

**LA FILOSOFIA NATURALE NEL  
SUO SVILUPPO  
STORICO-CRITICO**

**Volume 1 : Lo spazio**

Nino Zanghì  
10 aprile 2015

(a cura di Laura Bertolino)



# INDICE

<b>Introduzione</b>	<b>6</b>
<b>1 La natura e i Greci</b>	<b>8</b>
La scuola ionica	8
Gli atomisti	10
Atomismo classico e atomismo moderno	12
Il dialogo di Democrito tra la ragione e i sensi	14
Il continuo e il discreto secondo Aristotele	15
<b>2 Deduzioni</b>	<b>17</b>
Argomenti deduttivi	17
Esistono infiniti numeri primi	19
Lato e diagonale di un quadrato non sono commensurabili	19
Noticina sulla nozione di verità	20
<b>3 La Geometria Euclidea</b>	<b>22</b>
Numeri e grandezze	22
La geometria euclidea	23
La geometria euclidea come paradigma di razionalità	24
Einstein, Huygens e Galileo	26
Una lettera di Einstein a Solovine	28
<b>4 Grandezze e Numeri</b>	<b>30</b>
La teoria delle proporzioni	30
Proporzioni e numeri reali	32
Grandezze euclidee	33
Teoria delle proporzioni e fisica aristotelica	36
<b>5 Calcoli e Misure</b>	<b>38</b>
La misura del raggio terrestre di Eratostene	38
Le misure astronomiche di Aristarco	39
L'Arenario di Archimede ovvero quanto grande è l'universo	42
Il metodo di triangolazione	45
<b>6 Efficacia della Matematica</b>	<b>49</b>
L'irragionevole efficacia della matematica secondo Wigner	49
L'uomo solo di Herschel	50
I giudizi sintetici a priori di Kant	51
Kant e la geometria	53
<b>7 Algebra e Geometria</b>	<b>55</b>
Descartes e la geometria analitica	55
Il primo uso della retta numerica	57

Aritmetica dei numeri complessi	58
<b>8 Il Calcolo Differenziale</b>	<b>61</b>
Il Cono di Democrito	61
I rudimenti del calcolo differenziale	64
Il teorema fondamentale del calcolo	72
Il cono di Democrito e gli indivisibili di Cavalieri	73
<b>9 I labirinti dell'Infinito e del Continuo di Galileo e Leibniz</b>	<b>77</b>
Indivisibili e infinito attuale per Galileo	77
I paradossi dell'infinito	78
Il labirinto del continuo di Leibniz	81
Idealità del continuo e atomi formali	82
Indivisibili e infinito attuale per Leibniz	83
<b>10 La Concezione Moderna dell'Infinito e del Continuo</b>	<b>87</b>
Achille e la tartaruga	87
La nozione di limite	91
Le successioni di Cauchy	93
L'atomismo matematico di Weierstrass e Dedekind	94
Campi numerici	96
<b>11 Il Paradiso di Cantor</b>	<b>97</b>
L'atomismo matematico di Cantor	97
L'infinito attuale di Cantor	99
L'ipotesi del continuo	101
<b>12 Gödel e la teoria degli insiemi</b>	<b>103</b>
La moderna teoria degli insiemi secondo Gödel	103
Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel	106
L'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo	108
Diversi modi di intendere il metodo assiomatico	110
Matematica e realtà per Gödel	112
<b>13 La Geometria Euclidea Moderna</b>	<b>114</b>
Spostamenti rigidi e vettori	114
La nozione di spazio vettoriale	117
La nozione di spazio affine	117
La nozione di spazio euclideo	122
<b>14 Spazi illimitati ma finiti</b>	<b>126</b>
La distinzione tra infinito e illimitato	126
Vita in una 2-sfera	127
Vita in una 3-sfera	130
L'universo di Dante	131
La forma dell'universo	133

<b>15 L'approccio assiomatico</b>	<b>134</b>
La geometria come scienza empirica	134
L'approccio assiomatico alle geometrie non euclidee	136
Dimostrazioni di coerenza	137
L'interpretazione euclidea di Beltrami	138
L'approccio di Gauss e Riemann	140
Riflessi sulla concezione kantiana	140
<b>16 L'approccio di Gauss e Riemann</b>	<b>142</b>
La nozione di curvatura intrinseca	142
Il "Theorema Elegantissimum"	143
Il "Theorema Egregium"	144
Riemann e la ridefinizione della geometria	146
Il concetto di grandezza molteplicemente estesa	148
<b>17 La Geometria dei Luoghi</b>	<b>150</b>
Continuità e vicinanza	150
La topologia come teoria dei luoghi	152
Nozioni topologiche fondamentali	153
Formulazioni più astratte in termini di aperti	154
Varietà continue e differenziabili	155
<b>18 Riemann e la Forma dello Spazio</b>	<b>156</b>
Relazioni metriche	156
Spazi a curvatura costante	157
<b>19 Geometria e Fisica</b>	<b>158</b>
Vita nel disco di Poincaré	158
Convenzionalismo e olismo	160
La posizione di Einstein	161
<b>Bibliografia</b>	<b>164</b>

# Introduzione

## DEMOCRITO

**RAGIONE** *Solo in apparenza una cosa è dolce o amara, solo in apparenza è calda o fredda, solo in apparenza ha un colore; in realtà esistono solo gli atomi e lo spazio vuoto.*

**SENSI** *O misera ragione, tu che attingi da noi tutta l'evidenza tenti di rovesciarci? Il tuo successo significherebbe la tua rovina.*

## LUCREZIO

*La nave da cui siamo trasportati, si muove, mentre sembra star ferma; quella che rimane immobile all'ormeggio, si crede che proceda oltre. E sembra che a poppa fuggano colline e pianure oltre le quali conduciamo la nave e con le vele voliamo. Gli astri sembrano tutti restare immobili, fissi alle eteree cavità, e tuttavia son tutti in assiduo movimento, giacché, dopo esser sorti, rivedono i lontani tramonti, quando hanno percorso il cielo col loro corpo lucente. E il Sole e la Luna parimenti sembra che rimangano immobili, essi che il fatto stesso mostra in movimento. E monti che s'innalzano lontano in mezzo alle onde, tra i quali si apre libero un vasto passaggio alle flotte, sembrano tuttavia fare, congiunti tra loro, un'unica isola. (Lucrezio, De rerum Natura)*

## GALILEO

*Pare che quello degli effetti naturali che a sensata esperienza ci pone dinanzi agli occhi o le necessarie dimostrazioni ci concludono, non debba in conto alcuno esser revocato in dubbio. (Galileo Galilei, Lettera a Cristina di Lorena)*

*E l'accidente è il parere, a quelli che di notte camminano per una strada, d'esser seguitati dalla Luna con passo eguale al loro, mentre la veggono venir radendo le gronde de i tetti sopra le quali ella gli apparisce, in quella guisa appunto che farebbe una gatta che, realmente camminando sopra i tegoli, tenesse loro dietro: apparenza che, quando il discorso non s'interponesse, pur troppo manifestamente ingannerebbe la vista." (Galileo Galilei, Dialogo sopra i massimi sistemi)*

*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. (Galileo Galilei, *Il Saggiatore*)*

## **LEIBNIZ**

*Cartesio ha riconosciuto che le anime non possono assolutamente imprimere forza ai corpi: nella materia, infatti, la quantità di moto è sempre la stessa. Egli ha però errato nel credere che l'anima fosse in grado di cambiare la direzione dei corpi.*

*Ora, questa sua convinzione era dovuta al fatto che ai suoi tempi non si conosceva per nulla la seguente legge naturale: Nella materia si conserva anche la stessa direzione totale. Se Cartesio avesse conosciuto tale legge, sarebbe senz'altro giunto al mio sistema dell'Armonia prestabilita.*

*Il sistema dell'armonia prestabilita fa sì che:*

- (a) i corpi agiscono come se — per assurdo — non ci fossero anime;*
- (b) le anime agiscono come se non ci fossero i corpi;*
- (c) l'anima e il corpo agiscono come se si influenzassero a vicenda.*

*(Leibniz, *La Monadologia*)*

## **EINSTEIN**

*Dalla sua chiara critica Hume ha non solo fatto progredire la filosofia in modo decisivo, ma anche, anche se non per colpa sua, ha creato un pericolo per la filosofia che, dopo la sua critica, fece emergere una disastrosa "paura della metafisica", che è diventata una malattia della filosofia empirista contemporanea (Einstein, *Ideas and Opinions*).*

*La vera difficoltà sta nel fatto che la fisica è un tipo di metafisica perché la fisica descrive la realtà. Ma noi non sappiamo cosa sia "la realtà", se non attraverso la descrizione fisica che diamo di essa (Einstein in una lettera di a Schrödinger del 1935).*

# 1 LA NATURA E I GRECI

## Indice

La scuola ionica	8
Gli atomisti	10
Atomismo classico e atomismo moderno	12
Il dialogo di Democrito tra la ragione e i sensi	14
Il continuo e il discreto secondo Aristotele	15

Se qualcuno mi chiedesse dove e quando è nata la fisica, non esiterei a rispondere: la Grecia tra il VI e il V secolo a.C. Se poi mi fosse fatta la stessa domanda riguardo all'inizio della *fisica-matematica* — nel senso moderno del termine — non avrei alcun dubbio nell'indicare i luoghi e i tempi dell'epoca ellenistica e in particolare Alessandria e la sua biblioteca o Siracusa. Se infine mi si chiedesse di indicare dei buoni libri da leggere riguardo a questi temi storici, anche in questo caso non esiterei: per la scienza classica consiglieri il volumetto *La Natura e i Greci* di Erwin Schrödinger e per la scienza ellenistica, *La rivoluzione dimenticata* di Lucio Russo [1996].

Fiumi di inchiostro sono stati versati sulla nascita della scienza nell'antica Grecia. Sembra quindi opportuno che, di mio, ne aggiunga poco: seguirò quasi verbatim il saggio di Schrödinger, limitandomi ad esporre quello che di solito **non** viene trattato nei testi di storia della filosofia.

## La scuola ionica

Quando nei libri di testo si parla degli scienziati della scuola di Mileto, sovente si dice che uno pensava che tutto fosse acqua, un altro che tutto fosse fuoco e un altro ancora che tutto fosse aria. Detto così, sembra un po' sconclusionato e privo di "profondità" filosofica. Eppure, Talete, Anassimandro e Anassimene avviarono davvero la più profonda rivoluzione di pensiero che sia mai avvenuta, mettendo in moto un processo conoscitivo che da loro arriva fino a noi. Per spiegare questo, Schrödinger mette in evidenza i tre passi essenziali che segnarono l'avvio di questa rivoluzione.

- (1) La consapevolezza che **il mondo può essere compreso** — da chi si dà la pena di osservarlo nel modo dovuto, senza dover ricorrere alle azioni arbitrarie degli dei, degli spiriti o ad altre superstizioni. Questa era l'idea di Talete.

- (2) Il riconoscimento che tutta la materia di cui è formato il mondo, nonostante la sua infinita varietà, ha tanti caratteri in comune da dover essere considerata intrinsecamente un'unica sostanza<sup>1</sup>. Anche questo passo è dovuto a Talete.
- (3) L'ipotesi che le più ovvie trasformazioni della materia siano **rarefazioni** e **condensazioni** e che ogni specie di materia può assumere, nelle opportune circostanze, lo stato solido, liquido, o aeriforme. Questo passo è dovuto ad Anassimene.

Ciascun passo è di capitale importanza: associato con (1) che è possibile conoscere il mondo, (2) ne costituisce un affinamento ipotizzando proprietà comuni della materia, malgrado l'apparente varietà delle forme. (3) è un'ipotesi specifica su come la varietà delle forme possa essere spiegata.

Come sostanza fondamentale Anassimene designò l'aria, e con ciò tornò su un terreno più solido che il suo maestro Anassimandro. Scrive Schrödinger:

*... se [Anassimene] avesse detto "idrogeno gassoso dissociato" (ciò che proprio non poteva dire), egli non sarebbe stato molto lontano dalla nostra attuale concezione. Disse comunque che dall'aria potevano avere origine per ulteriore rarefazione corpi più leggeri [...], mentre la nebbia, le nubi, l'acqua e la terra solida risultavano da fasi successive di condensazione. Queste affermazioni rappresentano ciò che di più corretto si poteva formulare con le conoscenze ed entro le concezioni del tempo.*

Si osservi che le condensazioni non riguardano piccoli cambiamenti di volume. Nel passaggio dallo stato gassoso ordinario a quello solido o liquido la densità si moltiplica per un fattore che sta fra mille e duemila. Per esempio un centimetro cubo di vapor d'acqua alla pressione atmosferica, quand'è condensato, si restringe formando una goccia d'acqua di poco più di un millimetro di diametro.

*L'idea di Anassimene — che l'acqua liquida e persino una pietra solida, dura, siano formate dalla condensazione d'una sostanza basilare gassosa — anche se pare una concezione fondamentalmente simile a quella opposta di Talete, pure è al contempo più ardita e più affine alle nostre vedute attuali.*

---

<sup>1</sup> Schrödinger suggerisce di chiamare questo passo "ipotesi di Proust allo stato embrionale". Ricordiamo che la legge delle proporzioni definite, enunciata da Joseph Proust nel 1799, è una legge che regola la formazione dei composti chimici a partire dagli elementi che li compongono. Essa recita: quando due o più elementi reagiscono, per formare un determinato composto, si combinano sempre secondo proporzioni in masse definite e costanti. Ad esempio il carbonato di rame, qualunque sia la sua origine (naturale o preparato in laboratorio), contiene rame, carbonio e ossigeno sempre nelle stesse proporzioni.

Infatti, oggi noi riteniamo che un gas si trovi nello stato più semplice “non aggregato”, in cui le molecole che formano il gas si muovono quasi liberamente, a differenza da quel che accade per solidi e liquidi.

*Che Anassimene non si abbandonasse a fantasie astruse, ma intendesse applicare la sua teoria a fatti concreti, lo si vede dalle stupefacenti intuizioni a cui giunse in alcuni casi. Così egli ci fa sapere, a proposito della differenza tra la grandine e la neve (l'una e l'altra formate d'acqua allo stato solido, cioè da ghiaccio), che la grandine si forma mentre gela l'acqua che cade dalle nuvole (cioè la pioggia), mentre la neve risulta dalla solidificazione delle stesse nuvole umide. Un trattato moderno di meteorologia dice pressappoco le stesse cose.*

Infine, Schrödinger ci invita a prestare attenzione al punto di gran lunga più importante dell'ipotesi di condensazione-rarefazione: “essa rappresentò l'avvio dell'atomismo, effettivamente subentrato subito dopo”.

## Gli atomisti

Così li descrive Aristotele:

*Leucippo e il suo seguace Democrito pongono come elementi il pieno e il vuoto, e chiamano l'uno essere e l'altro non-essere; e precisamente chiamano essere il pieno e il solido e il vuoto non-essere. [...] E pongono questi elementi come cause materiali degli esseri.*  
(Aristotele, *Metafisica A*)

Secondo Schrödinger i caratteri principali dell'atomismo sono:

- (1) Gli atomi sono invisibilmente piccoli
- (2) Gli atomi sono perpetuamente in moto
- (3) Il loro continuo movimento persiste da solo e non cessa mai
- (4) Il peso o gravità non è considerato una proprietà primitiva dell'atomo

Per ciascun punto, seguiamo le chiarificazioni che dà Schrödinger.

- (1) Gli atomi sono invisibilmente piccoli:

*Essi sono tutti della stessa sostanza o natura, ma assumono un numero enorme di forme e dimensioni differenti, ed è solo questo che li caratterizza. Infatti essi sono impermeabili e agiscono uno sull'altro per contatto diretto, imprimendosi a vicenda spinte e rotazioni; e così le più varie forme di aggregazione e di concatenazione di atomi della stessa specie o di specie differenti danno origine all'infinita varietà di corpi materiali, che noi osserviamo nelle loro varie interazioni*

*reciproche. Lo spazio esterno agli atomi è vuoto — concetto questo che a noi sembra naturale, ma che fu oggetto d'interminabili discussioni nell'antichità, poiché parecchi filosofi concludevano che la cosa che non è, non poteva in nessun modo essere, cioè non poteva esistere uno spazio vuoto!*

(2) Gli atomi sono perpetuamente in moto:

*Possiamo interpretare quest'asserzione nel senso che s'immaginava che questo movimento fosse distribuito irregolarmente o disordinatamente in tutte le direzioni, poiché non si può pensare altrimenti se gli atomi devono essere perpetuamente in moto anche in corpi che sono in quiete o che si muovono lentamente. Democrito asserisce esplicitamente che nello spazio vuoto non esiste sopra o sotto, davanti o dietro, non c'è una direzione privilegiata — lo spazio vuoto è isotropo, diremmo noi.*

(3) Il loro continuo movimento persiste da solo e non cessa mai:

*Ciò era ritenuto certo. Questa divinazione della legge d'inerzia va considerata un grande risultato, perché è patentemente contraddetta dall'esperienza. Essa fu riaffermata duemila anni dopo da Galileo, che vi pervenne con la geniale generalizzazione dei risultati di accurati esperimenti, eseguiti su pendoli e palle fatte rotolare giù da un piano inclinato . . .*

(4) Il peso o gravità non era considerato una proprietà primitiva dell'atomo:

*Esso era spiegato in una maniera di per sé molto ingegnosa, cioè con un moto vorticoso generale che ha per effetto di far tendere gli atomi più grossi, più massicci, verso il centro, dove la velocità di rotazione è minore, mentre i più leggeri sono spinti o gettati lontano dal centro...*

In effetti (e questa è una mia aggiunta), il punto (4) fu ripreso da Descartes (che, probabilmente, lo aveva appreso da Gassendi) nella sua teoria dei vortici (sostituendo però il vuoto degli atomisti con un mezzo continuo).

Democrito, a cui dobbiamo lo schema teorico appena illustrato, fu uno scienziato a tutto tondo. Le sue qualità come matematico gli vennero riconosciute da Archimede, che, ne *Il metodo* scrive:

*E riguardo ai teoremi di cui Eudosso per primo ha scoperto le dimostrazioni, cioè che il cono è un terzo del cilindro, la piramide un terzo del prisma aventi ugual base e uguale altezza, il merito va fatto risalire in buona parte a Democrito, che per primo ha dato, senza dimostrazione, le proposizioni relative a tali figure.*

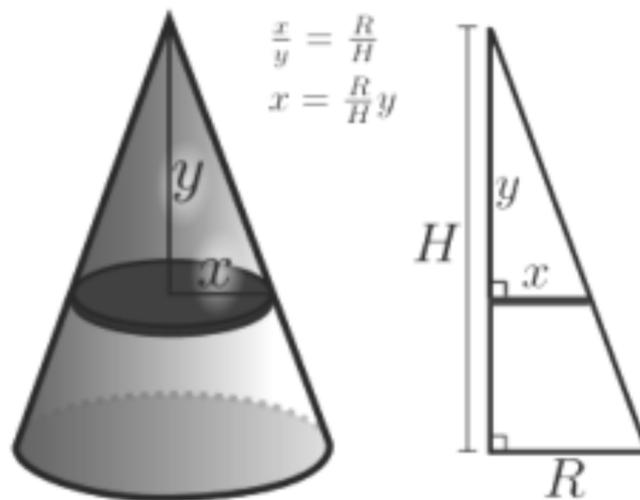


Figura 1.1: Volume del cono =  $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

Democrito si confrontò inoltre con il problema del continuo e del discreto, un problema che fu affrontato diversi secoli dopo anche da Archimede e che fu al centro dello sviluppo dell'analisi matematica moderna tra Seicento e Ottocento. Democrito intuì profondamente le difficoltà dell'infinitesimale. Ciò è confermato dal fatto che è a lui attribuita la scoperta di un paradosso, noto come il paradosso del cono, che è così riportato da Plutarco (46?–127 d.C.) in *De communibus notitiis adversus Stoicos*:

*Se un cono viene tagliato da un piano parallelo alla base, come si dovranno immaginare le due superfici di sezione? Saranno uguali o disuguali? Perché, se saranno disuguali renderanno irregolare il cono che verrà ad avere tante incisioni e scabrosità a gradini; ma se saranno uguali, le superfici saranno uguali anche le sezioni e il cono verrà ad assumere l'aspetto del cilindro, in quanto risultante della sovrapposizione di cerchi uguali e non disuguali, il che è sommamente assurdo.*

## Atomismo classico e atomismo moderno

Si è spesso sostenuto che l'accostamento tra l'atomismo dell'epoca classica e quello moderno sia improprio. Dopo tutto — si sostiene — la scienza antica non era propriamente basata sul metodo moderno — galileiano — basato sulla prova sperimentale come base della costruzione teorica scientifica vera e propria. L'atomismo classico giunse a conclusioni circa la realtà di tipo speculativo e questo — si sostiene — non lo rende "scientifico" in senso moderno; inoltre, la costruzione teorica dell'atomismo classico non era "quantitativa", così come lo è quella dell'atomismo moderno, ma solo "qualitativa".

