

COIN TOSSINGS

Contents

1	Sistemi dinamici a tempo discreto	2
2	Bernoulli shifts	4
3	Equivalenza tra sistemi deterministici e stocastici	8
4	Large and small deviations	9
5	From coin tossing to statistical mechanics	14

1 Sistemi dinamici a tempo discreto

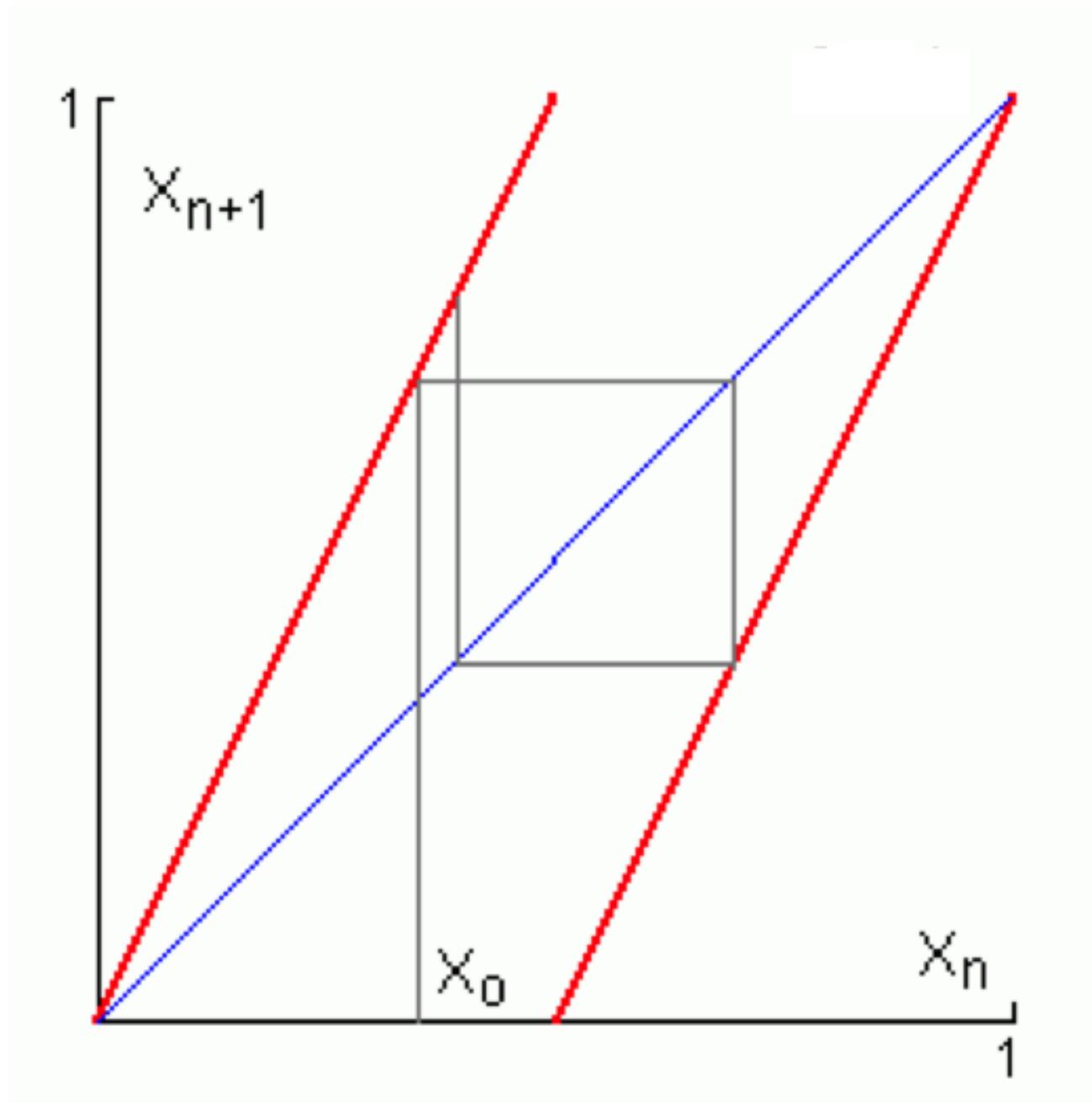
Talvolta è conveniente considerare dinamiche a tempo discreto, con $\phi = \phi_\tau$ che rappresenta l'evoluzione del sistema in un dato tempo caratteristico τ . Allora, la dinamica di uno stato iniziale X_0 è data da

