

22

Integrali di Fourier e metodo della fase stazionaria

Indice

22.1	Notazioni standard dell'analisi asintotica	529
22.2	Integrali di Fourier e lemma di Riemann-Lebesgue	530
22.3	Metodo della fase stazionaria	531
22.4	Asintotica a onde corte in meccanica quantistica	534
22.5	Diffrazione in ottica	535
22.6	Asintotica a grandi tempi in meccanica quantistica	539

22.1 Notazioni standard dell'analisi asintotica

I simboli O , o e \sim sono definiti nel modo seguente. Supponiamo che $f(z)$ e $g(z)$ siano funzioni complesse definite in qualche regione $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ del piano complesso e che abbiano un limite quando $z \rightarrow z_0$ in \mathcal{R} . Allora si considera le seguenti notazioni abbreviate per descrivere le proprietà relative di queste funzioni nel limite $z \rightarrow z_0$.

ASINTOTICAMENTE LIMITATA

$$f(z) = O(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

se il rapporto $|f(z)/g(z)|$ è limitato quando $z \rightarrow z_0$. Diciamo allora che $f(z)$ è asintoticamente limitata da $g(z)$ quando $z \rightarrow z_0$.

ASINTOTICAMENTE PIÙ PICCOLA

$$f(z) = o(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che $f(z)/g(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow z_0$. Vale a dire, $f(z)$ è asintoticamente più piccola di $g(z)$ quando $z \rightarrow z_0$.

ASINTOTICAMENTE UGUALE

$$f(z) \sim g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che (assumendo $g(z)$ non nulla in un intorno di z_0)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Equivalentemente, questo significa che per $z \rightarrow z_0$

$$f(z) = g(z) + o(g(z))$$

Esempi:

- $f(t) = O(1)$ quando $t \rightarrow t_0$ significa che $f(t)$ è limitata quando $t \rightarrow t_0$ (si dice che $f \in O(1)$ quando è limitata ovunque).
- Se $f(t) = 5t^2 + t + 3$, allora, per $t \rightarrow \infty$, $f(t) = o(t^3)$, $f(t) = O(t^2)$ e $f(t) \sim 5t^2$. Per $t \rightarrow 0$, $f(t) \sim 3$.
- Per $t \rightarrow \infty$, $t^{1000} = o(e^t)$.

Osservazioni:

- La funzione $g(z)$ nelle definizioni precedenti è usualmente detta *funzione di calibro*, in quanto è la funzione rispetto a cui si calibra il comportamento limite di $f(z)$.
- Come notazione alternativa a $f(z) = o(g(z))$, spesso (specialmente in fisica) si usa

$$f(z) \ll g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

22.2 Integrali di Fourier e lemma di Riemann-Lebesgue

Vogliamo studiare il comportamento asintotico dell'*integrale di Fourier generalizzato*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \quad (22.1)$$

nel limite $\lambda \rightarrow \infty$. Intuitivamente, ci aspettiamo che l'integrale sia pari a zero nel limite: se λ è grande, la funzione integranda oscilla molto rapidamente e ci aspettiamo che ci sia una cancellazione tra contributi positivi e negativi di intervalli adiacenti, e quindi un valore dell'integrale prossimo allo zero. In effetti, vale il seguente teorema:

LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE. *Se $f(x)$ è integrabile e $S(x)$ è continuamente differenziabile in $a \leq x \leq b$ e, inoltre, non è costante in nessun sotto-intervallo di $a \leq x \leq b$, allora, per $\lambda \rightarrow \infty$*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \rightarrow 0$$

22.3 Metodo della fase stazionaria

Stabilito che $F(\lambda)$ tende a 0, si vuole determinare il suo ordine di infinitesimo per $\lambda \rightarrow \infty$. Nella seconda metà dell'800 Stokes e Kelvin, principalmente interessati ad applicazioni all'idrodinamica, svilupparono un metodo, noto come *metodo della fase stazionaria*, che è proprio mirato a raggiungere questo scopo.

Consideriamo prima il caso in cui $S'(x) \neq 0$. Moltiplichiamo e dividiamo per $S'(x)$ sotto il segno di integrale a secondo membro della (22.1), quindi integriamo per parti:

$$\int_a^b \underbrace{e^{i\lambda S(x)}}_{\text{int}} \underbrace{S'(x)}_{\text{der}} \frac{f(x)}{S'(x)} dx = e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx$$

Allora

$$F(\lambda) = \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} - \underbrace{\frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx}_{\text{termine integrale}}$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue, il termine integrale è $o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ e quindi, per $\lambda \rightarrow \infty$

$$F(\lambda) \sim \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{22.2}$$

Tuttavia, se nell'intervallo $[a, b]$ la funzione $S(x)$ ha un *punto critico* o *stazionario*, cioè un punto c in cui si annulla la sua derivata, $S'(c) = 0$, dobbiamo cambiare strategia: non possiamo integrare per parti ed avere un S' a denominatore.

L'idea centrale del metodo della fase stazionaria è che in presenza di un punto critico c di S , il contributo dominante allo sviluppo asintotico di $F(\lambda)$ proviene proprio dall'intorno di $t = c$. Intuitivamente, l'idea del metodo è chiara: nell'intorno di un punto in cui la fase è stazionaria non c'è cancellazione, come si può verificare con un esempio. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^3 x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx \tag{22.3}$$

e riportiamo in figura 22.1 la funzione integranda per diversi valori di λ . La figura dimostra perché è la regione intorno al punto stazionario della cubica $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, cioè intorno a $x = 1$, che contribuisce maggiormente all'integrale (22.3). In figura sono mostrati i grafici di $x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$ per valori successivamente crescenti di λ (curve solide in rosso); la curva blu tratteggiata è la cubica

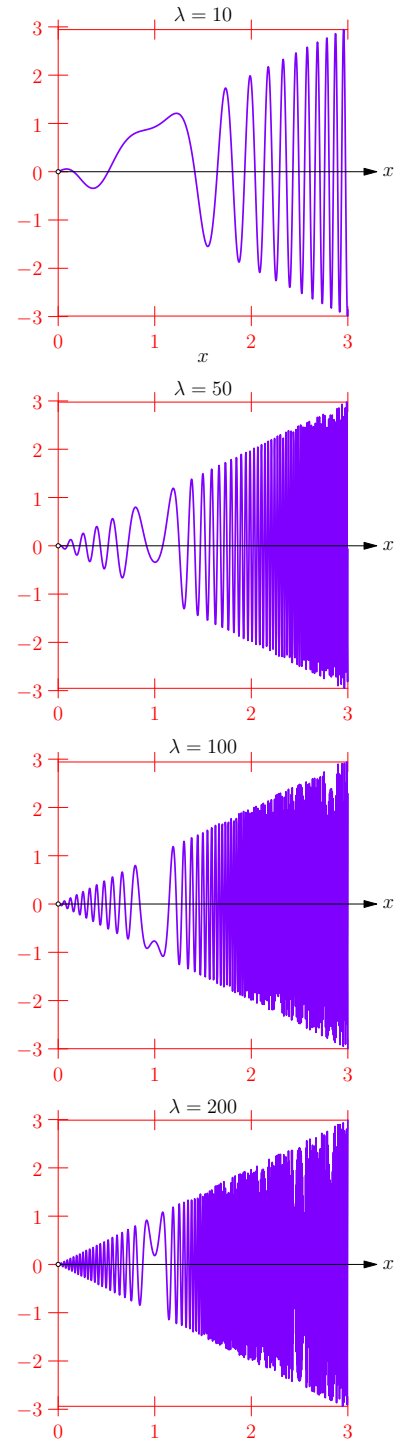


Figura 22.1: Grafici della funzione

$$S(x) = x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$$

per diversi valori di λ .

