondamenti stessi della termodinamica?*** Questo è stato motivo di perplessità per molti fisici, per almeno tre decenni. Prima di occuparci della teoria della rinormalizzazione, una teoria che ha risolto il problema quasi in maniera definitiva, può essere utile

identificare l'origine della difficoltà. Per farlo, torniamo al postulato più centrale della termodinamica, il postulato di **massima entropia** o equivalentemente, il principio di **minima energia libera**. Questo postulato è infatti una trascrizione molto semplificata dei teoremi della meccanica statistica. La semplificazione eccessiva ha conseguenze significative solo quando le fluttuazioni diventano dominanti, cioè nella regione critica.

I teoremi fondamentali della meccanica statistica valutano la probabilità di fluttuazioni dei sistemi composti chiusi o di sistemi a contatto con appropriati serbatoi). In particolare, per un sistema composto chiuso l'energia di uno dei sottosistemi fluttua, e la probabilità che ad ogni dato istante essa abbia un valore E è dato dalla formula di Einstein

$$\text{Prob} (H = E) \sim e^{-\beta E} \Omega(E) = e^{-\beta[E-TS(E)]},$$

dove S è l'entropia del sistema. La media dell'energia $\langle H \rangle$ è ottenuta da questa densità di probabilità mediante il processo usuale di media. In generale la densità di probabilità è molto "concentrata" o stretta. L'energia media è allora quasi uguale all'energia più probabile.

Il postulato di base della termodinamica identifica il valore più probabile di energia con il valore medio, ma non è detto che questo sia

sempre verificato. Fortunatamente la densità di probabilità dei sistemi macroscopici è quasi sempre estremamente molto concentrata. Per una densità di probabilità molto concentrata, il valore medio e il valore più probabile coincidono, e la termodinamica classica allora è una teoria valida. Tuttavia, nella regione critica il minimo dell'energia libera diventa non profondo, la distribuzione di probabilità diventa molto larga, e la distinzione tra media e stato più probabile può diventare significativa.

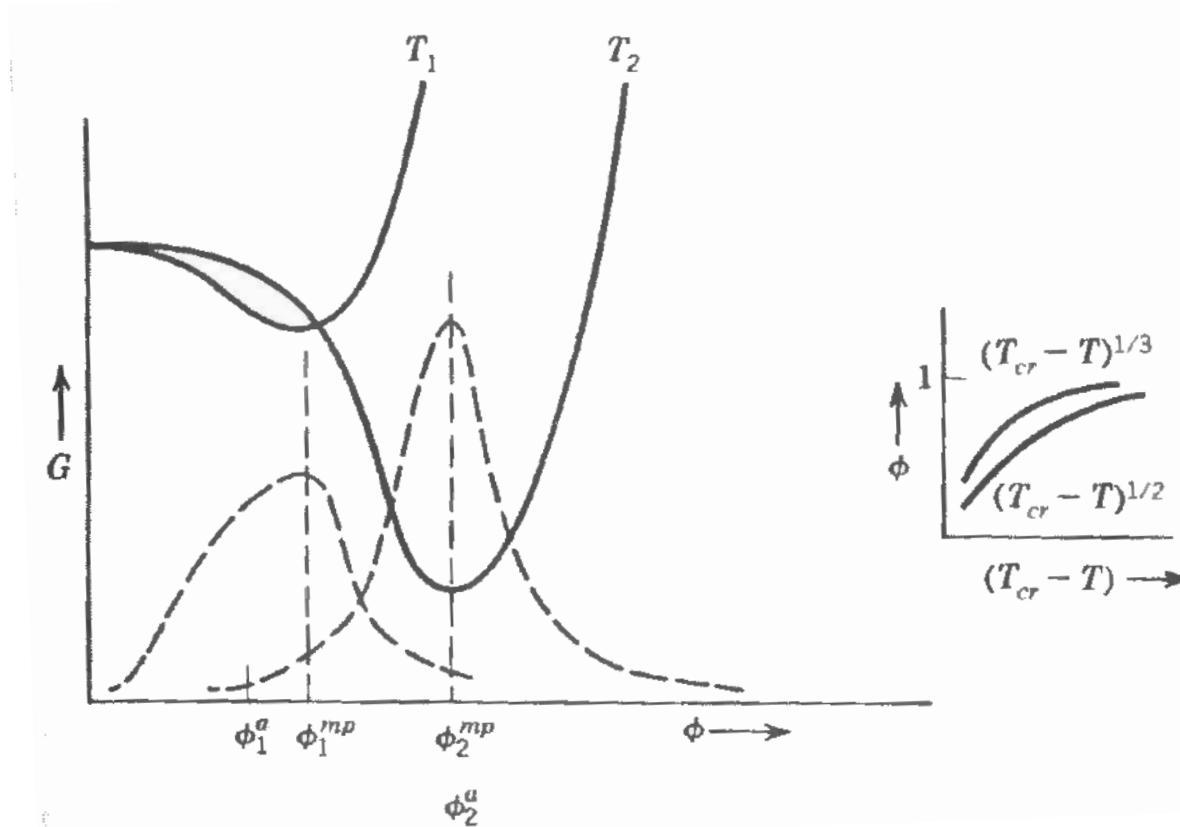


Figura 1: Distribuzioni di probabilità, media, e valori più probabili del parametro d'ordine fluttuante. Le temperature sono $T_2 < T_1 < T_c$. Le distribuzioni di probabilità sono mostrate come curve tratteggiate. I valori classici o più probabili sono ϕ_2^{mp} e ϕ_1^{mp} , e questi coincidono con i minimi di G . I valori medi sono ϕ_2^a e ϕ_1^a . Il tasso di variazione dei valori medi è più rapido di quello dei valori più probabili a causa della asimmetria delle curve per $T = T_1$. Questo è più consistente con un indice critico $\beta \sim 1/3$ anziché $1/2$, come mostrato nella figura piccola.

Per illustrare la conseguenza di questa distinzione vicino al punto critico, la figura 1, tratta dal libro di Callen, mostra il potenziale di Gibbs schematicamente come funzione del parametro d'ordine ϕ per due temperature leggermente inferiori a T_c (con il parametro intensivo, ad esempio il campo magnetico h pari a zero). Solo il ramo positivo di ϕ è indicato, anche se vi è un ramo simile per ϕ negativo (supponiamo che il sistema sia nel minimo con $\phi > 0$). Per T_1 il potenziale è poco profondo e asimmetrico, e la densità di probabilità per il parametro d'ordine fluttuante (linea tratteggiata) è corrispondentemente ampia e asimmetrica. Il valore medio ϕ_1^a è spostato a sinistra del valore più probabile ϕ_1^{mp} . Per una temperatura T_2 più lontana dalla temperatura critica, la buca di potenziale è quasi simmetrica attorno al suo minimo, e pure la densità di probabilità è quasi simmetrica. Il valore medio ϕ_2^a e il valore più probabile ϕ_2^{mp} sono allora quasi identici. Come la temperatura cambia da T_1 a T_2 il cambiamento previsto classicamente nel parametro d'ordine è $\phi_2^{mp} - \phi_1^{mp}$, mentre la previsione della meccanica statistica è $\phi_2^a - \phi_1^a$. Così vediamo che la termodinamica classica predice incorrettamente la dipendenza dalla temperatura del parametro ordine man mano che la temperatura si avvicina alla temperatura critica, e che questo insuccesso è connesso

con la natura del minimo del potenziale poco profondo e asimmetrico. ã

Per estendere un po di piú il ragionamento, si osservi che $\phi_2^{mp} - \phi_1^{mp}$ è piú piccolo di $\phi_2^a - \phi_1^a$ (si veda la figura). Cioè, la previsione termodinamica classica dello spostamento in ϕ (per una data variazione di temperatura) è minore del vero spostamento (cioè, che lo spostamento del valore medio di ϕ). Questo è coerente con la previsione classica $\beta = 1/2$ piuttosto che il valore vero $\beta \sim 1/3$, come indicato in fig. 1.

2 Trasformazioni di scala

L'idea chiave alla base della teoria del gruppo di rinormalizzazione è quella di studiare il comportamento del sistema a diverse scale. Simulazioni di sistemi con transizioni di fase continue mostrano configurazioni tipiche nelle fasi di alta e bassa temperatura e in prossimità di un punto critico. Configurazioni caratteristiche del modello bidimensionale Ising vicino alla temperatura critica sono rappresentate in fig. 2. Al punto critico ci sono domini di dimensione arbitraria e non possiamo distinguere immagini scattate a diverse scale di lunghezza. È piuttosto insolito che

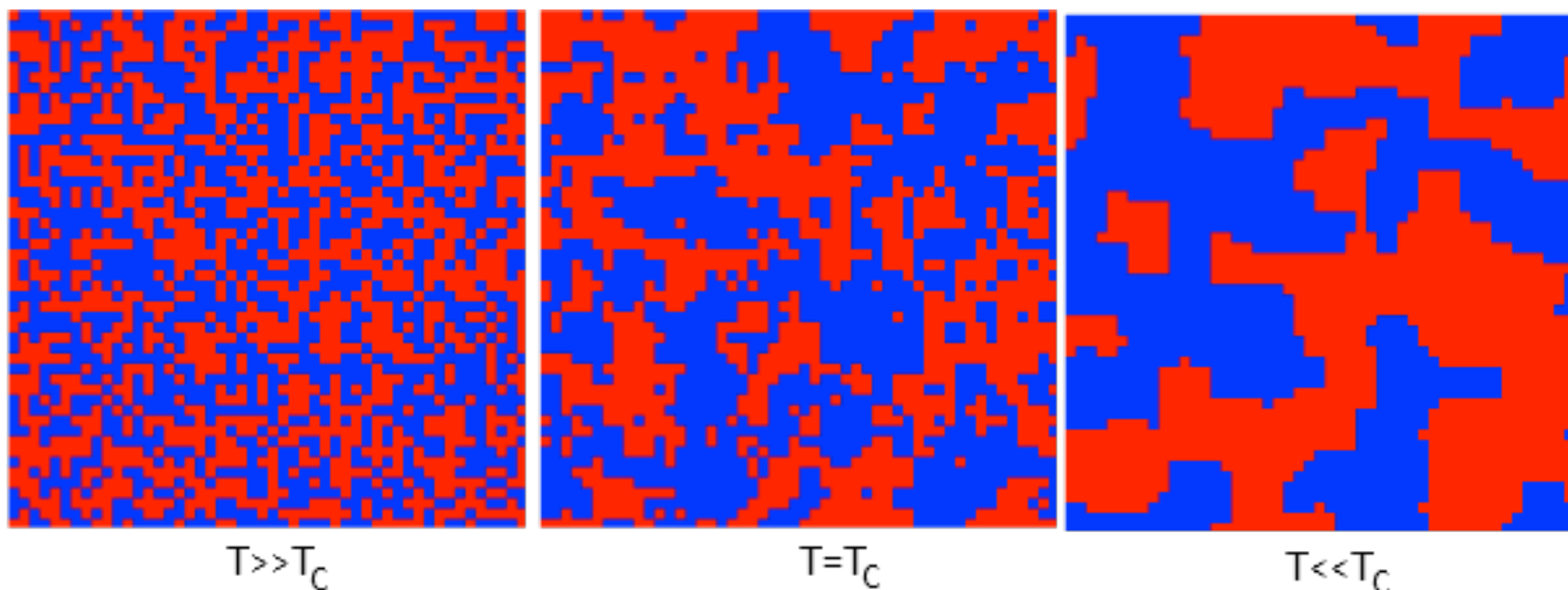


Figura 2: Configurazioni del modello di Ising su un quadrato al variare della temperatura.