$$X_0 \longrightarrow X_1 = \phi(X_0) \longrightarrow X_2 = \phi(X_1) = \phi(\phi(X_0)) \equiv \phi^{(2)}(X_0) \longrightarrow \dots$$

Mappa di Bernoulli

$$\sigma(X) = 2X \pmod{1}, \quad X \in [0, 1] \tag{1}$$

nell'intervallo $[0, 1]$, cioè con spazio delle fasi $\Gamma = [0, 1]$ Si lascia come esercizio mostrare che l'usuale misura dx nell'intervallo $[0, 1]$ è invariante rispetto a questa dinamica.



2 Bernoulli shifts

Consideriamo la mappa (1). Data la condizione iniziale x_0 , la mappa genera la successione

$$x_0, \quad x_1 = \sigma(x_0), \quad x_2 = \sigma(x_1) = \sigma(\sigma(x_0)) \dots$$

Scriviamo x_0 in rappresentazione binaria:

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove a_n assume i valori 0 o 1. Per $x_0 < 1/2$, abbiamo $a_1 = 0$, e $x_0 > 1/2$ implica $a_1 = 1$. Quindi

$$\sigma(x_0) = \begin{cases} 2x_0 & \text{per } a_1 = 0 \\ 2x_0 - 1 & \text{per } a_1 = 1 \end{cases} = 0, a_2 a_3 a_4 \dots,$$

vale a dire, l'azione di σ sulla rappresentazione binaria di x è di **cancelare la prima cifra e spostare la successione rimanente verso sinistra**.

Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali: anche se due punti x ed x' differiscono solo dopo la loro n -esima cifra, questa differenza diventa amplificata sotto l'azione di $\sigma(x)$, e le loro iterazioni $\sigma^{(n)}(x)$ e $\sigma^{(n)}(x')$ già differiscono nella prima cifra perché

$$\sigma^{(n)}(x) = 0, a_n \dots$$

La successione delle iterazioni $\sigma^{(n)}(x)$ ha le stesse proprietà casuali dei lanci successivi di una moneta associamo a $\sigma^{(n)}(x)$ il simbolo D o S a seconda che l'iterazione è contenuto nella parte destra o sinistra del intervallo unitario. Se ora prescriviamo una successione $DSDDSDSD \dots$ arbitraria, per es., lanciando una moneta, possiamo sempre trovare un x_0 per il quale la serie di iterazioni $x_0, \sigma(x_0), \sigma(\sigma(x_0)) \dots$ genera questa successione. Questo segue perché $\sigma^{(n)}(x) = 0, a_n a_{n+1} \dots$ corrisponde a D o S se e solo se $a_n = 1$ o $a_n = 0$, cioè la successione $DSDDSDSD \dots$ è isomorfa alla rappresentazione binaria di x_0

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_0 = 0, & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & \downarrow \\
 & D & S & D & D & S & D & S & D
 \end{array} \tag{2}$$

Così, la prescrizione di una successione lanciando una moneta diventa equivalente alla scelta di un particolare valore di x_0 .

Consideriamo adesso la frequenza relativa f_N^D che in N iterazioni dello stato iniziale x_0 il sistema si trovi a destra,

$$f_N^D(x_0) = \frac{\#(\text{la prima cifra binaria di } \sigma^{(n)}(x_0) \text{ è uguale a 1 per } n = 1, 2, \dots, N)}{N}$$

Allora

$$f_N^D(x_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n(x_0),$$

dove $a_n(x_0)$ è l' n -esima cifra binaria dell'espansione binaria di x_0 .