$S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ (che un minimo in $x = 1$). Vediamo che, fuori da un intorno del punto stazionario di $S(x)$, le aree tra l'asse delle x e la curva $x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$ si cancellano approssimativamente, in completo accordo con il lemma di Riemann-Lebesgue.

Spieghiamo il metodo della fase stazionaria in 3 passi.

PRIMO PASSO. Sia c un punto stazionario di S (assumiamo per semplicità che ce ne sia uno solo) e sia $\epsilon > 0$ piccolo. Allora

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \left[\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^b \right] e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \\ &= \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Infatti, per i due integrali che non contengono il punto critico possiamo integrare per parti, applicare Riemann-Lebesgue e arrivare ad un'equazione simile alla (22.2). Poiché, come vedremo, il contributo nell'intorno di c è dominante, d'ora in poi trascureremo questa correzione di ordine $1/\lambda$ e scriveremo

$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

SECONDO PASSO. Se ϵ è abbastanza piccolo, per ottenere il comportamento dell'ordine dominante dell'integrale, le seguenti approssimazioni sono giustificate:

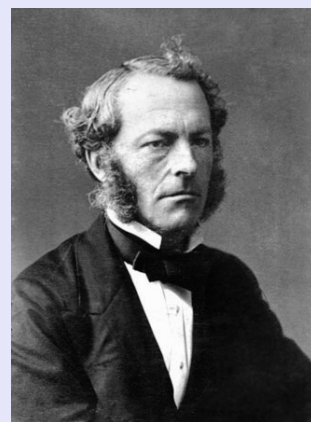
$$\begin{aligned} S(x) &\approx S(c) + \frac{1}{2}S''(c)(x-c)^2 \\ f(x) &\approx f(c) \end{aligned}$$

Naturalmente, nello sviluppo di Taylor di $S(x)$ manca il termine del prim'ordine in quanto $S'(c) = 0$. Abbiamo inoltre assunto che $S''(c) \neq 0$: se così non fosse, dovremmo considerare termini di ordine superiore (e fermarci al primo termine non nullo). Sia come sia, otteniamo

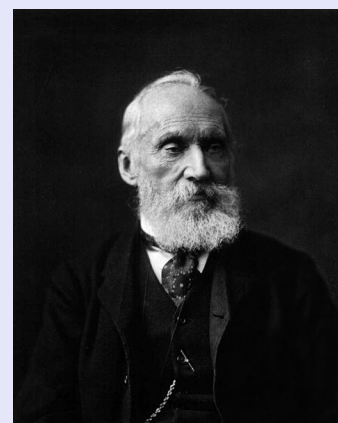
$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{i\lambda(S(c) + \frac{1}{2}S''(c)(x-c)^2)} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

TERZO PASSO. Adesso estendiamo il dominio di integrazione da $-\infty$ a $+\infty$. Per quanto apparentemente bizzarro, questo è legittimo perché in questo modo introduciamo correzioni di ordine $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, che possono essere trascurate. Allora (portando anche fuori dall'integrale le costanti)

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\lambda}{2}S''(c)(x-c)^2} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$



Sir George Stokes (1819–1903), è stato un matematico e fisico irlandese che diede importanti contributi alla dinamica dei fluidi (noto per le equazioni di Navier-Stokes), all'ottica e alla fisica-matematica



William Thomson, primo Barone Kelvin (1824–1907) è stato uno scienziato e ingegnere britannico. Fu tra i fisici più influenti del XIX secolo.

Con il cambiamento di variabili (dovuto a Morse)

$$u = +\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(c)|(x-c)}$$

si ottiene

$$F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c)} \sqrt{\frac{2}{\lambda|S''(c)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \operatorname{sgn}[S''(c)]u^2} du,$$

dove

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

(vedi appendice). Quindi, l'asintotica di $F(\lambda)$ è

$$F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c) + i \operatorname{sgn}[S''(c)]\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty \quad (22.4)$$

Fine della descrizione del metodo della fase stazionaria. Adesso alcune osservazioni.

1. Se $c = a$ o $c = b$, il contributo all'integrale, che adesso è solo su un intervallo semi-infinito, è metà del risultato asintotico trovato. In questo caso occorre dunque moltiplicare per $\frac{1}{2}$ il risultato che abbiamo trovato.
2. Se $S(x)$ ha molti punti stazionari in $[a, b]$, allora spezziamo l'integrale in intervalli che contengono solo un punto stazionario, li trattiamo indipendentemente usando il metodo appena descritto e poi sommiamo tutti i contributi.
3. Se il punto stazionario è tale che tutte le derivate di S sono nulle fino alla derivata m -esima, che è non nulla, allora lo sviluppo in serie della fase sarà $S(x) \approx S(c) + \frac{1}{m!}S^{(m)}(c)(x-c)^m$.

ESERCIZIO 22.1. Calcoliamo il termine dominante dello sviluppo asintotico dell'integrale (22.3), che scriviamo nella forma

$$\operatorname{Re}\{F(\lambda)\}, \quad F(\lambda) = \int_0^3 x e^{i\lambda(\frac{1}{3}x^3 - x)} dx$$

Riconosciamo $f(x) = x$ e $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Si ha $S'(x) = x^2 - 1$, e solo una delle due radici, $x = 1$ è dentro l'intervallo di integrazione. Poiché $S''(x) = 2x > 0$ per $x \geq 0$, il punto $x = 1$ è un minimo locale e globale. Allora

$$f(1) = 1, \quad S(1) = -\frac{2}{3}, \quad S''(1) = 2$$

e dunque, applicando la (22.4),

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3}\right)}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Prendendone la parte reale, otteniamo l'asintotica cercata:

$$\int_0^3 x \cos \left[\lambda \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3} \right), \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

22.4 Asintotica a onde corte in meccanica quantistica

Applichiamo il metodo della fase stazionaria per risolvere un esercizio di interesse fisico.

Esercizio 1. Determinare l'andamento asintotico $\hbar \rightarrow 0$ della soluzione del seguente problema al contorno

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(x, 0) = f_0(x) = r(x)e^{i\hbar s(x)} \end{cases}$$

per $s(x) = mv_0x$, essendo v_0 una costante positiva, e per $r(x)$ funzione reale positiva.

Sol. Per quanto visto nella lezione 19, la soluzione di

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

è

$$f(x, t) = G \star f_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f_0(y) dy$$

dove

$$G(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t}$$

L'andamento asintotico di $f(x, t)$ è ottenuto ponendo $\lambda = 1/\hbar$ e studiandone l'asintotica per $\lambda \rightarrow \infty$. Dopo aver inserito G nel prodotto di convoluzione, tenuto conto della condizione iniziale, e posto $\lambda = 1/\hbar$, si ottiene

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} F(\lambda) \quad (22.5)$$

dove

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy.$$

Possiamo riscrivere questo integrale come

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S(y)} r(y) dy$$

dove

$$S(y) = \frac{m(x-y)^2}{2t} + mv_0y.$$

Determiniamo i punti stazionari di $S(y)$:

$$S'(y) = \frac{m(y-x)}{t} + mv_0 = 0 \implies y = x - v_0t \stackrel{\text{def}}{=} c$$

Il valore della fase in c è

$$S(c) = \frac{m(v_0t)^2}{2t} + mv_0(x - v_0t) = mv_0x - \frac{1}{2}mv_0^2t.$$

Per l'asintotica ci serve anche la derivata seconda di S calcolata in c .

