

L'approccio di Boltzmann alla meccanica statistica

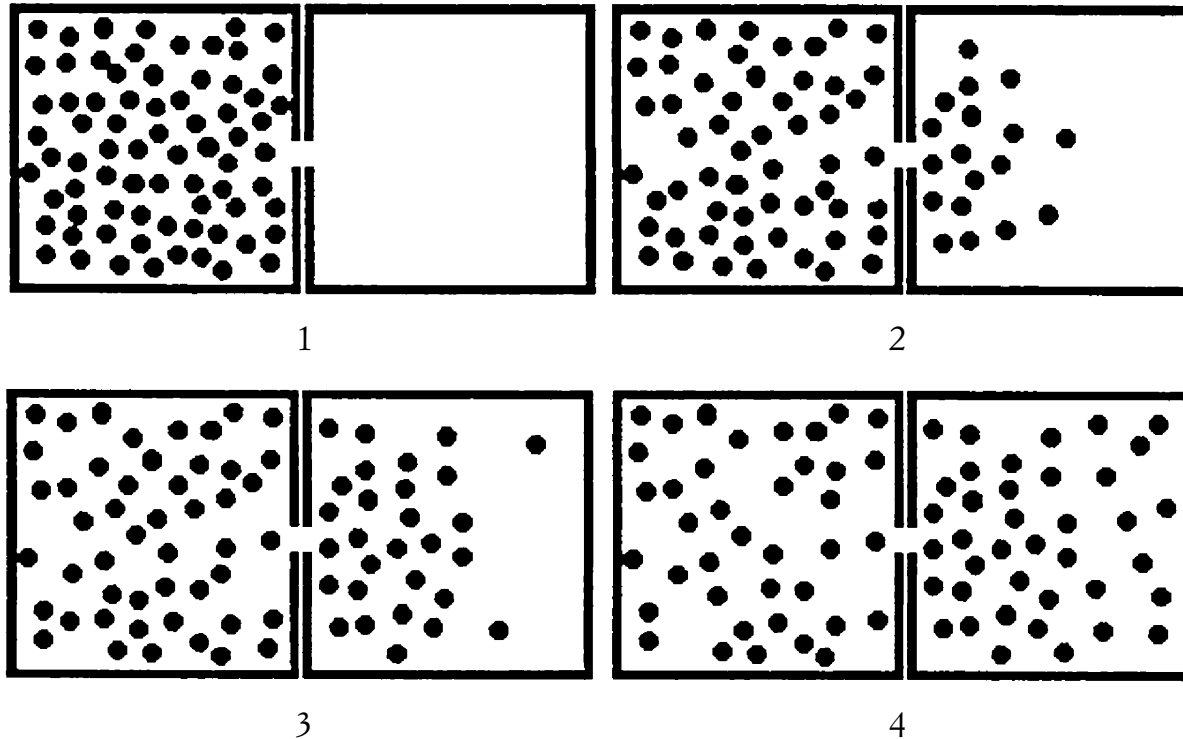


1844 - 1906

Se, per qualche cataclisma, tutta la conoscenza scientifica fosse distrutta, e solo una frase potesse passare alla generazione successiva, quale dichiarazione conterrebbe il massimo di informazione con il minimo di parole? Credo che sia l'ipotesi atomica (o il fatto atomico, o comunque tu lo voglia chiamare) che le cose sono fatte d'atomi – piccole particelle che si muovono intorno in moto perpetuo, attraendosi quando sono a distanza ravvicinata, ma respingendosi quando sono schiacciate l'una contro l'altra. In questa sola frase vedrai un'enorme quantità di informazione sul mondo, se soltanto un po' di immaginazione e pensiero sono applicati.

Richard Feynman

Il problema dell'irreversibilità



la spiegazione delle leggi macroscopiche irreversibili in termini delle leggi microscopiche reversibili che regolano il movimento degli atomi.

Il problema dell'irreversibilità

- Parte facile
- Parte difficile

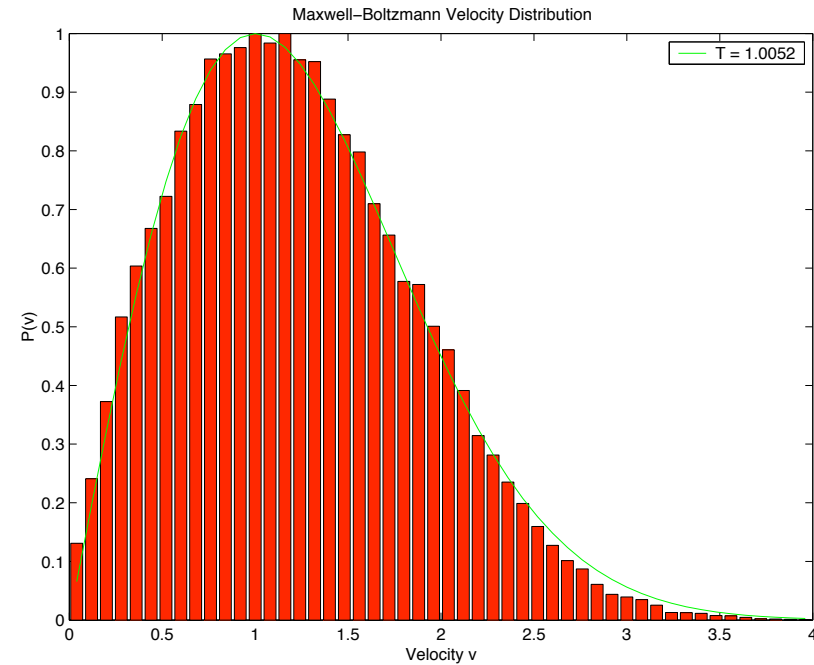
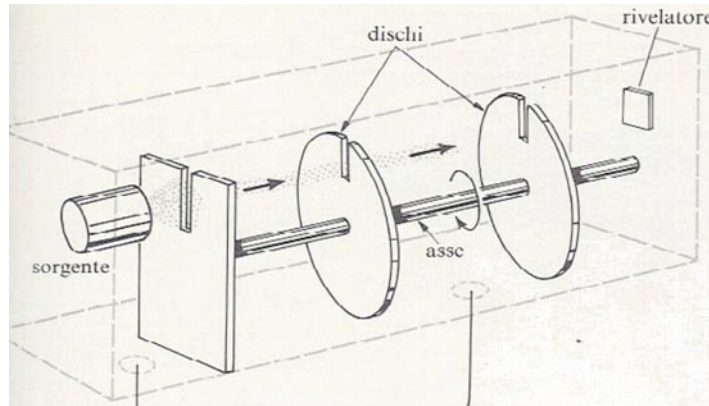
Parte facile