Ci sono buone ragioni per obiettare: in primo luogo, perché è infondata l'idea che ci sia un metodo scientifico che inequivocabilmente permetta di tracciare una demarcazione tra ciò che è scienza e ciò che non lo è (mi auguro che il resto di queste lezioni chiarisca questo punto); in secondo luogo perché è presumibile che il modo di procedere di Democrito fu davvero "moderno". Schrödinger ne fa la seguente ricostruzione:

*Che cosa guidava il suo raffinato organo del pensiero in modo da farlo arrivare al concetto di atomo? Democrito . . . era un geometra di valore . . . dai titoli rimasti di due altri scritti si ricava l'impressione che alla fine egli arrivò a distinguere chiaramente da un lato i concetti geometrici di corpo, di superficie o linea di proprietà ben definite . . . e dall'altro le realizzazioni più o meno perfette di questi concetti mediante o su un corpo fisico. . . .*

E continua:

*Uniamo ciò col fatto che Democrito non solo conosceva le opinioni dei filosofi ionici, ma si può dire che continuasse la loro tradizione . . . che tutti i grandi cambiamenti nella materia sono solo apparenti, in realtà dovuti alla rarefazione e condensazione. **Ma ha senso dire che la sostanza rimane immutata, se in realtà ogni briciola di essa, diventa più tenue o più densa? Il geometra Democrito concepì molto bene questo "per quanto piccolo".** La via più ovvia è di pensare che ogni corpo fisico sia composto in realtà d'innomerevoli corpuscoli, **che restano sempre immutati**, e che abbia luogo una rarefazione quando questi si allontanano l'uno dall'altro, una condensazione quando questi si affollano entro un piccolo volume. Affinché ciò possa accadere, entro certi limiti, è **indispensabile** che lo spazio tra un corpuscolo e l'altro sia vuoto, cioè che non contenga assolutamente nulla.*

L'ipotesi atomica fu davvero un passo gigantesco nella comprensione del mondo. A questo proposito il fisico Richard Feynman (1918–1988) scrisse:

*Se, per qualche cataclisma, tutta la conoscenza scientifica fosse distrutta, e solo una frase potesse passare alla generazione successiva, quale affermazione conterrebbe il massimo di informazione con il minimo di parole? Credo che sia l'ipotesi atomica (o il fatto atomico, o comunque lo vogliate chiamare) che le cose sono fatte d'atomi — piccole particelle che si muovono intorno in moto perpetuo, attraendosi l'un l'altra quando sono abbastanza vicine, ma respingendosi quando sono schiacciate l'una contro l'altra. In questa sola frase vedrete un'enorme quantità di informazione sul mondo, se soltanto un po' di immaginazione e pensiero sono applicati.*

All'ipotesi atomica si possono applicare le stesse parole che il fisico Carlo Rovelli usa per la comprensione di Anassimandro che la Terra è un sasso che galleggia nello spazio:

*Tutte le civiltà hanno pensato che il mondo fosse fatto di Cielo sopra e Terra sotto [...] Questa*

*immagine del mondo è condivisa dalle civiltà egiziana, cinese, Maya, dell'antica India e dell'Africa nera, dagli Ebrei della Bibbia, dagli Indiani del nord America [...] Tutte eccetto una: la civiltà greca. Già nel periodo classico, per i Greci la Terra era un sasso sospeso nello spazio senza cadere [...] Come hanno fatto i Greci a comprendere presto che la Terra galleggia nello spazio, e il cielo continua sotto i nostri piedi? Chi lo ha capito e come? L'uomo che ha compiuto questo passo gigantesco nella comprensione del mondo è Anassimandro [...] Basterebbe questa scoperta per fare di Anassimandro un gigante del pensiero di tutti i tempi. (C. Rovelli, Anassimandro di Mileto, 2007).*

Lo stesso dicasi per Democrito riguardo alla scoperta che il mondo è fatto d'atomi.

## **Il dialogo di Democrito tra la ragione e i sensi**

Quando si cita il frammento 125 di Democrito, usualmente si omette la risposta dei sensi, che riportiamo in grassetto:

RAGIONE *Solo in apparenza una cosa è dolce o amara, solo in apparenza è calda o fredda, solo in apparenza ha un colore; in realtà esistono solo gli atomi e lo spazio vuoto.*  
SENSI ***O misera ragione, tu che attingi da noi tutta l'evidenza tenti di rovesciarci? Il tuo successo significherebbe la tua rovina.***

Raramente ho incontrato un'espressione così sintetica e chiara di chi, come indagatore della natura, persegue l'obbiettivo di ricondurre tutta la varietà dei fenomeni naturali al comportamento dei costituenti elementari del mondo — gli atomi — e come filosofo ha un'acuta consapevolezza dei limiti e dell'incompletezza di una tale *immagine scientifica* del mondo. In breve, Democrito è consapevole di ciò che verrà poi chiamato il problema mente-corpo. Al riguardo, Schrödinger commenta così:

*... Democrito comprese che [...] questa immagine [scientifica] del mondo, che aveva soppiantato il mondo reale della luce e dei colori, dei suoni e dei profumi, della dolcezza, dell'amarezza e della bellezza, era in realtà basata proprio su quelle percezioni sensibili che sembravano essere scomparse da esso.*

Ritourneremo su questo punto quando in seguito discuteremo alcune idee di Einstein.

## Il continuo e il discreto secondo Aristotele

I temi del continuo e del discreto saranno al centro di molti capitoli successivi. Concludiamo questo capitolo esponendo le idee di Aristotele al riguardo, idee che influenzarono profondamente lo sviluppo successivo del pensiero filosofico-scientifico.

Aristotele fu il primo ad intraprendere un'analisi sistematica del continuo e del discreto. Egli sosteneva che la realtà fisica è un plenum continuo, e che la struttura di un continuo, comune a spazio, tempo e movimento, non è riducibile a qualsiasi altra cosa. La sua risposta al problema della scuola eleatica è un perfezionamento di quella di Anassagora, cioè che grandezze continue sono potenzialmente divisibili all'infinito, nel senso che esse possono essere divise **ovunque**, anche se non possono essere divise **dappertutto** nello stesso tempo.<sup>2</sup>

Nelle *Categorie*, Aristotele fornisce la seguente caratterizzazione della differenza tra quantità discrete e quantità continue.

*La quantità può essere o discreta o continua; inoltre, può essere costituita da parti che hanno una posizione l'una rispetto all'altra oppure da parti che non hanno una posizione. Sono quantità discrete, ad esempio, il numero e il discorso; continue sono, invece la linea, la superficie, il corpo, e, oltre a questi, anche il tempo e il luogo. Le parti del numero, infatti, non hanno un limite comune, in cui esse si congiungono tra loro. Se, ad esempio, cinque è una parte di dieci, nessun limite comune unisce cinque e cinque, ma essi restano separati; e anche il tre e il sette non si uniscono in nessun limite comune. In generale, per quanto riguarda il numero, le parti non potrebbero mai avere un limite comune, ma sono sempre separate. Il numero, quindi, è una quantità discreta.*

*Allo stesso modo, anche il discorso è una quantità discreta (che sia una quantità risulta chiaro dal fatto che si misura in sillabe brevi e sillabe lunghe, e qui intendo il discorso che si esprime con la voce), poiché le sue parti non sono unite da nessun limite comune. Non c'è, infatti, nessun limite comune rispetto al quale le sillabe si uniscono, ma ognuna di esse resta in sé e per sé separata.*

*La linea, invece, è una quantità continua, dal momento che è possibile trovare un limite comune in cui le parti di essa si uniscono: il punto. E la linea, a sua volta, è il limite comune della superficie: le parti del piano, infatti, si connettono in un limite comune. Allo stesso modo, anche per il corpo si potrebbe trovare un limite comune, cioè la linea o la superficie, in cui le parti del corpo si uniscono.*

*Anche il tempo e lo spazio rientrano in questo genere di quantità: il presente unisce il passato e il futuro; a sua volta, lo spazio è una quantità continua, poiché le parti del corpo, unite da un limite comune, occupano un certo spazio. Quindi anche le parti dello spazio, occupate rispettivamente da ciascuna delle parti del corpo, si uniscono nello stesso limite in cui si uniscono le parti del corpo. Anche lo spazio, dunque, è una quantità continua, dato che le sue parti si uniscono in un solo limite comune.*

---

<sup>2</sup> In questa sezione seguiamo la trattazione di John S. Bell in *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*.

Pertanto per Aristotele quantità come linee e piani, spazio e tempo sono continue in virtù del fatto che le loro parti costitutive “si uniscono in un certo confine comune”. Al contrario nessuna delle parti che costituiscono quantità discrete possono possedere un confine comune.

Aristotele a volte riconosce **l'infinita divisibilità**, la proprietà di essere divisibile in parti che possono subire un ulteriore frazionamento, il processo che mai termina in un indivisibile, come conseguenza della continuità, come ha caratterizza la nozione nel Libro V della *Fisica*. Ma a volte considera la proprietà di divisibilità infinita come la definizione di continuità.

La questione se una grandezza è perennemente divisibile in unità più piccole, o divisibile solo fino a una certa grandezza atomica conduce al dilemma della divisibilità, una difficoltà che Aristotele necessariamente ha dovuto affrontare in relazione alla sua analisi del continuo.

Aristotele attacca la concezione atomista basandosi su due idee:

- (1) che è nella natura di un continuo di esistere prima delle sue parti;
- (2) che un punto non è altro che un taglio o divisione in una linea, come l'inizio o la fine, cioè il limite, di un segmento di linea.

Proprio perché i punti esistono solo come divisioni o limiti, Aristotele nega loro realtà sostanziale; essi sono semplici “accidenti” derivanti da operazioni effettuate su sostanze o grandezze. Per Aristotele, i punti esistono essenzialmente solo in un modo potenziale, come marcature su possibili divisioni delle grandezze.

Quando un corpo in movimento si muove continuamente lungo un percorso continuo, secondo Aristotele, i punti su cui si muove non hanno nulla di più di una esistenza potenziale, e sono attualizzati solo quando il corpo si ferma e inizia a muoversi di nuovo. Analogamente, un punto in una linea retta è creato solo sezionando la linea. Aristotele confuta l'idea che un continuo sia composto da parti, dimostrando che anche se la divisione illimitata di una grandezza è possibile e un punto esiste ovunque **potenzialmente**, ciò non significa che la grandezza si riduca a punti. Una grandezza può essere divisa completamente solo da un processo in cui una sottosezione è divisa in ulteriori sottosezioni. Ma non c'è mai una fase in cui la divisione è completata e la linea è ridotta ai componenti privi di estensione. Questo perché un punto realmente esistente presuppone necessariamente l'esistenza di grandezze estese, che sono state suddivise: fino a quando la suddivisione non è stata effettivamente eseguita, il punto ha solo un'esistenza potenziale. Pertanto la divisione deve essere successiva anziché simultanea, e si verifica “in ogni punto”, non nel senso di punti effettivamente esistenti, ma nel senso di punti che potrebbero segnare ulteriori suddivisioni.

## 2 DEDUZIONI

### Indice

Argomenti deduttivi	17
Esistono infiniti numeri primi	19
Lato e diagonale di un quadrato non sono commensurabili	19
Noticina sulla nozione di verità	20

Il ragionamento deduttivo è una caratteristica essenziale della scienza greca prima ed ellenistica poi; è una tecnica con cui si deducono affermazioni da altre affermazioni in modo inconfutabile, in modo cioè che chi accetta le premesse non possa rifiutare le conclusioni. Le dimostrazioni, come già aveva insegnato Aristotele (384–322 a.C.) nelle sue opere logiche, sono un sillogismo in cui le premesse sono vere; la dimostrazione è dunque assolutamente inconfutabile. Al metodo dimostrativo si era giunti in Grecia grazie allo sviluppo dell'arte di argomentare in modo convincente nelle aule di tribunale e nelle assemblee, arte che fu propria delle forme democratiche greche e che precede le opere di logica di circa un secolo.

### Argomenti deduttivi

Il rapporto tra retorica e dimostrazione risulta assai chiaro nella "*Retorica*" di Aristotele. Ecco un esempio di argomento deduttivo:

- (1) Tutti gli uomini sono immortali
- (2) Sherlock Holmes è un uomo
- ⊢ (3) Sherlock Holmes è immortale

Come è ben noto, la validità di un argomento dipende non dalla verità o la falsità delle sue premesse e conclusione, ma unicamente dall'averne una forma logica valida. Naturalmente, se le premesse sono vere la conclusione è vera; in questo caso, non solo si ha un **argomento valido**, ma anche un **argomento corretto**.

Un altro esempio di argomento valido è il seguente sillogismo che Aristotele considera negli *Analitici Primi*:

- (1) Tutti gli animali che non hanno bile nel sangue sono longevi
- (2) Tutti gli uomini, cavalli e muli non hanno bile nel sangue
- ⊢ (3) Tutti gli uomini, cavalli e muli sono longevi

La correttezza del ragionamento dipende dalle premesse: la (2) va stabilita empiricamente (in effetti, pace Aristotele, è falsa) e la (1) è una generalizzazione empirica (falsa). Ritorneremo su questo sillogismo quando ci occuperemo dell'induzione.

Ricordiamo due tipi classici di argomenti deduttivi con premessa condizionale:

**Modus ponens** (affermare l'antecedente)

- (1)  $A \rightarrow B$
- (2)  $A$
- ⊢ (3)  $B$

**Modus tollens** (negare il conseguente)

- (1)  $A \rightarrow B$
- (2)  $\sim B$
- ⊢ (3)  $\sim A$

Ricordiamo infine che dall'affermazione del conseguente e dalla negazione dell'antecedente non segue alcuna conclusione (il non prestare attenzione a questo porta a fallacie logiche abbastanza comuni):

- (1)  $A \rightarrow B$
- (2)  $B$
- ⊢ (3) nessuna conclusione

- (1)  $A \rightarrow B$
- (2)  $\sim A$
- ⊢ (3) nessuna conclusione

Ricordiamo infine un forma di ragionamento corretto usato nella dimostrazione di teoremi matematici:

**Reductio ad absurdum** (tecnica per dimostrare che  $A$  è vera):

- (1) Si supponga che  $\sim A$  è vera
- (2) Da (1), dedurre che  $C$  è vera
- (3) Si deduca anche che  $C$  è falsa
- ⊢ (4)  $\sim A \rightarrow (C \ \& \ \sim C)$
- ⊢ (5)  $\sim A$  è falsa (per modus tollens)
- ⊢ (6)  $A$  è vera

## ENTIMEMA

Raramente le persone precisano tutte le premesse delle loro argomentazioni. La maggior parte dei ragionamenti, compresa la maggior parte dei ragionamenti quotidiani, è in **entimemi**, cioè argomenti con premesse non dichiarate o "mancanti". Un argomento non valido spesso può essere reso valido enunciando la sua premessa mancante. Per esempio, "Socrate è un uomo. Quindi, Socrate è mortale" non è un argomento valido, ma può essere reso valido (e corretto) aggiungendo la premessa "Tutti gli uomini sono mortali".

Occorre però stare attenti. Qualsiasi argomento non valido dalla premessa  $A$  alla conclusione  $B$  potrebbe essere reso valido considerandolo un entimema e aggiungendo la premessa mancante "Se  $A$ , allora  $B$ ". Il che sarebbe un disastro!

Il punto è che non ogni argomento dovrebbe essere considerato come avente una premessa mancante. Deve essere chiaro dal contesto della produzione di un argomento se esso ha davvero una premessa mancante. Supponiamo che qualcuno sostenga che deve piovere, perché quando piove le strade si bagnano, e le strade sono effettivamente bagnate. Non è corretto considerare questo ragionamento un entimema, va piuttosto considerato un errore, un esempio della fallacia di affermare il conseguente. Si deve ammettere che in alcuni casi può non essere chiaro dal contesto se c'è una premessa mancante e quale essa sia. Ma allora, se è importante, possiamo cercare di scoprirlo ragionandoci sopra.

## Esistono infiniti numeri primi

Un numero primo è un numero naturale maggiore di 1 che sia divisibile solamente per 1 e per sé stesso. L'unico numero pari primo è 2, in quanto tutti gli altri numeri pari sono divisibili per 2. La successione dei numeri primi inizia con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 . . . . Negli *Elementi*, Euclide dimostra che *esistono infiniti numeri primi*. Ecco la dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che i numeri primi siano finiti. Allora esisterà un numero  $N$  che sarà il più grande dei numeri primi.

Consideriamo allora il prodotto di tutti i numeri primi

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \dots \times N,$$

e aggiungiamo 1 a questo numero, ottenendo  $P + 1$ . Ora,  $P + 1$  non può avere 2 per divisore essendo di 1 maggiore di  $P$  che è multiplo di 2;  $P + 1$  non può avere 3 per divisore essendo di 1 maggiore di  $P$  che è multiplo di 3;  $P + 1$  non può avere 5 per divisore essendo di 1 maggiore di  $P$  che è multiplo di 5; . . . ;  $P + 1$  non può avere  $N$  per divisore essendo di 1 maggiore di  $P$  che è multiplo di  $N$ .

In definitiva i casi sono due:

(1)  $P + 1$  è un numero primo e allora, essendo ovviamente  $P + 1 > N$ ,  $N$  non è il più grande dei numeri primi.

Oppure,

(2)  $P + 1$  non è primo e quindi ha fattori primi maggiori di  $N$  e di nuovo  $N$  non è il più grande dei numeri primi.

In ogni caso non può esserci un  $N$  che sia il più grande dei numeri primi, e quindi i numeri primi sono infiniti.

## Lato e diagonale di un quadrato non sono commensurabili

Ricordiamo che due grandezze omogenee non sono commensurabili quando non ammettono una grandezza sottomultipla comune, cioè quando non esiste una terza grandezza, omogenea con le prime due, che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse.

Diamo una dimostrazione del fatto che il lato e la diagonale di un quadrato non sono commensurabili. Siano  $d$  e  $l$  rispettivamente le lunghezze della diagonale e del lato di un quadrato. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che la diagonale e il lato di un quadrato siano segmenti commensurabili, ossia che ammettano una grandezza sottomultipla comune contenuta  $m$  volte nella diagonale e  $n$  volte nel lato, dove  $m$  e  $n$  sono numeri interi, che possono essere assunti primi tra loro. Ne consegue che  $d/l = m/n$ . Ma, per il teorema di Pitagora,  $d^2/l^2 = 2$ , da cui  $m^2/n^2 = 2$ , ossia

$$^{(1)} m^2 = 2n^2$$

Ora, un qualunque numero intero  $N$  può essere espresso come il prodotto di una potenza  $h$  di 2 e di un numero dispari  $D$ , cioè,  $M = 2^h D$ ;  $h$  è detto *grado di parità* di  $N$  (se il numero  $N$  è dispari, si ha  $h = 0$ ). Allora dalla (1) segue che il grado di parità di  $m^2$  è uguale a quello di  $n^2$  aumentato di uno. Essendo dei quadrati, i gradi di parità di  $m^2$  e  $n^2$  sono pari (incluso lo 0 come numero pari). Ma i termini di sinistra e di destra dell'uguaglianza (1) rappresentano lo stesso numero, quindi hanno lo stesso grado di parità. Si ha quindi che: *un numero pari aumentato di 1 è uguale ad un numero pari*. Allora il numero 1, che risulta differenza di due pari, è pari. Per definizione, un numero dispari è la somma di un pari e di una unità. Essendo ora l'unità pari, allora ogni dispari è somma di due pari, e poiché la somma di due pari è ancora pari, si ottiene che ogni dispari è pari, e quindi il crollo dei dispari nei pari.

Questa è la contraddizione a cui fa riferimento Aristotele quando negli *"Analitici Primi"* spiega che cosa è una dimostrazione per assurdo ("εις άτοπου απαγωγή", cioè una riduzione all'impossibile):

*Una dimostrazione di questo tipo, ad esempio, è quella che stabilisce l'incommensurabilità della diagonale [e del lato del quadrato], che si fonda sul fatto che se si suppone che siano commensurabili, i numeri dispari risultano uguali ai numeri pari.*

La scoperta che la diagonale e il lato di un quadrato sono incommensurabili è dovuta ai pitagorici. Per la matematica moderna questo enunciato è equivalente all'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ , così spesso si dice che i pitagorici scoprirono i "numeri irrazionali", o che  $\sqrt{2}$  è irrazionale, ma questo è un anacronismo. I greci non hanno mai riconosciuto come numeri ciò che noi chiamiamo numeri razionali, men che meno i numeri irrazionali, e non avrebbero capito "irrazionale" come un aggettivo applicabile a qualsiasi oggetto matematico individuale. Una grandezza, ad esempio la diagonale di un quadrato, non è né "razionale" né "irrazionale" in sé: essa è o commensurabile o incommensurabile con un'altra grandezza. Il fatto che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili non può essere attribuita a qualcosa di peculiare riguardo al lato o alla diagonale presi singolarmente. Sia il lato sia la diagonale sono commensurabili con qualche altra grandezza e incommensurabili con altre.

Chiarito questo, è indubbio che la scoperta che due grandezze potessero essere incommensurabili .... fu rivoluzionaria ....

## **Noticina sulla nozione di verità**

Il problema filosofico della verità è la domanda di Pilato. Ma la domanda di Pilato è ambigua. In realtà ci sono due questioni molto diverse che è fondamentale tenere separate:

- (1) Che cosa è la verità? Cioè, che cosa significa dire di qualcosa che è vero?
- (2) Che cosa è vero? Cioè, qual è la verità sulla faccenda a cui siamo interessati (qualunque cosa sia)? E come facciamo a stabilire la verità riguardo a quella faccenda?

Probabilmente quando Pilato chiese "Che cos'è la verità?" stava facendo una domanda del secondo tipo. È chiaro che la seconda questione è molto più importante della prima: in realtà è il **problema della conoscenza** sotto mentite spoglie.