Si ha

$$S''(y) = \frac{m}{t} > 0$$

Applichiamo la (22.4),

$$F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c) + i\text{sgn}[S''(c)]\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty.$$

Otteniamo

$$F(\lambda) \sim r(x - v_0t)e^{i\lambda(mv_0x - \frac{1}{2}mv_0^2t) + i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi t}{\lambda m}}$$

Sostituendo il valore di $F(\lambda)$ nella (22.5) e ripristinando $\hbar = 1/\lambda$ si ottiene l'asintotica cercata (osservando che le radici si cancellano a vicenda e che la radice di i a denominatore si cancella con $e^{i\frac{\pi}{4}}$). Si ha

$$f(x, t) \sim r(x - v_0t)e^{\frac{i}{\hbar}(mv_0x - \frac{1}{2}mv_0^2t)}$$

che descrive un pacchetto d'onde con numero d'onda

$$k = \frac{mv_0}{\hbar}$$

e frequenza

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

il cui profilo iniziale $r(x)$ si propaga nel corso del tempo lungo la traiettoria classica $x(t) = x + v_0t$ senza cambiare di forma.

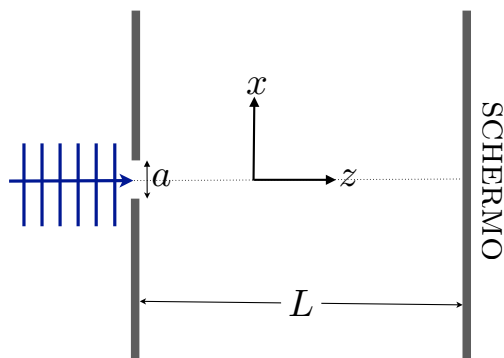
22.5 Diffrazione in ottica

Perché le trasformate di Fourier spuntano fuori da tutte le parti?

Succintamente, la risposta è: *perché le trasformate di Fourier sono naturalmente prodotte dall'evoluzione temporale a grandi tempi, o a grandi distanze, di onde di vario tipo (sonore, elettromagnetiche, quantistiche etc.).*

Chiariamo questo, considerando degli esempi.

Consideriamo la situazione descritta in figura, con ovvio significato dei simboli: un'onda di luce monocromatica con vettore numero d'onda $\mathbf{k} = K\mathbf{e}_z$ passa attraverso un fenditura di apertura a e poi incide su uno schermo a distanza $L \gg a$ dal piano della fenditura.



Si vuole determinare il profilo dell'onda allo schermo (il cui quadrato è l'intensità dell'onda che viene rilevata allo schermo).

Per semplicità, trattiamo l'onda come uno scalare $\Psi = \Psi(x, z, t)$ e vista la geometria del problema, non ci occupiamo della variabile y ortogonale al piano della figura. Queste non sono assunzioni cruciali, ma servono solo a semplificare l'esposizione. Dopo che lo studente ha compreso tutti i passaggi, non è difficile riformulare il tutto in termini di campo elettrico \mathbf{E} , invece dello scalare Ψ , includendo la variabile y .

Assumiamo che la propagazione dell'onda avvenga nel vuoto, per cui Ψ evolve secondo l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

dove $\omega/K = c$. Poiché l'onda è monocromatica, in regime stazionario, possiamo scrivere

$$\Psi(x, z, t) = \psi(x, z)e^{i\omega t}$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione delle onde, si arriva all'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -K^2 \psi$$

Poniamo

$$\psi = f(x, z)e^{iKz}$$

(si osservi che questa non è un'assunzione, ma semplicemente una definizione della funzione f) e sostituiamo nell'equazione di Helmholtz. Si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2iK \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (22.6)$$

Per tenere conto delle scale fisiche del problema e della condizione $L \gg a$, conviene passare a variabili adimensionate. La presenza dell'apertura di ampiezza a , che restringe il fascio monocromatica ad una larghezza a quando passa attraverso la fenditura, fissa una scala naturale sull'asse delle x . Poniamo allora $X = x/a$.

A questo punto, la scala a longitudinale e il numero d'onde K (fissato, essendo una caratteristica del fascio monocromatico incidente), determinano Ka^2 come scala nella direzione trasversale z . Poniamo allora $Z = z/(Ka^2)$. In termini di queste nuove coordinate adimensionate l'equazione (22.7) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^4} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2iK \frac{1}{Ka^2} \frac{\partial f}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2i \frac{\partial f}{\partial Z} &= 0 \end{aligned}$$

cioè,

$$2i \frac{\partial f}{\partial Z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

dove $\epsilon = 1/(Ka)$. Quindi, se la scala trasversale (l'apertura delle fenditura) è molto più grande della lunghezza d'onda incidente ($= 2\pi/K$), la derivata seconda a secondo membro può essere trascurata e si ha

$$i \frac{\partial f}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (22.7)$$

L'approssimazione appena descritta è nota come *approssimazione parassiale* (nei libri di ottica non è sempre descritta in una forma comprensibile). L'equazione (22.7) è un'equazione di "tipo-Schrödinger" con Z che gioca il ruolo del tempo. Risolviamola per il dato "iniziale", cioè per $Z = 0$, che corrisponde alla fenditura di apertura a . Ricordando che X è in unità di a , cioè $X = x/a$, il dato iniziale è

$$f_0(X) = \begin{cases} A_0 & \text{se } -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quanto visto nella lezione precedente (e nella lezione 19), si ottiene

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(X-X')^2/(2Z)} f_0(X') dX' \quad (22.8)$$

cioè

$$f(X, Z) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX' \quad (22.9)$$

La funzione $f(X, Z)$ può essere espressa in termini di integrali di Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(y^2) dy$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(y^2) dy$$

mediante un cambiamento di variabili nell'integrale (22.9) (e ovviamente usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso). Procedendo in questo modo si ottiene

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2i}} A_0 \left\{ C\left(\frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) - C\left(\frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) + iS\left(\frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) - iS\left(\frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) \right\}$$

che è il profilo di diffrazione di Fresnel, detto anche "a campo vicino" o "near field". Il profilo di diffrazione "far field", cioè a "campo lontano" può essere ottenuto direttamente dalla (22.9) per $Z \gg 1$.

Consideriamo l'argomento dell'esponenziale complesso nella (22.9):

$$\frac{(X - X')^2}{2Z} = \frac{(X^2 - 2X'X + X'^2)}{2Z} \approx \frac{(X^2 - 2X'X)}{2Z}$$

per $X'^2/2Z \ll 1$, che è proprio la condizione di campo lontano (regime di Fraunhofer). Infatti, osservando che al massimo $X' = 1/2$ e detta $z = L$ la distanza tra fenditura e schermo, la condizione diventa l'approssimazione di Fraunhofer

$$Ka^2 \ll 2L.$$

Dunque se questa condizione di campo lontano vale, la (22.9) diventa

$$f(X, Z) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX'$$

$$\sim A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-(i/Z)XX'} dX'$$

$$= A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \operatorname{sinc}\left(\frac{X}{2Z}\right)$$

Morale: sullo schermo lontano si forma un profilo di diffrazione proporzionale alla trasformata di Fourier del campo "iniziale". Naturalmente, cioè che si misura in un esperimento (o si vede con gli occhi) è il quadrato del campo, cioè l'intensità luminosa.