- 1865 Clausius, Entropia
- 1867 Velocità maxwelliane
- 1872 Equazione di Boltzmann
- 1877 Entropia e macrostati di equilibrio

1865 - Clausius, Entropia

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T}$$

1867 - Velocità maxwelliane

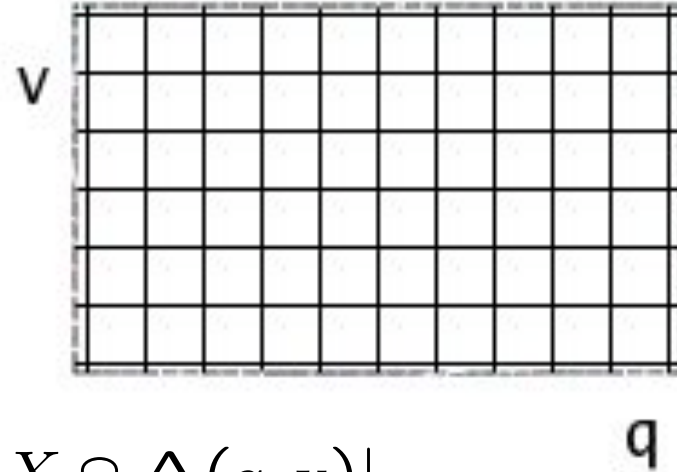


$$\rho_{eq}(\mathbf{v}) \sim e^{-\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2/kT}$$

Boltzmann 1872

$$X = (q_1, v_1, \dots, q_N, v_N)$$

$$f_{emp}(q, v) \equiv f_X(q, v)$$



$$\begin{aligned} f_X(q, v) &= \frac{|X \cap \Delta(q, v)|}{|\Delta(q, v)|N} \\ &= \frac{n_X(\Delta(q, v))/N}{|\Delta(q, v)|} \end{aligned}$$

$$f_{emp}(q, v, t) \equiv f_{X(t)}(q, v)$$

Boltzmann 1872

A bassa densità

$$f_{X(t)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})$$

dove f_t obbedisce l'equazione di Boltzmann

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f_t = Q(f_t)$$

Boltzmann 1872

$$f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \rightarrow f_{eq}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \sim e^{-\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2/kT}$$

$$H(f_t) = \int f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \log f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v}) d\mathbf{q}d\mathbf{v}$$

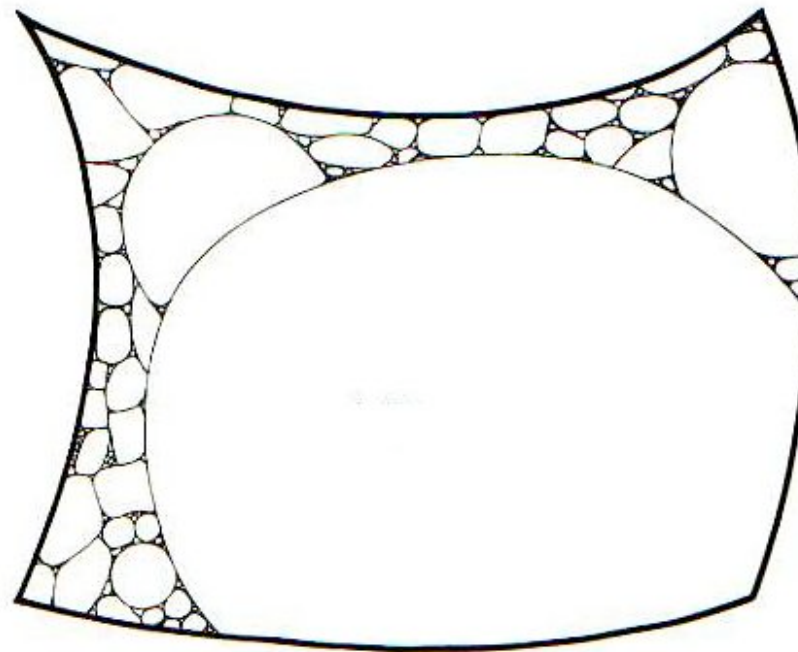
$$S(X) = -NH(f_X)$$

Boltzmann 1877

Macrostati

$$\Gamma_f = \{X \in \Gamma_E \mid f_X(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f(\mathbf{q}, \mathbf{v})\}$$