Eppure il primo problema concettuale è in un certo senso più fondamentale del secondo. Fino a che non sappiamo cos'è la verità (che cosa significa la parola "vero"), non possiamo incominciare ad occuparci del secondo — più importante — problema.

Una semplice risposta di buon senso alla domanda "Che cos'è la verità?", applicata ad un esempio particolare, è :

(A) L'enunciato "La neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca.

Questa è l'idea di verità del senso comune. Ora, (A) non è, naturalmente, una definizione generale di verità per tutte gli enunciati della lingua italiana. Ma dato un qualsiasi enunciato della lingua italiana, possiamo spiegare che cosa significa dire di questa affermazione che è vera con una frase del tipo (A). La forma generale di queste frasi è :

(T) L'enunciato "*P*" è vero se e solo se *P*

dove "*P*" il nome della dichiarazione in questione e '*P*' è una traduzione di tale dichiarazione nella lingua in cui il rendiconto della forma (T) è formulato. Questo è il famoso *T*-schema formulato da Alfred Tarski (1944) che riprende l'antica concezione di verità che Aristotele enuncia nella "Metafisica": "Dire di ciò che è che non è, o di ciò che non è che è, è falso, mentre dire di ciò che è che è o di ciò che non è che non è, è vero."

Secondo Tarski, potremmo ottenere una definizione generale di verità per tutti gli enunciati della lingua italiana se potessimo elencarli tutti e dare una dichiarazione della forma (T) per ciascuno. Ma il numero di enunciati in italiano (o in qualsiasi altra lingua naturale) è infinito e non si possono fare liste infinitamente lunghe. Inoltre, a volte non è del tutto chiaro se qualcosa è un enunciato in italiano (lo stesso vale per qualsiasi altra lingua naturale). Tarski risolse (evitò?) questi problemi spostando la sua attenzione sui linguaggi artificiali in cui è chiaro se una data affermazione conta come un enunciato vero e proprio.

I dettagli tecnici dello schema tarskiano di verità sono considerevoli e non ce ne occuperemo, né accenneremo ad altri schemi, come quello di Saul Kripke (1975), né entreremo nel merito nei paradossi della verità (per es., il mentitore).

## 3 LA GEOMETRIA EUCLIDEA

### Indice

Numeri e grandezze	22
La geometria euclidea	23
La geometria euclidea come paradigma di razionalità	24
Einstein, Huygens e Galileo	26
Una lettera di Einstein a Solovine	28

La parola "matematica" deriva dal greco *μάθημα* che, in greco antico, significa "ciò che si impara", "quello che si arriva a sapere", quindi anche "studio" e "scienza". La matematica greca era al contempo astratta e concreta e le teorizzazioni matematiche si applicavano direttamente alla natura. Anche il rapporto tra matematica ed esperimenti che viene di solito considerato tipico del metodo galileiano era già presente nella scienza ellenistica [Russo, 1996].

### Numeri e grandezze

Gli antichi Greci dividevano la matematica in due campi principali: l'aritmetica e la geometria. L'aritmetica era la teoria dei numeri e la geometria teoria dello spazio e delle sue parti. Come abbiamo già sottolineato, Aristotele, nella sua opera *Le Categorie* (scritta circa 50 anni prima di Euclide), classifica le quantità come **discrete** o **continue**.

L'esempio principale di una quantità discreta era il numero (*ἀριθμός*) e il numero significava una moltitudine di unità. Con "numeri", i greci significavano solo quelli che oggi chiamiamo numeri interi positivi o numeri naturali. I numeri possono essere aggiunti e moltiplicati, e un numero minore può essere sottratto da uno più grande. Zero non era un numero, né vi era alcuna idea di un numero negativo. Un numero non poteva sempre essere diviso da un altro, dal momento che non c'erano numeri "frazionari". L'unità aritmetica, quella, era considerata completamente indivisibile e senza parti.

Tra le quantità continue, invece, si trovano gli oggetti della geometria: segmenti, regioni planari, e altre cose che Euclide in seguito denominò **grandezze**. Queste non erano numeri, e non erano collegate ai numeri. Il **rapporto**, come trattato nel Libro V de *Gli elementi*, è una relazione tra grandezze; come tale, è un'astrazione al di fuori del mondo dei numeri.

In contrasto con i numeri, le grandezze erano considerate infinitamente divisibili: una grandezza può sempre essere divisa a metà, o in un qualsiasi numero di parti uguali o disuguali. I primi esempi di grandezze sono i segmenti di retta. I segmenti linee possono essere addizionati uno all'altro, e uno più corto sottratto da uno più lungo, ma l'unica

operazione analoga alla moltiplicazione non produce un altro segmento: produce il rettangolo che ha i due segmenti come lati. Poiché lo spazio è tridimensionale, tre segmenti possono essere moltiplicati per formare un solido (un prisma rettangolare), ma nessuna costruzione simile corrisponderebbe a una moltiplicazione di quattro segmenti. Ciò contrasta con la moltiplicazione di numeri, poiché il prodotto di due numeri è un altro numero esattamente dello stesso tipo.

Per i greci, dunque, grandezze e numeri avevano poco in comune. Per quanto riguarda la divisibilità, si potrebbe anche sostenere che sono fondamentalmente opposti nella loro natura. Poiché i numeri e le grandezze potevano entrambi essere addizionati, e il più piccolo sottratto dal più grande, alcuni principi si applicavano ad entrambi i campi. Ecco perché negli assiomi degli *Elementi* di Euclide troviamo proposizioni come “Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro”. Gli assiomi sono principi che hanno governato sia la geometria sia l’aritmetica, mentre i postulati sono propri solo della geometria.

## La geometria euclidea

La geometria euclidea fu esposta dal matematico greco-alessandrino Euclide (323 a.C. –286 a.C.) nel suo trattato gli *“Elementi”* — la più importante opera di geometria dell’antichità. Il metodo di Euclide consiste nell’assumere un piccolo insieme di assiomi intuitivamente evidenti, e dedurre molte altre proposizioni da questi. Anche se molti dei risultati di Euclide erano stati ottenuti da matematici precedenti, Euclide fu il primo a dimostrare come queste proposizioni potevano essere sistematizzate in un sistema logico-deduttivo completo.

Per più di duemila anni, l’aggettivo “euclideo” è stato inutile perché nessun altro tipo di geometria era stato concepito. Gli assiomi di Euclide sembravano così intuitivamente evidenti (con la possibile eccezione del postulato delle parallele) che ogni teorema dimostrato a partire da tali assiomi è stato ritenuto vero in assoluto, spesso in un senso metafisico. Oggi, tuttavia, sono note molte altre geometrie non euclidee auto-consistenti, le prime essendo state scoperte nel diciannovesimo secolo. Un’implicazione della teoria della relatività generale di Einstein è che lo spazio fisico in sé non è euclideo, e che lo spazio euclideo è una buona approssimazione, purché il campo gravitazionale sia debole.

### ENTI PRIMITIVI

Definire un ente significa illustrare le sue proprietà mediante nozioni più semplici, cioè in termini di enti non definibili mediante nozioni più semplici. Questi enti sono usualmente detti *enti primitivi*. Nella geometria euclidea tali enti primitivi sono il punto, la retta, il piano. Gli enti primitivi sono caratterizzati da postulati o assiomi (teoremi non dimostrati). Negli *Elementi* di Euclide, al punto è riservata la prima delle definizioni del libro primo, dove si indica che punto è ciò che non ha parti. Tale definizione è di tipo ostensivo, cioè non ha una valenza logica, ma serve ad indicare ciò di cui ci si vuole occupare.

### I POSTULATI DI EUCLIDE

L’assiomatizzazione di Euclide incomincia con cinque **assiomi**:

- (1) Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
- (2) Aggiungendo (quantità) uguali a (quantità) uguali le somme sono uguali
- (3) Sottraendo (quantità) uguali da (quantità) uguali i resti sono uguali
- (4) Cose che coincidono con un'altra sono uguali all'altra
- (5) L'intero è maggiore della parte

E prosegue con cinque **postulati**:

- (i) Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta
- (ii) Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente
- (iii) Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
- (iv) Tutti gli angoli retti sono uguali
- (v) Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato di ciascuna retta angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti

Si osservi che la distinzione tra assiomi e postulati è puramente terminologica e l'abbiamo mantenuta solo per ragioni storiche.

#### **IL SISTEMA ASSIOMATICO DI HILBERT**

Nel testo ***Grundlagen der Geometrie***, pubblicato nel 1899, David Hilbert (1862– 1943) sostituisce agli assiomi di Euclide un insieme formale, composto di 21 assiomi, che evitano le contraddizioni derivanti da quello di Euclide. Hilbert utilizza concetti indefiniti e specifica le loro proprietà esclusivamente tramite gli assiomi; non è necessario assegnare alcun significato esplicito ai concetti indefiniti. Questi elementi, punto, retta, piano e altri, potrebbero essere sostituiti, come dice Hilbert, da tavoli, sedie, boccali da birra e altri oggetti — questa affermazione fece irritare moltissimo Gottlob Frege (1848–1925). Hilbert dapprima enumera i concetti indefiniti; essi sono: punto, retta, piano; giacere su (una relazione fra punto e piano), stare fra, congruenza di coppie di punti, e congruenza di angoli. Il sistema di assiomi riunisce in un solo insieme la geometria euclidea piana e solida.

L'assiomatizzazione "in uso" nei corsi universitari di geometria non è né quella di Euclide né quella di Hilbert, ma si basa sulle formulazioni algebriche della geometria proposte dal matematico e fisico tedesco Hermann Grassmann (1809–77). Si tratta dell'assiomatizzazione della geometria più versatile e feconda e alla cui base c'è la nozione di spazio vettoriale. Ce ne occuperemo in un capitolo successivo.

### **La geometria euclidea come paradigma di razionalità**

Nel corso dei secoli, il paradigma razionalista di conoscenza è stato la conoscenza matematica in generale, e la geometria euclidea in particolare. I filosofi sono stati affascinati dalla geometria euclidea come metodo esemplare di argomentazione razionale.

L'antiquario inglese John Aubrey (1626–1697) racconta una bella storia sul suo amico, il filosofo politico Thomas Hobbes:

[Hobbes] aveva quarant'anni quando diede uno sguardo per la prima volta alla geometria; questo

*accadde accidentalmente. Era nella biblioteca di un gentiluomo . . . e trovò il libro degli Elementi di Euclide aperto alla pagina del [teorema di Pitagora]. Lesse la proposizione. “Per G. . . ” disse, (ogni tanto imprecava, a titolo di enfasi), “questo è impossibile!” Quindi ne lesse la dimostrazione che lo rinviava ad un'altra proposizione, che lesse. Quest'altra lo rinviava ad un'altra ancora e lesse anche questa. [E così via arrivò all'inizio, e] alla fine era dimostrativamente convinto di quella verità. Questo lo fece innamorare della geometria.*

Nel resto della sua vita, Hobbes cercò di fare per la scienza politica quello che Euclide aveva fatto per la geometria, sviluppandola “more geometrico”.

Che cosa colpì Hobbes così tanto? Il teorema di Pitagora, su cui il suo occhio cadde accidentalmente, dice che il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati sugli altri due lati. Non è affatto ovvio o auto-evidente che questo sia vero — anzi, Hobbes dapprima pensò che fosse impossibile. Ora, Euclide non tenta di convincerci della sua verità esibendo triangoli rettangoli di varie forme e dimensioni. Tale metodo (induttivo!) non ci darebbe alcuna garanzia che il teorema vale per tutti i triangoli, o che il prossimo triangolo che esaminiamo non falsifichi il teorema. Il metodo di Euclide è ben diverso: dimostra il teorema, mostrando che se si accettano certe altre proposizioni geometriche più semplici come vere — gli assiomi di Euclide— allora si deve accettare che sia vero anche il teorema di Pitagora.

Hobbes fu colpito dal fatto che gli assiomi di Euclide sono evidenti: una volta che si comprendono, si può vedere che sono veri mediante il **lume naturale della ragione**, per usare un'espressione cara a Galileo. Eppure, in virtù di processi lunghi e altrettanto evidenti di ragionamento, Euclide è in grado di dimostrare da loro molte altre proposizioni che sono ben lungi dall'essere evidenti o ovvie. L'esempio che Hobbes aveva incontrato era il teorema di Pitagora, un altro esempio è il fatto che ci sono esattamente cinque solidi perfetti, né più né meno (Un solido perfetto è un solido le cui facce sono identiche, ad esempio un cubo).

E tutto questo si ottiene per puro ragionamento, senza ricorso all'esperienza. Euclide sembrava aver fatto avverare il sogno per quanto riguarda la conoscenza dello spazio.

Hobbes non è stato l'unico ad esserne colpito. Un altro fu Galileo:

*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. (Galileo Galilei, “Il Saggiatore”).*

E un altro ancora fu Einstein, che, nella sua “Autobiografia Scientifica” (nel volume edito da Schilpp nel 1949), così descrive il suo incontro con la geometria euclidea all'età di dodici anni:

*Qui c'erano affermazioni, come ad esempio l'intersezione delle tre altezze di un triangolo in un*

*punto, che — anche se non era per niente evidente — potevano tuttavia essere dimostrate con tanta certezza che il dubbio sembrava essere fuori questione. Questa lucidità e certezza fecero su di me un'impressione indescrivibile. Che gli assiomi dovessero essere accettati senza essere dimostrati non mi disturbava affatto. In ogni caso era più che sufficiente per me poter agganciare prove su proposizioni la cui validità non mi sembrava essere dubbia . . . sembrava che fosse possibile ottenere una conoscenza certa degli oggetti dell'esperienza per mezzo del puro pensiero.*

Einstein mette il dito proprio sul sogno razionalista: "conoscenza certa degli oggetti dell'esperienza per mezzo del puro pensiero". Il che ci porta alla domanda:

**(E) Come può essere che la matematica sia così mirabilmente appropriata agli oggetti della realtà?**

## Einstein, Huygens e Galileo

In un articolo<sup>3</sup> del 1921, Albert Einstein scrive:

*Nella misura in cui le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, esse non sono certe, e nella misura in cui sono certe, non si riferiscono alla realtà.*

E poi continua:

*Ma d'altra parte è certo che la matematica in generale, e in particolare la geometria, devono la loro esistenza alla necessità che si sente di comprendere qualcosa sulle relazioni delle cose reali tra loro. La stessa parola geometria, che, naturalmente, significa "misura della terra", lo dimostra. Poiché la "misura della terra" ha a che fare con le possibilità della disposizione di alcuni oggetti naturali l'uno rispetto all'altro, cioè, con parti della terra, con le misurazioni di linee, . . . è chiaro che il sistema di concetti della sola geometria assiomatica non può fare alcuna affermazione per quanto riguarda le relazioni di oggetti reali di questo tipo, che chiameremo corpi rigidi della pratica. Per essere in grado di fare tali affermazioni, la geometria deve essere spogliata del suo carattere meramente logico-formale e occorre stabilire un **coordinamento** dei veri oggetti di esperienza concettuale con il quadro della geometria assiomatica. Per fare questo, dobbiamo solo aggiungere la proposizione: i corpi solidi sono correlati, rispetto alle loro possibili disposizioni, come lo sono i corpi della geometria euclidea in tre dimensioni. Così le proposizioni di Euclide contengono affermazioni sulle relazioni dei corpi rigidi della pratica.*

*La geometria così completata è evidentemente una scienza naturale, infatti possiamo considerarla*

---

<sup>3</sup> Albert Einstein, "Geometry and Experience". An expanded form of an Address to the Prussian Academy of Sciences in Berlin on January 27th, 1921."

*come il più antico ramo della fisica. Le sue affermazioni poggiano essenzialmente sull'induzione dall'esperienza, non solo su deduzioni logiche. Chiameremo questa geometria "geometria pratica". . . La questione se la geometria pratica dell'universo è euclidea o no ha un significato chiaro, e la sua risposta può essere fornita solo dall'esperienza. Tutta la misurazione lineare in fisica è geometria pratica in questo senso, lo è anche la misurazione geodetica e astronomica lineare, se chiamiamo in aiuto la legge di esperienza che la luce si propaga in linea retta, anzi, in linea retta nel senso di geometria pratica.*

*Attribuisco particolare importanza alla vista della geometria che ho appena esposto, perché senza di essa non sarei stato in grado di formulare la teoria della relatività.*

La geometria fisica (o pratica) è dunque, per Einstein, un sistema **ipotetico-deduttivo** che spiega fatti reali.

Una prima versione del metodo ipotetico-deduttivo è stata proposta dal fisico olandese Christiaan Huygens (1629–95).

*Ci si vedrà in esso [cioè nel Trattato] dimostrazioni di un certo genere che non producono una grande certezza come quelle della geometria, e che differiscono anche molto da esse, dal momento che i Geometri dimostrano le loro proposizioni da principi fissi e incontestabili, mentre qui i principi sono verificati dalle conclusioni che si traggono da loro, la natura di queste cose non permettendo di procedere altrimenti.*

*È sempre possibile ottenere in tal modo un grado di probabilità che molto spesso è poco meno di prova completa. Vale a dire, quando cose che sono state dimostrate da Principi che sono stati assunti corrispondono perfettamente ai fenomeni cui nell'esperimento sono posti sotto osservazione, soprattutto quando ci sono un gran numero di queste, e in seguito, principalmente, quando si può immaginare e prevedere nuovi fenomeni che dovrebbero seguire dalle ipotesi che si impiega, e quando si trova che i fatti corrispondono alla nostra previsione.*

Si osservi che Huygens, a differenza di Einstein, non considera la geometria empirica. Questa è stata l'opinione comune fino al Diciannovesimo secolo.

Un aspetto della relazione tra geometria e realtà è messo molto bene in evidenza da Galileo Galilei (1564–1642) nel seguente brano tratto dal Dialogo sopra i due massimi sistemi.

*Ma io vi dico che anco in astratto una sfera immateriale, che non sia sfera perfetta, può toccare un piano immateriale, che non sia piano perfetto, non in un punto, ma con parte della sua superficie; talché sin qui quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto: e sarebbe ben nuova cosa che i computi e le ragioni fatte in numeri astratti, non rispondessero poi alle monete d'oro e d'argento e alle mercanzie in concreto. Ma sapete signor Simplicio, quel che accade? Si come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, invoglie ed altre bagaglie, così, quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che **difalchi gli impedimenti della materia**; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si risconteranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto né nella*

*geometria o nella fisica ma nel calcolatore che non sa fare i conti giusti.*

## **Una lettera di Einstein a Solovine**

Einstein, in una lettera del 1952 al suo amico Maurice Solovine, fornisce un'esposizione chiara del metodo ipotetico-deduttivo, mettendone in evidenza le sottigliezze, in particolare per quel che riguarda il legame tra costruzione teorica ed esperienza. Ecco l'estratto rilevante:

*Per quel che riguarda la questione epistemologica, Lei mi ha del tutto frainteso; probabilmente mi sono espresso male. Io vedo la cosa nel modo seguente:*

- 1) Ci sono date le E (esperienze immediate).*
- 2) A sono gli assiomi da cui traiamo le conclusioni. Dal punto di vista psicologico gli A poggiano sulle E. Ma non esiste alcun percorso logico che dalle E conduca agli A; c'è solamente una connessione intuitiva (psicologica) e sempre 'fino a nuovo ordine'.*
- 3) Dagli A si ricavano, con procedimento deduttivo, enunciati particolari S che possono pretendere di essere veri.*
- 4) Gli S sono messi in relazione con le E (verifica per mezzo dell'esperienza). Questa procedura, a ben vedere, appartiene essa stessa alla sfera extra-logica (intuitiva), non essendo di natura logica la relazione tra i concetti che intervengono negli enunciati e le esperienze immediate. Questa relazione tra gli S e le E è tuttavia (pragmaticamente) molto meno incerta di quella che sussiste tra gli A e le E (ad esempio tra il concetto di cane e le corrispondenti esperienze immediate). Se una tale corrispondenza, pur restando inaccessibile alla logica, non potesse essere stabilita con un elevato grado di certezza, tutto l'armamentario logico non avrebbe alcun valore ai fini della comprensione della realtà' (ad esempio, la teologia).*

*L'aspetto essenziale è qui il legame, eternamente problematico, tra il mondo delle idee e ciò che può essere sperimentato (l'esperienza sensibile).*

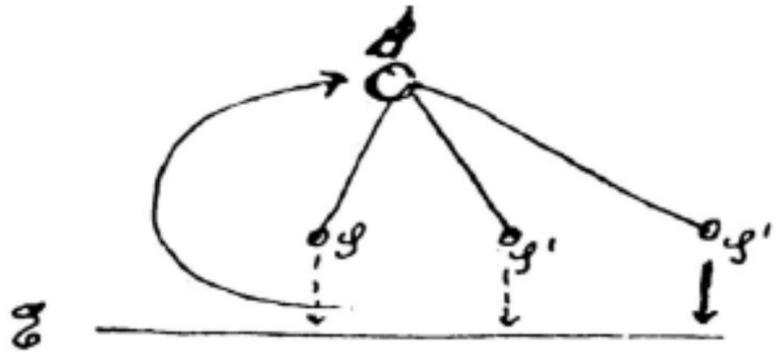


Figura 3.1: Schizzo di Einstein nella lettera a Solovine che illustra il rapporto tra teoria ed esperienza.