un sistema fisico sia invariante per trasformazioni di scala, di solito, i sistemi fisici hanno scale specifiche ben definite. Tuttavia, in prossimità di un punto critico, queste scale specifiche devono in qualche modo diventare irrilevanti.

Cosa accade alle configurazioni tipiche nelle fasi di alta e bassa tempe-

ratura quando cambiamo gradualmente la scala (e non la temperatura) mediante qualche procedura di “coarse-graining”, ad esempio riducendo la risoluzione del nostro microscopio? Nella fase disordinata ad alta temperatura i piccoli domini diventano ancora più piccoli e questo ha lo stesso effetto di un aumento della temperatura. Mentre nella fase ordinata a bassa temperatura la dimensione tipica dei domini macroscopici si riduce riduce e questo effetto è simile a quello ottenuto abbassando la temperatura del sistema. In entrambi i casi una modifica della scala (con fattore di scala $b > 1$) **diminuisce la lunghezza di correlazione e allontana il sistema dal suo punto critico**. Solo nel punto critico, in cui la lunghezza di correlazione diverge, **una configurazione tipica non cambia aspetto quando viene cambiata la scala**. Queste considerazioni portano alla domanda naturale se una trasformazione di scala è equivalente a una variazione della temperatura e delle altre costanti di accoppiamento.

K. Wilson ha ricevuto il premio Nobel per i suoi decisivi contributi alla fisica delle trasformazioni di scala e più in generale delle trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione (RG) iniziati nel 1971. Questo approccio alla descrizione dei fenomeni critici è diventato uno strumento molto

potente in fisica statistica, così come nella teoria quantistica dei campi. Ci sono molti modi per costruire trasformazioni di scala o più in generale trasformazioni del RG. Nel seguito ne discuteremo alcuni.

3 Blocchi di spin e decimazioni

L'approccio di Wilson si basa sull'idea dei **blocchi di spin** di Kadanoff del 1966 come procedura di “coarse-graining” del sistema. Dato un sistema (ad esempio, reticolare), lo dividiamo in blocchi come mostrato in fig. 3 e cerchiamo di descrivere il sistema in termini di variabili che descrivono il comportamento medio dei blocchi. Iterando questa procedura, come mostrato in figura, riduciamo il numero di gradi di libertà del sistema. Un altro modo per ridurre il numero di gradi di libertà del sistema è la **decimazione**, ottenuta sommando selettivamente su sottoinsiemi del sistema. Per esempio, per una catena di spin, ogni due spin ne eliminiamo uno, come mostrato in fig. 4. Iterando la procedura, otteniamo un sistema molto più diradato dell'originale.

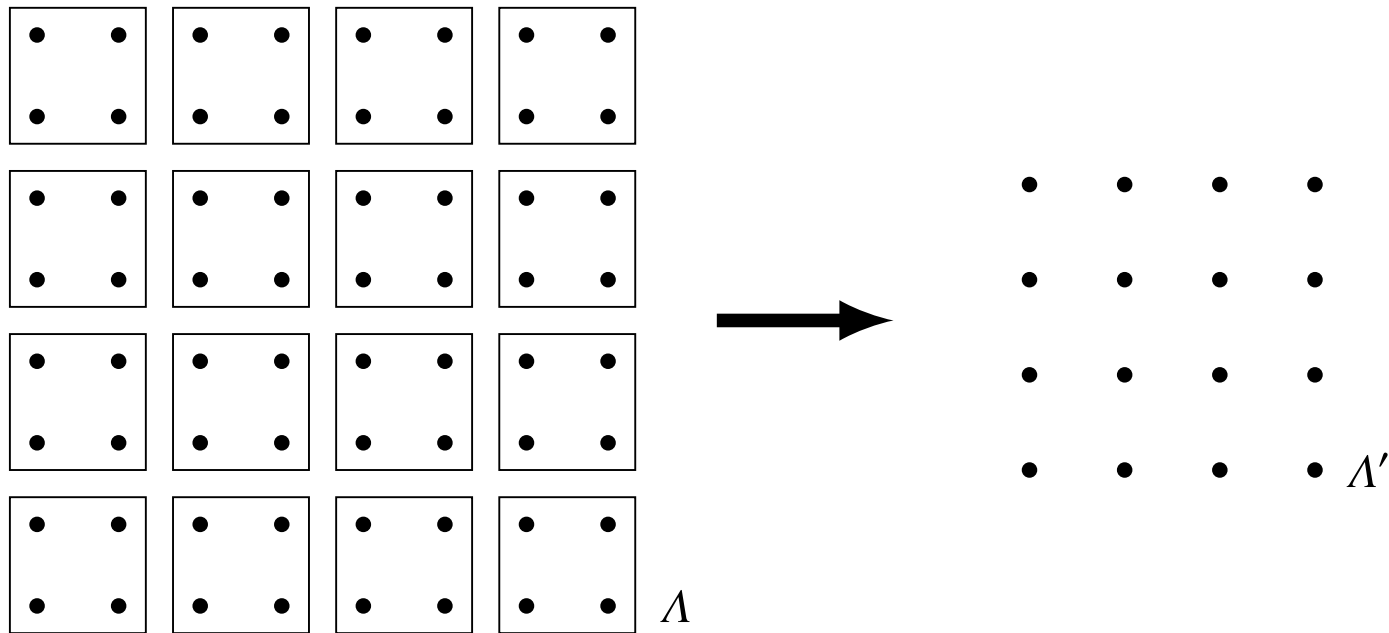


Figura 3: Trasformazione a blocchi che quattro spin microscopici in uno spin di blocco

La decimazione degli spin può essere fatta esattamente per la catena Ising con campo esterno e la discuteremo sotto. Il sistema “diradato” è identico al sistema originale a temperatura differente e con campo esterno differente. Tuttavia, per sistemi di spin in due e più le dimensioni

ciascuna decimazione degli spin genera nuovi termini nell'hamiltoniana e la decimazione iterata non può essere eseguita analiticamente come per la catena di Ising.

4 Decimazioni nell'anello di spin

Consideriamo l'hamiltoniana dell'anello di spin, cioè la catena di Ising periodica

$$-\beta H(\sigma) = K \sum_{i=0}^N \sigma_i \sigma_{i+1} + B \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (1)$$

(con le solite notazioni, $K = \beta J$, $B = \beta h$). Assumiamo che N sia un numero pari. Sommando solo ogni due spin, cioè sugli spin che si trovano

in siti pari del reticolo, la funzione di partizione assume la forma

$$\begin{aligned}
Z(N, K, B) &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots} e^{K\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}B(\sigma_1 + \sigma_2)} e^{K\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{2}B(\sigma_2 + \sigma_3)} \times \dots \\
&= \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3) + \frac{1}{2}B(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3)} \times \dots \\
&= \sum_{\sigma_1, \sigma_3, \dots} \left[e^{(K + \frac{1}{2}B)(\sigma_1 + \sigma_3) + B} + e^{-(K - \frac{1}{2}B)(\sigma_1 + \sigma_3) - B} \right] \times \dots \quad (2)
\end{aligned}$$

Pertanto, dopo la decimazione, si ottiene un sistema di tipo Ising con spin situati nei punti dispari del reticolo. Ora si possono introdurre nuove costanti di accoppiamento K', B' così come una funzione $g(K, B)$ tali che

$$e^{(K + \frac{1}{2}B)(\sigma_1 + \sigma_3) + B} + e^{-(K - \frac{1}{2}B)(\sigma_1 + \sigma_3) - B} = e^{2g(K, B)} e^{K'\sigma_1\sigma_3 + \frac{1}{2}B'(\sigma_1 + \sigma_3)}. \quad (3)$$

Calcoleremo tra poco g e le nuove costanti di accoppiamento. Adesso inseriamo l'espressione (3) per ogni fattore nel prodotto a secondo membro

dell'eq. (2). Otteniamo

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_3, \dots} e^{2g(K,B)} e^{K'\sigma_1\sigma_3 + \frac{1}{2}B'(\sigma_1 + \sigma_3)} e^{2g(K,B)} e^{K'\sigma_3\sigma_5 + \frac{1}{2}B'(\sigma_3 + \sigma_5)} \times \dots = e^{Ng(K,B)} Z\left(\frac{N}{2}, K', B'\right).$$

Pertanto,

$$Z(N, K, B) = e^{Ng(K,B)} Z\left(\frac{N}{2}, K', B'\right) \quad (4)$$

Il risultato è notevole: **la decimazione degli spin riproduce il modello di Ising sulla catena diradata con il doppio della distanza reticolare; l'energia sul reticolo a grana più grossa ha la stessa forma funzionale che sul reticolo microscopico,**

$$\beta H \rightarrow \beta' H' - g(K, B)N, \quad -\beta' H' = \sum_{i' \text{ dispari}} \sigma_{i'} \sigma_{i'+2} + B' \sum_{i' \text{ dispari}} \sigma_{i'}. \quad (5)$$