Γ_E



Boltzmann 1877

discretizzazione

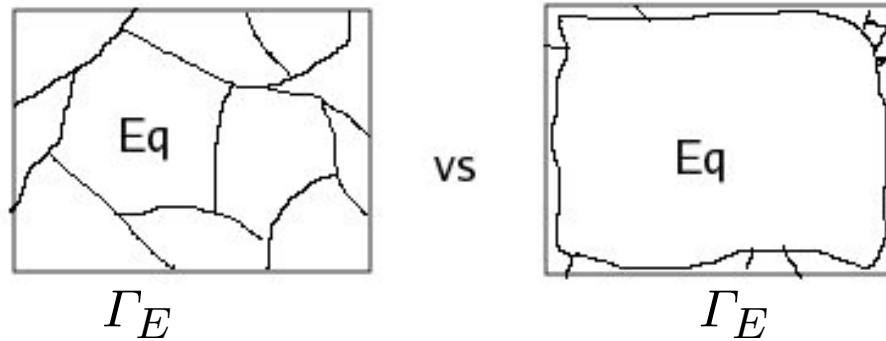
$$f \sim (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots)$$

$$\sum_i n_i = N \qquad \sum_i \epsilon_i n_i = E$$

Relazione tra Boltzmann 1872 e 1877

A bassa densità $|\Gamma_f| \sim e^{-NH(f)}$

$N \sim 10^{20}$ la maggior parte di Γ_E è $\Gamma_{f_{eq}}$



$$\log |\Gamma_f| = -NH(f)$$

$$S(X) = \log |\Gamma_{f_X}|$$

Piccolezza degli eventi atipici $10^{-10^{20}}$

Relazione tra Boltzmann 1872 e 1877

$$|\Gamma_f| \sim \frac{N!}{\prod_i n_i}$$

More Flipping Coins 7

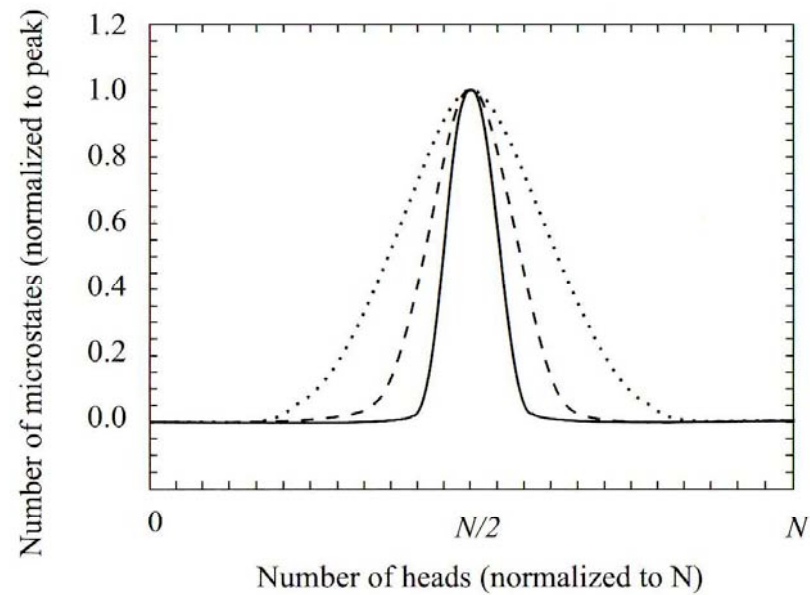
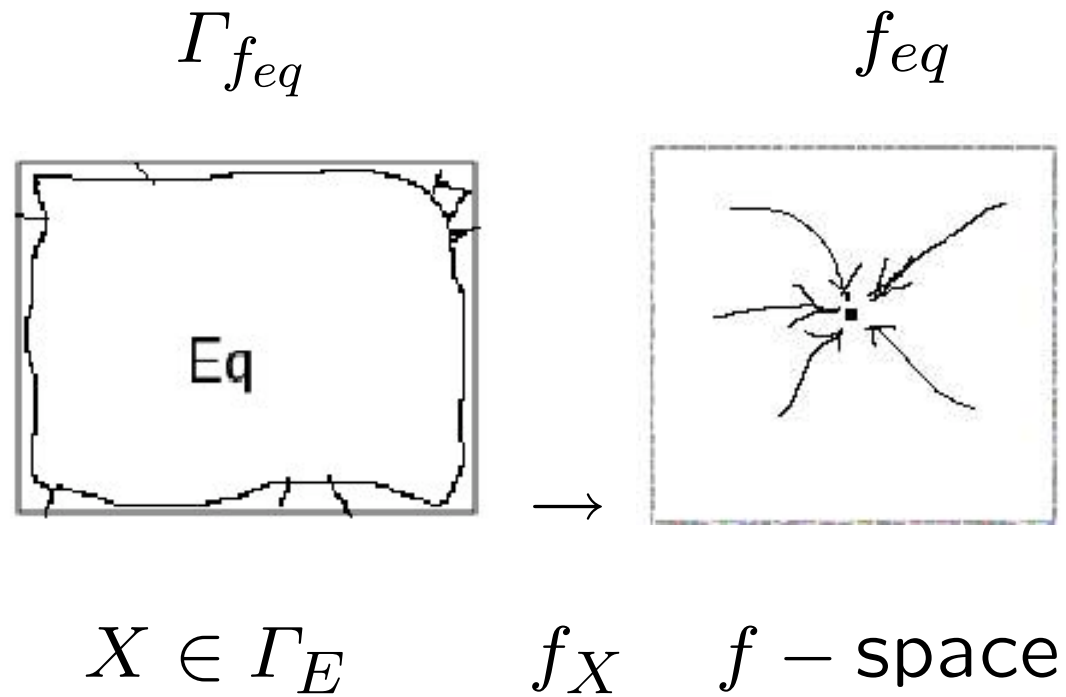