Ritorniamo nel seguito sul tema dell'esperienza. Per il momento osserviamo che le esperienze immediate a cui Einstein fa riferimento sono proprio le sensate esperienze di cui Galileo parla nella lettera a Cristina di Lorena menzionata nell'introduzione.

## 4 GRANDEZZE E NUMERI

### Indice

La teoria delle proporzioni	30
Proporzioni e numeri reali	32
Grandezze euclidee	33
Teoria delle proporzioni e fisica aristotelica	36

Nel capitolo 3 abbiamo messo in evidenza che la nozione di numero presso gli antichi greci era diversa dalla nostra. Il numero significava solo una moltitudine di unità — per i greci i numeri significavano solo quelli che oggi chiamiamo numeri interi positivi o numeri naturali. Un brano scritto da Newton nel 1660 dimostra che in quel tempo la concezione europea del numero era stata completamente modificata, ribaltando la concezione greca<sup>4</sup>:

*Per numero intendiamo, non tanto una moltitudine di unità, quanto il rapporto di una qualsiasi quantità con un'altra quantità dello stesso tipo, che prendiamo come unità. E questo è triplice: interi, frazioni e irrazionali; l'intero è ciò che viene misurato dall'unità; una frazione, ciò che misura una parte che è sottomultiplo dell'unità; e un irrazionale, a cui l'unità è incommensurabile. (Arithmetica Universalis, 1707). Questa è la moderna concezione di numero, una concezione che precede Newton e che matura nel passaggio dal tardo Medio Evo all'epoca moderna.*

Questa è la moderna concezione di numero, una concezione che precede Newton e che matura nel passaggio dal tardo Medio Evo all'epoca moderna. Tale concezione venne affinata ulteriormente nella seconda metà dell'Ottocento, quando venne ripresa la teoria delle proporzioni di Eudosso per definire rigorosamente la nozione di numero reale.

### La teoria delle proporzioni

Il **rapporto** (in greco  $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ , in latino, *ratio*), come trattato nel Libro V de *Gli elementi*, è una relazione tra grandezze e, come tale, è un'astrazione al di fuori del mondo dei numeri.

<sup>4</sup> Si osservi che nell'originale in latino un numero irrazionale è chiamato da Newton *surdus*, che diventa *surd*, cioè "sordo", nella traduzione in inglese del 1769. Questa terminologia è di derivazione araba: Al-Kwarizmi chiamò i numeri razionali e irrazionali rispettivamente *udibili* e **non udibili**. I traduttori arabi del IX secolo tradussero i termini greci  $\rho\acute{\eta}\tau\omicron\varsigma$  (razionale) e  $\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$  (irrazionale) con *muntaq* (fatto per parlare, dicibile) e *asamm* (sordo, muto); i traduttori latini dei codici arabi hanno tradotto quest'ultimo termine con *surdus*.

Parlando di dimensione di una grandezza, Euclide non si riferisce ad una misura numerica, ma solo all'ordinamento delle grandezze di un certo tipo sulla base della loro dimensione relativa. Ma è stato proprio lo studio del rapporto tra grandezze — siano esse geometriche o fisiche — che ha permesso di gettare un ponte tra le grandezze e i numeri nel senso moderno del termine.

L'associazione di numeri a grandezze non è uno-a-uno. Se non c'è un modo per fare una tale associazione, ci sono molti modi per farlo (per esempio, raddoppiando tutti i numeri, si lasciano invariati i loro rapporti, così i numeri raddoppiati vanno tanto bene quanto i numeri originali). Questo dà luogo a quello che in fisica è il riferimento alla scelta convenzionale di un'**unità di misura** per il confronto di grandezze fisiche omogenee e anche a quello che, in tempi recenti, è stata chiamata **libertà di gauge**.

Non deve quindi sorprendere che la teoria delle proporzioni sia stata centrale per lo sviluppo della fisica. Essa permette il confronto di grandezze che non sono necessariamente geometriche. Euclide la utilizza per segmenti, triangoli e così via, ma si può parlare di rapporto e di proporzioni anche in relazione ai pesi, agli spazi, alle densità etc. Utilizzata dagli scienziati ellenistici e, in particolare, da Archimede, in epoca moderna è diventata uno dei tre cardini su cui Galileo Galilei — anche se non la comprese appieno — fondò la fisica moderna (gli altri due erano la geometria e la sperimentazione "controllata").

La teoria delle proporzioni è stata sviluppata da Eudosso di Cnido (408 a.C.–355 a.C.) ed è giunta a noi nella trattazione che ne dà Euclide nel libro *V* degli *Elementi*. È una perla del pensiero classico, ma fu criticata per la sua complessità dai matematici moderni tra il sedicesimo e il diciannovesimo secolo. Fu apprezzata solo quando fu finalmente capita, intorno al 1872 circa, e utilizzata da Dedekind per fondare la nozione "moderna" di numero reale.

## **RAPPORTI**

Oggi pensiamo a un rapporto come a un numero ottenuto da altri numeri per divisione e in una proporzione come  $A/B = C/D$ , le lettere indicano numeri, le barre sono operazioni sui numeri e le espressioni ai lati del segno uguale sono numeri. Questo non era il modello di pensiero degli antichi greci. Quando Euclide afferma che il rapporto di *A* a *B* è uguale al rapporto tra *C* e *D*, le lettere *A*, *B*, *C* e *D* non si riferiscono a numeri, ma a segmenti o regioni poligonali o altre grandezze di questo tipo. Il rapporto, secondo la definizione V.3, è "una certa relazione tra due grandezze omogenee, in ordine alla loro quantità". Ma non è tanto in questa definizione, quanto nelle regole per il suo uso che troviamo l'incredibile profondità concettuale della teoria.

## **LA DEFINIZIONE V.5 DI EUCLIDE**

La definizione che determina come vengono utilizzati i rapporti è V.5, che ci dice come decidere se due rapporti sono uguali. Le definizioni preliminari stabiliscono che il prodotto di una grandezza per un numero intero sia un'operazione ben definita: se *n* è un intero, *nA* è una grandezza che è *n* volte più grande di *A*.

L'idea è la seguente: se vogliamo confrontare due grandezze, la prima cosa che dobbiamo fare è valutare la loro "taglia" relativa. Possono essere uguali, oppure una grandezza può essere più piccola dell'altra. In quest'ultimo caso, per arrivare ad un confronto possiamo preliminarmente determinare quante copie della più piccola, diciamo *B* stanno dentro la più grande, diciamo *A*. Questo ci fornisce una stima grezza della

“taglia” relativa. Una stima più accurata si ottiene considerando i multipli della più grande e per ogni multiplo  $mA$  ( $m$ , numero intero), determiniamo quante copie della più piccola stanno dentro a tale multiplo; se  $n$  è tale numero, avremo  $mA > nB$ . La definizione V.4 che due grandezze sono in rapporto — cioè sono confrontabili — quando si realizza tale disuguaglianza.<sup>5</sup>

Quindi, un rapporto è implicitamente un confronto di tutti i potenziali multipli di una grandezza con tutti i potenziali multipli dell'altra. Due grandezze sono allora **commensurabili** quando si può trovare un multiplo di una che è esattamente uguale ad un multiplo della seconda, cioè quando esistono numeri  $m$  e  $n$  tali che  $mA = nB$ , mentre sono **incommensurabili** quando nessuno multiplo di una è mai esattamente uguale a qualsiasi multiplo dell'altra. Per confrontare due rapporti,  $A/B$  e  $C/D$ , allora, dovremmo essere pronti a confrontare la collezione di tutte i possibili multipli (interi) della prima coppia con la collezione di tutti i possibili multipli (interi) della seconda. Questo è il contenuto della definizione V.5:

*Si dice che quattro grandezze hanno lo stesso rapporto, la prima alla seconda come la terza alla quarta, quando presi equimultipli della prima e della terza secondo qualsivoglia numero, ed equimultipli della seconda e della quarta secondo qualsivoglia altro numero, se il multiplo della prima è maggiore di quello della seconda, anche il multiplo della terza sarà maggiore di quello della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore.*

Spieghiamo. Supponiamo, ad esempio, che troviamo, per ogni coppia di interi positivi ( $m, n$ ), che  $mA$  supera esattamente  $nB$  quando  $mC$  supera  $nD$ . Questo, secondo la definizione V.5, è quando diciamo che i rapporti sono uguali. La definizione risulta più chiara se la traduciamo nel linguaggio algebrico moderno: diciamo che  $A/B = C/D$  quando, comunque presi due naturali  $m$  e  $n$ , si verifica sempre uno dei seguenti tre casi:

- (1)  $mA > nB$  e simultaneamente  $mC > nD$
- (2)  $mA = nB$  e simultaneamente  $mC = nD$
- (3)  $mA < nB$  e simultaneamente  $mC < nD$

Anche nel caso di grandezze incommensurabili, si riesce così a definire l'eguaglianza dei rapporti usando solo l'operazione di moltiplicazione per un numero naturale.

## Proporzioni e numeri reali

I numeri stanno in rapporti tra loro, e grandezze dello stesso tipo (ad esempio segmenti) stanno in rapporti tra loro, e una coppia di numeri possono stare esattamente nello stesso rapporto come una coppia di segmenti. Dal momento che sia i numeri sia le grandezze possono stare in rapporti, si può incominciare a vedere come si possono usare naturalmente i numeri per rappresentare grandezze (o grandezze per rappresentare i numeri). Potremmo, dunque, associare numeri a segmenti in modo tale che i segmenti stanno esattamente nello stesso rapporto tra loro come i numeri ad essi associati.

---

<sup>5</sup> Questa condizione è nota come **proprietà archimedeica**.

Questo è proprio il percorso che la matematica ha seguito in tempi (relativamente) recenti. La caratterizzazione di Euclide corrisponde alla nozione moderna di numero reale che fu messa a punto da Karl Weierstrass (1815–1897) e Richard Dedekind (1831–1916), dopo che, per molti anni, i matematici — a partire da Galileo — criticarono la definizione di Euclide perché troppo complicata. Infatti, se traduciamo la definizione V.5 nei termini usati da Dedekind nel 1872, chiamando **numero reale**  $\alpha$  un rapporto  $A/B$  tra due grandezze, allora  $\alpha = A/B$  è determinato dalla classe di tutte le coppie  $(m, n)$  di interi per le quali si verificano rispettivamente i casi (1), (2) o (3); ossia dal taglio che crea nel dominio dei numeri razionali dividendo tutte le frazioni  $n/m$  in tre classi: quelle che sono (1) minori di  $\alpha$ , (2) uguali a  $\alpha$  e (3) maggiori di  $\alpha$  (la seconda classe o è vuota o contiene un solo elemento). Le classi corrispondenti ai casi (1) e (3) sono chiamate da Dedekind classi contigue di numeri razionali, e sono chiaramente sufficienti per individuare il rapporto  $A/B$ , cioè il numero reale  $\alpha$ . A questo riguardo, quel che scrive Lucio Russo [1996] è illuminante. Dopo aver citato Heath, un famoso storico della scienza antica<sup>6</sup>, così commenta:

*Come altri autori che incontreremo in casi analoghi, anche Heath (che è stato uno dei maggiori storici moderni della scienza antica) considera massima gloria dei matematici greci l'essere riusciti ad anticipare le teorie moderne; egli sembra quasi suggerire, in questo passo, che la "coincidenza parola per parola" da lui notata possa dipendere dalla capacità di Euclide di anticipare risultati successivi di millenni, piuttosto che, più semplicemente, dal fatto che Weierstrass aveva formulato una definizione "coincidente parola per parola" con quella, a lui ben nota, di Euclide. [Russo, 1996].*

## Grandezze euclidee

Per comprendere appieno la teoria di Euclide, abbiamo bisogno di sapere quali sono le grandezze a cui la teoria si applica e quali sono le loro proprietà. Dal libro V (e dalle applicazioni successive degli scienziati greci) si può concludere quanto segue:

- (1) Le grandezze sono di vari tipi; ad esempio, segmenti, regioni poligonali, volumi, angoli, densità, pesi e tempi.
- (2) Date due grandezze dello stesso tipo, esattamente una delle seguenti condizioni è vera:
  - (i) sono uguali (equivalenti) rispetto alla loro "taglia",
  - (ii) la prima è maggiore della seconda, o
  - (iii) la seconda è maggiore della prima.

---

<sup>6</sup> Ecco il passo di Heath citato da Russo: "Non occorrono altri argomenti per mostrare la grandezza di questa teoria dopo aver ricordato che la definizione di rapporti eguali di Euclide (Def. 5 del V libro) corrisponde esattamente alla moderna teoria degli irrazionali dovuta a Dedekind e coincide parola per parola con la definizione di Weierstrass di numeri [reali] eguali".

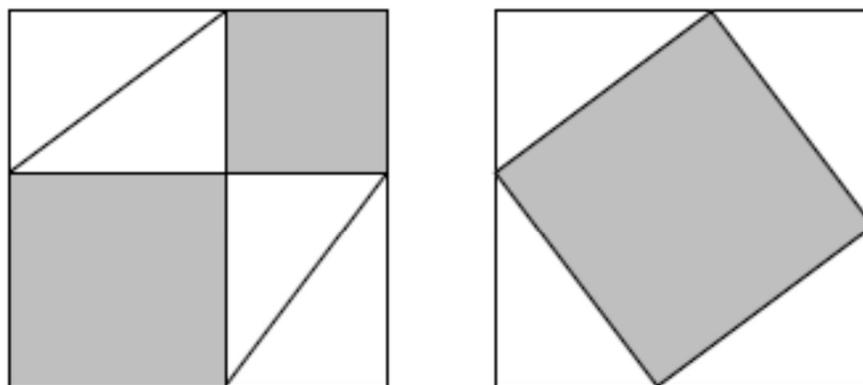


Figura 4.1: Dimostrazione del teorema di Pitagora.

(3) Grandezze dello stesso tipo possono essere addizionate l'una all'altra (o una determinata grandezza può essere addizionata a se stessa una o più volte) producendo una nuova entità dello stesso tipo che è più grande di qualsiasi addendo. (Non importa in che ordine viene eseguita l'addizione, l'esito ha la stessa taglia). Inoltre, date due grandezze dello stesso tipo ma di taglia differente, una parte della più grande equivalente alla più piccola può essere sottratta.

(4) I rapporti di equivalenza e di eccesso sono compatibili con addizione e sottrazione, nel senso che se grandezze equivalenti vengono addizionate a ciascuna delle altre due, le grandezze risultanti saranno nello stesso rapporto degli originali.

Per Euclide, l'addizione o sottrazione di grandezze era un processo concreto. Addizionando regioni poligonali si ottengono altre regioni. Ad esempio, Euclide dimostra che parallelogrammi che sono sulla stessa base e nelle stesse rette parallele sono equivalenti (cioè hanno la stessa area). La discussione continua con la dimostrazione del teorema di Pitagora. In effetti, la dimostrazione di Euclide del teorema di Pitagora è di per sé una precisa procedura per tagliare due regioni quadrate e riordinarne le parti per ottenere una terza regione quadrata che è la loro somma (vedi la figura 4.1).

Nel libro VI, Proposizione 31, Euclide dà una dimostrazione del teorema di Pitagora che è allo stesso tempo più astratta e più concreta. Si basa sull'osservazione che se abbiamo due forme geometriche il cui bordo include un segmento di linea, le loro aree cambiano in modo proporzionale al quadrato del segmento di linea. Pertanto, se, per un quadrato, l'area è  $a^2$ , per un'altra forma il cui bordo include il segmento di lunghezza  $a$ , l'area sarà  $ka^2$ , dove il coefficiente dipende dalla forma particolare della figura geometrica. L'enunciazione generale del teorema di Pitagora è che se tre forme simili sono costruite sui lati del triangolo rettangolo  $ABC$ , le loro aree devono soddisfare

$$ka^2 + kb^2 = kc^2$$

Allora il teorema di Pitagora segue dall'osservazione che i tre triangoli  $ABC$ ,  $ACD$  e  $BCB$  in figura 4.2 sono simili e che il triangolo più grande è esattamente la somma degli altri due.

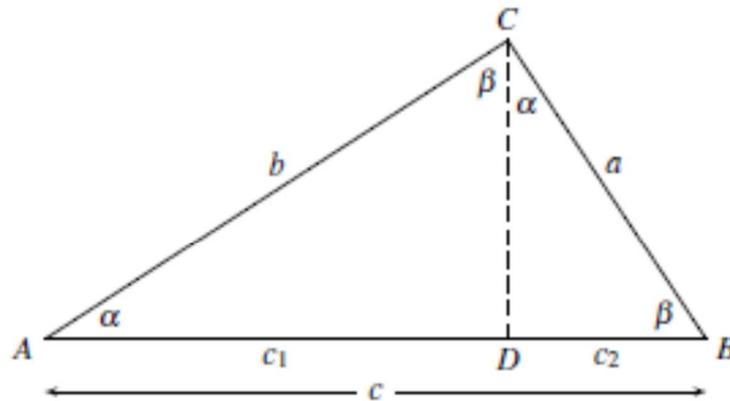


Figura 4.2: Dimostrazione "immediata" del teorema di Pitagora.

In generale, ci possono essere molti modi per sommare due grandezze. Ad esempio, quando vengono sommate due regioni poligonali, esse possono essere tagliate in vari pezzi che poi sono rimessi insieme in molti modi diversi. Euclide dà per scontato che quando si sommano delle stesse grandezze la somma può essere eseguita in modi diversi, ma i risultati saranno sempre equivalenti, anche se le relazioni tra le parti assemblate sono differenti.

Alcune grandezze euclidee possono essere moltiplicate, in un certo senso, ma la moltiplicazione ne cambia il tipo. Il prodotto di due segmenti, per esempio, è un rettangolo. Questa forma di moltiplicazione svolge un ruolo importante nel Libro II, nel cuore dell'algebra geometrica presentata in quel libro. Quando la moltiplicazione delle grandezze è possibile, si può definire la moltiplicazione dei rapporti. Un semplice esempio di questa idea è l'affermazione che se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono segmenti e  $AC$  e  $BC$  sono rettangoli con basi  $A$  e  $B$  e altezza comune  $C$ , allora il rapporto  $A/B$  è uguale al rapporto  $AC/BC$ .

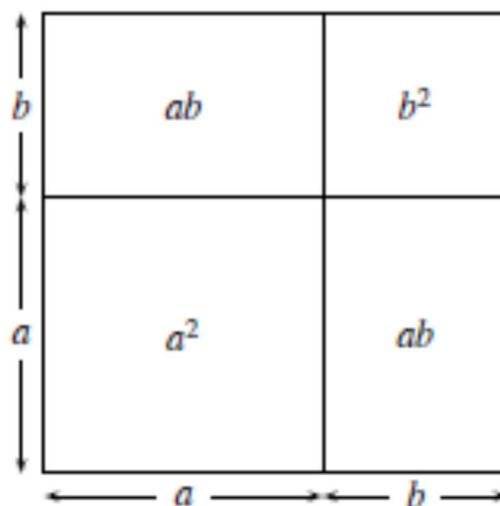


Figura 4.3: Significato geometrico del quadrato di un binomio:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Un altro esempio interessante è la Proposizione 4 del Libro II. Essa afferma una proprietà di quadrati e rettangoli che oggi esprimiamo con la formula algebrica

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Euclide non ha notazione algebrica, quindi deve esprimere questa equazione a parole: “se una linea è tagliata a caso, il quadrato nel suo complesso è pari alla somma dei quadrati sui segmenti e due volte il rettangolo compreso dai segmenti. In qualsiasi modo lo si dica, la figura 4.3 spiega perché è vero.

La linea è  $a + b$  perché è tagliato in due segmenti  $a$  e  $b$ , e quindi

- il quadrato sulla linea è ciò che scriviamo come  $(a + b)^2$ ,
- i quadrati sui due segmenti  $a$  e  $b$  sono  $a^2$  e  $b^2$  rispettivamente,
- il rettangolo compreso dai segmenti  $a$  e  $b$  è  $ab$ ,
- il quadrato  $(a + b)^2$  uguaglia (in area) la somma di  $a^2$ ,  $b^2$ , e due copie di  $ab$ .

## Teoria delle proporzioni e fisica aristotelica

Nella teoria delle proporzioni di Eudosso-Euclide, le grandezze in rapporto dovevano essere dello stesso tipo, ad esempio coppie di lunghezze o coppie di tempi. Qualsiasi rapporto tra due grandezze di tipo diverso non aveva posto nella teoria, anche se era d'uso comune nelle applicazioni pratiche, per esempio negli scambi commerciali. Non erano possibili rapporti eterogenei, dunque, ma le proporzioni eterogenee erano ammesse. Le proporzioni omogenee erano uguaglianze di rapporti tra grandezze tutte dello stesso tipo, mentre le proporzioni eterogenee significavano un'uguaglianza tra differenti tipi di rapporto, per esempio, tra due distanze e due tempi.

Quest'ultime diventarono l'idioma principale per enunciare leggi quantitative e per il ragionamento in filosofia naturale fino al tardo diciottesimo secolo. Quando ancora oggi nei libri di testo di fisica elementare si dice che un corpo in moto uniforme percorre spazi uguali in tempi uguali, si utilizza ancora il linguaggio di Euclide.