Per determinare a che valore converge f_N^D quando N diventa infinitamente grande, usiamo un teorema classico di Borel sui *numeri normali*.

Un numero è detto normale se in una qualunque base b le sue cifre hanno una distribuzione uniforme $1/b$, tutte le coppie possibili di cifre hanno distribuzione $1/b^2$, tutte le terne possibili hanno distribuzione $1/b^3$ e così via.

Il **teorema di Borel** stabilisce che in un intervallo quasi tutti i numeri sono normali, fatta eccezione per un insieme di numeri hanno misura

di Lebesgue μ nulla. Quindi

$$f_N^D(x_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n(x_0) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{quasi ovunque rispetto a } \mu \text{ in } [0, 1].$$

(legge forte dei grandi numeri). Da cui segue la legge debole

$$\mu \left\{ x_0 \in [0, 1] \mid f_N^D(x_0) \not\rightarrow \frac{1}{2} \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (3)$$

Un'analisi più fine permette di stabilire che la convergenza è esponenzialmente rapida.

Risulta così dimostrato che per grandi tempi, il sistema spende circa metà del tempo a destra (e l'altra metà a sinistra). e che questo è un comportamento tipico. ***Il sistema è ergodico.***

3 Equivalenza tra sistemi deterministici e stocastici

La (2) permette di stabilire un'equivalenza tra la dinamica deterministica di Bernoulli e la dinamica completamente stocastica del lancio di una moneta con “facce” D (“testa”) e S (“croce”). La probabilità di ottenere D all' n -esimo lancio è in corrispondenza la misura delle successioni di numeri in $[0, 1]$ la cui n -esima cifra binaria è pari a 1, che è chiaramente $1/2$. La dinamica è lo spostamento di Bernoulli

$$a_1 a_2 a_3 \cdots \rightarrow a_2 a_3 a_4 \dots$$

e la (3) è semplicemente la legge dei grandi numeri per i lanci una moneta:

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{\text{numero di teste in } N \text{ lanci}}{N} \neq \frac{1}{2} \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

4 Large and small deviations

Binomial distribution Let $S_n = B_1 + \dots + B_n$, where each variable of the sum is bernoulli(p) distributed. Then

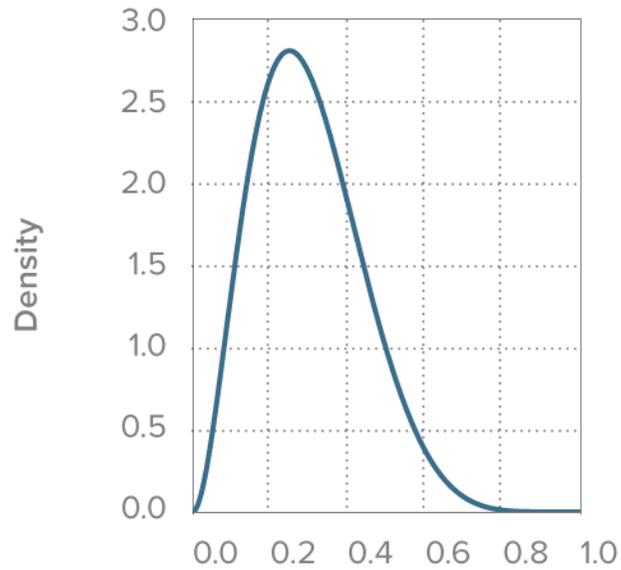
$$\mathbb{P}\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{with} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (5)$$

This is the **binomial distribution** $b(n, k, p)$.