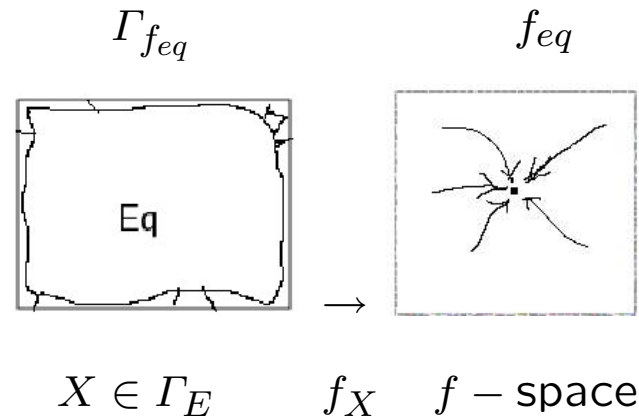
Fig. 1.2 The width of the distribution of the number of microstates per macrostate narrows as the number of coins increases: (i) dotted – about 20 coins, (ii) dashed – about 75 coins, (iii) solid – about 150 coins.

Glazer, Wark “Statistical mechanics. A survival guide.”

Relazione tra Boltzmann 1872 e 1877



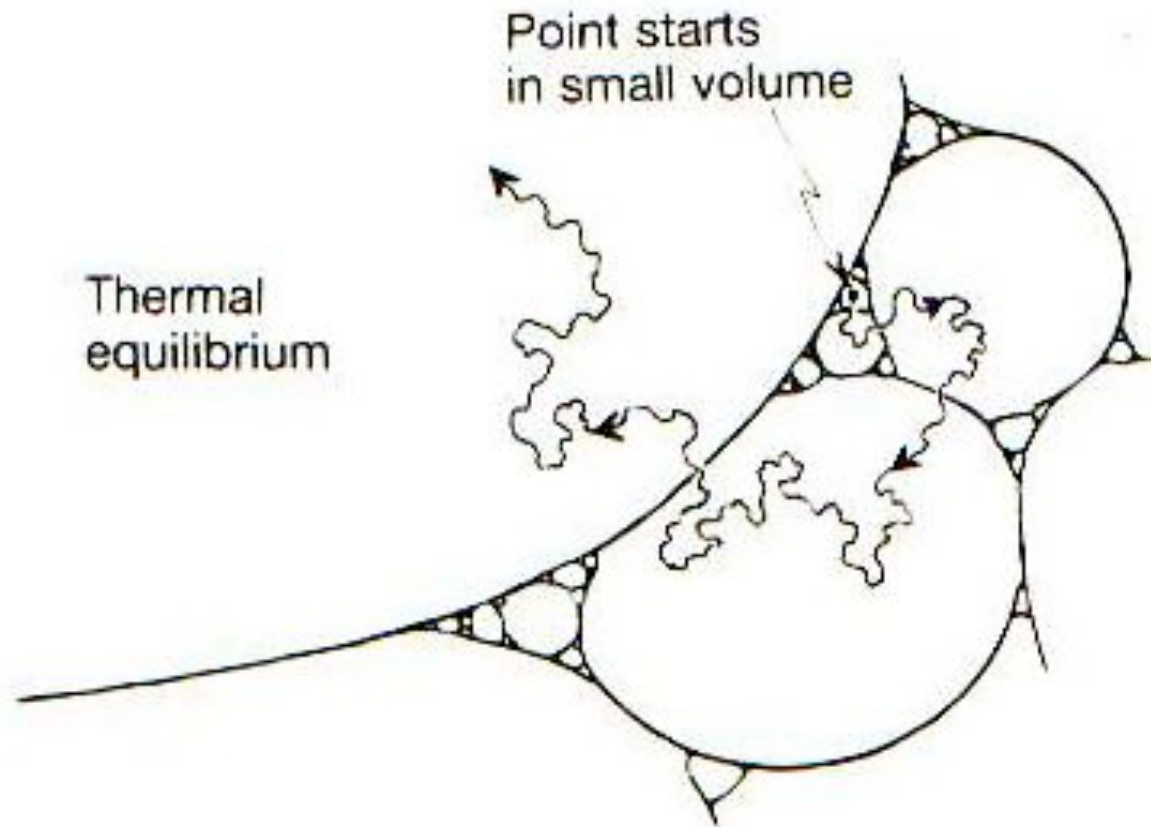
Relazione tra Boltzmann 1872 e 1877



[La distribuzione di Maxwell] è caratterizzata dal fatto che la schiacciante maggioranza delle possibili distribuzioni di velocità hanno le proprietà caratteristiche della distribuzione di Maxwell, e in confronto a queste c'è solo un numero relativamente esiguo di distribuzioni che deviano in maniera significativa da quella di Maxwell. Mentre Zermelo dice che il numero di stati che alla fine conducono alla distribuzione di Maxwell è piccolo in confronto a tutti gli stati possibili, io asserisco al contrario che la grande maggioranza degli stati possibili sono "maxwelliani", e che il numero di stati che devia dallo stato maxwelliano è evanescentemente piccolo.