Questo fenomeno è del tutto generale: in una modellizzazione più realistica tri-dimensionale, in cui, per esempio, si considera come fenditura un'apertura circolare, il profilo che si forma sullo schermo risulta essere proporzionale alla trasformata di Fourier dell'apertura circolare.

22.6 Asintotica a grandi tempi in meccanica quantistica

In maniera analoga a quanto visto per l'ottica, possiamo studiare il comportamento a grandi tempi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. I passaggi sono del tutto simili, anche se adesso non assumeremo una funzione d'onda iniziale particolare come prima. Adesso la condizione iniziale è $f(x, 0) = f_0(x)$, senza ulteriore specificazione.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger è ottenuta dalla (22.8) per $Z = t$ e $X = \sqrt{\frac{m}{\hbar}}x$:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im(x-y)^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} e^{imy^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &\sim \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} f_0(y) dy \quad (\text{perché } e^{imy^2/(2\hbar t)} \sim 1 \text{ per } t \rightarrow \infty) \\ &= \sqrt{\frac{m}{i\hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \widehat{f}_0\left(\frac{mx}{\hbar t}\right) \end{aligned}$$

Consideriamo la distribuzione di probabilità $\rho(p)$ di $p = \frac{mx}{t}$ a grandi tempi:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{t}{m} \left| f\left(\frac{t}{m}p\right) \right|^2 \\ &= \frac{t}{m} \frac{m}{\hbar t} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

Risulta così dimostrato che la distribuzione di probabilità dell'impulso asintotico (a grandi tempi)

$$p = \frac{mx}{t}$$

è data dalla trasformata di Fourier della funzione d'onda iniziale. A volte questo fatto è assunto come un assioma della meccanica quantistica, ma è, in effetti, un teorema.

L'asintotica a grandi tempi è anche un'asintotica a grandi distanze. Infatti, nel caso quantistico $x/t = O(1)$ e nel caso della diffrazione $X/Z = O(1)$. Chiarito questo, possiamo ottenere l'asintotica direttamente con il metodo della fase stazionaria partendo dalla soluzione $f(x, t)$ espressa in trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t} e^{ikx} \widehat{f}_0(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \widehat{f}_0(k) dk \end{aligned}$$

La fase è

$$S(k) = k \frac{x}{t} - \frac{k^2 \hbar}{2m}$$

e la sua derivata

$$S'(k) = \frac{x}{t} - \frac{k}{m\hbar}$$

si annulla per

$$k_* = \frac{mx}{\hbar t}$$

Applicando il metodo della fase stazionaria per $t \rightarrow \infty$, $x/t = O(1)$, a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \hat{f}_0(k) dk$$

arriviamo allo stesso risultato per l'asintotica di $f(x, t)$ che abbiamo ottenuto precedentemente.

23

Integrali di Laplace e serie asintotiche

Indice

23.1 Integrali di Laplace	541
23.2 Metodo di Laplace	542
23.3 Transizioni di fase magnetiche	545
23.4 Serie asintotiche e serie convergenti	550
23.5 Sviluppi asintotici	552

23.1 Integrali di Laplace

Un integrale di Laplace ha la forma

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx \quad (23.1)$$

dove assumiamo che $\lambda > 0$. Tipicamente, λ è un parametro grande e siamo interessati nell'andamento asintotico dell'integrale quando $\lambda \rightarrow \infty$. Osserviamo che (analogamente a quanto visto per gli integrali di Fourier), possiamo scrivere $F(\lambda)$ nella forma

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)} \left(\frac{d}{dx} e^{\lambda S(x)} \right) dx \quad (23.2)$$

Integrando per parti

$$F(\lambda) = \underbrace{e^{\lambda S(x)} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine di bordo}} - \underbrace{\frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{\lambda S(x)} dx}_{\text{termine integrale}}$$

Se il termine integrale è asintoticamente più piccolo del termine di bordo, cioè

$$\text{termine integrale} = o(\text{termine di bordo})$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, allora

$$F(\lambda) \sim \underbrace{e^{\lambda S(x)} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine di bordo}}$$

e abbiamo così un'utile approssimazione dell'integrale quando $\lambda \rightarrow \infty$. Tuttavia, in generale, questo metodo non funziona perché la precedente approssimazione vale solo se $S'(x)$ non si annulla.

La situazione è simile a quella degli integrali generalizzati di Fourier. Adesso la situazione è la seguente: se $S(x)$ ha un massimo globale per $x = c$, con $a \leq c \leq b$, allora è soltanto l'intorno di c che fornisce il contributo dominante all'integrale quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Questo fenomeno può essere illustrato considerando l'integrale

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\ln r - r)} dr$$

dove $S(r) = (\ln r - r)$ ha un massimo per $r = 1$. Se riportiamo in figura la funzione integranda per valori crescenti di λ , vediamo che è la regione intorno a $r = 1$ che contribuisce maggiormente all'integrale. Si veda la figura 23.1.

23.2 Metodo di Laplace

Il metodo può essere descritto in maniera analoga al metodo della fase stazionaria.

PRIMO PASSO. Possiamo approssimare $F(\lambda)$ con $F(\lambda; \epsilon)$ dove

$$F(\lambda; \epsilon) = \begin{cases} \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } a < c < b \\ \int_a^{a+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } c = a \\ \int_{b-\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } c = b \end{cases}$$

dove ϵ è arbitrario (solo soggetto al vincolo che ciascuno dei sotto-intervalli di integrazione sia contenuto in $[a, b]$). Questo passo è giustificato se l'asintotica di $F(\lambda; \epsilon)$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, non dipende da ϵ ed è identica all'asintotica di $F(\lambda)$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Queste due condizioni sono in effetti verificate. Consideriamo per esempio il caso $a < c < b$.

I termini

$$\left| \int_a^{c-\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right| + \left| \int_{c+\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right|$$

sono dominati da $F(\lambda)$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, perché $e^{\lambda S(x)}$ è esponenzialmente piccolo quando è confrontato con $e^{\lambda S(c)}$ in $a \leq x \leq c - \epsilon$

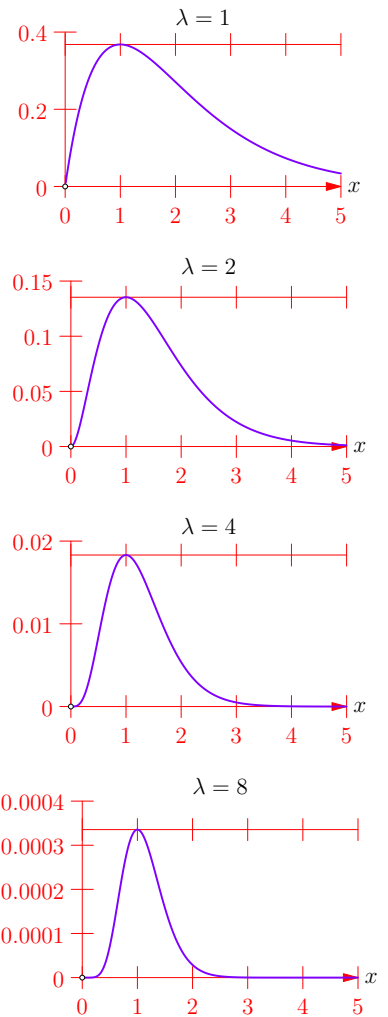


Figura 23.1: Grafici della funzione

$$S(r) = e^{\lambda(\ln r - r)}$$

per diversi valori di λ .

e $c + \epsilon \leq x \leq b$. In altre parole, cambiare i limiti di integrazione e passare da $F(\lambda)$ a $F(\lambda; \epsilon)$ introduce *errori esponenzialmente piccoli*.