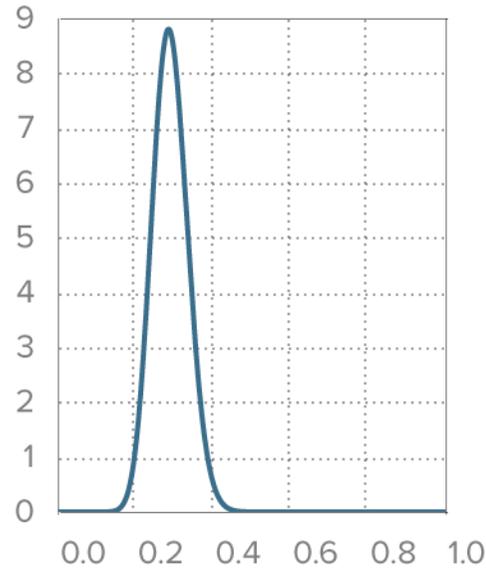
$$\mathbb{E}\{S_n\} = np, \quad \text{Var}(S_n) = npq, \quad q \equiv (1-p) \quad (6)$$

$$\mathbb{E}\{\bar{Y}_n\} = p, \quad \text{Var}(\bar{Y}_n) = \frac{pq}{n}. \quad (7)$$

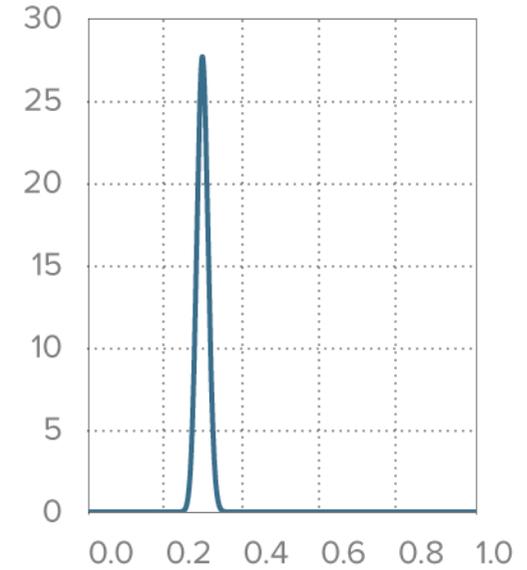
10 TRIALS, 3 SUCCESSES



100 TRIALS, 29 SUCCESSES



1000 TRIALS, 295 SUCCESSES



Probability of success

$$p = 1/3$$

Asymptotics *Fair coin:* $p = q = 1/2$.

Stirling's formula: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

$$\mathbb{P} \{S_n = k\} \sim \frac{\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}2^{-n}}{\sqrt{2\pi}e^{-(n-k)}(n-k)^{n-k+1/2}\sqrt{2\pi}e^{-k}k^{k+1/2}}$$

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P} \{S_n = k\} &\sim -\frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - \left(n - k + \frac{1}{2}\right) \log(n - k) \\ &\quad - \left(k + \frac{1}{2}\right) \log k - n \log 2 \\ &= -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log n - \left(n - k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \left(k + \frac{1}{2}\right) \log \frac{k}{n} - n \log 2 \end{aligned}$$