(Boltzmann, 1896)

Relazione tra Boltzmann 1872 e 1877



Come fraintendere Boltzmann

- L'Eq. di Boltzmann è una diretta conseguenza delle leggi microscopiche
- Se $f_{X(0)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_0(\mathbf{q}, \mathbf{v})$
allora $f_{X(t)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})$
per un lasso di tempo ragionevole

Come intendere Boltzmann

Per $X(0)$ tipico, se

$$f_{X(0)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_0(\mathbf{q}, \mathbf{v})$$

allora

$$f_{X(t)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})$$

per un lasso di tempo ragionevole

Nel linguaggio di Boltzmann :“vale per la schiacciante maggioranza delle condizioni iniziali”

Tipicità

$$x \in [0, 1]$$

$$x = 0.0100101100101001110\dots$$

$$\mathcal{E} = \{\text{numeri non tipici}\}$$

Teorema: $\mu(\mathcal{E}) = 0$

μ misura di Lebesgue su $[0, 1]$

Tipicità

$$\mathcal{E} = \{X(0) : f_{X(t)}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \approx f_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})\}$$

+ ragionevoli assunzioni

$$\text{Boltzmann: } \mu(\mathcal{E}) \ll 1$$

μ misura di Liouville-Lebesgue sullo spazio delle fasi

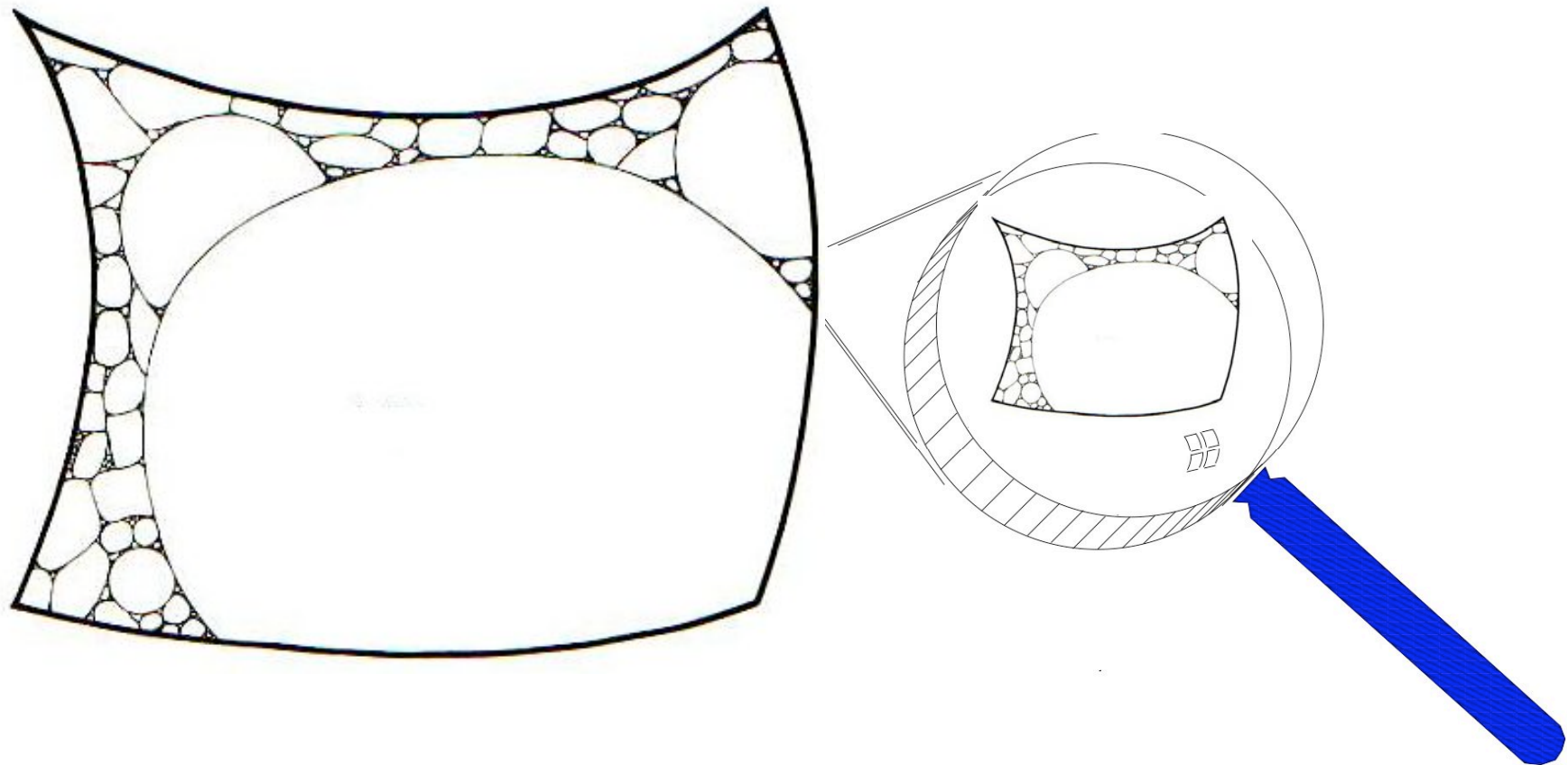
senza le ragionevoli assunzioni di Boltzmann

**Limite (termodinamico) di bassa densità
(cammino libero medio costante)**

O. Lanford, Time Evolution of Large Classical Systems,
Lecture Notes in Physics (1975)

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty \\ \mu(\mathcal{E}) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Tipicità



Critiche

Dal fatto che le equazioni differenziali della meccanica sono lasciate invariate da un cambiamento del segno del tempo, Herr Ostwald conclude che la visione meccanica del mondo non può spiegare perché i processi naturali si svolgono preferenzialmente in una definita direzione temporale. Mi sembra invece che questo punto di vista trascuri che gli eventi meccanici sono determinati non solo da equazioni differenziali, ma anche da condizioni iniziali. In diretto contrasto con Herr Ostwald, ho chiamato una delle più brillanti conferme della visione meccanica della Natura il fatto che questa fornisca una straordinariamente buona descrizione della dissipazione dell'energia, a patto che si assuma che il mondo incominciò in uno stato iniziale soddisfacente certe condizioni iniziali.