Aristotele usa le proporzioni eterogenee per esprimere le sue leggi quantitative del moto naturale e violento e molte altre relazioni. Ecco alcuni esempi:

(1) *“Il rapporto tra la velocità del corpo A e la velocità del corpo B sia uguale al rapporto tra la densità dell'aria e quella dell'acqua” (Fisica, 215a29-b12).*

(2) *“Se un dato peso percorre una data distanza in un dato momento, allora un peso maggiore percorrerà la stessa distanza in meno tempo, essendo i tempi inversamente proporzionali ai pesi. Per esempio, se un peso è il doppio di un altro, impiega la metà del tempo per percorrere lo stesso tratto.” (De Caelo 273b30-274a2).*

(3) *“Se, poi, il motore A ha spostato B di una distanza  $\Gamma$  in un tempo  $\Delta$ , nello stesso tempo la stessa forza A muoverà metà di B per il doppio della distanza  $\Gamma$ , e in metà  $\Delta$  muoverà metà di B per l'intera distanza  $\Gamma$ : perché solo così le regole delle proporzioni saranno osservate” (Fisica, 250a).*

In quest'ultima proposizione, Aristotele stabilisce una proporzione complessa tra forze motrici, corpi (cioè masse nella terminologia di oggi), distanze percorse e tempi di percorrenza.

Archimede dimostra che esiste una proporzione reciproca tra i pesi e le lunghezze dei bracci di una bilancia . Egli afferma anche che: "Se un punto si muove ad una velocità uniforme lungo qualsiasi linea, e si prendono due lunghezze su di essa, esse saranno proporzionali ai tempi impiegati a percorrerli." Questa è la definizione di **moto uniforme o equabile** che Galileo riprenderà pari pari nei **Dialoghi** e nei **Discorsi**.

Il concetto di proporzione eterogenea, soprattutto quando le condizioni di ogni rapporto sono incommensurabili, non è rigorosamente definito da Aristotele. La caratterizzazione rigorosa è quella data nella definizione V.5 di Euclide. Questa definizione comprende proporzioni sia omogenee sia eterogenee e si applica a grandezze di qualsiasi natura che soddisfano la definizione. È considerata come una delle più belle creazioni della scienza greca. È difficile esagerare la sua importanza per la scienza esatta in quanto ha fornito un fondamento logico per lo studio di molti tipi di relazioni quantitative, in particolare di quelle fisiche.

## 5 CALCOLI E MISURE

### Indice

La misura del raggio terrestre di Eratostene	38
Le misure astronomiche di Aristarco	39
L'Arenario di Archimede ovvero quanto è grande l'universo	42
Il metodo di triangolazione	45

I matematici greci trovarono molti modi di applicare la geometria alla natura e ai manufatti, senza sacrificarne il carattere di scienza esatta. Tutte le scienze esatte e le arti greche — compresa la scienza pitagorica delle armoniche musicali, l'astronomia geometrica, l'orologeria solare, la geodesia, la cartografia, l'ottica, la teoria delle macchine, la determinazione dei centri di gravità e l'idrostatica — erano pesantemente geometriche e sfruttavano la teoria delle proporzioni per la teorizzazione e il calcolo numerico.

Coloro che svilupparono queste scienze erano matematici, come Eudosso per l'astronomia e l'ottica o Archimede per la meccanica che avevano una notevole competenza nella geometria. Nelle applicazioni della geometria all'astronomia fu particolarmente congeniale l'uso di modelli ideali geometrici basati su cerchi, sfere e linee rette.

### La misura del raggio terrestre di Eratostene

La geometria euclidea permette di calcolare il raggio della terra se si ipotizza che i raggi di luce dal Sole alla Terra si propaghino lungo linee rette, che la Terra sia perfettamente sferica e che il Sole sia sufficientemente distante da considerare paralleli i raggi che investono la Terra. Questo fu quello che fece Eratostene tra il 240 a.C. e 230 a.C. quando era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto.

Dai suoi studi, Eratostene era venuto a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenit, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra. Invece ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.

Questa era già una dimostrazione pratica della rotondità della Terra (come ampiamente dimostrato da Aristotele). L'idea che la Terra dovesse avere una forma sferica era comunque già accettata. Questa convinzione scaturiva dall'osservazione delle eclissi di Luna durante le quali la forma dell'ombra terrestre appariva sempre come un arco di circonferenza.

Eratostene usò la lunghezza dell'ombra proiettata da un bastone in Alessandria durante il solstizio d'estate per capire che l'angolo  $\theta$  tra il bastone e l'ombra era di circa  $7,2^\circ$ , o circa  $1/50$  di un cerchio completo (si veda la figura 5.1). Assunse che Alessandria e

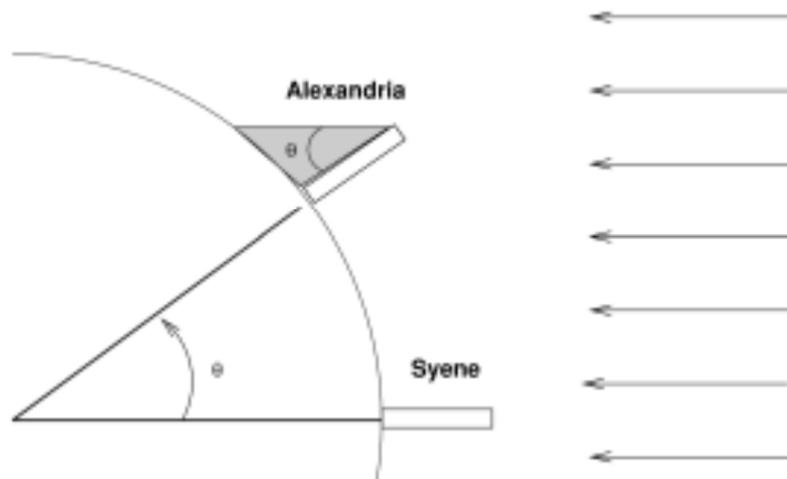


Figura 5.1: La figura mostra il procedimento seguito da Eratostene per calcolare la dimensione del raggio della Terra.

Syene si trovasse sullo stesso meridiano (il che non è proprio vero) e arrivò quindi alla proporzione

$$\text{circonferenza della Terra} / \text{distanza Syene-Alessandria} = \text{angolo giro} / \theta = 50$$

Sulla base di rapporti dei viaggiatori, stimò che la distanza tra le due città fosse di 5000 stadi (circa 800 km, tuttavia il valore preciso dello stadio, usato a quell'epoca ad Alessandria, non è attualmente conosciuto). Perciò la circonferenza della Terra doveva essere 50 volte la distanza Syene-Alessandria, cioè di 250.000 stadi (circa 40.000 km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni: 40.075 km). Una volta stabilito un valore per essa, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio.

## Le misure astronomiche di Aristarco

La prima determinazione delle distanze Terra-Luna e Terra-Sole è dovuta ad Aristarco di Samo, astronomo e matematico di epoca ellenistica (310 a.C.– 230 a.C.). Nel suo breve trattato Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna, pervenutoci da fonti greche e arabe, Aristarco descrive un metodo geometricamente rigoroso per calcolare queste distanze.

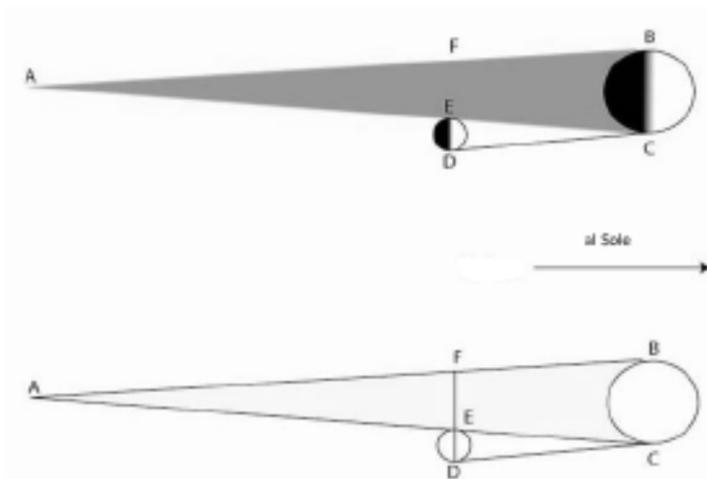


Figura 5.2: Geometria dell'eclisse lunare.

### DISTANZA TERRA-LUNA

L'idea di Aristarco fu di trovare la distanza della Luna da un'attenta osservazione di un'eclisse Lunare, che avviene quando Terra, Luna e Sole vengono ad essere allineati su una stessa retta e la Terra nel mezzo si frappone tra Sole e Luna.

Per visualizzare meglio un'eclissi Lunare, si immagini di tenere in mano una moneta del diametro di 1 centimetro alla distanza dove blocchi i raggi del Sole dall'occhio. Poiché questo può danneggiare l'occhio, è meglio provare con la Luna piena, che sembra avere la stessa dimensione apparente del Sole. Si scopre che la giusta distanza è di circa 108 centimetri. Così la parte di spazio in cui la luce solare è completamente bloccata è conica (in effetti, questa è circondata da una zona sfocata, denominata "penombra", dove la luce solare è parzialmente bloccata).

Consideriamo adesso l'eclisse Lunare come mostrata in figura 5.2. L'ombra della terra è conica, proprio come quella della moneta. E deve anche essere simile a quella della moneta in senso tecnico: la lunghezza del cono deve essere di 108 diametri terrestri. Usando il risultato di Eratostene per il diametro terrestre, il vertice A del cono è dunque a  $108 \times 12600 = 1\,360\,800$  chilometri dalla Terra.

In un'eclisse Lunare di massima durata la Luna giace direttamente sull'eclittica e passa quindi direttamente per il centro dell'ombra della Terra muovendosi lungo il diametro di tale ombra. Misurando lo spazio percorso dalla Luna si ottiene la misura del diametro del cono d'ombra (il segmento FE in figura). Aristarco misurò prima il tempo trascorso fra l'istante in cui il bordo della Luna era entrato nell'ombra e l'istante in cui la Luna s'era oscurata totalmente per la prima volta. Poi confrontò questo valore con quello del tempo durante il quale la Luna era rimasta totalmente oscurata e scoprì, in questo modo, che il periodo di oscurità totale aveva all'incirca la stessa durata del periodo necessario alla Luna per entrare nell'ombra della Terra. Ne trasse la conclusione che la larghezza dell'ombra della Terra nella regione dove essa è attraversata dalla Luna è, con

grande approssimazione, circa due volte il diametro della stessa Luna. Quindi  $FE = 2 \times DE$ . Una misura più accurata fornisce  $FE = 2,5 \times DE$ .

A questo punto, Aristarco conosceva la dimensione della terra e la lunghezza dell'ombra conica della terra ( $108 \times 12600 = 1\,360\,800$  chilometri). Sapeva che quando la Luna passa attraverso l'ombra, il diametro dell'ombra a quella distanza era di due volte e mezzo il diametro della Luna. Aveva sufficienti informazioni per capire quanto lontana è la Luna?

Sulla base di questi dati, poteva concludere che la Luna non era più lontana di  $108 \times 12600 = 1\,360\,800$  chilometri, altrimenti la Luna non avrebbe potuto passare attraverso l'ombra della Terra. Ma, da quello che abbiamo detto finora, poteva essere una piccola Luna quasi a  $1\,360\,800$  chilometri di distanza, che passava per l'ultimo po' di ombra in prossimità dell'apice del cono. Tuttavia, una piccola Luna non avrebbe mai potuto causare un'eclissi solare. In realtà, come i Greci conoscevano bene, la Luna ha la stessa dimensione apparente in cielo del Sole. Questo è il fatto cruciale che Aristarco usò per determinare la distanza della Luna dalla Terra.

A tal fine, utilizzò la costruzione geometrica riportata nella figura sopra. In questa figura, il fatto che la Luna e il Sole hanno la stessa dimensione apparente nel cielo significa che l'angolo  $ECD$  è uguale all'angolo  $EAF$ . Si noti ora che la lunghezza  $FE$  è il diametro dell'ombra terrestre alla distanza della Luna, e la lunghezza  $DE$  è il diametro della Luna. Come abbiamo visto poc'anzi,  $FE = 2,5 \times DE$ , così guardando i triangoli isosceli simili  $FAE$  e  $DCE$ , si deduce che  $AE = 2,5 \times CE$ , da cui,  $AC = 3,5 \times CE$ . Ma  $AC = 1\,360\,800$ , per quanto visto sopra, e  $CE$  è la distanza dalla Luna. Quindi:

$$\text{distanza Terra-Luna} = 1\,360\,800 \text{ chilometri} / 3,5 = 388\,800 \text{ chilometri}$$

Questo valore è entro una piccola percentuale dal valore corretto. La principale fonte di errore è la stima di  $FE$ , cioè della larghezza dell'ombra della Terra nella regione dove essa è attraversata dalla Luna.

### **DISTANZA TERRA-SOLE**

L'idea per misurare la distanza della Terra dal Sole era molto semplice, almeno in linea di principio. Si sapeva, naturalmente, che la Luna brillava riflettendo la luce del Sole. Pertanto, ragionò Aristarco, quando la Luna sembra essere esattamente mezza piena, la linea dalla Luna al Sole deve essere esattamente perpendicolare alla linea dalla Luna all'osservatore sulla Terra. Quindi, se un osservatore sulla terra, osservando una mezza Luna in pieno giorno, misura accuratamente l'angolo tra la direzione della Luna e la direzione del Sole, l'angolo  $\alpha$  in figura sotto, dovrebbe essere in grado di costruire un lungo triangolo sottile con base il segmento dalla Terra alla Luna, e avente un angolo di 90 gradi all'estremità della Luna e  $\alpha$  all'altra, in modo da trovare il rapporto tra la distanza del Sole alla distanza della Luna.

In notazione trigonometrica moderna, il ragionamento di Aristarco si traduce della formula

$$\text{distanza Terra-Luna} / \text{distanza Terra-Sole} = \cos \alpha$$

Il problema è che l'angolo  $\alpha$  differisce da 90 gradi di circa un sesto di grado, un valore troppo piccolo per essere misurato con precisione. Aristarco stimò che l'angolo

fosse 87 gradi. Ciò porterebbe il Sole a soli 8 milioni di chilometri, un valore molto più piccolo del valore corretto. Tuttavia, questo già suggerirebbe che il Sole sia molto più grande della Terra (lo stesso ragionamento per l'analisi del cono d'ombra della terra, ci porterebbe a concludere che il diametro del sole è  $8\,000\,000\text{ chilometri} / 108 = 74\,074$

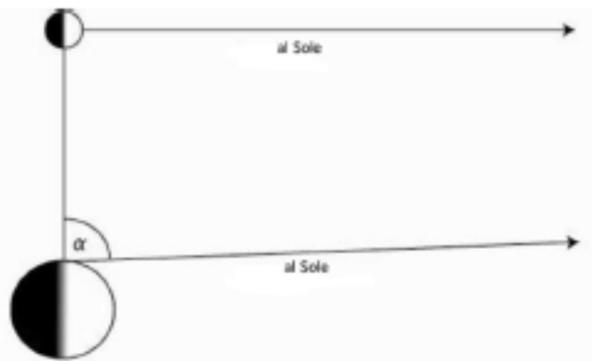


Figura 5.3: Geometria per il calcolo della distanza Terra-Sole.

chilometri). **Fu probabilmente questa realizzazione che portò Aristarco a ipotizzare che il Sole, piuttosto che la terra, fosse al centro dell'universo.** I migliori tentativi successivi degli scienziati antichi portarono ad una stima della distanza del Sole che è circa la metà del valore corretto (circa 149 milioni di chilometri).

## L'Arenario di Archimede ovvero quanto grande è l'universo

Malgrado le differenze concettuali tra la nozione antica di numero e quella moderna, è importante osservare che ai fini del calcolo numerico di una data grandezza lo scienziato antico e quello moderno procedono sostanzialmente allo stesso modo: fissano una grandezza  $U$  omogenea con la grandezza  $A$  che si vuole misurare come un'unità di misura; entrambi sanno che potranno trovare numeri interi  $m$  e  $n$  tali da approssimare con  $n/m$  il rapporto  $A/U$  con la precisione desiderata. Ciò che li differenzia è il sistema di numerazione. Il nostro sistema decimale è più efficiente di quello antico, in particolare per quel che riguarda la notazione scientifica per esprimere numeri come  $n/m$  utilizzando le potenze intere di dieci, ma un sistema analogo al nostro fu sviluppato anche nell'antichità.

Archimede di Siracusa (circa 287 a.C. -212 a.C.) propose un sistema di numerazione per poter manipolare numeri grandi. Il sistema numerico in uso a quel tempo poteva esprimere numeri fino a una miriade (μυριας - 10.000). Utilizzando la parola stessa "miriade", si può estendere immediatamente questo e nominare tutti i numeri fino a una miriade di miriadi (cioè  $10^8$ ), che per comodità denotiamo con  $\Omega$ . Archimede chiamò i numeri fino a  $\Omega$  **primi numeri**, e chiamò  $\Omega$  l'unità dei **secondi numeri**, che sono quindi i multipli di  $\Omega$ , fino a che non viene moltiplicata per una miriade di miriade di volte, cioè per  $\Omega$  stesso. Si ottiene così  $\Omega^2 = 10^{16}$ , che Archimede pose come unità per i **terzi numeri**. Questi ultimi sono dunque i multipli di  $\Omega^2$  fino a ad arrivare a  $\Omega^2 \times \Omega^2 = \Omega^4 = 10^{32}$ ; poi si introducono i **quarti numeri** e così via. Archimede continuò in questo modo a nominare numeri fino ad una miriade di miriade di volte , cioè

$$\underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{\Omega^{\Omega}} = (\Omega^{\Omega})^{\Omega} = 10^{8 \times 10^8}$$

$\Omega$  volte

Dopo aver fatto questo, Archimede chiamò i numeri che aveva così definito **numeri del primo periodo**, e chiamò l'ultimo, cioè , l'unità del secondo periodo. Costruì quindi i numeri del secondo periodo prendendo multipli di questa unità in modo analogo al modo in cui erano stati costruiti i numeri del primo periodo. Continuando in questo modo, alla fine è arrivato ai numeri del periodo una **miriade di miriadi**. Il numero più grande che Archimede poteva nominare era l'ultimo numero di questo periodo, che è

$$\underbrace{\Omega^\Omega \times \dots \times \Omega^\Omega}_{\Omega \text{ volte}} = (\Omega^\Omega)^\Omega = (10^8 \times 10^8)^{10^8} = 10^8 \times 10^{16}$$

$\Omega$  volte

Il sistema di Archimede è sostanzialmente un sistema di numerazione posizionale con base  $10^8$ , il che è davvero notevole perché gli antichi greci usavano un sistema molto semplice per scrivere i numeri, che impiega 27 diverse lettere dell'alfabeto per le unità da 1 a 9, le decine da 10 a 90 e le centinaia da 100 a 900. **Nel mettere a punto questo sistema, Archimede ha anche scoperto e dimostrato la legge degli esponenti  $10^m 10^n = 10^{m+n}$ , necessaria per manipolare potenze di 10.** A questo punto, Archimede ha un potente sistema numerico per contare il numero di granelli di sabbia che potrebbero riempire tutto l'universo. Questo è l'incipit dell'*Arenario*:

*Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero dei granelli di sabbia sia infinito in quantità: non intendo soltanto la sabbia che si trova nei dintorni di Siracusa e del resto della Sicilia, ma anche quella che si trova in ogni altra regione, abitata o deserta. Altri ritengono che questo numero non sia infinito, ma che non possa esistere un numero esprimibile e che superi questa quantità di sabbia. È chiaro che coloro i quali pensano questo, se immaginassero un volume di sabbia uguale a quello della Terra, avendo riempito di sabbia tutti i mari e tutte le valli, fino alle montagne più alte, sarebbero ancor meno disposti ad ammettere che si possa esprimere un numero che superi quella quantità. Ma io tenterò di mostrarti, attraverso dimostrazioni geometriche che tu potrai seguire, che alcuni dei numeri da noi enunciati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, non soltanto superano il numero dei granelli di sabbia aventi un volume uguale a quello della Terra riempita come abbiamo detto, ma anche un volume uguale a quello dell'intero Universo.*

Archimede passa quindi a stimare il limite superiore per il numero di granelli di sabbia necessari per riempire l'universo. Per fare questo, usa il modello eliocentrico di Aristarco di Samo. L'opera originale di Aristarco è andata perduta e questo lavoro di Archimede è comunque uno dei pochi testi che ci sono pervenuti e che riferiscono della sua teoria eliocentrica — in cui il Sole rimane immobile mentre la Terra ruota intorno al Sole. Nelle parole di Archimede:

*Tu sai bene che il nome "universo" è stato utilizzato dagli astronomi per indicare la sfera che come centro ha il centro della Terra e come raggio la distanza dal centro della Terra al centro del Sole. [...] Tuttavia Aristarco di Samo ha scritto un libro, nel quale egli sviluppa alcune ipotesi in base alle quali l'universo risulta essere molte volte più grande di quanto noi*

*abbiamo detto poco fa. Le sue ipotesi sono che le stelle fisse e il Sole siano immobili nello spazio e che la Terra giri attorno al Sole lungo una circonferenza della quale il Sole è il centro . . .*

Secondo Archimede, Aristarco non è stato preciso sulla distanza delle stelle dalla Terra. Archimede deve quindi fare un'ipotesi: assume che l'universo sia sferico e che il rapporto tra il diametro dell'universo e il diametro dell'orbita della Terra intorno al Sole sia uguale al rapporto tra il diametro dell'orbita della Terra intorno al Sole e il diametro della Terra. Il ragionamento dietro questa congettura è che non osservandosi dalla Terra uno spostamento del sole nel cielo dovuto alla rotazione della terra attorno al proprio asse (parallasse solare), il rapporto tra la distanza della Terra dal Sole e il diametro della Terra è grande abbastanza da rendere questo effetto non osservabile. Ne segue che se si assume che la distanza delle stelle dalla Terra è nello stesso rapporto con il diametro dell'orbita della Terra attorno al Sole, si potrebbe escludere qualunque movimento apparente delle stelle (parallasse stellare). In effetti, Archimede sta dicendo che la parallasse stellare è uguale a quella solare.