Adesso calcoliamo g e le nuove costanti di accoppiamento. Per fare questo, valutiamo l'eq. (3) per 3 differenti configurazioni dei due spin

(σ_1, σ_3) . Abbiamo

$$\begin{aligned}(\sigma_1 = +1, \sigma_3 = +1) &\Rightarrow 2e^B \cosh(2K + B) = e^{2g} e^{K'+B'} \\(\sigma_1 = -1, \sigma_3 = -1) &\Rightarrow 2e^{-B} \cosh(2K - B) = e^{2g} e^{K'-B'} \\(\sigma_1 = +1, \sigma_3 = -1) &\Rightarrow 2 \cosh(B) = e^{2g} e^{-K'}\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni per k' , B' e g , otteniamo la trasformazione

$$\begin{aligned}K &\xrightarrow{\mathbb{R}_2} K' = \log \left[\frac{1 \cosh(2K + B) \cosh(2K - B)}{4 \cosh^2 B} \right] \\B &\xrightarrow{\mathbb{R}_2} B' = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\cosh(2K + B)}{\cosh(2K - B)} \right] \\g(K, B) &= \frac{1}{8} \log [16 \cosh(2K + B) \cosh(2K - B) \cosh^2 B]\end{aligned} \tag{6}$$

La “dinamica” del gruppo di rinormalizzazione Iterando la trasformazione (6), si ottiene la seguente “dinamica” a tempo discreto nello spazio

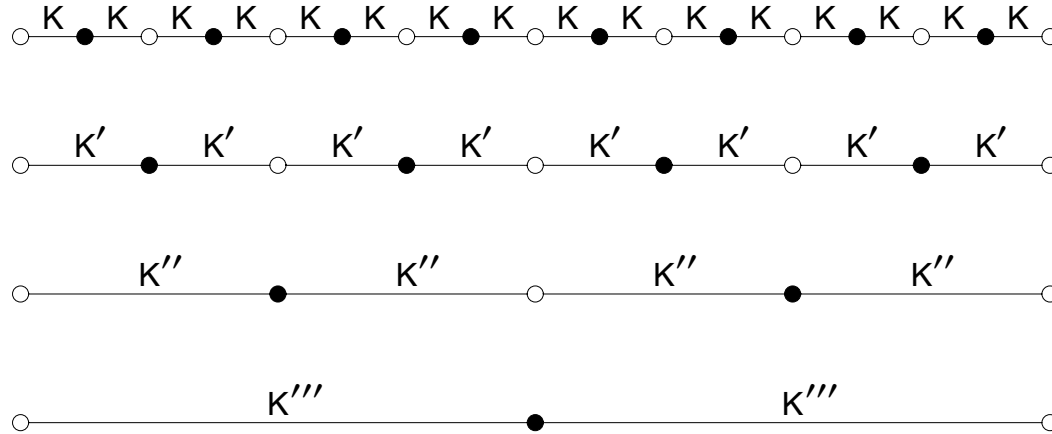


Figura 4: Decimazione nella catena di Ising ottenuta eliminando gli spin che si trovano nei siti pari del reticolo.

delle costanti di accoppiamento

$$\begin{cases} K_{n+1} = f_1(K_n, B_n) \\ B_{n+1} = f_2(K_n, B_n) \end{cases} \quad (7)$$

con le funzioni f_1 e f_2 date dall'eq. (6). In altre parole, le trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione definiscono un “flusso di fase” nello spazio delle fasi delle costanti di accoppiamento. La fig. 5 mostra le traiettorie delle costanti di accoppiamento (K, B) dopo l'applicazione ri-

petuta della trasformazione di decimazione \mathbb{R}_2 . Gli accoppiamenti iniziali in figura sono $K = 2$ e $B = \pm 0, 2, \pm 0.05, 0$.

La traiettoria

$$(K, B) \xrightarrow{\mathbb{R}_2} (K_1, B_1) \xrightarrow{\mathbb{R}_2} (K_2, B_2) \xrightarrow{\mathbb{R}_2} (K_3, B_3) \xrightarrow{\mathbb{R}_2} \dots$$

tende all'asse $K = 0$. Ciò significa che la costante di accoppiamento tra primi vicini, K diminuisce ad ogni decimazione spin.

La decimazione raddoppia la distanza tra siti vicini del reticolo come schematizzato in fig. 5 e questo fattore di scala appare come indice della trasformazione. \mathbb{R}_2 è una trasformazione del **gruppo di rinormalizzazione (RG)** con fattore di scala $b = 2$. Più in generale, se \mathbb{R}_b è una trasformazione gruppo di rinormalizzazione con fattore di scala b , allora abbiamo

$$\mathbb{R}_b \circ \mathbb{R}_b = \mathbb{R}_{b^2} \quad (8)$$

Si noti che non vi è inversa di \mathbb{R}_b , dal momento che non siamo in grado di invertire la procedura di somma dei gradi di libertà. Quindi le trasformazioni \mathbb{R}_b formano solo un **semi-gruppo** e non un gruppo.

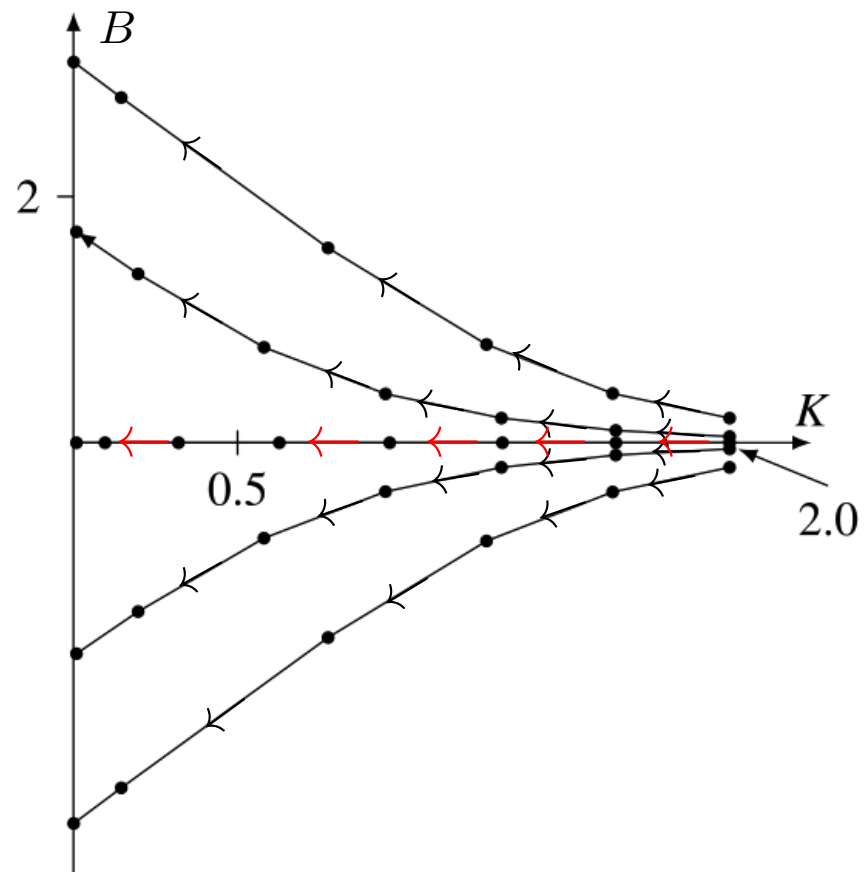


Figura 5: Il flusso degli accoppiamenti (K, B) sotto applicazione ripetuta della trasformazione di decimazione \mathbb{R}_2 per la catena Ising.

Energia libera Dalla'eq. (4) si ottiene la relazione di ricorsione per la la densità di energia libera $-\beta f = \frac{1}{N} \log Z$. Abbiamo

$$\frac{1}{N} \log Z(N, K, B) = g(K, B) + \frac{1}{N} Z \left(\frac{N}{2}, K', B' \right) = g(K, B) + \frac{1}{2} \frac{1}{N/2} Z \left(\frac{N}{2}, K', B' \right),$$

per cui, nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$,

$$f(K', B') = 2[f(K, B) - g(K, B)], \quad (9)$$

che è la relazione di ricorsione cercata.

Campo magnetico nullo Studiamo adesso nel dettaglio il caso di campo magnetico nullo. Se il campo magnetico del sistema microscopico è zero, allora rimane zero poiché la simmetria \mathbb{Z}_2 ($\sigma \rightarrow -\sigma$) senza campo viene conservata dalla mappa di decimazione. Così la linea $B = 0$ in fig. 5 è una traiettoria del gruppo di rinormalizzazione.

A campo magnetico nullo, le decimazioni successive della catena di spin sono date dalla “legge di evoluzione”

$$K_{n+1} = \frac{1}{2} \log [\cosh(2K_n)] , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

illustrata in fig. 6. Si tratta di una “mappa di intervallo” per cui abbiamo tracciato la bisettrice $K' = K$ e la curva $K' = \frac{1}{2} \log [\cosh(2K_n)]$. Per qualsiasi valore iniziale $K_0 > 0$, la traiettoria K_1, K_2, \dots determinata iterando la relazione ricorsiva (10) tende a $K = 0$, come mostrato in figura. Così, $K^* = 0$ (temperatura ∞) è un **punto fisso stabile** del gruppo di rinormalizzazione per la catena di Ising a campo nullo. Anche $K^* = \infty$ (temperatura 0) è un punto fisso della mappa (10), ma è **instabile**.