Boltzmann, 1896

Critiche

Ho [...] enfatizzato che dal punto di vista molecolare la seconda legge della termodinamica è meramente una legge statistica. L'articolo di Zermelo mostra che i miei scritti sono stati fraintesi; [...] il teorema di Poincaré, che Zermelo spiega all'inizio del suo articolo, è chiaramente corretto, ma la sua applicazione alla teoria del calore non lo è. [...] Perciò, quando Zermelo conclude dal fatto teorico che i [macro]stati iniziali del gas si ripresenteranno in futuro – senza avere calcolato quanto tempo questo richieda – che le ipotesi della teoria dei gas devono essere respinte oppure cambiate in maniera fondamentale, egli è come il giocatore di dadi che ha calcolato che la probabilità di una successione di cento 1 non è zero, e allora conclude che il dado deve essere truccato perché non ha ancora osservato tale successione!

Boltzmann, 1896

Critiche

L'applicabilità della teoria delle probabilità ad un caso particolare non può naturalmente essere dimostrata rigorosamente. [...] Malgrado questo, ogni società di assicurazioni conta sulla teoria delle probabilità. [...] Il presupposto che questi casi rari non sono osservati in natura non è rigorosamente dimostrabile (né lo è a rigore l'intera immagine meccanica), ma, in considerazione di quel che si è detto, è così naturale ed evidente e così tanto in accordo con tutta l'esperienza con le probabilità [...] che alcun dubbio su questo punto certamente non può mettere in questione la validità della teoria quando è al contrario così utile.

Mi è completamente incomprensibile come qualcuno possa vedere una confutazione dell'applicabilità della teoria delle probabilità nel fatto che un qualche altro argomento indica che in un periodo di eoni di tempo ogni tanto delle eccezioni devono accadere; perché proprio la teoria delle probabilità ci insegna esattamente la stessa cosa.

Boltzmann, 1897

Critiche più recenti (e sottili)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt = \int f(x) \mu(dx)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt$$

$$T \sim 10^{10^{23}}$$

Parte difficile

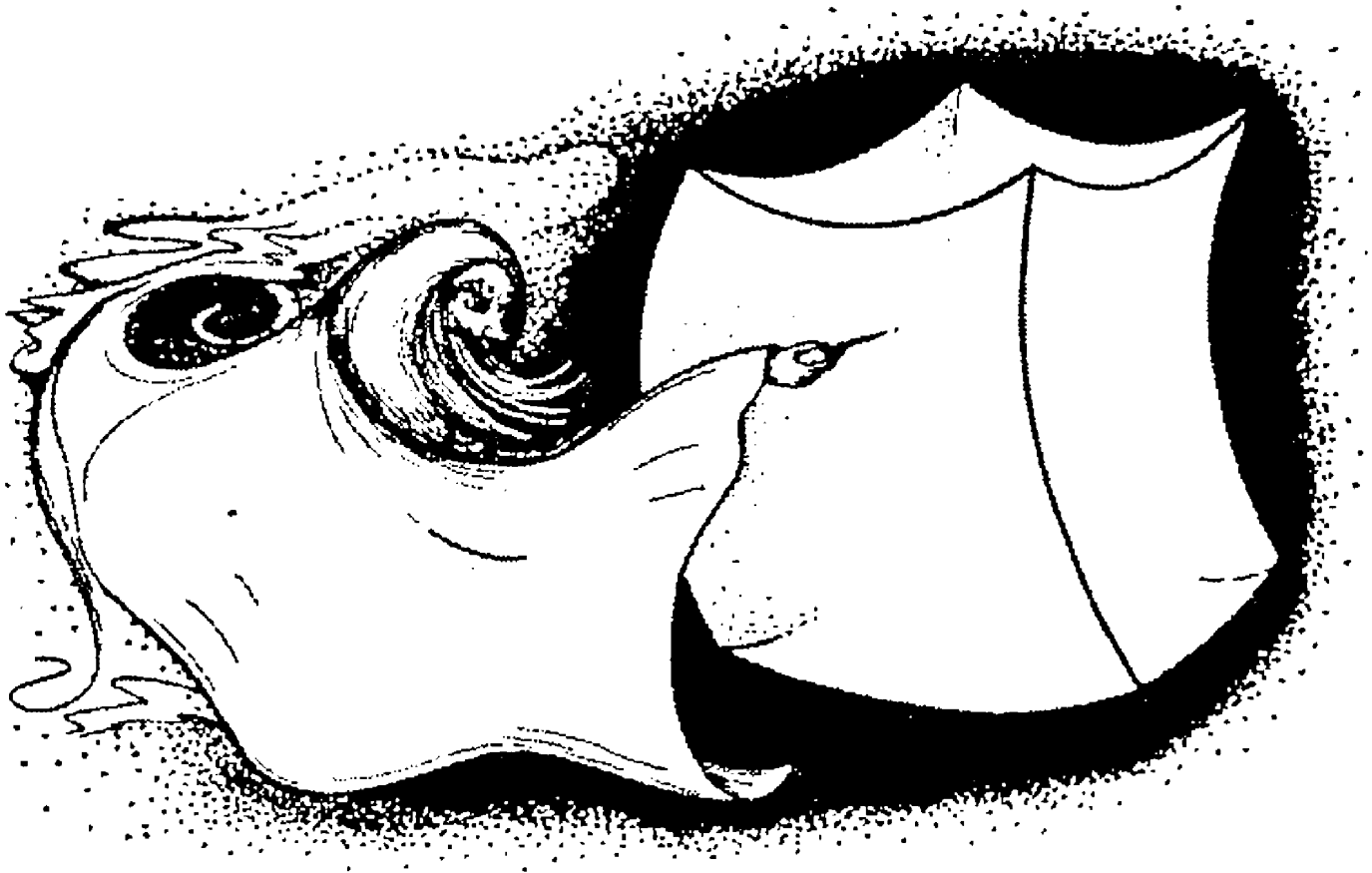
La seconda legge della termodinamica può essere dimostrata dalla teoria meccanica se si suppone che lo stato attuale dell'universo, o almeno che quella sua parte che ci circonda, si sia evoluta da uno stato improbabile ed è ancora in uno stato relativamente improbabile. Questa è un'assunzione ragionevole da fare, poiché ci permette di spiegare i fatti di esperienza e non si dovrebbe pensare di potere dedurla da alcunché di più fondamentale.