In termini di proporzioni,

raggio dell'universo/distanza Terra-Sole = distanza Terra-Sole/raggio della Terra,

da cui,

raggio dell'universo = (distanza Terra-Sole)<sup>2</sup> = raggio della Terra .

A questo punto, Archimede rifà i calcoli di Aristarco per la distanza Terra- Sole e per ottenere un limite superiore del raggio dell'universo, utilizza sovrastime dei suoi dati assumendo:

(1) che il perimetro della Terra non sia più grande di 300 miriadi di stadi ( $5,55 \times 10^5$  chilometri, decisamente una sovrastima!);

(2) che la Luna non sia più grande della Terra, e che il Sole non sia più di trenta volte più grande della Luna (che è in effetti una sottostima, anche alla luce dei calcoli di Aristarco);

(3) che il diametro angolare del Sole, visto dalla Terra, sia maggiore di 1/200 di un angolo retto.

In questo modo arriva a stimare che il diametro dell'universo è non più di  $10^{14}$  stadi (in unità moderne, circa 2 anni luce), e che richiederebbe non più di  $10^{63}$  granelli di sabbia per riempirlo.

Archimede ha fatto alcuni interessanti esperimenti e calcoli lungo la strada. Un esperimento è stato quello di stimare la dimensione angolare del Sole, come è visto dalla Terra. Il metodo di Archimede è particolarmente interessante in quanto tiene conto della dimensione finita della pupilla dell'occhio, ed è, pertanto, il primo esempio conosciuto di sperimentazione psicofisica, la branca della psicologia che ha a che fare con i meccanismi della percezione umana, il cui sviluppo è generalmente attribuito al fisico Hermann von Helmholtz (1821– 1894).

È interessante osservare che il numero totale di nucleoni nell'universo osservabile (di circa il raggio di Hubble che è pari a 14 miliardi di anni luce) attualmente si stima che sia  $10^{80}$ .

## Il metodo di triangolazione

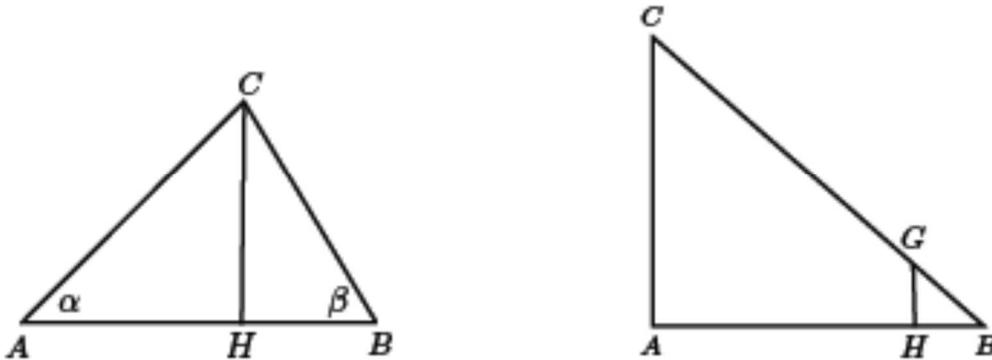


Figura 5.4: A sinistra: metodo di triangolazione. A destra: Metodo di Talete per la misura di un'altezza. Se si conoscono  $\overline{AB}$ ,  $\overline{HB}$ ,  $\overline{GH}$ , per determinare  $\overline{AC}$ , basta usare la proporzione  $AC: AB = GH: HB$  (teorema di Talete).

Il metodo di misura usato da Eratostene, Aristarco ed Archimede è noto come metodo di triangolazione. È utile riassumere l'idea di base di tale metodo con riferimento alla figura 5.4 (a sinistra) e usando il formalismo trigonometrico moderno.

Si vuole determinare la distanza  $d$  del punto  $C$  dalla retta  $AB$ , cioè la lunghezza del segmento  $CH$ , conoscendo (sulla base di misure fatte) la lunghezza  $l$  del segmento  $AB$  e gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ . A tal fine basta osservare che

$\overline{AH} = d / \tan \alpha$  e  $\overline{HB} = d / \tan \beta$ , per cui per  $l = \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$  si ha

$$l = \frac{d}{\tan \alpha} + \frac{d}{\tan \beta},$$

da cui

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{l} \left( \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

Usando le identità trigonometriche  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$  e  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha$ , questo è equivalente a:

$$\frac{1}{d} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{l \sin \alpha \sin \beta}$$

Si ottengono così sia

$$d = \frac{l \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

sia le distanze di  $C$  da  $A$  e  $B$ ,

$$\overline{AC} = \frac{d}{\sin \alpha} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \frac{d}{\sin \beta}$$

L'uso di triangoli per stimare le distanze risale all'antichità. Nel Sesto secolo a.C., Talete ha stimato l'altezza delle piramidi utilizzando triangoli simili, misurando la lunghezza delle loro ombre e la sua nello stesso momento, e confrontando i rapporti alla sua altezza; si veda la figura 5.4 (a destra). In Cina, Pei Xiu (224-271) individuò la "misura di angoli retti e angoli acuti", come il quinto dei suoi sei principi per una precisa cartografia, necessari per stabilire con precisione le distanze, mentre Liu Hui (c. 263) dà una versione dello stesso calcolo, per misurare le distanze perpendicolari per posti inaccessibili (si veda la figura 5.5). Ancora oggi si usano metodi di triangolazione in cartografia e in astronomia (si veda la figura 5.6).

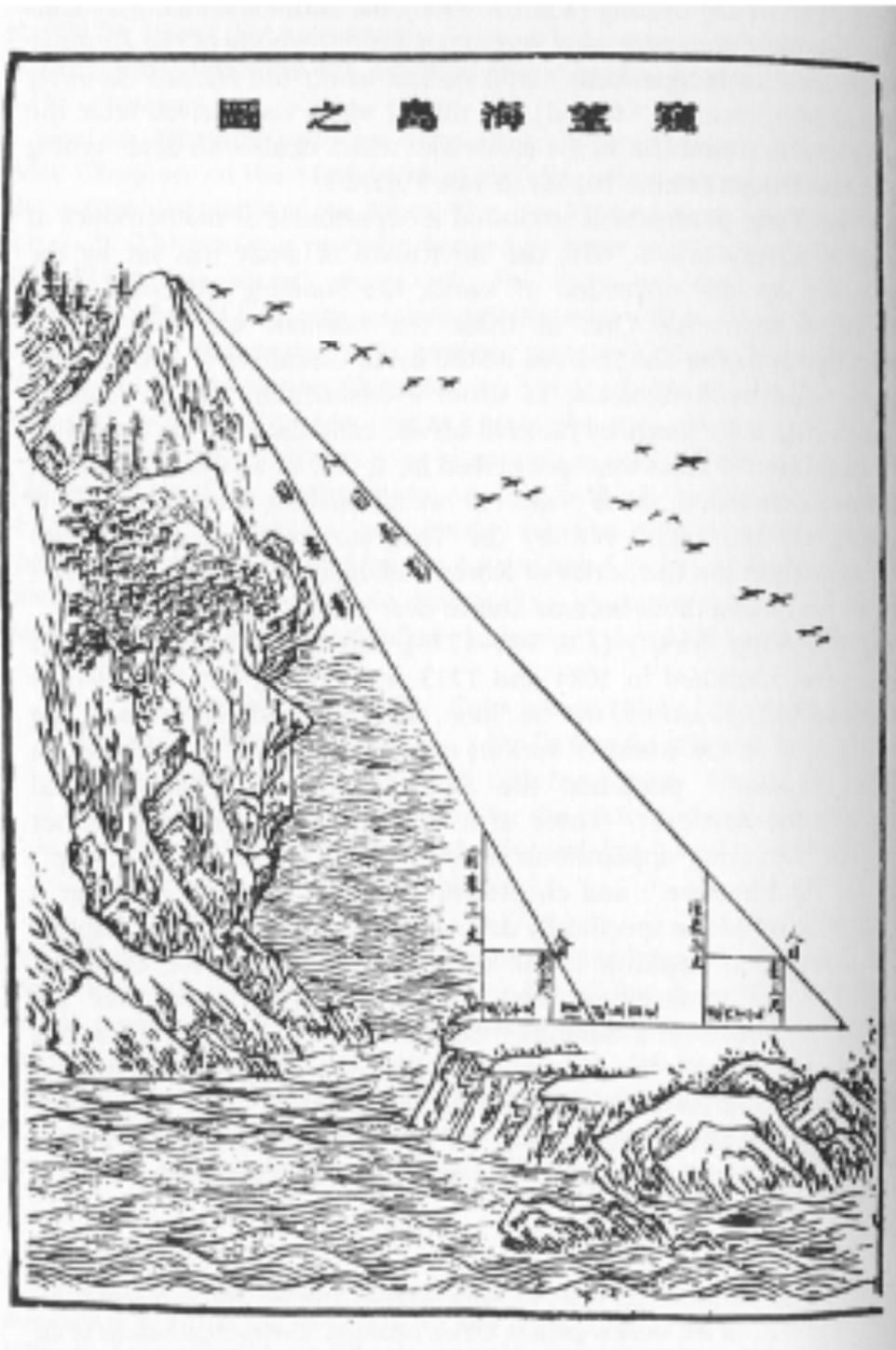


Figura 5.5: Liu Hui (c. 263). Come misurare l'altezza di un'isola dal mare. Illustrazione da un'edizione del 1726.

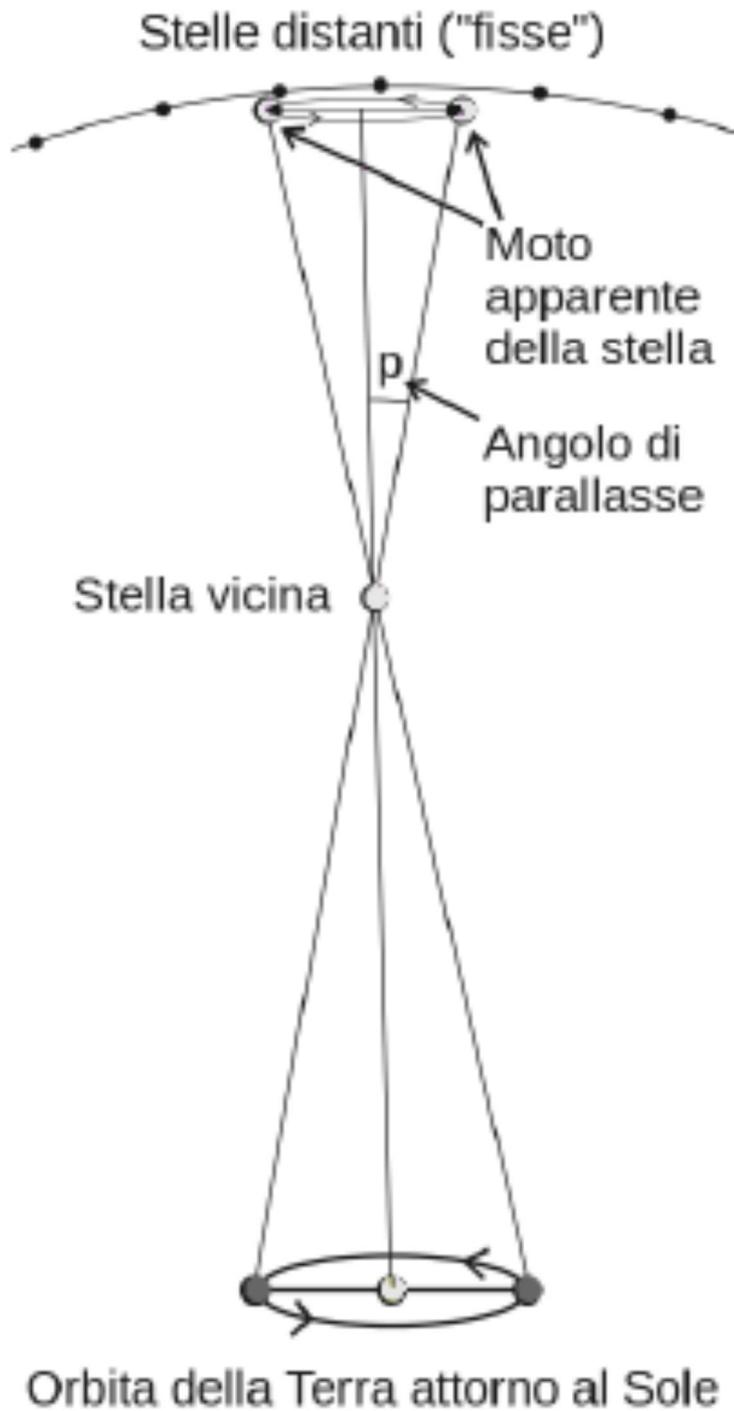


Figura 5.6: Per determinare la parallasse stellare si sfrutta il cambiamento di posizione assunto dalla Terra durante il suo moto orbitale. La tecnica sottintende la conoscenza del diametro dell'orbita terrestre e richiede l'osservazione dello stesso oggetto celeste a sei mesi di distanza per determinarne lo spostamento apparente rispetto allo sfondo. Più una stella è vicina, più la sua parallasse è grande.

## 6 EFFICACIA DELLA MATEMATICA

### Indice

L'irragionevole efficacia della matematica secondo Wigner	49
L'uomo solo di Herschel	50
I giudizi sintetici a priori di Kant	51
Kant e la geometria	53

Nel 1960, il fisico Eugene Wigner<sup>7</sup> pubblicò un articolo intitolato *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* (L'Irragionevole Efficacia della Matematica nelle Scienze Naturali). In esso osservò che la struttura matematica di una teoria fisica indirizza spesso a ulteriori progressi in tale teoria e persino verso previsioni empiriche, e argomentò che ciò non è solo una coincidenza e deve perciò riflettere una verità più ampia e profonda riguardante sia la matematica che la fisica.

### L'irragionevole efficacia della matematica secondo Wigner

Basandosi sulla propria esperienza, Wigner scrive che *“è importante sottolineare che la formulazione matematica dell'esperienza spesso rozza del fisico conduce in un inquietante numero di casi ad una descrizione incredibilmente accurata di un'ampia classe di fenomeni”*. Invoca quindi la legge fondamentale della gravitazione come esempio. Usata in origine per modellare corpi in caduta libera sulla superficie terrestre, tale legge fu estesa sulla base di quelle che Wigner chiama *“osservazioni molto esigue” per descrivere il moto dei pianeti, dove “si è dimostrata accurata oltre ogni ragionevole aspettativa”*.

Wigner riassume la sua argomentazione sostenendo che *“l'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che rasenta il misterioso di cui non c'è alcuna spiegazione razionale”*. Conclude il suo articolo ponendo la stessa domanda con cui aveva iniziato:

*Il miracolo dell'appropriatezza del linguaggio della matematica per la formulazione delle leggi della fisica è un dono meraviglioso che noi non comprendiamo né meritiamo. Dovremmo esserne grati e sperare che esso rimarrà valido nelle ricerche future e che si estenderà, nel bene o nel male, a nostro piacimento, anche se forse a nostro turbamento, alle più ampie branche del sapere.*

<sup>7</sup> Eugene Wigner (1902– 1995) è stato un fisico e matematico ungherese naturalizzato statunitense. Ha posto le fondamenta della teoria delle simmetrie nella meccanica quantistica e, sul finire degli anni trenta, ha esteso al nucleo atomico le sue ricerche, per le quali ha vinto il Premio Nobel nel 1963.

In breve, per Wigner non abbiamo una risposta soddisfacente alla domanda (E) a pagina 26. Per comprendere meglio il problema, è utile ripercorrere alcune tappe dello sviluppo del pensiero filosofico e scientifico, ma non prima di soffermarci su un'osservazione di Bertrand Russell, che in qualche modo acuisce il problema posto da Wigner:

*La fisica è matematica, non perché sappiamo così tanto sul mondo fisico, ma perché sappiamo così poco: sono solo le sue proprietà matematiche che possiamo scoprire. Per il resto la nostra conoscenza è negativa. (An outline of philosophy, 1928).*

## L'uomo solo di Herschel

Gli empiristi classici (mi riferisco a Locke e in particolare a Hume) introdussero un'idea che ha caratterizzato tutti gli empirismi, incluso quello contemporaneo. È la convinzione che esista un **linguaggio privilegiato** in termini del quale è possibile decidere la verità e la falsità di una qualunque proposizione. Si tratta del linguaggio delle sensazioni, delle percezioni pure, delle idee — intese come “copie” sbiadite delle impressioni sensoriali — o, come è diventato standard nel secolo scorso, dei **dati di senso**. Le **verità di ragione** sono tali in forza della loro forma logica, mentre le **verità di fatto** formano la base per decidere qualunque questione che non sia di tipo puramente logico. Queste questioni riguardano che cosa possiamo dire riguardo ad un mondo oggettivo indipendente dalla nostra mente — per esempio, per restare al nostro tema, quali sono le proprietà geometriche dello spazio fisico.

Vediamo come l'empirista John Herschel<sup>8</sup> elabora la distinzione empirista classica tra scienze astratte (matematica), le cui verità sono “di ragione” e scienze naturali (fisica), le cui verità sono “di fatto”. Per Herschel, il discrimine è la nozione di causa: *“Nella scienza astratta . . . la nozione di causa non entra. Le verità con cui essa ha dimestichezza sono quelle necessarie, che esistono indipendentemente dalle relazioni causali”*. In altre, parole, secondo Herschel:

*Potrebbe anche non esserci alcuna cosa reale nello spazio come un triangolo con lati esattamente rettilinei; ma nel momento in cui ne concepiamo uno nella nostra mente, non possiamo rifiutare di ammettere che la somma dei suoi tre angoli sia uguale a due angoli retti; e se poi immaginiamo che uno dei suoi angoli sia un angolo retto, non possiamo allora rifiutare di ammettere che la somma dei quadrati sui due lati adiacenti all'angolo retto è pari al quadrato del lato che esso che sottende. Affermare il contrario sarebbe, in effetti, negare che esso sia un angolo retto.*

---

<sup>8</sup> John William Herschel (1792–1871) è stato un matematico inglese, astronomo, chimico, inventore, fotografo sperimentale e botanico. Fu anche un filosofo della scienza nel senso moderno del termine. Nel 1831 pubblicò *“A preliminary discourse on the study of natural philosophy”*, dove analizzò i metodi della ricerca scientifica e le relazioni tra osservazione e costruzione teorica.

Il nocciolo, secondo Herschel, è che, a differenza delle scienze astratte, “nelle scienze naturali la causa e l’effetto sono le relazioni ultime che contempliamo”. A supporto di questo, fornisce il seguente argomento:

*Un uomo intelligente, messo in isolamento e a cui fosse concesso un tempo illimitato, potrebbe arrivare da solo mediante ragionamento a tutte le verità della matematica, procedendo da quelle semplici nozioni di spazio e di numero di cui non ci si può spogliarsi senza smettere di pensare. Ma non potrebbe mai dire, per quanto si sforzi di ragionare, che cosa accadrebbe ad un mucchietto di zucchero se fosse immerso in acqua, o che impressione sarebbe prodotta sul suo occhio miscelando i colori giallo e blu.*

## I giudizi sintetici a priori di Kant

Il filosofo tedesco Immanuel Kant allargò lo spazio concettuale della tradizione empirista e operò ulteriori distinzioni. La prima distinzione è quella tra conoscenza **a priori** e **a posteriori**: la conoscenza a priori è quella che può essere acquisita indipendentemente dall’esperienza, la conoscenza a posteriori è quella che può essere ottenuta solo dall’esperienza. Questa è una distinzione epistemologica, una distinzione tra due tipi di conoscenza.

La seconda distinzione è logica o semantica: è la distinzione tra verità **analitiche e sintetiche**. Le verità analitiche sono tradizionalmente definite come quelle che sono vere in virtù dei significati delle parole che contengono. Kant ne diede una versione più **restrittiva**: una proposizione è analitica se il suo predicato è “contenuto nel” suo soggetto. L’esempio preferito, “tutti gli scapoli sono non sposati”, è conforme a entrambe le accezioni: una volta che abbiamo capito che il soggetto significa “uomini non sposati”, vediamo che il suo predicato “sposato” è contenuto in esso. Kant ha anche dato un’altra caratterizzazione di analiticità (che non è ristretta a proposizioni della forma soggetto-predicato): una verità è analitica se la sua negazione viola il principio di non contraddizione (cioè, se può essere dimostrata con un ragionamento per assurdo). Possiamo definire le verità sintetiche semplicemente come verità che non sono analitiche.