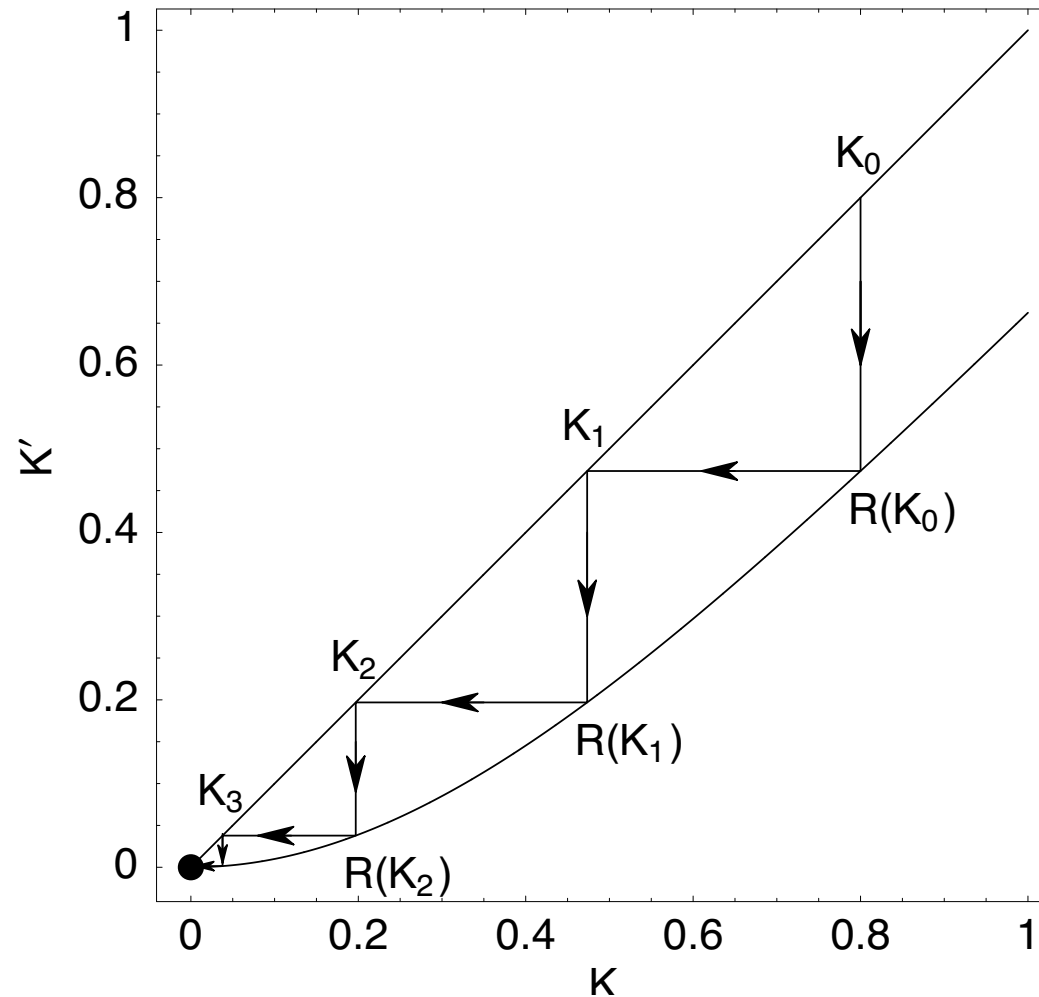


Figura 6: Iterando la trasformazione di rinormalizzazione (10), l'accoppiamento K si muove verso il punto attrattivo $K = 0$ (cioè temperatura infinita) lontano dal punto repulsivo $K = \infty$ (cioè temperatura 0).

Consideriamo adesso la relazione di ricorsione (9) per l'energia libera sostituendo la forma esplicita di g dalla dall'eq. (6) per $B = 0$:

$$f(K') = 2f(K) - \left[\log 2 + \frac{1}{2} \log(\cosh 2K) \right] \quad (11)$$

Vicino ad un qualunque punto critico K^* , l'invarianza dell'energia libera è espressa come

$$f(K') \approx f(K) \approx f(K^*), \quad (12)$$

e la relazione di ricorsione (11) si riduce a

$$f(K^*) \approx \log 2 + \frac{1}{2} \log(\cosh 2K^*) \quad (13)$$

Quando $K \rightarrow 0$, $\cosh K \rightarrow 1$, pertanto

$$f(K^*) \rightarrow \log 2, \quad (14)$$

e l'energia libera diventa

$$F = -Nk_B T f(K^*) = -Nk_B T \log 2, \quad (15)$$

che è in accordo con il limite di alta temperatura. In questo limite, l'entropia è il contributo dominante all'energia libera, cosicché gli spin sono sostanzialmente non interagenti e la lunghezza di correlazione si annulla (vedi sotto). Viceversa, quando $K \rightarrow \infty$, $\cosh K = \frac{1}{2}(e^K + e^{-K}) \rightarrow \frac{1}{2}e^K$, per cui

$$f(K^*) \rightarrow K^* \quad (16)$$

e l'energia tende al valore limite

$$F = -Nk_BTK = -NJ, \quad (17)$$

che corrisponde al limite di bassa temperatura. In questo limite l'energia domina l'energia libera e tutti gli spin sono allineati. Adesso la lunghezza di correlazione è infinita. In definitiva, ***tutta l'informazione termodinamica associata con il comportamento a bassa e ad alta temperatura della catena di Ising è riprodotto dalla relazioni di ricorsione del gruppo di rinormalizzazione.***

Funzione di correlazione Consideriamo adesso la funzione di correlazione a campo esterno nullo. Consideriamo due spin, in siti dispari del

reticolo. Riscaldiamo il reticolo a grana grossa in modo tale che la distanza tra i siti vicini si riduca da 2 a 1. Così, se due punti sono separati da una distanza $2n$ sul reticolo microscopico, sono separati da una distanza n sul reticolo riscaldato a grana grossa. Ne consegue che la correlazione a due punti

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle \sim e^{-|x-y|/\xi} \quad (18)$$

decade più velocemente dopo la decimazione e la riduzione di scala. Concludiamo che ogni trasformazione \mathbb{R}_2 dimezza la lunghezza ξ di correlazione, cioè

$$\xi' = \frac{1}{2}\xi. \quad (19)$$

Dalla soluzione esatta della catena di Ising, sappiamo che la lunghezza di correlazione diverge a temperatura $T = 0$ e si annulla a $T = \infty$. $T = 0$ è un punto critico, mentre a $T = \infty$ l'interazione svanisce. Le traiettorie del gruppo di rinormalizzazione confluiscono nel punto fisso banale con $\xi = 0$ poiché la costante di accoppiamento K e la lunghezza di correlazione ξ diminuiscono ad ogni decimazione degli spin.

5 Il modello di Ising in due dimensioni

Consideriamo il modello bidimensionale Ising senza campo esterno, dato da

$$-\beta H = K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

Adesso la decimazione genera, oltre a interazioni tra primi vicini, anche interazioni tra successivi primi. Iterando la decimazione si generano interazioni tra spin molto distanti.

Come prima, consideriamo la somma su tutte le configurazioni in funzione di partizione. Nella decimazione sommiamo sugli spin segnati da cerchi aperti in fig. 7 e quindi costruiamo un modello di spin efficace con spin situati nei cerchi pieni. Questi siti definiscono il reticolo a grana grossa. Ad esempio, il contributo dello spin situato nel punto del reticolo indicato con 5 è dato da

$$\sum_{\sigma_5=\pm 1} e^{K\sigma_5(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)} = e^{K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)} + e^{-K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)} \quad (20)$$

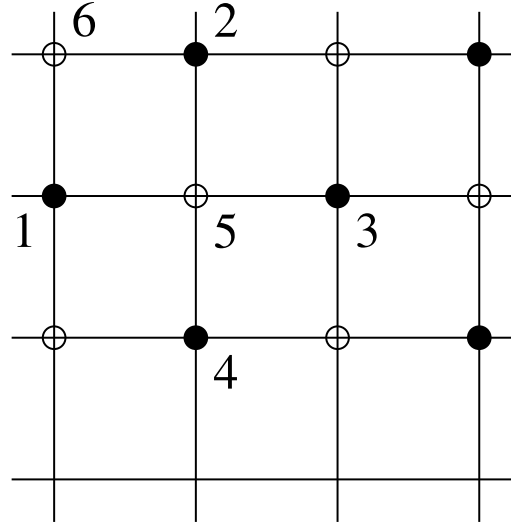


Figura 7: In un passo di decimazione si somma su gli spin nei siti del reticolo contrassegnati con cerchi aperti.

Questa trasformazione induce interazioni a primi vicini (NN), a secondi vicini (nNN) e a quattro spin (Q). Infatti, il secondo membro delleq. (20) può essere riscritto come

$$e^{2g} \exp \left[\frac{1}{2} K_1 \underbrace{(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1)}_{NN} + L_1 \underbrace{(\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4)}_{nNN} + U_1 \underbrace{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)}_Q \right]$$

Per verificare questo, si richiede che le le seguenti equazioni indipendenti siano soddisfatte:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 = +1, \sigma_2 = +1, \sigma_3 = +1, \sigma_4 = +1) &\Rightarrow 2 \cosh(4K) = e^{2g} e^{2K_1+2L_1+U_1} \\
 (\sigma_1 = +1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1, \sigma_4 = -1) &\Rightarrow 2 \cosh(2K) = e^{2g} e^{-U_1} \\
 (\sigma_1 = +1, \sigma_2 = +1, \sigma_3 = -1, \sigma_4 = -1) &\Rightarrow 2 = e^{2g} e^{-2L_1+U_1} \\
 (\sigma_1 = +1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = -1) &\Rightarrow 2 = e^{2g} e^{-2K_1+2L_1+U_1}
 \end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni per i nuovi accoppiamenti, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{4} \log \cosh(4K) \\ L_1 = \frac{1}{2} K_1 \\ U_1 = \frac{1}{8} \log \cosh(4K) - \frac{1}{2} \log \cosh(2K) \end{cases} \quad (21a)$$

$$g(K, B) = \frac{1}{16} \log [16 \cosh(4K) + \log \cosh(2K) + 8 \log 2] \quad (21b)$$

La trasformazione sopra descritta è detta “*star square*” ed è mostrata in fig. 8.