SECONDO PASSO. Analogamente al caso della fase stazionaria, consideriamo $F(\lambda) \sim F(\lambda; \epsilon)$ e facciamo le approssimazioni:

- Se $S'(c) = 0$ per $a \leq c \leq b$ e $S''(c) \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(c) \\ S(x) &\approx S(c) + \frac{1}{2}S''(c)(x-c)^2 \end{aligned}$$

- Se $c = a$ o $c = b$ e $S'(c) \neq 0$, facciamo le approssimazioni

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(c) \neq 0 \\ S(x) &\approx S(c) + S'(c)(x-c) \end{aligned}$$

TERZO PASSO. Dopo aver fatto le approssimazioni precedenti, estendiamo gli estremi di integrazione da $-\infty$ a ∞ per valutare gli integrali (questa operazione è legittima perché introduce soltanto errori esponenzialmente piccoli).

- Se $S'(c) = 0$ per $a < c < b$, dobbiamo avere $S''(c) < 0$ ($x = c$ è un massimo) e quindi, per $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{\lambda[S(c) + \frac{1}{2}S''(c)(x-c)^2]} f(c) dx \\ &\sim f(c) e^{\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \frac{S''(c)}{2}(x-c)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Quindi, poiché l'integrale è uguale a $\sqrt{\pi}$, per $\lambda \rightarrow \infty$ si ha

$$F(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \quad (23.3)$$

Se $S'(c) = 0$ e $c = a$ o $c = b$, allora l'andamento asintotico dell'integrale è lo stesso di quello in (23.3), a parte la moltiplicazione per un fattore $1/2$.

- Se $c = a$ e $S'(c) \neq 0$, dobbiamo avere $S'(c) < 0$, e quando $\lambda \rightarrow \infty$ si ha

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_a^{a+\epsilon} e^{\lambda[S(a) + S'(a)(x-c)]} f(a) dx \\ &\sim f(a) e^{\lambda S(a)} \int_0^{\infty} e^{\lambda S'(c)(x-c)} dx \end{aligned}$$

Quindi

$$F(\lambda) \sim -\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}$$

Se $c = b$ e $S'(c) \neq 0$, dobbiamo avere $S'(c) < 0$, e un argomento simile al precedente implica che quando $\lambda \rightarrow \infty$ si ha

$$F(\lambda) \sim \frac{f(b)e^{\lambda S(b)}}{\lambda S'(b)}$$

Fine della descrizione del metodo di Laplace. Adesso due osservazioni.

1. Se $S(x)$ raggiunge il suo massimo globale in diversi punti in $[a, b]$, allora spezziamo l'integrale in intervalli che contengono solo un punto, li trattiamo indipendentemente usando il metodo appena descritto e poi sommiamo tutti i contributi.
2. Se il massimo globale è tale che tutte le derivate di S sono nulle fino alla derivata m -esima, che è non nulla, allora lo sviluppo in serie sarà $S(x) \approx S(c) + \frac{1}{m!} S^{(m)}(c)(x - c)^m$.

ESEMPIO: LA FORMULA DI STIRLING Vogliamo determinare l'andamento asintotico della funzione Gamma

$$\Gamma(z + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt,$$

quando $z \rightarrow \infty$. In primo luogo, notiamo che possiamo scrivere

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t+z \ln t} dt.$$

In secondo luogo, ci riconduciamo ad un integrale di Laplace standard, facendo la sostituzione $t = zr$ (questo ha in effetti lo scopo di creare un massimo globale per S),

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-zr+z \ln z+z \ln r} z dr \\ &= z^{z+1} \int_0^{\infty} e^{z(-r+\ln r)} dr \end{aligned}$$

Quindi $f(r) = 1$ e $S(r) = -r + \ln r$. Si ha $S'(r) = -1 + \frac{1}{r}$ e $S''(r) = -\frac{1}{r^2}$, per $r > 0$. Ne concludiamo che S ha un massimo globale per $r = 1$ e che $S''(1) = -1$. Applichiamo la (23.3):

$$\Gamma(z + 1) \sim z^{z+1} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-z}}{\sqrt{z}} = \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z}$$

Poiché $\Gamma(n + 1) = n!$ per n intero positivo¹, la formula preceden-

¹(1) Dalla definizione della funzione Gamma, mediante integrazione per parti, si dimostra che $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$; (2) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. da queste due proprietà segue, per induzione, che $\Gamma(n + 1) = n!$.

te, per n intero positivo, diventa l'usuale formula di Stirling per il fattoriale:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

LEMMA DI WATSON Basandosi sulle idee esposte fin qui si può dimostrare un risultato più sofisticato per un integrale di Laplace più semplice. Per ragioni di tempo non lo dimostriamo, ma chi volesse cimentarsi dovrebbe riuscirci anche da solo: l'esercizio non è facile, ma neanche eccessivamente difficile.

LEMMA DI WATSON. Per qualche $b > 0$ (eventualmente infinito), si consideri l'integrale di Laplace

$$I(\lambda) = \int_0^b f(t) e^{-\lambda t} dt$$

Si supponga che $f(t)$ sia continua in $[0, b]$ e che abbia

$$f(t) \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}$$

come espansione asintotica² quando $t \downarrow 0$. Si assuma che $\alpha > -1$ e $\beta > 0$, cosicché l'integrale è limitato vicino a $t = 0$. Se $b = \infty$, si richiede anche che $f(t)$ sia di ordine esponenziale c per qualche $c > 0$ (ovvero $f(t) = o(e^{ct})$) per garantire che l'integrale sia limitato per grandi t . Allora, per $\lambda \rightarrow \infty$,

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{\lambda^{\alpha + \beta n + 1}}$$

² Per la nozione di espansione asintotica si veda la prossima lezione.

23.3 Transizioni di fase magnetiche

Vogliamo adesso applicare il metodo di Laplace ad un problema di fisica. Calcoleremo l'asintotica per $N \rightarrow \infty$ dell'energia libera per spin di un sistema magnetico di N spin.