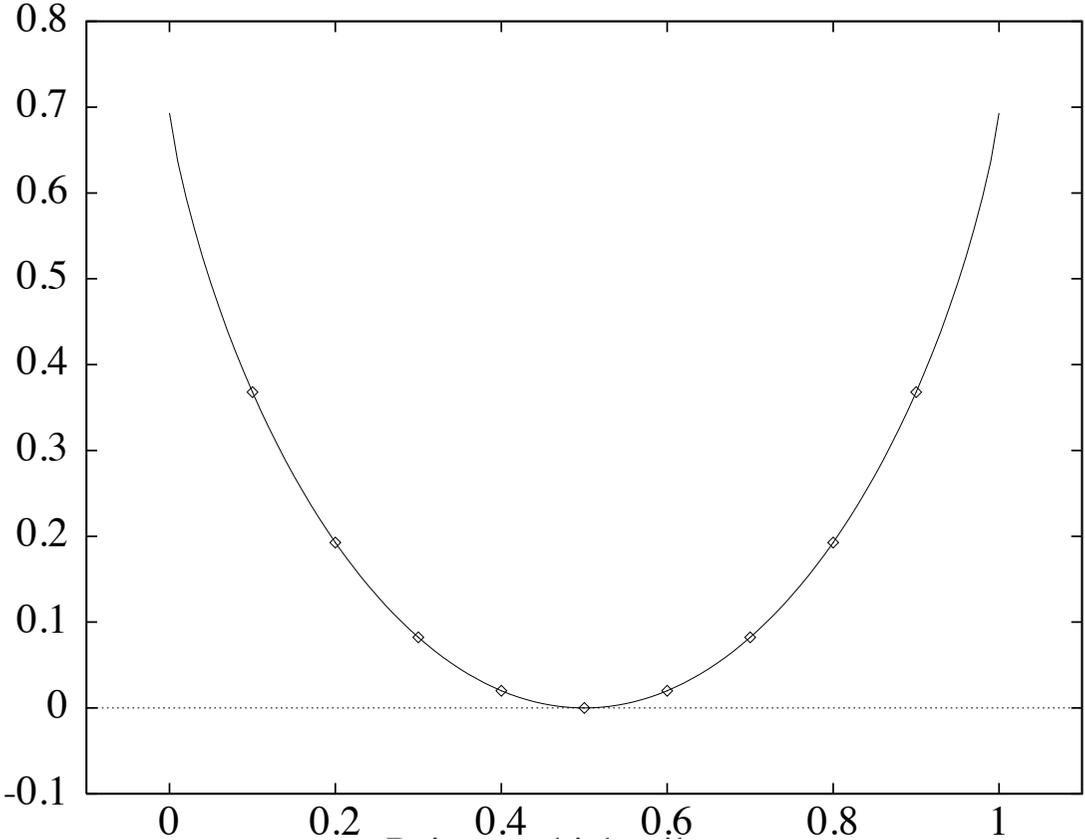
If $k \sim ny$, then

$$\log \mathbb{P} \{S_n = k\} \sim -n [\log 2 + y \log y + (1 - y) \log(1 - y)] + o(n)$$

Thus

$$\log \mathbb{P} \{S_n = k\} \sim -nI(y) + o(n) \quad \text{with} \quad I(y) = \log 2 + y \log y + (1 - y) \log(1 - y)$$

the rate function of bernoulli (1/2)



Exercise Consider bernoulli (p) Show that:

$$M(k) = (q + pe^k)$$

$$C(k) = \log(q + pe^k)$$

$$I(y) = y \log \frac{y}{p} + (1 - y) \log \frac{1 - y}{1 - p} \quad \text{for } y \in (0, 1)$$

$I(y) = \infty$ outside of $(0, 1)$.

Small deviations *Fair coin:* $p = q = 1/2$. Taylor series:

$$I(y) = \log 2 + y \log y + (1 - y) \log(1 - y) = \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{4}} + \dots$$

The mean of each toss of a coin is $1/2$, and the variance of each toss is $1/4$; thus the rate function for coin tossing gives us the Central Limit Theorem. In general, whenever the rate function can be approximated near its maximum by a quadratic form, we can expect the Central Limit Theorem to hold.

5 From coin tossing to statistical mechanics

Phase space

$$\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i = 0 \text{ or } 1\}$$

It contains 2^n points.

Event:

$$A \subseteq \Gamma = \text{set of points } x$$

Random variables: functions Y, Z, \dots on Γ . We reserve the notation X for the random vector $X(x) = x$. So, any random variable Y can be written as

$$Y = F(X)$$

Uniform measure

$$|A| = \text{number of points in } A$$

Uniform probability measure

$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{|A|}{|\Gamma|} = \frac{|A|}{2^n}$$

Basic problem: find the probabilities

$$\mathbb{P}\{Z = z|Y = y\} = \frac{|\{Z = y\} \cap \{Y = y\}|}{|\{Y = y\}|}$$

$$\mathbb{P}\{A|\{S_n = k\}\} = \frac{|A \cap \{S_n = k\}|}{|\{S_n = k\}|}$$