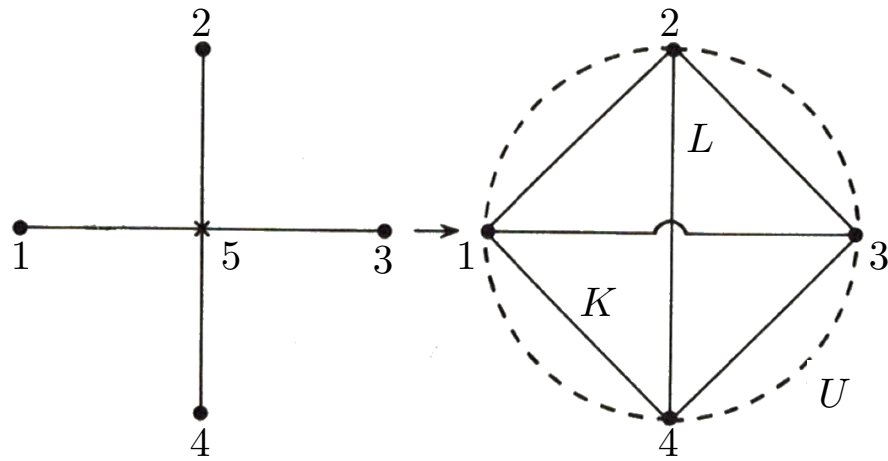


Figura 8: Trasformazione "star-square".

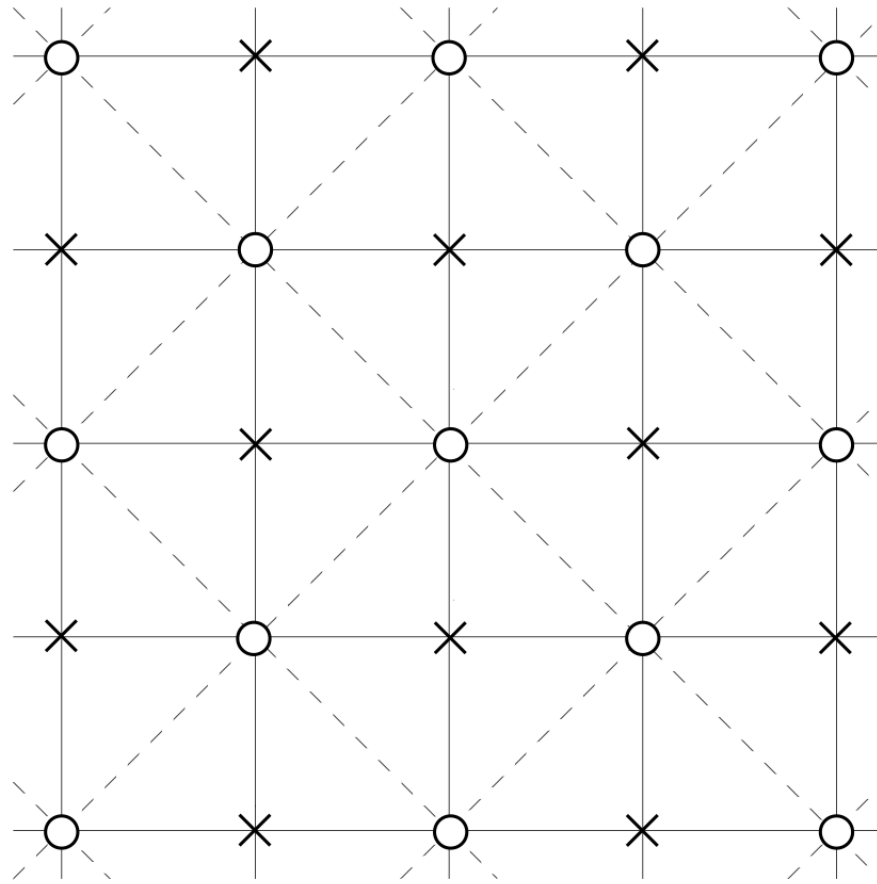


Figura 9: Decimazione sul reticolo quadrato. Gli spin indicati con \times sono decimati. Dopo la decimazione, il passo del reticolo aumenta di $\sqrt{2}$ e i secondi vicini (nNNN) originari diventano primi vicini (NN). Inoltre il reticolo è ruotato di 45° . Le linee continue rappresentano il reticolo originale e le linee tratteggiate il reticolo decimato.

Le equazioni (21) specificano l'azione della trasformazione di decimazione sul particolare sistema che consiste di interazioni tra primi vicini soltanto. Denotando con σ' le configurazioni sul reticolo a grana grossa possiamo scrivere

$$Z(V, K) = Z' \left(\frac{V}{2}, K' \right) = \sum_{\sigma'} e^{-(\beta H)'(\sigma')} \quad (22)$$

dove

$$-(\beta H)' = Vg + K_1 \sum_{\text{NN}} \sigma_{i'} \sigma_{j'} + L_1 \sum_{\text{nNN}} \sigma_{i'} \sigma_{j'} + U_1 \sum_{\mathcal{Q}} \sigma_{i'} \sigma_{j'} \sigma_{k'} \sigma_{l'} \quad (23)$$

è l'hamiltoniana detta di *Landau-Ginzburg-Wilson*; essa **non è** della stessa forma dell'hamiltoniana microscopica.

Se iterassimo la trasformazione di decimazione, si genererebbero sempre più termini che coinvolgono le interazioni tra spin molto distanti. Per procedere analiticamente, si ha bisogno di una sorta di troncamento. Come primo tentativo, si potrebbe porre le costanti di accoppiamento L_1 e U_1 pari a zero, ma questa approssimazione sarebbe del tutto insufficiente. Ciò risulta evidente esaminando i punti fissi che sono semplicemente

$K_1 = 0$ e $K_1 = \infty$ come nel modello unidimensionale. Così non si osserverebbe alcuna transizione di fase. Un'approssimazione migliore è quello di porre $U_1 = 0$ e di trattare i secondi vicini come primi vicini, cioè considerando l'unica costante di accoppiamento $K' = K_1 + L_1 = K_1 + \frac{1}{2}K_1$. Con questo troncamento, la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione $K' = \mathbb{R}_b(K)$ diventa la relazione di ricorsione

$$K_{n+1} = \frac{3}{8} \log \cosh(4K_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

che è illustrata in fig. 10. La mappa (24) ha punti fissi, cioè soluzioni di

$$K = \frac{3}{8} \log \cosh(4K),$$

per $K = 0$, $K = \infty$ e per

$$K^* = 0, 50698 \dots \quad (25)$$

Questo valore è abbastanza vicino al noto punto critico $K_C = 0, 4407$ di Kramers-Wannier-Onsager. Si osservi che questo punto fisso è instabile: partendo $K \neq K^*$, il flusso fa evolvere il sistema verso il punto fisso di alta temperatura $K = 0$ o verso il punto fisso di bassa temperatura a

$K = \infty$. I punti fissi $K = \infty$ e $K = 0$ sono detti banali (non avviene alcuna transizione di fase), mentre ad un punto fisso non banale (cioè a temperatura finita) corrisponde una transizione di fase continua.

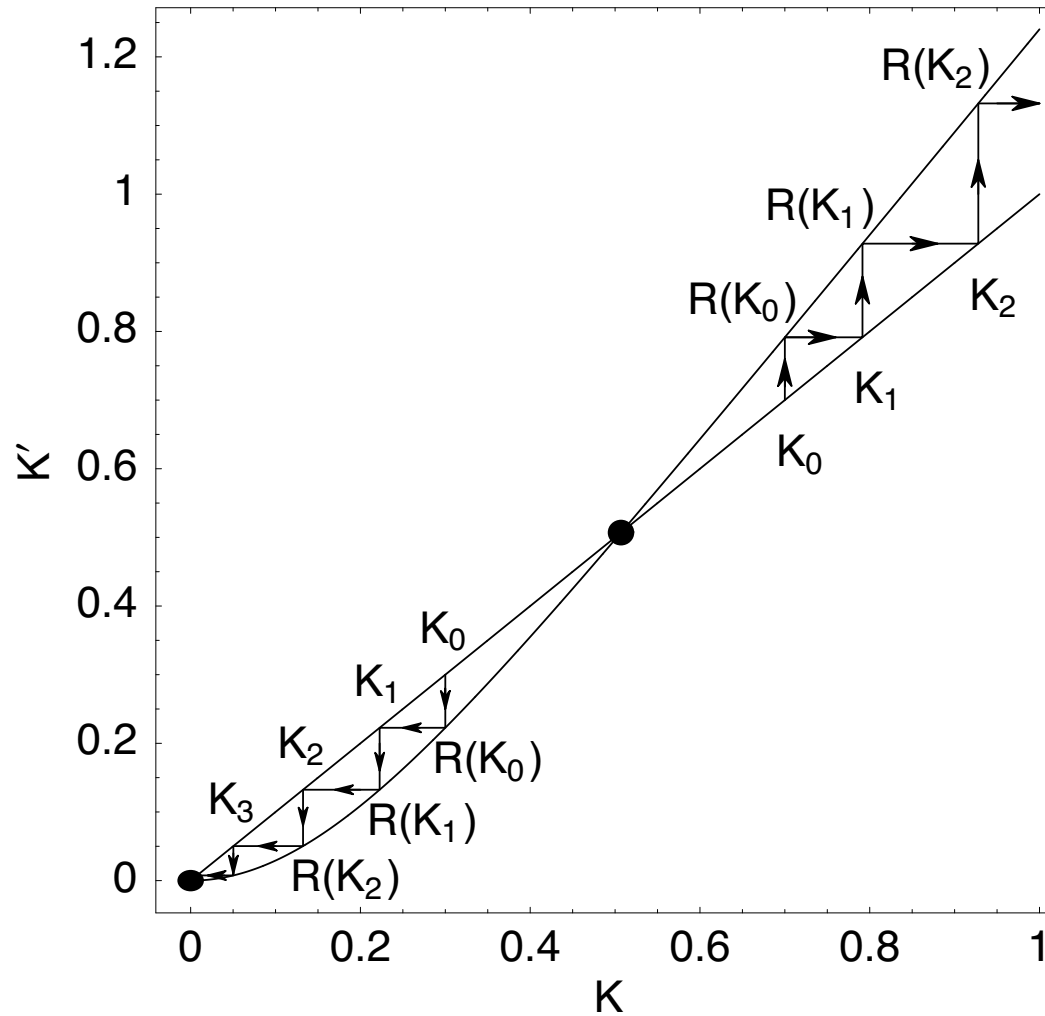


Figura 10: Il punto fisso della trasformazione troncata (24). Il punto fisso non banale a $K^* = 0,50698$ è instabile.