Un modello matematico di sistema magnetico è tipicamente basato su un insieme di N spin μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, che possono essere vettori, scalari, o, nel caso quantistico, operatori di spin. Noi considereremo il modello più semplice basato su spin scalari $\mu_i = +1$ o -1 corrispondenti a spin su o spin giù rispettivamente. Si assume che l'energia di interazione tra due spin μ_i e μ_j collocati nei punti fissati \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j nello spazio (per esempio nei vertici di un reticolo regolare) sia $+\phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ se gli spin sono paralleli ($\mu_i \mu_j = +1$) e $-\phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ se gli spin sono anti-paralleli ($\mu_i \mu_j = -1$). In altre parole, l'energia totale di interazione del sistema in una data configurazione $\{\mu\} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ degli spin è

$$E(\{\mu\}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \mu_i \mu_j - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

dove il primo termine proviene dall'interazione tra gli spin e il secondo termine dall'interazione di ciascun spin con un campo magnetico esterno.

La funzione di partizione del sistema è

$$Z(N, \beta) = \sum_{\{\mu\}} e^{-\beta E(\{\mu\})}$$

Dove la somma è su tutte le configurazioni (in totale 2^N), $\mu_1 = \pm 1, \mu_2 = \pm 1 \dots \mu_N = \pm 1$, T è la temperatura, $\beta = 1/\kappa_B T$ è la temperatura inversa e κ_B è la costante di Boltzmann. Tutte le proprietà termodinamiche del sistema sono ottenute a partire dall'energia libera per spin che è determinata dalla funzione di partizione del seguente modo

$$f = \frac{F}{N} = -\kappa_B T \frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

Occorre quindi determinare — in questo problema, e più in generale in tutti i problemi di meccanica statistica dell'equilibrio — l'andamento asintotico di

$$\frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

per $N \rightarrow \infty$. Questo è in generale, anche per il caso di spin scalari che stiamo considerando, un problema di notevole complessità matematica. In molti casi non disponiamo ad oggi di una soluzione analitica.

La teoria classica dei sistemi magnetici si basa su una drastica semplificazione del problema, utilizzando l'approssimazione di *campo medio*: si assume cioè che ciascun spin interagisce con un campo medio prodotto da tutti gli altri spin. In questa approssimazione

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \mu_i \mu_j \approx -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \mu_i \mu_j$$

dove

$$J = - \int \phi(r) d^3 \mathbf{r}$$

(ϕ negativo, e quindi J positivo, caratterizza un sistema ferromagnetico). Il problema diventa dunque quello di determinare la funzione di partizione per un'energia d'interazione data da

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \mu_i \mu_j - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

Per valutare la funzione di partizione, per prima cosa riscriviamo l'energia d'interazione in una forma simmetrica:

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \right)^2 + \frac{J}{2} - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

Questa formula segue da $\mu_i^2 = 1$. Adesso, semplifichiamo le notazioni: poniamo

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mu_i$$

e quindi

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{2N} \mathcal{A}^2 + \frac{J}{2} - H\mathcal{A}$$

La funzione di partizione diventa

$$Z(N, \beta) = \sum_{\{\mu\}} e^{-\beta E(\{\mu\})} = e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2 + (\beta H)\mathcal{A}} \quad (23.4)$$

Se non ci fosse termine quadratico in \mathcal{A} , sarebbe facile eseguire la somma. Infatti, in tal caso si avrebbe

$$\sum_{\{\mu\}} e^{L\mathcal{A}} = \sum_{\{\mu\}} e^{L \sum_{i=1}^N \mu_i} = (e^L + e^{-L})^N = (2 \cosh L)^N \quad (23.5)$$

Possiamo ricondurci ad un termine lineare con un trucco basato su integrali gaussiani: si ha

$$e^{A^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + Ax} dx$$

(l'identità è ottenuta completando i quadrati). Se poniamo

$$A = \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} \mathcal{A}$$

nella somma a secondo membro della (23.4), otteniamo

$$\begin{aligned} Z(N, \beta) &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \sum_{\{\mu\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} \mathcal{A} x} dx e^{(\beta H)\mathcal{A}} \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\{\mu\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} \mathcal{A} x + (\beta H)\mathcal{A}} dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\{\mu\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \left[\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} x + (\beta H) \right] \mathcal{A}} dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left\{ \sum_{\{\mu\}} e^{\left[\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} x + (\beta H) \right] \mathcal{A}} \right\} dx \end{aligned}$$

Usando la (23.5), si ha

$$\begin{aligned} Z(N, \beta) &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[2 \cosh \left(\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} x + (\beta H) \right) \right]^N dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2} \mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + N \log \left[2 \cosh \left(\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}} x + (\beta H) \right) \right]} dx \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabili

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{(\beta J)N}}$$

possiamo ricondurre $Z(N, \beta)$ ad un integrale di Laplace standard:

$$Z(N, \beta) = \sqrt{\frac{(\beta J)N}{2\pi}} e^{-\frac{(\beta J)N}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-N[(\beta J)/2]\xi^2 + N \log\{2 \cosh[(\beta J)\xi + (\beta H)]\}} d\xi$$

Abbiamo cioè

$$Z(N, \beta) = \sqrt{\frac{(\beta J)N}{2\pi}} e^{-\frac{(\beta J)N}{2}} I(N)$$

dove

$$I(N) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{NS(\xi)}$$

e

$$S(\xi) = -\frac{1}{2}(\beta J)\xi^2 + \log\{2 \cosh[(\beta J)\xi + \beta H]\}$$

Facciamo un grafico della funzione $S(\xi)$: fissiamo βH abbastanza piccolo (abbiamo scelto $\beta H = 0.2$) e consideriamo diversi valori di βJ . Si veda la figura 23.2. Osserviamo che le curve per $\beta J = 0.1$ e $\beta J = 0.4$ hanno un solo massimo per $\xi = 0$, mentre le altre due curve, per $\beta J = 2$ e per $\beta J = 3.5$, hanno due massimi, uno negativo e uno positivo, ma un solo massimo globale per $\xi = m_0$ positivo: da osservare che è *soltanto questo che contribuisce all'asintotica dell'integrale*. Secondo il metodo di Laplace è l'andamento nell'intorno del massimo globale che domina l'integrale: gli altri massimi danno contributi esponenzialmente piccoli nel limite $N \rightarrow \infty$.

Uno studio grafico più accurato permette di determinare che per $\beta J = 1$ si ha una *biforcazione*³ nel senso che per valori di $\beta J < 1$, la funzione $S(\xi)$ ha un solo massimo per $\xi = 0$, mentre per $\beta J > 1$, $\xi = 0$ cessa di essere il punto di massimo assoluto della funzione: appena βJ diventa maggiore di 1, il massimo assoluto si sposta a destra. In figura 23.3 sono riprodotti i grafici della $S(\xi)$ per $\beta J = 1$ e per altri due valori di βJ di poco sopra e di poco sotto 1.

L'andamento della funzione S può essere reso più preciso studiando gli zeri della derivata

$$S'(\xi) = -(\beta J)\xi + (\beta J) \tanh((\beta J)\xi + \beta H) .$$

Il punto di massimo globale è dunque soluzione dell'equazione

$$m = \tanh((\beta J)m + \beta H)$$

(assumiamo βH positivo ma di entità trascurabile). Il grafico della figura 23.4 mostra che se $(\beta J) < 1$ le due curve si intersecano nello 0 e $m = 0$ è la sola soluzione, mentre per $(\beta J) > 1$, si hanno tre soluzioni. Non è difficile mostrare analiticamente che il massimo

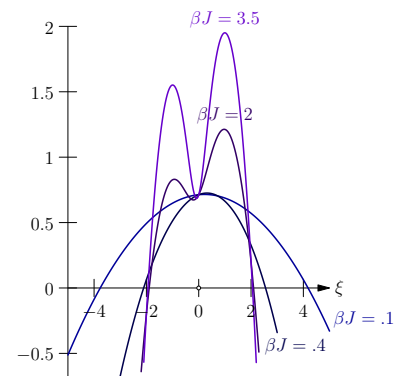


Figura 23.2: Grafici della funzione $S(\xi)$ per diversi valori di βJ .