Boltzmann, 1897

Un'altra delizia della fisica è che persino le cose semplici ed idealizzate, come la ruota a cricco con dente di arresto [dispositivo meccanico che consente il movimento in un senso soltanto], funziona soltanto perché fa parte dell'universo. Questo dispositivo funziona soltanto in un senso perché ha in definitiva qualche contatto con il resto dell'universo [...] il suo comportamento in una sola direzione di marcia è legato alla direzione di marcia dell'intero universo.

Feynman, 1963

La scelta delle condizioni iniziali. Per produrre un universo simile a quello in cui viviamo Dio avrebbe dovuto appuntare il suo spillo in una regione inimmaginabilmente piccola dello spazio delle fasi degli universi possibili — circa $1/10^{10^{23}}$ del volume totale. Nel disegno né lo spillo, né la regione corrispondente nello spazio delle fasi sono in scala.



Fonte: Penrose (1989).

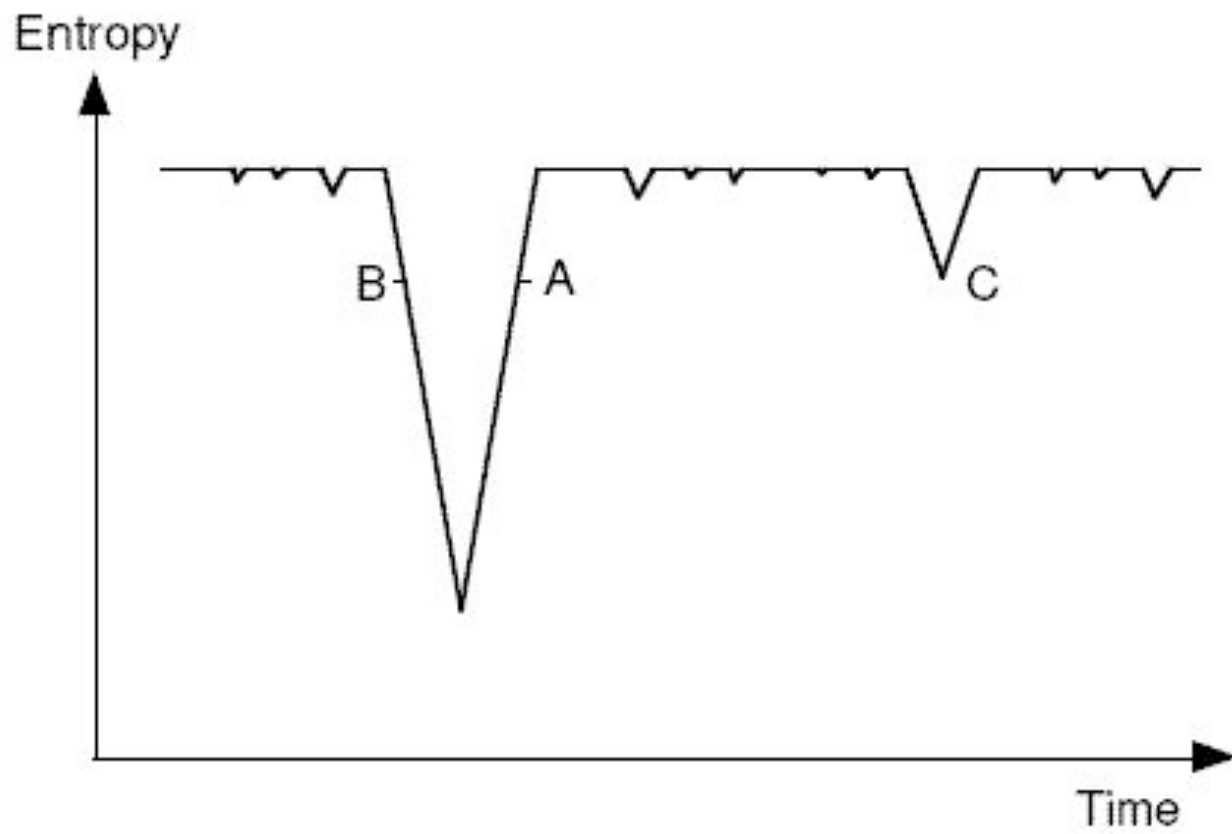


Figure 1. Boltzmann's entropy curve.