6 Esponenti critici nel modello di Ising in due dimensioni

Oltre a identificare l'esistenza di un punto critico e la stima dell'accoppiamento critico K^* , la relazione di ricorsione (approssimata) (24) (cioè la "dinamica" approssimata del gruppo di rinormalizzazione) fornisce anche gli esponenti critici associati con il comportamento singolare delle quantità termodinamiche al punto critico.

Per vedere come questo avviene, dobbiamo considerare anche la relazione di ricorsione per l'energia libera. Dalle equazioni (21) e (22) otteniamo

$$f(K') = 2[f(K) - g(K)] = 2f(K) - \frac{1}{8} [\log(16 \cosh 4K) + \log \cosh 2K + 8 \log 2] , \quad (26)$$

analogamente al caso unidimensionale. Il secondo termine sul lato destro di questa equazione spiega la rimozione dei gradi di libertà a corto raggio, che si traduce in una espressione che è analitica in K . Pertanto, questo termine non è destinato a svolgere alcun ruolo nella transizione

di fase e lo trascuriamo nella discussione seguente. La relazione di ricorsione risultante per la **parte singolare** f_s dell'energia libera è scritta come

$$f_s(K) = b^{-d} f_s(K') \quad (27)$$

dove $b = \sqrt{2}$ e $d = 2$. Il fattore $\sqrt{2}$ rappresenta la variazione della distanza tra primi vicini come mostrato nelle figure 8 e 9. Così b^{-d} rappresenta la variazione dell'area del sistema. Ora supponiamo che K sia abbastanza vicino al valore critico K_C che possiamo esprimere K' in termini di una relazione di ricorsione linearizzata:

$$K' = \mathbb{R}_b(K) = K_C + \left. \frac{d\mathbb{R}}{dK} \right|_{K=K_C} (K - K_C) + \dots \quad (28)$$

In termini delle quantità $\delta K' = K' - K_C$ e $\delta K = K - K_C$, questa equazione ha la forma

$$\delta K' = \lambda \delta K, \quad \text{con} \quad \lambda = \left. \frac{d\mathbb{R}}{dK} \right|_{K=K_C} \equiv b^y. \quad (29)$$

(è utile definire y in questo modo perché risulta additivo quando compiamo in successione due trasformazioni \mathbb{R}). Allora dell'eq. (27) ottenia-

mo

$$f_s(\delta K) = b^{-d} f_s(b^y \delta K), \quad (30)$$

Ora,

$$\delta K = K - K_C = \frac{J}{k_B T} - \frac{J}{k_B T_C} = \frac{J}{k_B T} \left(1 - \frac{T}{T_C} \right) \equiv K t$$

dove t è la “temperatura ridotta” (già introdotta in lezioni precedenti). Poiché K resta limitato al punto critico, scriviamo l’eq. (30) come

$$f_s(t) = b^{-d} f_s(b^y t) \quad (31)$$

Infine, dal momento che questa equazione è valida per qualsiasi b , possiamo porre $b = |t|^{1/y}$, e la parte singolare dell’energia libera diventa

$$f_s(t) = |t|^{d/y} f_s\left(\frac{t}{|t|}\right) \quad (32)$$

Il segno di valore assoluto significa che l’espressione risultante è valida per temperature sopra e sotto la temperatura critica.

Il calore specifico è proporzionale alla derivata seconda dell'energia libera rispetto alla temperatura,

$$c_v = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \quad (33)$$

Allora, detto α l'esponente critico della temperatura,

$$c_v \sim |T - T_C|^{-\alpha} \sim |t|^{-\alpha} \quad \text{per } |t| \rightarrow 0, \quad (34)$$

dobbiamo avere che

$$f_s \sim |t|^{2-\alpha}$$

cosicché

$$\frac{d}{y} = 2 - \alpha \quad (35)$$

$$f_s(t) = |t|^{2-\alpha} f_s \left(\frac{t}{|t|} \right). \quad (36)$$

Secondo le equazioni (24) e (29) abbiamo che

$$y = \frac{\log \lambda}{\log b} = \frac{1}{\log b} \log \left(\left. \frac{dR}{dK} \right|_{K=K_C} \right) = \frac{\log \left(\frac{3}{2} \tanh 4K_C \right)}{\log b}. \quad (37)$$

Sostituendo il valore numerico (25) trovato in precedenza, otteniamo $y = 1.070 \dots$, da cui

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y} = 0.131 \dots, \quad (38)$$

che dovrebbe essere confrontato con il risultato esatto dalla soluzione di Onsager da cui risulta che c_v ha una singolarità logaritmica a T_C , cioè $\alpha = 0$. Correzioni sistematiche alla procedura di base qui delineata richiedono un calcolo sostanziale, ma sono in grado di produrre quantità critiche che sono accurate entro l'1% della soluzione di Onsager.

7 Proprietà generali delle trasformazioni di rinormalizzazione

Adesso estendiamo e generalizziamo quanto abbiamo imparato finora. Abbiamo visto che le trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione funzionano modificando la scala di lunghezza e riducendo il numero dei gradi di libertà. Solo al punto critico il sistema rimane inalterato per cambiamento di scala e il comportamento critico è determinato da un

punto fisso della trasformazione. Inoltre, abbiamo visto che una decimazione cambia la forma dell'interazione introducendo nuove costanti di accoppiamento. Pertanto, invece di considerare una sistema con una data hamiltoniana, consideriamo adesso uno **spazio di hamiltoniane** \mathcal{H} e un operatore \mathbb{R}_b che agisce in questo spazio,

$$\mathbb{R}_b : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} , \quad (39)$$

caratterizzato da un fattore di scala b , che ha la proprietà che quando è applicato ad un dato sistema hamiltoniano, la sua lunghezza di correlazione ξ è ridotta di un fattore b ,

$$\xi \rightarrow \xi' = \frac{1}{b} \xi . \quad (40)$$

e il numero di gradi di libertà si riduce di un fattore b^d **preservando le simmetrie e la dimensionalità** d del sistema.

Per convenienza e semplicità, restringiamo l'azione della trasformazione solo nello spazio fisico e non nello spazio degli impulsi come era stato fatto originariamente da Wilson, e consideriamo solo sistemi magnetici le cui Hamiltoniane possono essere caratterizzate da un insieme di

costanti di accoppiamento espresse come un vettore

$$\mathbf{K} = (K, L, U, \dots), \quad (41)$$

In questo caso, la trasformazione \mathbb{R}_b riduce il numero di gradi di libertà V sul reticolo Λ sostituendoli con $V' = b^{-d}V$ gradi di libertà sul reticolo a grana grossa Λ' .

\mathbb{R}_b deve generare un'hamiltoniana con lo stesso tipo di interazioni dell'hamiltoniana originale. Assumeremo quindi che la dimensione di \mathbf{K} , e quindi di \mathcal{H} , sia abbastanza grande da includere tutte le possibili interazioni (primi vicini, a campi esterni, secondi vicini, a tre spin, a quattro spin, etc.) che si possono generare applicando ripetutamente \mathbb{R}_b ad una hamiltoniana arbitraria dello spazio delle hamiltoniane. È ovviamente incluso il caso in cui alcune, o meglio, molte costanti di accoppiamento sono nulle nell'hamiltoniana originale. Purtroppo, solo modelli semplici come la catena Ising possono essere descritti da un numero finito di accoppiamenti. Tuttavia, si può assumere che gli accoppiamenti corrispondenti alle interazioni a lungo raggio siano soppressi e, quindi possano essere trascurati. In pratica, si lavora con un numero finito e

non troppo elevato di costanti di accoppiamento

$$\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n). \quad (42)$$

La diluizione del sistema operata da \mathbb{R}_b cambia le costanti di accoppiamento secondo la trasformazione

$$\mathbf{K}' = \mathbb{R}_b(\mathbf{K}). \quad (43)$$

e quindi (essendo essendo le Hamiltoniane definite univocamente dalla costanti di accoppiamento) genera una dinamica a tempo discreto nello spazio \mathcal{H} delle hamiltoniane,

$$\mathbb{R}_b : H(\sigma) \mapsto H'(\sigma') - Vg(\mathbf{K}) \quad (44)$$

dove la forma funzionale della dipendenza di H' dagli spin σ' del reticolo diradato è la stessa dipendenza di H da σ , cambiano soltanto i valori delle costanti di accoppiamento secondo l'eq. (43). Nel seguito trascureremo il termine $Vg(\mathbf{K})$ che non contribuisce alla parte singolare dell'energia libera.

La costruzione di particolari operatori \mathbb{R}_b può essere pensato come la prima fase dell'approccio del gruppo di rinormalizzazione. La seconda fase, che è la parte più interessante e concettualmente attraente di questo approccio è quello che potremmo chiamare la "ricetta" del gruppo di rinormalizzazione. La ricetta è abbastanza precisa, ma, purtroppo, con poche eccezioni, la costruzione di determinati operatori \mathbb{R}_b , è nel migliore dei casi solo approssimata.