³ In effetti, nel senso tecnico della teoria delle biforcazioni, ma per ragioni di tempo (e di natura di questo corso) non possiamo sviluppare questo aspetto.

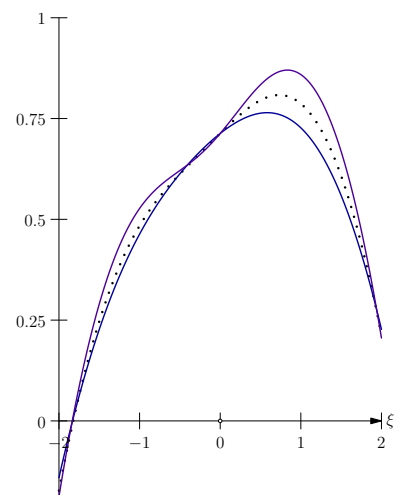


Figura 23.3: Grafici della funzione $S(\xi)$ per diversi valori di $\beta J = 1$ (linea punteggiata), .9 (linea blu), 1.1 (linea viola).

assoluto è per $m = m_0 > 0$ (l'altra soluzione è $-m_0$ nel limite di βH trascurabile).

Applichiamo infine a $I(N)$ la (23.3), per $\lambda = N$ e $f(x) = 1$. Allora

$$I(N) \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{NS(m)}}{\sqrt{-NS''(m)}}$$

da cui

$$Z(N, \beta) \sim \sqrt{\frac{(\beta J)}{-S''(m)}} e^{-\frac{(\beta J)}{2}} e^{NS(m)}$$

Dall'andamento asintotico della funzione di partizione risaliamo a quello dell'energia libera per spin

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

per $N \rightarrow \infty$. Quindi si ha

$$f = -\frac{1}{\beta} S(m)$$

vale a dire, la funzione S non è altro che l'energia libera per particella cambiata di segno (a meno di una costante moltiplicativa).

Ricordiamo che

$$\text{magnetizzazione media per particella} = -\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial H}$$

Ma

$$\frac{\partial S}{\partial H} = \beta \tanh((\beta J)m + \beta H) = \beta m$$

Quindi

$$m = \text{magnetizzazione media per particella}$$

Dunque, il massimo globale per la valutazione asintotica dell'integrale con il metodo di Laplace è, nel linguaggio della termodinamica, lo stato di equilibrio termodinamico, cioè lo stato di magnetizzazione media che rende minima l'energia libera (massimo di $S \rightarrow$ minimo di f). Rovesciando le curve di S (ad esempio per $\beta J > 1$) si ottengono i grafici tipici dell'energia libera (al variare della magnetizzazione):

Per ultimo, ma non per importanza, osserviamo che la biforcazione di cui abbiamo parlato prima non è altro che una *transizione di fase*: per $\beta J < 1$ lo stato di equilibrio è quello di una magnetizzazione media nulla, mentre per $\beta J > 1$ si ha una magnetizzazione spontanea anche in assenza di campo magnetico esterno. La temperatura critica corrisponde a $J/\kappa_B T_c = 1$, cioè a $T_c = J/\kappa_B$.

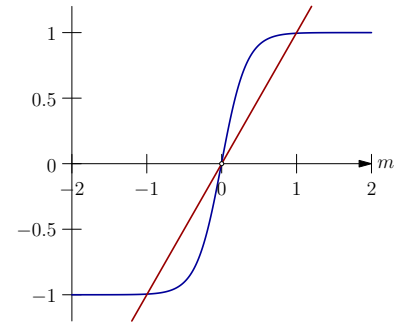


Figura 23.4: Grafici delle funzioni $y = m$ e $y = \tanh((\beta J)m + \beta H)$ ($\beta H \ll 1$).

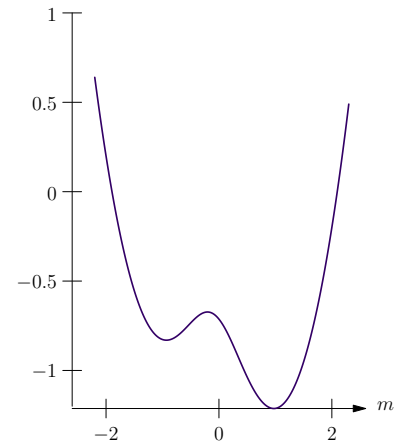


Figura 23.5: Grafico dell'energia libera in funzione della magnetizzazione.

23.4 Serie asintotiche e serie convergenti

Consideriamo la funzione *esponenziale integrale* definita per $\lambda > 0$ da

$$\text{Ei}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

e cerchiamo una sua approssimazione analitica per $\lambda \gg 1$. Integrazione per parti ripetuta, a partire da

$$\int_{\lambda}^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\text{int}} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{der}} dt$$

ci fornisce

$$\begin{aligned} \text{Ei}(\lambda) &= \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_{\lambda}^{\infty} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \left[\frac{e^{-t}}{t^2} \right]_{\lambda}^{\infty} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &\vdots \\ &= e^{-\lambda} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)}_{S_N(\lambda)} + \underbrace{(-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt}_{R_N(\lambda)} \end{aligned}$$

dove $S_N(\lambda)$ è la somma parziale dei primi N termini,

$$S_N(\lambda) = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)$$

e $R_N(\lambda)$ il resto dopo N termini,

$$R_N(\lambda) = (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt$$

La serie di cui $S_N(\lambda)$ è la somma parziale è divergente per ogni λ . Si osservi che per N grande la grandezza dell' N -esimo termine aumenta al crescere di N . Naturalmente, anche $R_N(\lambda)$ aumenta al crescere di N poiché $S_N(\lambda) + R_N(\lambda)$ deve rimanere limitato, essendo $\text{Ei}(\lambda)$ definita e limitata per tutti i $\lambda > 0$.

Supponiamo di considerare N fissato e di lasciar diventare λ arbitrariamente grande. Allora

$$\begin{aligned} |R_N(\lambda)| &= \left| (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \right| \\ &= |(-1)^N| N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\ &= N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\ &< \frac{N!}{\lambda^{N+1}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \frac{N!}{\lambda^{N+1}} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

che tende a zero rapidamente (esponenzialmente) quando $\lambda \rightarrow \infty$. Si osservi che il rapporto tra $R_N(\lambda)$ e l'ultimo termine di $S_N(\lambda)$ è

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| &= \frac{|R_N(\lambda)|}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &< \frac{N!e^{-\lambda}\lambda^{-(N+1)}}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &= \frac{N}{\lambda} \end{aligned}$$

e che anch'esso tende a 0 quando $\lambda \rightarrow \infty$. Perciò, per $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\text{Ei}(\lambda) = S_N(\lambda) + o(\text{ULTIMO TERMINE IN } S_N(\lambda))$$

Questo significa, in particolare, che se λ è sufficientemente grande e N è fissato, $S_N(\lambda)$ fornisce una buona approssimazione a $\text{Ei}(\lambda)$. L'accuratezza dell'approssimazione aumenta quando λ aumenta per N fissato.