Perciò, sebbene quando osserviamo le stelle e guardiamo il mondo vediamo tutto ordinato, se ciò fosse dovuto a una fluttuazione dovremmo predire che guardando in un punto dove non abbiamo ancora guardato dovremmo trovarlo nel più completo disordine. Sebbene la separazione della materia che abbiamo già visto in stelle calde e fredde potrebbe essere una fluttuazione, dovremmo tuttavia aspettarci di trovare, nei posti in cui non abbiamo ancora guardato, che le stelle non sono separate dallo spazio. Invece, facciamo sempre la predizione che, anche in un punto in cui non abbiamo ancora guardato, troveremo le stelle in condizione simile, o troveremo la stessa affermazione su Napoleone, o vedremo ossa [il riferimento è ai reperti fossili della paleontologia] come quelle che abbiamo già visto. Il successo di tutte queste scienze indica che il mondo non è derivato da una fluttuazione, ma da una condizione più separata, più organizzata nel passato che nel presente. Io penso perciò che sia necessario aggiungere alle leggi fisiche l'ipotesi che nel passato l'universo fosse più ordinato, nel senso tecnico [cioè nel senso del macrostato iniziale di bassa entropia], di oggi: credo cioè che questa sia l'affermazione supplementare necessaria a dare un senso a tutto, e a rendere comprensibile l'irreversibilità.

Feynman, 1971

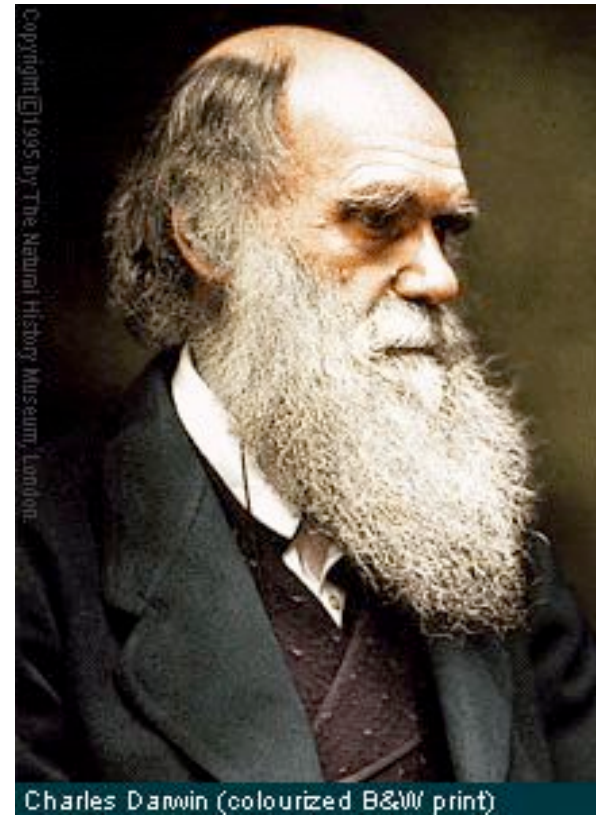
Lo sfondo



Lo sfondo

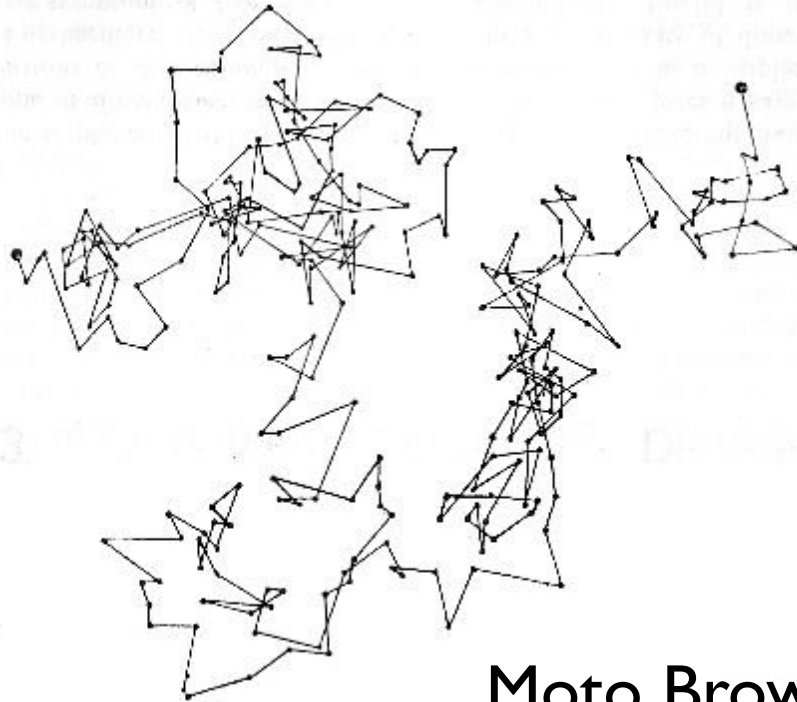


Ernst Mach (1838-1916)



Charles Darwin (1809-1882)

Annus mirabilis (1905), annus mortis (1906)



Moto Browniano



Einstein, 1905



1908 determinazione sperimentale del numero di Avogadro

Perrin, premio Nobel nel 1926

Letture consigliate