Per il momento supponiamo che abbiamo un \mathbb{R}_b con le proprietà sopra descritte. Cioè, la lunghezza di correlazione ξ e la parte singolare dell'energia libera f_s dei due sistemi collegati dall'eq. (43) soddisfano

$$\xi(\mathbf{K}') = b^{-1}\xi(\mathbf{K}), \quad f_s(\mathbf{K}') = b^d \psi_s(\mathbf{K}). \quad (45)$$

Partendo da un particolare sistema specificato da \mathbf{K}_0 , applichiamo ripetutamente \mathbb{R}_b , ottenendo così una successione di sistemi caratterizzati da $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots$ definiti ricorsivamente da

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbb{R}_b(\mathbf{K}_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Dalle equazioni (45), abbiamo

$$\xi(\mathbf{K}_{n+1}) = b^{-1}\xi(\mathbf{K}_n) = \dots = b^{-n}\xi(\mathbf{K}_0). \quad (47)$$

Si supponga adesso che la successione $\{\mathbf{K}_n\}$ tenda a \mathbf{K}^* quando $n \rightarrow \infty$. Assumendo continuità di \mathbb{R}_b , segue che \mathbf{K}^* è un punto fisso di \mathbb{R}_b , vale a dire

$$\mathbf{K}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}_{n+1} = \mathbb{R}_b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}_n \right) = \mathbb{R}_b(\mathbf{K}^*). \quad (48)$$

Fin tanto che \mathbf{K}^* è finito, esso corrisponde a qualche sistema hamiltoniano nello spazio \mathcal{H} a temperatura finita. Inoltre dalle equazioni (45) con $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ abbiamo

$$\xi(\mathbf{K}^*) = b^{-1} \xi(\mathbf{K}^*)$$

cosicché $\xi(\mathbf{K}^*)$ deve essere zero o infinito. Se escludiamo per il momento la possibilità che sia zero, dall'eq. (47) segue che la lunghezza di correlazione del sistema iniziale

$$\xi(\mathbf{K}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n \mathbf{K}_{n+1} \quad (49)$$

è anch'essa infinita, il che significa che abbiamo incominciato l'iterazione (46) al punto critico. Per convenienza, ci riferiremo ai punti fissi \mathbf{K}^* di sistemi con lunghezza di correlazione infinita come punti fissi **fisici**.

Ad esempio, se si sceglie come sistema iniziale un modello con solo interazioni tra primo vicini e in campo esterno nullo, il vettore iniziale ha la forma

$$\mathbf{K}_0 = (K, 0, 0, \dots)$$

dove K denota la costante di accoppiamento tra primi vicini. Assumendo che questo sistema abbia un punto critico a $\beta = \beta_C$, la successione $\{\mathbf{K}_n\}$ definita dall'eq. (46) e che parte da \mathbf{K}_0 per il particolare valore $\beta = \beta_C$, si avvicinerà ad un punto fisso fisico di \mathbb{R}_b .

In generale, se la condizione iniziale \mathbf{K}_0 è lontana dalla criticità, cioè l'iterazione parte da un \mathbf{K}_0 con $\beta \neq \beta_C$, di modo che la lunghezza di correlazione $\xi(\mathbf{K}_0)$ è finita, dall'eq. (49) si avrà che che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\mathbf{K}_n) = 0 \quad (\beta \neq \beta_C) \quad (50)$$

(in quanto $b > 1$). Ne consegue che ***i punti fissi fisici sono instabili.***

Per $\beta > \beta_C$ ci si potrebbe aspettare che \mathbf{K}_n diverga verso il punto fisso di bassa temperatura, mentre per $\beta < \beta_C$ si avvicini al punto di alta temperatura $K^* = 0$. Entrambi questi punti fissi sarebbero stabili e corrisponderebbero a situazioni limite con lunghezza di correlazione nulla, in accordo con l'eq. (50).

Queste però non sono le sole possibilità. Una lunghezza di correlazione nulla si potrebbe, ad esempio, verificare per un K finito. Inoltre, non vi è alcun motivo di supporre che \mathbb{R}_b abbia punti solo fissi. Le iterazioni potrebbero, ad esempio, avvicinarsi ad attrattori strani nello spazio dei parametri, mostrare un comportamento periodico, o essere totalmente caotiche.

8 Domini di attrazione e classi di universalità

In generale, ci si aspetta che \mathbb{R}_b abbia almeno un punto fisso fisico. Tali punti fissi sono proprietà della trasformazione \mathbb{R}_b stessa e non di un insieme di sistemi hamiltoniane. Ogni punto K^* di \mathbb{R}_b avrà, tuttavia, un **dominio di attrazione**, ossia un sottoinsieme di hamiltoniane che si avvicinano a K^* . Ciascuno di questi sottoinsiemi formerà la **classe di universalità** di sistemi hamiltoniani che hanno **un insieme comune di esponenti critici** (come dimostreremo nel seguito). Il problema dell'universalità è allora equivalente a classificare i domini di attrazione dei punti fissi fisici delle trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione. Nello

spazio dei parametri K , un dominio di attrazione è detto **superficie critica** o, in termini matematici, **varietà stabile**. Quindi, **una traiettoria con condizione iniziale K_0 , con $\beta = \beta_C$, sta tutta sulla superficie critica di un punto fisso critico**. Per quanto visto precedentemente, i sistemi sulla superficie critica hanno lunghezza di correlazione infinita.

Un altro schema di approssimazione per il modello di Ising bidimensionale Riconsideriamo la mappa (21a). Assumiamo che K sia piccolo, il che corrisponde ad alte temperature. Allora sviluppando in serie la mappa (21a) otteniamo

$$K_1 = \frac{11}{42}(4K)^2 = 2K^2$$

$$L_1 = K^2$$

$$U_1 = \frac{11}{82}(4K)^2 - \frac{11}{22}(2K)^2 = 0$$

Risulta quindi giustificato trascurare, come abbiamo fatto prima, l'accoppiamento a 4 spin U_1 . Adesso però, a differenza di prima, vogliamo tenere l'accoppiamento a secondi vicini. L'idea è quella di introdurre inizialmente un accoppiamento L tra secondi vicini e di trattarlo come una

piccola perturbazione. Così facendo arriviamo alle seguenti equazioni del gruppo di rinormalizzazione

$$\begin{cases} K_n = 2K_n^2 + L_n \\ L_n = K_n^2 \end{cases} \quad (51)$$

Seguendo la ricetta del gruppo di rinormalizzazione, troviamo i punti fissi non banali della mappa (51). È immediato vedere che

$$K^* = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad L^* = \frac{1}{9}. \quad (52)$$

è la sola soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} K = 2K^2 + L \\ L = K^2 \end{cases} \quad (53)$$

K^* **non è** il punto critico del modello di Ising in due dimensioni (che non ha accoppiamenti tra secondi vicini). Per trovarlo, facciamo così: poniamo $L_0 = 0$ come condizione iniziale (che è quella del modello di Ising) e variamo la condizione iniziale K_0 fin tanto che non troviamo

un valore di K_0 che per $n \rightarrow \infty$ evolve nel punto fisso $K^* = \frac{1}{3}$. Questa condizione iniziale è il valore critico K_C . Il valore che si trova è

$$K_C = 0.3921 \dots \quad (54)$$

L'universalità è incorporata nello schema di approssimazione utilizzato quando si considera il caso $L_0 \neq 0$. Poiché l'eq. (51) ha un solo punto critico, ne segue che per ogni L_0 esiste un $K_0 = K_C(L_0)$ tale che le iterazioni dell'eq. (51) tendono verso il punto critico (K^*, L^*) . L'insieme di queste coppie di punti (K_0, L_0) forma la superficie critica della dinamica (approssimata) del gruppo di rinormalizzazione, come mostrato in fig. 11. Tutti questi punti hanno gli stessi esponenti critici (come mostreremo nella prossima sezione). Ne segue che il modello di Ising a primi vicini e quello a primi e secondi vicini sono nella stessa classe di universalità.

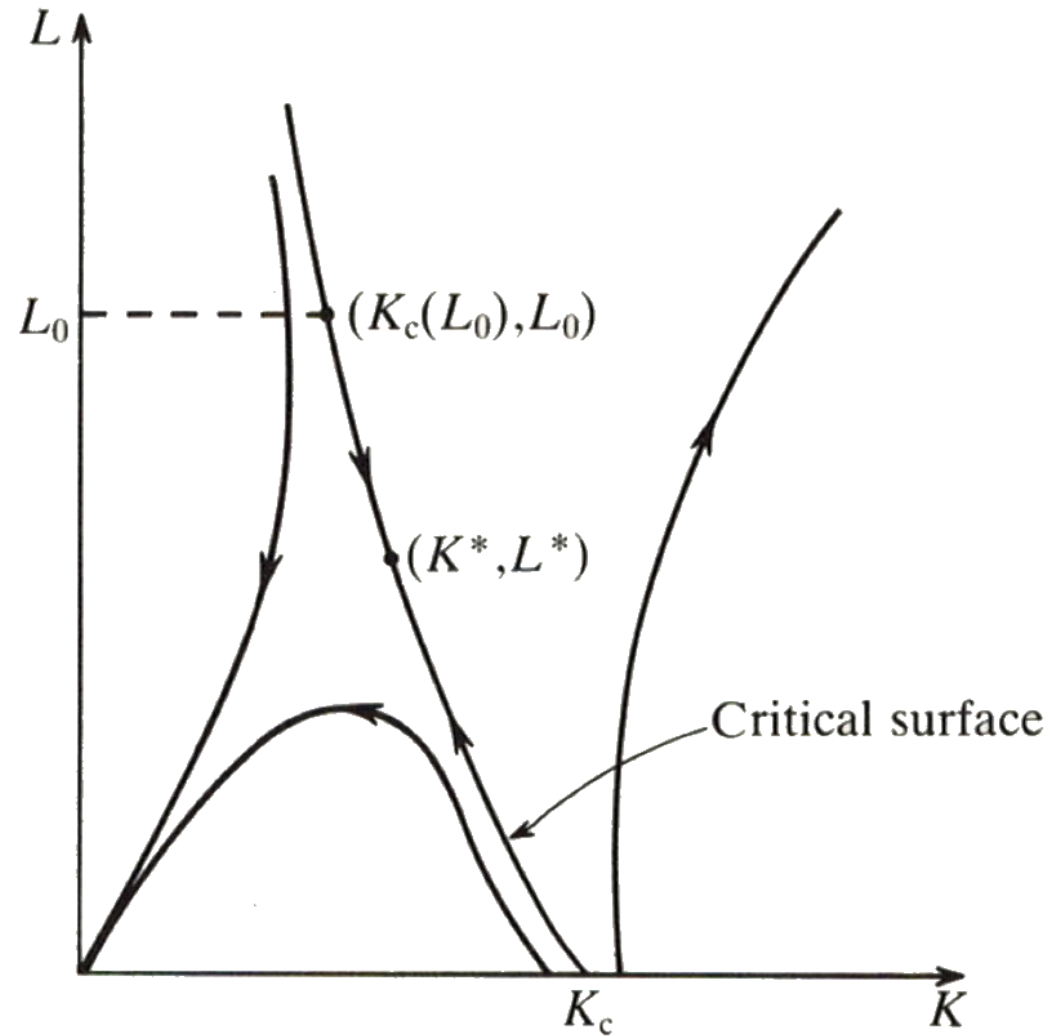


Figura 11: Superficie critica e punto fisso nello schema di approssimazione (51) per il modello di Ising bi-dimensionale.