Questo significa che possiamo scrivere

$$\text{Ei}(\lambda) \sim e^{-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots \right)$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Si osservi che per λ sufficientemente grande, i termini in $S_N(\lambda)$ diminuiranno successivamente: per esempio,

$$\frac{2!}{\lambda^3} < \frac{1}{\lambda^2}$$

per λ abbastanza grande. Tuttavia, per un certo valore $N = N_*(\lambda)$, in termini in $S_N(\lambda)$ incominceranno successivamente ad aumentare per un dato λ (non importa quanto grande), perché l' N -esimo termine

$$(-1)^{N-1} e^{-\lambda} \frac{(N-1)!}{\lambda^N}$$

è illimitato quando $N \rightarrow \infty$. Quindi, per un dato λ , c'è un valore ottimale di $N = N_*(\lambda)$ per cui si ottiene la migliore approssimazione.

La stima precedente del rapporto tra il resto e l'ultimo termine della somma parziale,

$$\left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| < \frac{N}{\lambda},$$

suggerisce di prendere per N_* la parte intera più grande di λ .

Da un punto di vista pratico, uno sviluppo asintotico di questo tipo può essere molto più utile di un'espansione convergente ma lenta. Uno sviluppo asintotico può essere straordinariamente accurato: per $Ei(\lambda)$ con $\lambda = 10$, $N_* = 10$, ma $S_4(10)$ approssima $Ei(10)$ con un errore che è meno dello 0.003%.

Chiariamo l'idea che sta alla base delle serie asintotiche confrontandole con le serie convergenti. Consideriamo la serie di potenze intorno a $z = z_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Questa serie di potenze è *convergente* ad una funzione $f(z)$ per $|z - z_0| < R$, per qualche $R \geq 0$, se il resto

$$R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$ **per ogni z fissato che soddisfa $|z - z_0| < R$** . Diciamo invece che una funzione $f(z)$ ha uno sviluppo asintotico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

se

$$R_N(z) = o\left((z - z_0)^N\right)$$

quando $z \rightarrow z_0$, **per ogni N fissato**. Detto in altri termini, per una serie convergente, **dati ϵ e z** ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon$$

per N sufficientemente grande, mentre per una serie asintotica, **dati ϵ e N** ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon|z - z_0|^N$$

per z sufficientemente prossimo a z_0 .

23.5 Sviluppi asintotici

Definizione 23.1. Si dice che una successione di funzioni di calibro $\{\phi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ forma una successione asintotica quando $x \rightarrow x_0$ se, $\forall n$,

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x))$$

quando $x \rightarrow x_0$.

ESEMPLI: $(x - x_0)^n$, quando $x \rightarrow x_0$; x^{-n} , quando $x \rightarrow \infty$; $(\sin x)^n$, quando $x \rightarrow 0$.

Definizione 23.2. Se $\{\phi_n(x)\}$ è una successione asintotica di funzioni quando $x \rightarrow x_0$, diciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

dove le a_n sono costanti, è uno sviluppo asintotico (o un'approssimazione asintotica) di $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ se per ogni N ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x))$$

quando $x \rightarrow x_0$, cioè, l'errore è asintoticamente più piccolo dell'ultimo termine dello sviluppo.

NOTAZIONE: lo sviluppo asintotico è denotato

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Definizione 23.3. Se le funzioni di calibro $\{\phi_n(x)\}$ formano una successione di potenze (positive o negative), lo sviluppo asintotico è detto serie di potenze asintotica.

Esercizio 2. (1) Mediante manipolazioni formali si mostri che la serie formale divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è una soluzione formale dell'equazione

$$x^2 y''(x) + (1 + 3x)y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) Osservando che

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

(vedere lezione 23.1.2), ottenere, mediante manipolazioni formali della serie divergente,

$$y(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt$$

come soluzione (rigorosa) dell'equazione di partenza (la funzione $y(x)$ è ben definita e soddisfa l'equazione differenziale). (3) Dimostrare (rigorosamente!) che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è lo sviluppo asintotico di $y(x)$ per $x \rightarrow 0$. (Aiuto: usare l'integrazione per parti come per l'esempio all'inizio di questa lezione.)

PROPRIETÀ DEGLI SVILUPPI ASINTOTICI

UNICITÀ. Per una data successione $\{\phi_n(x)\}$ lo sviluppo asintotico di $f(x)$ è unico, cioè i coefficienti a_n dello sviluppo sono unicamente determinati come segue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi_1(x)} \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_1 \phi_1(x)}{\phi_2(x)} \\ &\vdots \\ a_N &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x)}{\phi_N(x)} \end{aligned}$$

NON UNICITÀ (PER UNA DATA FUNZIONE). Una data funzione può avere differenti sviluppi asintotici. Per esempio, per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \tan x &\sim x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ &\sim \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^3 + \frac{3}{8}(\sin x)^5 + \dots \end{aligned}$$

SOTTODOMINANZA. Questo è l'aspetto più spinoso. Uno sviluppo asintotico può essere lo sviluppo asintotico *di più di una* funzione. Per esempio, se quando $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

allora anche

$$f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $x \rightarrow x_0$ perché

$$e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} = o((x - x_0)^n) \quad \forall n.$$

In effetti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $x \rightarrow x_0$, è asintotica a ogni funzione che differisce da $f(x)$ per una funzione $g(x)$ che va a 0 più rapidamente di qualunque potenza di $x - x_0$, quando $x \rightarrow x_0$. Tale funzione $g(x)$ è detta *sottodominante* alla serie di potenze; la sua serie asintotica sarebbe

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 0 \times (x - x_0)^n.$$

Quindi uno sviluppo asintotico è asintotico ad una *intera classe di funzioni* che differiscono l'una rispetto all'altra per una funzione sottodominante.

ESEMPIO (ERRORI ESPONENZIALMENTE PICCOLI): la funzione e^{-x} è sottodominante a ogni serie asintotica della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

quando $x \rightarrow \infty$. Quindi se una funzione $f(x)$ ha un tale sviluppo asintotico, lo stesso sviluppo lo ha anche $f(x) + e^{-x}$, vale a dire, $f(x)$ ha un tale sviluppo asintotico a meno di errori esponenzialmente piccoli.

OPERAZIONI ARITMETICHE: Se

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)$$

allora

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \phi_n(x)$$

INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE: OK. Se $f(x)$ è integrabile in un intorno di x_0 e

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

allora

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE: cautela! Gli sviluppi asintotici non possono in generale essere derivati termine a termine. Il problema con la derivazione è collegato alla sottodominanza. Per esempio, le due funzioni

$$f(x) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin \left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}} \right)$$

differiscono per una funzione sottodominante e hanno quindi lo stesso sviluppo asintotico quando $x \rightarrow x_0$. Tuttavia $f'(x)$ e

$$g'(x) = f'(x) - 2(x - x_0)^{-3} \cos \left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}} \right) + 2(x - x_0)^3 e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin \left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}} \right)$$

non hanno lo stesso sviluppo asintotico quando $x \rightarrow x_0$.

Tuttavia, se $f'(x)$ esiste, ed è integrabile vicino a x_0 , allora

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

implica che

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Esercizio 3. *Dimostrare il lemma di Watson.*