9 Linearizzazione nell'intorno di un punto fisso

Supponiamo di prendere una condizione iniziale K vicina al suo valore critico K_{0C} scegliendo β vicino a β_C . Sebbene, come abbiamo sottolineato, il punto fisso fisico K^* è instabile, ci aspettiamo che per β sufficientemente vicino a β_C , la traiettoria si avvicini inizialmente a K^* prima di allontanarsi successivamente dalla superficie critica. Assumendo che le cose stiano così, scriviamo

$$K_n = K^* + \delta K_n \quad (55)$$

dove K_n è piccolo fin tanto che n non diventa troppo grande, diciamo per $n \sim N$. Sostituendo l'eq. (55) nell'eq. (43) e espandendo il lato destro in δK_n , otteniamo, dopo aver trascurato i termini di ordine superiore al primo, la forma lineare

$$\delta K_n = \mathbb{A}_b(K^*) \delta K_n \quad (56)$$

dell'eq. (43), dove $\mathbb{A}_b(K^*)$ denota la linearizzazione di \mathbb{R}_b nell'intorno del punto K^* .

Se adesso assumiamo che $\mathbb{A}_b(\mathbf{K}^*)$ ha un insieme completo di autovettori ϕ_i con corrispondenti autovalori λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, vale a dire

$$\mathbb{A}_b(\mathbf{K}^*)\phi_i = \lambda_i\phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (57)$$

possiamo costruire lo sviluppo in autovettori di $\delta\mathbf{K}_n$,

$$\delta\mathbf{K}_n = \sum_i u_i^{(n)}\phi_i, \quad (58)$$

e applicare $\mathbb{A}_b(\mathbf{K}^*)$ n volte a partire da $n = N$, ottenendo

$$\delta\mathbf{K}_{n+N} = \mathbb{A}_b(\mathbf{K}^*)^n\delta\mathbf{K}_N = \sum_i \lambda_i^n u_i^{(N)}\phi_i \quad (59)$$

che fornisce, per confronto con l'eq. (58),

$$u_i^{(N+n)} = \lambda_i^n u_i^{(N)} \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (60)$$

I termini $u_i^{(N)}$ sono chiamati ***campi di scala*** (scaling fields). Essi cresceranno, e quindi diventeranno ***rilevanti***, se gli associati autovalori λ_i

sono maggiori di 1 in modulo. Similmente, se $|\lambda_i| < 1$, l'associato campo di scala è **irrilevante**. Il caso **marginale** $|\lambda_i| = 1$ pone problemi interessanti, ma non ce ne occuperemo.

Se la condizione iniziale è sulla superficie critica, allora $K_n \rightarrow K^*$ e quindi $\delta K_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Ne consegue che i campi di scala iterati $u_i^{(n)}$ sulla superficie critica devono avvicinarsi a zero quando $n \rightarrow \infty$. Questo sarà sempre il caso per i campi di scala irrilevanti ma per quelli rilevanti dobbiamo richiedere che essi si annullino identicamente sulla superficie critica. La superficie critica può quindi essere equivalentemente caratterizzata dalla condizione di annullamento dei campi di scala rilevanti.

Pertanto, per quanto riguarda il comportamento critico, abbiamo bisogno di prendere in considerazione solo i campi di scala rilevanti, che nella maggior parte dei casi si possono dedurre da considerazioni fisiche. Per esempio, se consideriamo un sistema ferromagnetico a campo nullo, il punto critico è univocamente determinato impostando la temperatura T pari al suo valore critico T_C . Poiché i campi di scala rilevanti devono scomparire a $T = T_C$, ne consegue che, in generale, per tali sistemi, solo un solo campo può essere rilevante perché altrimenti si avrebbero

troppe condizioni sul T_C . Per per questi casi, ci aspettiamo quindi che

$$\lambda_1 > 1 > \lambda_2, \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \dots \quad (61)$$

Se si assume, come di consueto, che i K_n sono funzioni regolari della temperatura T , ci possiamo ricondurre al caso già considerato nella sezione 6 e, in particolare all'eq. (29) che adesso diventa

$$\delta K'_1 = \lambda_1 \delta K_1, \quad \text{con} \quad \lambda_1 \equiv b^y. \quad (62)$$

con

$$y = \frac{\log \lambda_1}{\log b} \quad (63)$$

da cui segue, per l'eq. (35), l'esponente critico per l'energia libera. Analogamente, si determina l'esponente critico per la funzione di correlazione.

10 Osservazioni conclusive

Facciamo il punto facendo riferimento alla fig. 12.

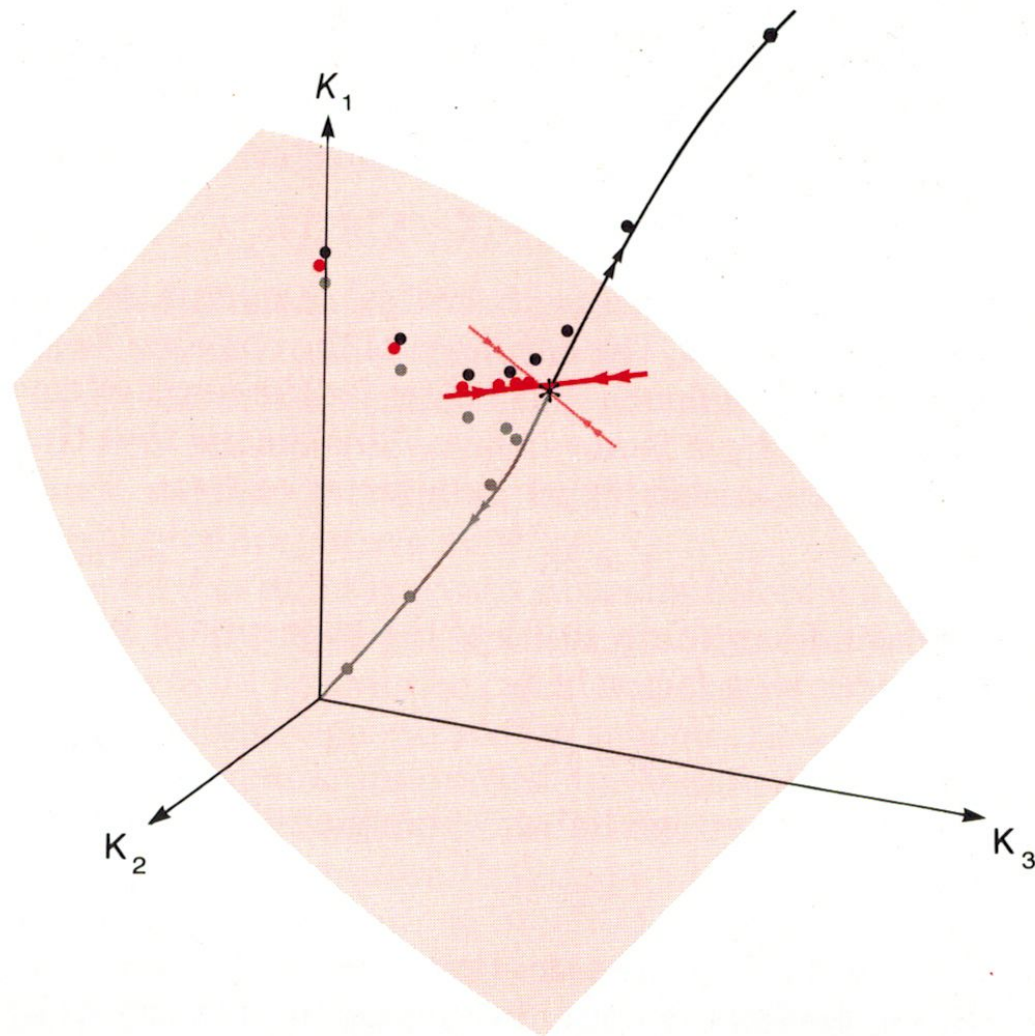


Figura 12: Flusso del gruppo di rinormalizzazione nello spazio \mathcal{H} .

In fig. 12 è rappresentato il flusso del gruppo di rinormalizzazione nello spazio \mathcal{H} delle hamiltoniane caratterizzate da tre costanti di accoppiamento. I tre assi K_1, K_2, K_3 corrispondono a primi, secondi e terzi vicini. I punti sull'asse K_1 vicini (lontani) dell'origine corrispondono al modello di Ising ad alte (basse) temperature. Il foglio ombreggiato è una rappresentazione schematica della superficie critica (varietà instabile) cioè l'insieme dei punti in cui la lunghezza di correlazione è infinita.

La superficie critica interseca l'asse K_1 al valore critico dell'accoppiamento del modello di Ising più vicino. Il punto fisso critico del gruppo trasformazione è mostrato, con le sue tre "auto-direzioni" lungo il quale il flusso è una semplice una contrazione o un'espansione: le direzioni lungo le quali il gruppo di rinormalizzazione contrae si trovano sulla superficie critica. L'insieme dei punti rossi rappresenta schematicamente i successivi accoppiamenti che si ottengono se si incomincia al punto critico a primi vicini: essi evolvono verso il punto critico fisso. Se si parte da un accoppiamento a primi vicini, che è appena sopra o appena sotto la temperatura critica, inizialmente la dinamica fa evolvere verso questo punto fisso, ma alla fine si allontana verso il punto a temperatura alta o bassa (lungo l'auto-direzione nera) sotto l'influenza della perturbazione

rilevante. Il comportamento su larga scala di tutti i sistemi che si trovano abbastanza vicino alla superficie critica è descritto da accoppiamenti efficaci che si trovano sulla linea unidimensionale emanante dal punto fisso critico lungo l'auto-direzione rilevante.