Lo spazio concettuale può essere così rappresentato:

	a priori	A posteriori
analitico	•	0
sintetico	?	•

Empiristi e razionalisti concordano che lo scomparto delle verità analitiche a posteriori è vuoto<sup>9</sup> e che non sono vuoti gli scomparti delle verità analitiche a priori e delle verità sintetiche a posteriori<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> Infatti, se la verità (o falsità) di un’affermazione segue dai significati delle parole in esso contenute, sembrerebbe ovvio che non abbiamo bisogno di imparare dall’esperienza se sia o non sia vera (o falsa).

La sostanza del contendere si riduce al **sintetico a priori**. La tesi fondamentale dell'empirismo è che questo comparto è vuoto. La tesi fondamentale del razionalismo, d'altra parte, è che la conoscenza sintetica a priori esiste. Forse è questo ciò che Einstein intendeva quando diceva che *"fosse possibile ottenere una conoscenza certa degli oggetti dell'esperienza per mezzo del puro pensiero"*. Per i razionalisti, la conoscenza matematica è di questo tipo. Sia come sia, è importante aver chiaro che collocare la matematica nello scomparto del sintetico a priori di per sé non fornisce una risposta alla domanda (E). L'efficacia empirica della matematica resta un fatto misterioso — che è proprio il punto sottolineato da Wigner. Consapevole di questo, Kant andò oltre e diede una risposta alla domanda, che riformulò nel seguente modo: *"come è possibile la conoscenza sintetica a priori?"*

In poche parole, la sua risposta è che è possibile perché consiste di leggi che noi imponiamo agli stimoli sensoriali per creare il mondo dell'esperienza. In questo modo Kant salvò le leggi dell'aritmetica e della geometria (e della "scienza naturale pura") sia dall'addebito di analiticità sia dalla scetticismo di Hume riguardo alle conoscenze acquisite con l'esperienza<sup>11</sup>. Ecco un passaggio dai *Prolegomeni* dove Kant riassume i tratti salienti della sua dottrina:

*La proposizione principale . . . che le leggi universali della natura possono essere conosciute a priori, conduce da sé alla proposizione che la più alta legislazione della natura deve trovarsi in noi stessi, cioè nel nostro intelletto, e che queste non dobbiamo cercarle nella natura per mezzo dell'esperienza, ma che, al contrario, dobbiamo cercare la natura, nella sua conformità alle leggi, soltanto nelle condizioni di possibilità dell'esperienza che stanno nella nostra sensibilità e nel nostro intelletto. Come sarebbe altrimenti possibile conoscere queste leggi a priori, in quanto non sono . . . conoscenza analitica, ma genuina [conoscenza] sintetica? . . . O queste leggi sono derivate dalla natura per mezzo dell'esperienza, o, viceversa, la natura è dedotta dalle leggi della possibilità dell'esperienza in generale . . . La prima di queste possibilità è auto-contraddittoria, perché le leggi universali della natura possono e devono essere conosciute a priori (cioè indipendentemente da qualunque esperienza) . . . quindi rimane solo la seconda possibilità . . . la natura e l'esperienza possibile sono esattamente la stessa cosa . . . **l'intelletto non trae le sue leggi dalla natura, ma le prescrive alla natura.***

Kant ha il grande merito di avere riconosciuto per la prima volta che il problema di che cosa possiamo dire riguardo ad un mondo oggettivo indipendente dalla nostra mente così come era stato formulato nella tradizione empirista era irrisolvibile. Affinché si possa solo raccontare una storia **comprensibile** sul mondo, occorrono degli elementi forniti dalla ragione — senza questi presupposti non si può neanche incominciare a raccontare una storia. Questi sono sì sintetici, ma anche a priori. L'intelletto, non istruito dai sensi, fornisce le forme di comprensione — in primis spazio e tempo — senza le quali nulla può essere concettualizzato come esperienza oggettiva o come conoscenza scientifica. La

---

<sup>10</sup> Se da un lato gli empiristi pensano che tutta la conoscenza sintetica è a posteriori, la maggior parte dei razionalisti, senza accettare questa affermazione universale, ammettono che una parte della conoscenza sintetica è a posteriori.

<sup>11</sup> Ci occuperemo del problema dell'induzione di Hume in un capitolo successivo.

sensazione dà contenuto alle forme, ma, senza di loro, è rudimentale. Per Kant non vi è alcun linguaggio privilegiato dei dati di senso: svestita dai concetti formali, la pura sensazione è cieca.

In breve, per Kant la conoscenza consiste sia in una forma sia in un contenuto.

(1) La **forma** della conoscenza è concettuale e dipende dalla mente. È un presupposto della conoscenza (sintetico a priori).

(2) Il **contenuto** della conoscenza è contribuito dal mondo esterno (sintetico a posteriori).

Molte critiche sono state fatte ad alcuni aspetti della dottrina kantiana. Così come abbiamo esposto in maniera molto sommaria tale dottrina (e ce ne scusiamo con gli studiosi di Kant), altrettanto sommariamente tratteremo le critiche. Accenneremo solo a quella di Bertrand Russell (1872–1970), che da giovane era stato molto attratto dalle idee di Kant.

Il difetto principale che Russell trova nella teoria di Kant di una conoscenza a priori è l'importanza che Kant pone alla natura dell'osservatore. Se vogliamo avere "la certezza che i fatti devono sempre essere conformi alla logica e all'aritmetica", allora permettere che la natura umana abbia una qualunque influenza sull' a priori è un errore. Ecco il passo rilevante, tratto da *I problemi della filosofia*.

*Ciò che richiede spiegazione è la nostra certezza che i fatti debbano sempre conformarsi alla logica e all'aritmetica. Dire che siamo noi a creare la logica e l'aritmetica non è una spiegazione: la nostra natura è un fatto come un altro dell'esistenza, e non possiamo essere certi che rimarrà costante. Potrebbe accadere, se Kant avesse ragione, che domani la nostra natura cambi tanto che due e due faranno cinque. Una tale possibilità sembra non gli si sia mai presentata alla mente, eppure è tale da distruggere completamente la certezza che egli è ansioso di rivendicare alle proposizioni matematiche. È vero che questa possibilità, dal punto di vista formale, è incompatibile con la teoria kantiana che il tempo stesso sia una forma imposta dal soggetto ai fenomeni, così che il nostro vero io non è nel tempo e non ha domani. Ma egli dovrà tuttavia supporre che l'ordine temporale dei fenomeni sia determinato dalle caratteristiche di ciò che sta al di là del fenomeno, e questo basta alla validità del nostro ragionamento.*

## Kant e la geometria

Due citazioni dalla *Critica della Ragion Pura*:

*Lo spazio è una rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le rappresentazioni esterne. Non è possibile farsi la rappresentazione che ci sia spazio, mentre si può benissimo pensare che non ci sia in esso alcun oggetto. Lo spazio va pertanto considerato come la condizione della possibilità dei fenomeni e non come una determinazione da essi dipendente; ed è una rappresentazione a priori, che sta necessariamente a fondamento dei fenomeni esterni.*

*La certezza apodittica di tutte le proposizioni geometriche fondamentali, e la possibilità della loro*

*costruzione a priori , si fondano su questa necessità a priori [dello spazio]. In effetti, se questa rappresentazione dello spazio fosse un concetto acquisito a posteriori, e attinto dalla generale esperienza esterna, le proposizioni fondamentali della matematica non sarebbero altro che percezioni. Esse avrebbero dunque ogni contingenza della percezione e il fatto che tra due punti ci sia una sola linea retta non sarebbe necessario, ma risulterebbe ogni volta solo ciò che l'esperienza insegna.*

. . . e una domanda su cui riflettere:

**(K) La geometria euclidea è un presupposto necessario per comprendere e descrivere in modo coerente le proprietà spaziali del mondo fisico?**

# 7 ALGEBRA E GEOMETRIA

## Indice

Descartes e la geometria analitica	55
Il primo uso della retta numerica	57
Aritmetica dei numeri complessi	58

Per inquadrare meglio le domande poste finora è utile comprendere come sono cresciute le concettualizzazioni fisico-matematiche dello spazio nel passaggio dalla scienza antica alla scienza moderna per poi arrivare alle concettualizzazioni più recenti. Ci occuperemo di questi temi a partire dal presente capitolo.

## Descartes e la geometria analitica

Sulla base della geometria analitica studiata al liceo, si sarebbe portati a pensare che la fusione di aritmetica e geometria (e l'accettazione dei numeri irrazionali) deve essere stata compiuta da Cartesio. Per come la intendiamo oggi, la geometria analitica si basa essenzialmente sulla corrispondenza tra punti geometrici e coppie (nel piano) o triple (nello spazio) ordinate di numeri. Cartesio, nonostante il nostro uso dell'espressione "coordinate cartesiane", non ha inventato la moderna geometria analitica. Il successo di Cartesio è stato invece l'importazione del metodo algebrico in geometria.

Poiché l'algebra era stata sviluppata per la soluzione dei problemi aritmetici, tale importazione richiedeva un modo mediante il quale le grandezze geometriche potessero essere trattate come se fossero numeri. Cartesio spiega precisamente come questo deve essere fatto nel primo paragrafo de *La Geometrie*, che è l'unico libro di matematica scritto da Cartesio:

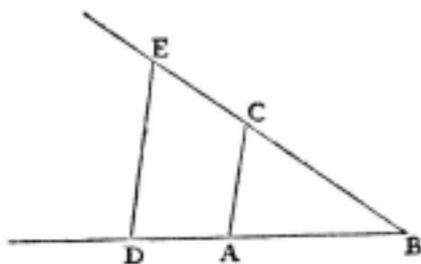
*Tutti i problemi della Geometria si possono facilmente ridurre in tali termini che non vi è bisogno di conoscere altro che la lunghezza di alcune linee rette, per costruirli. Proprio come l'aritmetica consiste di solo quattro o cinque operazioni, cioè, addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e l'estrazione di radici, che può considerarsi una specie di divisione, così in geometria, per trovare le linee richieste è semplicemente necessario aggiungere o sottrarre altre linee; oppure, prendendo una linea che chiamerò unità per correlarla il più vicino possibile ai numeri, e che può in generale essere scelta arbitrariamente, e avendo dato altre due linee, per trovare una quarta linea che sta ad una delle linee date come l'altra sta all'unità (che è come la moltiplicazione); o, ancora, per trovare una quarta linea che sta a una delle date linee come l'unità sta all'altra (che equivale alla divisione); o, infine, per trovare una, due, o più medie proporzionali tra l'unità e qualche altra linea (che è*

come l'estrazione della radice quadrata, radice cubica, ecc, della linea data). E io non esiterò a introdurre questi termini aritmetici in geometria, per il bene di una maggiore chiarezza.

Si osservi che per "linee", Cartesio intende "segmenti di linea retta". Per comprendere la sua proposta di "algebrizzare" la geometria, consideriamo la moltiplicazione, nel modo in cui egli la spiega subito dopo il passo citato (si veda la figura sotto):

Sia, per esempio, [il segmento] AB l'unità e che si debba moltiplicare [i segmenti] BD e BC. Per ottenere questo, non devo far altro che congiungere i punti A e C e dopo tirare [la retta] DE parallela alla [retta] CA. [Allora, per il teorema di Talete,] BE è il prodotto di questa moltiplicazione.

La Multi-  
plication.



Soit par exemple  
AB l'unité, & qu'il fail-  
le multiplier BD par  
BC, ie n'ay qu'a ioindre  
les points A & C, puis ti-  
rer DE parallele a CA,  
& BE est le produit de  
cete Multiplication.

Figura 7.1: Il passo de *La geometrie* dove Cartesio spiega la moltiplicazione.

In parole povere,

$$BE/BD = BC/AB \Rightarrow BE = BD \cdot BC/AB$$

È difficile ritrovare in questo metodo la moderna geometria delle coordinate. Cartesio non assegna coordinate numeri di punti: usa piuttosto simboli algebrici per indicare grandezze geometriche e spiega che significato geometrico deve essere dato alle operazioni apparentemente aritmetiche. Quando Cartesio identifica un punto sul piano per mezzo di due grandezze  $x$  e  $y$  (come fa , per esempio , quando la soluzione di un problema che risale a Pappo e Apollonio ed Euclide ),  $x$  e  $y$  non denotano numeri. I lettori moderni tendono a essere confusi dalla notazione moderna di Cartesio: egli utilizza le stesse variabili che oggi usiamo per descrivere le coordinate di un punto, ma questo non era parte del metodo di Cartesio. Se Descartes dovesse derivare una soluzione della forma  $x = \sqrt{2}$ , non concluderebbe  $x$  è un numero irrazionale, ma che  $x$  è un segmento tale che il quadrato costruito su di esso ha due volte l'area del quadrato costruito sul segmento arbitrariamente scelto come "unità". Sarebbe quindi facile costruire un tale segmento.

In breve, la fusione moderna di aritmetica e la geometria non era ancora avvenuta.

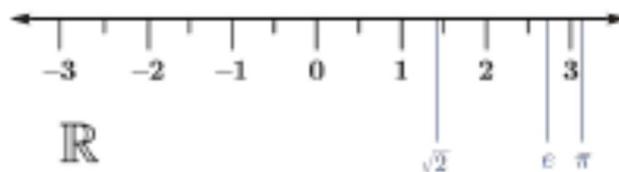


Figura 7.2: la retta numerica o retta reale

## Il primo uso della retta numerica

In matematica, la retta reale, o retta numerica è la linea i cui punti sono i associati ai numeri reali. È attualmente uno degli strumenti più importanti per insegnare i concetti aritmetici di base, quali i numeri naturali e reali nell'istruzione primaria e secondaria. È considerata un veicolo privilegiato per insegnare i numeri negativi. Ma, nonostante la sua ampia accettazione, l'utilizzo della retta numerica in didattica della matematica è abbastanza recente.

Il concetto di numero negativo è intrinsecamente difficile da insegnare. Anche la questione dell'accettazione dei numeri negativi nello sviluppo storico della matematica è problematica. La pratica algebrica di risolvere problemi lineari ha portato più volte a situazioni in cui si arriva ad "un valore negativo". Prima del XVI secolo, tali soluzioni sono state costantemente chiamate "assurde" o "impossibili". Solo dall'inizio del XVI secolo in poi, vediamo i primi passi verso valori negativi sotto forma di termini algebrici preceduti da un segno negativo. Ci si può allora chiedere quale sia stata l'origine della moderna concezione di retta reale con numeri positivi e negativi. Troviamo la risposta nel trattato di Algebra pubblicato nel 1685 dal matematico inglese John Wallis (1616– 1703) (vedi la figura 7.3). È notevole che Wallis introduca la linea numerica allo scopo di illustrare l'addizione e la sottrazione di numeri negativi nel suo lavoro di algebra. Quando un uomo avanza di 5 metri da A e ritorna indietro di 8, quanto è lontano dal suo punto di partenza ? Wallis dà la risposta - 3, come vie. L' idea è stata seguita da molti altri, tra cui Newton. Newton distinse tra "quantità affermative" e "quantità negative". Una quantità negativa emerge quando una grande quantità affermativa viene sottratta da una più piccola. E per illustrare questo punto, Newton disegna una linea che equivale ad una retta numerica che indica quantità negative.

Negli anni successivi, più di mezzo secolo dopo Cartesio, si afferma la rappresentazione analitica "cartesiana" del piano (vedi figura 7.4) e dello spazio.

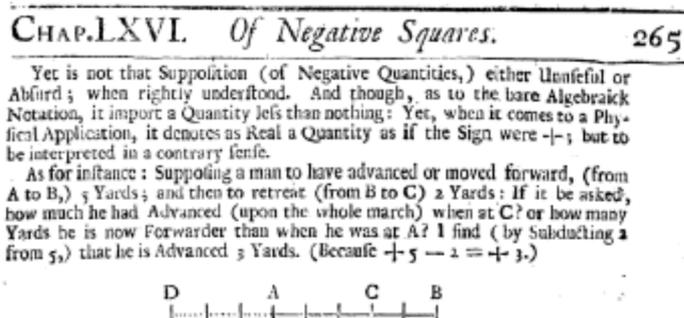


Figura 7.3. John Wallis introduce la retta numerica nel suo *Algebra*.

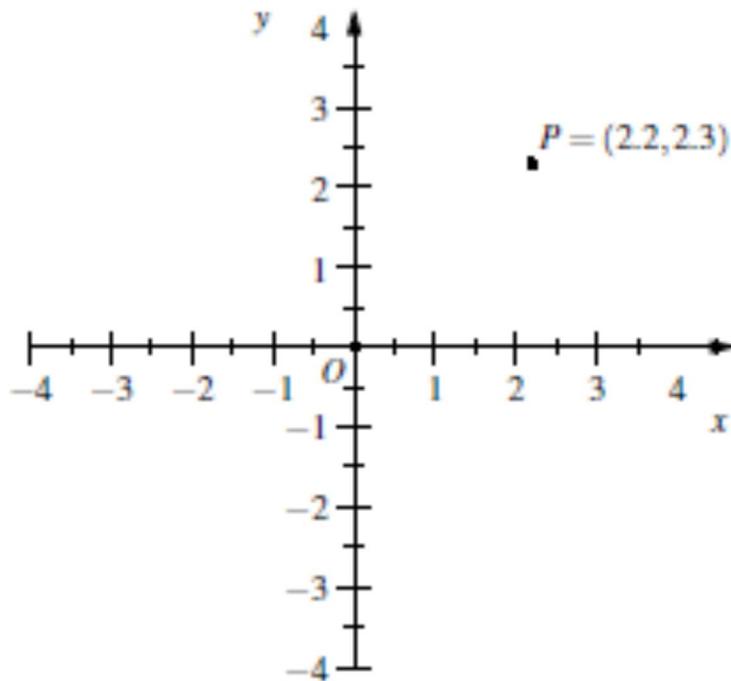


Figura 7.4: Coordinate cartesiane nel piano

## Aritmetica dei numeri complessi

Non sono state le equazioni quadratiche  $ax^2 + bx + c = 0$ , la cui formula risolutiva è nota sin dall'antichità,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a portare ai numeri complessi. Il valore negativo del discriminante  $b^2 - 4ac$  non fu mai considerato come segnale dell'esistenza di un nuovo tipo di numeri, per i quali  $p^{-1}$  ha senso. Fu invece sempre interpretato come un'indicazione che la parabola  $y = ax^2$  e la retta  $y = -bx - c$  non hanno punti di intersezione. Occorre tenere presente che fino all'800 si son sempre cercate soluzioni reali o positive delle equazioni algebriche.

Furono invece le equazioni cubiche a portare ai numeri complessi. In breve, la storia è questa. Girolamo Cardano (1501-1576?), basandosi sui lavori di Niccolò Tartaglia (1499/1500- 1557) e Scipione Del Ferro (1465- 1526) , pubblica nel suo *Ars Magna* (nel 1545) la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} - \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (7.1)$$

per l'equazione di terzo grado

$$x^3 = 3px + 2q.$$

La formula (7.1) non era nota nell'antichità. A questo proposito il fisico Richard Feynman (1918–1988) scrisse:

*Lo sviluppo di più grande importanza per la matematica in Europa fu la scoperta di Tartaglia che si può risolvere un'equazione cubica: sebbene di poco uso in sé stessa, questa scoperta deve essere stata meravigliosa da un punto di vista psicologico. Aiutò molti nel Rinascimento a liberarsi dal senso di soggezione che provavano verso gli antichi.*

Pochi decenni dopo la scoperta di Cardano, Raffaele Bombelli (1526– 1572) si rese conto che c'era qualcosa di strano e paradossale riguardo a questa formula. Bombelli considerò l'equazione  $x^3 = 15x+4$ , per cui la formula di Cardano fornisce

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} ,$$

(con la notazione moderna  $i \equiv \sqrt[3]{-1}$  introdotta da Leonard Euler circa duecento anni dopo Bombelli). Ma Bombelli sapeva che  $x = 4$  è soluzione dell'equazione. Come metter d'accordo questo con la formula di Cardano?

La congettura ardita di Bombelli fu che

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - ni ,$$

dove  $n$  è un numero da determinarsi. Se fosse così,  $x = 4$  sarebbe conseguenza della formula di Cardano. Ma per arrivare a questo, Bombelli dovette congetturare quali fossero le regole algebriche di manipolazione per "numeri" del tipo  $A = a + i\tilde{a}$ .

Le regole algebriche a cui Bombelli arrivò sono (in linguaggio matematico moderno) le seguenti:

$$(1) i^2 = -1$$

$$(2) A + B = (a + i\tilde{a}) + (b + i\tilde{b}) = (a + b) + i(\tilde{a} + \tilde{b}).$$

$$(3) AB = (a + i\tilde{a})(b + i\tilde{b}) = ab + i(a\tilde{b} + \tilde{a}b) + i^2 \tilde{a}\tilde{b} = (ab - \tilde{a}\tilde{b}) + i(\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{a}\tilde{b}).$$

Se si utilizzano queste regole si può mostrare facilmente che  $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ .

Il lavoro di Bombelli fu importante perché contribuì a far maturare la consapevolezza che problemi, formulati completamente nell'ambito dei numeri reali e di cui si cercavano soluzioni reali, per essere risolti, richiedevano comunque un'aritmetica complessa come strumento di calcolo, basata sulle

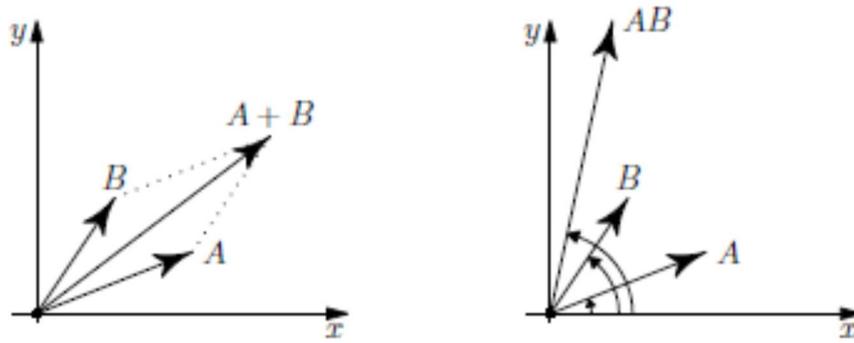


Figura 7.5: Somma e prodotto di numeri complessi, visti come vettori nel piano cartesiano.

regole algebriche (1), (2) e (3). Bombelli scoprì una nuova struttura algebrica, quella che oggi chiamiamo l'algebra dei numeri complessi.

Questa aritmetica rimase abbastanza misteriosa fino a che, con Jean-Robert Argand (1768–1822) e Carl Friedrich Gauss (1777–1855), non si diede una rappresentazione geometrica nei numeri complessi come punti del piano per i quali le operazioni di somma e prodotto hanno un chiaro significato geometrico. Per quanto questo verrà chiarito nel prossimo capitolo, il lettore potrà seguirmi sulla base dei suoi ricordi di matematica delle scuole superiori (altrimenti potrà ritornarci dopo avere letto il prossimo capitolo).

Per farla breve, un numero complesso  $A = a + i\tilde{a}$  è messo in corrispondenza con il punto  $P$  di coordinate  $(a, \tilde{a})$  nel piano cartesiano con origine  $O$  e quindi con il vettore  $\overrightarrow{OP}$ . La figura 7.5 mostra che la somma di due numeri complessi  $A$  e  $B$  è data dall'usuale regola del parallelogramma per la somma dei vettori corrispondenti. Dalla regola algebrica scoperta da Bombelli,

$$AB = (ab - \tilde{a}\tilde{b}) + i(\tilde{a}b + a\tilde{b}),$$

si può dimostrare che il prodotto  $AB$  è il numero complesso che forma un angolo con l'asse reale pari alla somma degli angoli di  $A$  e  $B$  e la cui lunghezza è il prodotto delle lunghezze di  $A$  e  $B$ .

# 8 IL CALCOLO DIFFERENZIALE

## Indice

Il Cono di Democrito	61
I rudimenti del calcolo differenziale	64
Il teorema fondamentale del calcolo	72
Il cono di Democrito e gli indivisibili di Cavalieri	73

## Il Cono di Democrito

Ritorniamo alla citazione di Plutarco di pagina 6 riguardante il paradosso del cono di Democrito. Il paradosso suggerisce che Democrito pensasse un solido come la somma di infiniti piani paralleli e che potesse aver usato questa idea per trovare i volumi del cono e della piramide come riportato da Archimede. Questa idea di Democrito può aver portato Archimede successivamente ad applicare la stessa idea in modo sistematico e rigoroso. Questa idea avrebbe poi portato alle moderne teorie dell'integrazione.

L'idea di Democrito avrebbe potuto essere la seguente. Si consideri il cono in figura 8.1. A distanza  $y$  dal vertice è disegnato un cilindro con raggio di base  $x$  e spessore " $dy$ ". Con " $d$ " non intendiamo un numero, ma un simbolo che significa "un pochino di"; nel nostro caso,  $dy$  è "un pochino di"  $y$ , cioè una quantità che è molto molto piccola rispetto a  $y$ . Equivalentemente, facendo riferimento all'altezza  $H$  del cono, possiamo dire che

$$dy = \frac{H}{N}$$

dove  $N$  è un numero molto molto grande. Il volume del cilindretto con bordo nero in figura è

$$dV = [\text{area base}] \times [\text{altezza}] = \pi x^2 dy$$

" $dV$ " significa un pochino di  $V$ , essendo  $V$  il volume del cono che vogliamo calcolare. Quest'ultimo è la somma dei volumi di tutti i cilindretti al variare di  $y$  dal vertice del cono ( $y = 0$ ) alla base ( $y = H$ ). Scriviamo questa somma come

$$V = \int dV = \int \pi x^2 dy$$

dove " $\int$ " sta per "somma di" (il simbolo è semplicemente una  $S$  allungata). Tale somma è chiamata somma integrale, o semplicemente integrale, nel senso di "intero" o totalità che si ottiene sommando tutti i pezzettini  $dV$ . Questi "pezzettini" molto molto piccoli sono

chiamati infinitesimi o elementi; nel caso specifico  $dV$  è un elemento di volume (“elemento” nel senso di parte più piccola non ulteriormente decomponibile, ossia di

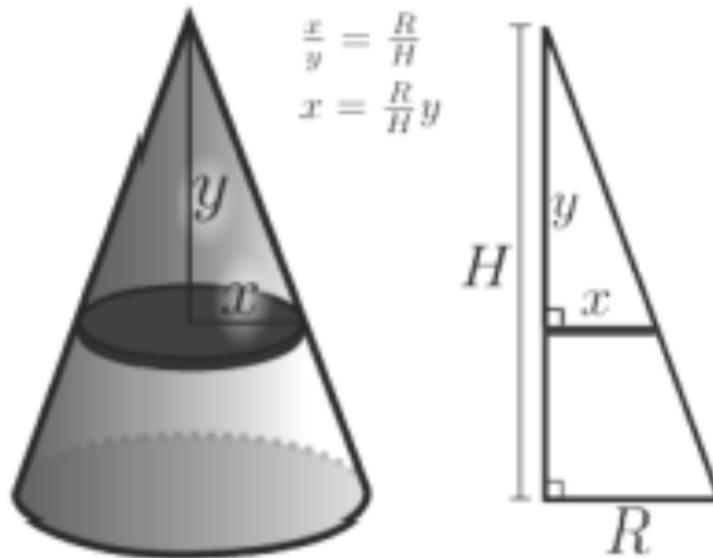


Figura 8.1: Cono

“atomo”).

Poiché  $\pi$  è un termine costante che moltiplica tutti i termini della somma integrale, possiamo raccogliarlo e scrivere

$$V = \int dV = \pi \int x^2 dy$$

I termini di questa somma sono ottenuti variando  $y$  tra 0 (il vertice del cono) e  $H$  (l'altezza del cono). Questo fatto è messo in evidenza usando la notazione

$$V = \int_0^H x^2 dy$$

Al crescere di  $y$  anche  $x$  cresce proporzionalmente. Vale infatti la proporzione  $x : y = R : H$ , e quindi

$$x = \frac{R}{H}y$$

da cui (usando sempre la stessa proprietà, che i termini costanti moltiplicativi si raccolgono):

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H y^2 dy$$

Dobbiamo calcolare l'integrale  $\int y^2 dy$ . Poniamo  $y = ndy$  e facciamo variare  $n$  tra 1 e  $N - 1$  ricordandoci che  $dy = H/N$ . Allora

$$\int_0^H y^2 dy = \frac{H^3}{N^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (N-1)^2]$$

Il difficile è calcolare la somma in parentesi quadre. Democrito conosceva la rappresentazione geometrica dei quadrati e sapeva che con i quadrati si poteva fare una

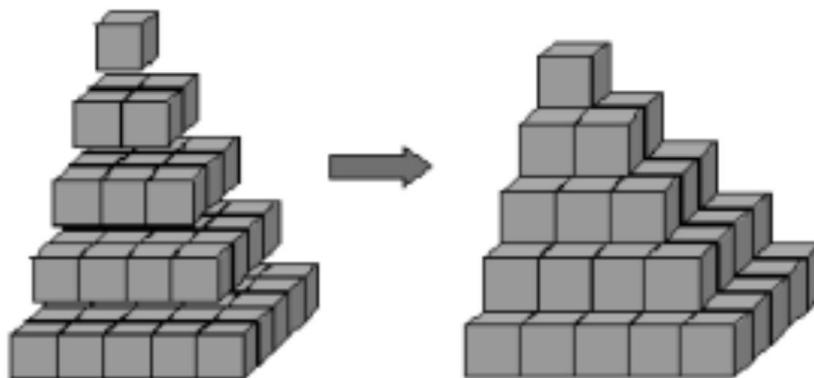


Figura 8.2: Piramide formata da molti cubetti di volume unitario.

piramide (vedi figura 8.2). Sapeva inoltre (come d'altronde già sapevano gli antichi egizi) che il volume di una piramide formata da  $N$  cubetti di volume unitario è  $N^3/3$  per  $N$  grande, cioè,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + N^2 \approx \frac{N^3}{3} \text{ per } N \text{ grande}$$

Se  $N$  è grande, sommare i quadrati fino a  $N^2$  o fino a  $(N - 1)^2$  dà risultati che non sono apprezzabilmente differenti. Quindi l'integrale vale

$$\int_0^H y^2 dy = \frac{H^3}{N^3} \frac{N^3}{3} = \frac{H^3}{3}$$

da cui,

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H y^2 dy = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}(\pi R^2) H$$

che è la nota formula per il volume del cono.

Eudosso e Archimede avrebbero compreso bene il calcolo esposto sopra, ma lo avrebbero ritenuto non rigoroso. Che cosa vuol dire "molto molto piccolo"? Nella somma  $\int_0^H y^2 dy$ , la distanza  $y$  dal vertice è una variabile continua che poi viene trattata come una variabile discreta e sommata secondo le regole usuali, ma poi si usa il fatto che  $N$  sia "molto molto" grande. Questo è di certo poco rigoroso.

Probabilmente Democrito era consapevole di queste difficoltà, che hanno a che fare con il problema dell'irriducibilità del continuo al discreto, ma è anche pur vero che questo metodo di calcolo produce il risultato corretto! Noto il risultato, la dimostrazione rigorosa di questo risultato può essere data con i metodi dell'analisi moderna (mediante la nozione di limite a cui abbiamo accennato a pagina 101 o con il metodo di esaurimento di Archimede, che è tanto rigoroso quanto i metodi moderni).

Si osservi che il metodo sviluppato per il calcolo del volume del cono può essere usato per il calcolo dell'area compresa tra la parabola  $y = x^2$  e l'asse delle  $x$  fino al punto  $x = H$  (vedi figura 8.3). Tale area è infatti  $\int_0^H x^2 dx$  e quindi, sulla base del calcolo sopra, vale  $H^3/3$ . Se  $H = 2$  come in figura, allora l'area cercata è  $8/3$ .

## I rudimenti del calcolo differenziale

Gli infinitesimi come  $dV$ ,  $dx$  o  $dy$  sono stati utilizzati per esprimere l'idea di oggetti così piccoli che non c'è modo di vederli o di misurarli. La parola infinitesimale viene da una moderna conio latina *infinitesimus* del Diciassettesimo secolo, che originariamente si riferiva alla voce "infinito-esimo" in una sequenza. È stato originariamente introdotto intorno al 1670 da Nicolaus Mercator (1620–1687) o da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Proverò a raccontare succintamente le regole del calcolo degli elementi infinitesimi in una forma leggermente più rigorosa di quella dei padri fondatori, in primis, Leibniz e Newton, cercando però di preservarne lo "spirito".

Oggi ragioniamo quasi esclusivamente in termini del concetto moderno di **funzione**, che implica una netta distinzione tra variabili indipendenti e variabili dipendenti. Inoltre, nell'insegnamento moderno del calcolo si separa nettamente il calcolo di una variabile da quello a più variabili. Per Leibniz e Newton queste distinzioni erano meno nette. Senza nulla togliere al rigore moderno, penso che un recupero del loro modo di pensare faciliterebbe l'insegnamento del calcolo.

Il problema centrale di Leibniz e Newton è il **problema del cambiamento**: data un grandezza che dipende da altre grandezze, come descrivere matematicamente il suo cambiamento relativamente ai cambiamenti delle altre grandezze? Consideriamo per esempio il volume del cono  $V = \frac{1}{3}(\pi R^2)H$ , allora la domanda è come varia il volume in conseguenza di variazioni del raggio  $R$  o dell'altezza o di entrambi.

### DIFFERENZIALI

Il cuore della teoria di Leibniz può essere esposto con un esempio semplice. Consideriamo la grandezza  $y = x^2$ . Supponiamo che  $x$  vari, vale a dire, alteriamo  $x$  o immaginiamo che sia alterato, aggiungendo ad esso una piccola quantità che chiamiamo  $dx$  (si legge "de  $x$ "); in termini intuitivi,  $d$  significa "un pochino di". In questo modo,  $x$  diventa  $x+dx$ . Allora poiché  $x$  è variato, anche  $y$  varierà.

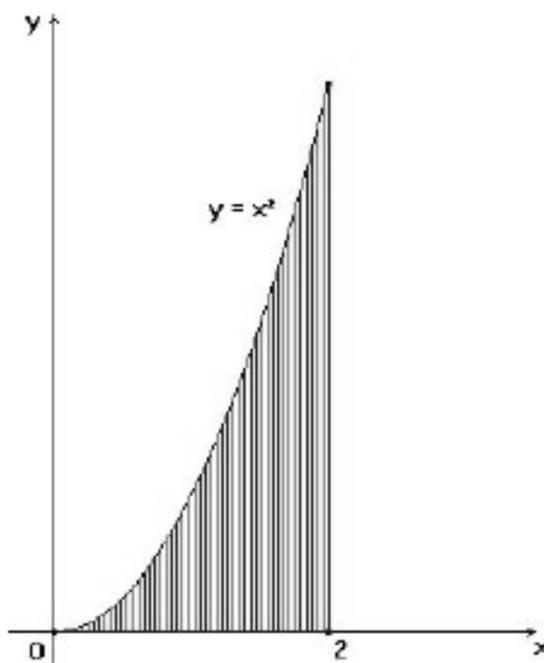


Figura 8.3: Area della regione del piano sottesa dalla parabola  $y = x^2$ .  
 Nell'esempio considerato, la variazione di  $y$  è

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 .$$

La regola fondamentale del calcolo è che  $(dx)^2$  è trascurabile rispetto a  $dx$ . Geometricamente, questo può essere spiegato nel seguente modo. Si disegni un quadrato (figura 8.4) il cui lato assumeremo che rappresenti  $x$ . Ora supponiamo che il quadrato cresca di un pochino, avendo aggiunto  $dx$  al lato. Il quadrato allargato è costituito dal quadrato  $x^2$ , i due rettangoli nella parte superiore e sulla destra, ciascuno dei quali è di area  $xdx$  (o insieme  $2xdx$ ), e il piccolo quadrato nell'angolo in alto a destra che è  $(dx)^2$ . A sinistra nella figura 8.4 abbiamo preso  $dx$  come una frazione abbastanza grande di  $x$ , circa  $1/5$ . Ma supponiamo che  $dx$  sia un centesimo ( $10^{-2}$ ) di  $x$ , come nel disegno a destra. Allora il quadratino  $(dx)^2$  avrà un'area che è solo un decimillesimo ( $10^{-4}$ ) di  $x^2$  e sarà praticamente invisibile. Chiaramente  $(dx)^2$  è trascurabile **solo se si considera un incremento  $dx$  che sia abbastanza piccolo rispetto ad  $x$** . Se quest'ultima condizione è soddisfatta, la variazione  $y + dy$ , in conseguenza della variazione  $x \rightarrow x + dx$ , è

$$y + dy = x^2 + 2xdx ,$$

da cui, essendo  $y = x^2$ , si ottiene

$$dy = 2xdx .$$

Quest'equazione fornisce la risposta alla domanda di come cambia  $y = x^2$  in conseguenza di una piccola variazione di  $x$ . In linguaggio moderno, diciamo che  $dy = 2xdx$  è la variazione al prim'ordine di  $y$  in conseguenza della variazione  $x \rightarrow x + dx$ , mentre  $(dx)^2$  è la variazione al second'ordine.

Per  $y = x^2$  non ci sono contributi di ordine superiore al secondo, ma, in generale, tali contributi possono essere presenti. Per esempio, se considerassimo  $y = x^3$ , troveremmo

$$(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 ,$$

da cui,

$$dy = 3x^2 dx ,$$

avendo trascurato i contributi del second'ordine e del terz'ordine in  $dx$ .

Riassumendo, la regola fondamentale del calcolo differenziale è

**(1) Le variazioni di ordine superiore al primo sono trascurabili rispetto alle variazioni del prim'ordine, se quest'ultime sono sufficientemente piccole.**

Leibniz formulò il calcolo differenziale sulla base della regola (1) e delle seguenti altre regole:

**Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono delle costanti (cioè dei numeri fissati) e  $u$  e  $v$  delle grandezze variabili,**

allora

(2)  $dx = 0$

(3)  $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv$

(4)  $d(uv) = u dv + v du$

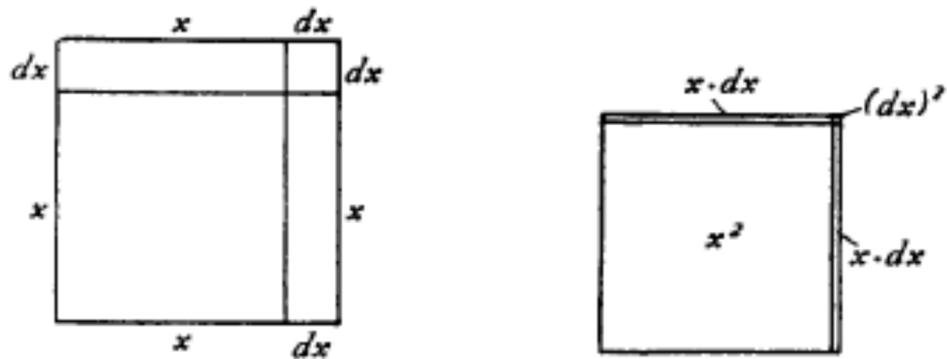


Figura 8.4: Significato geometrico della regola fondamentale del calcolo.

Le regole (2) e (3) sono ovvie. La (4) è una generalizzazione della regola  $dx^2 = 2x dx$  illustrata in figura 8.4: invece di un quadrato, si consideri un rettangolo di lati  $u$  e  $v$ , come in figura 8.5. Allora la variazione dell'area del rettangolo è  $d(uv) = u dv + v du + dudv$ . Trascurando  $dudv$  (essendo di ordine superiore al primo) si arriva alla regola (4).

Sulla base di queste regole, siamo adesso in grado di rispondere alla domanda da cui eravamo partiti: in conseguenza delle variazioni  $R \rightarrow R + dR$  e  $H \rightarrow H + dH$  del suo raggio e della sua altezza rispettivamente, la variazione al prim'ordine del volume del cono è

$$dV = d \left[ \frac{1}{3} (\pi R^2) H \right] = \frac{1}{3} \pi (2RH dR + R^2 dH)$$

È sorprendente come gran parte del calcolo differenziale possa essere dedotto in maniera semplice dalle regole (1) — (4).

Ecco alcuni esempi.

(a) Da (4), per  $u = v$  si ritrova immediatamente  $du^2 = 2udu$  e  $du^3 = d(uu^2) = u^2 du + u du^2 = 3u^2 du$ . Iterando la procedura, si ottiene

$$du^n = nu^{n-1} du$$

dove  $n$  è un numero intero positivo.

(b) Per calcolare il differenziale di  $y = \sqrt{x}$ , basta osservare che  $x = y^2$ , quindi  $dx = 2y dy$ , ossia

$$dy = \frac{dx}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

(c) Per calcolare il differenziale di  $y = 1/x^n$ , dove  $n$  è un numero intero positivo, basta osservare che  $1 = x^n y$ . Allora per la regola (4),  $d1 = d(x^n y) = nx^{n-1} y dx + x^n dy$ , ma per la (2),  $d1 = 0$ . Quindi

$$dy = -nx^{n-1} y = -n \frac{1}{x^{n+1}} dx$$

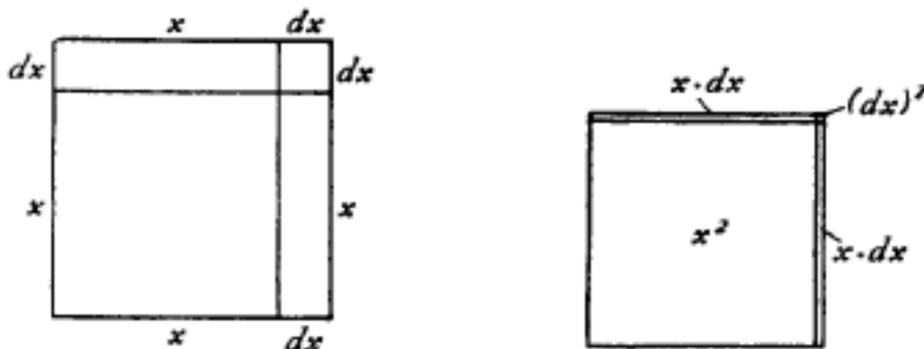


Figura 8.5: Illustrazione della regola (4).

Quantità come  $dx$  o  $dy$  sono chiamate **elementi** (infinitesimi) delle grandezze  $x$  o  $y$ ; quantità come  $x dx$  o  $x^2 dx$  sono chiamati **infinitesimi o differenziali** (gli elementi sono un caso particolare di differenziali). Questa era la terminologia di Leibniz. Newton usava terminologia e notazioni differenti, ma le sue idee avevano molto in comune con quelle di Leibniz.

## LA DERIVATA

Newton sviluppò il calcolo differenziale con in mente un obiettivo ben preciso: **determinare il tasso di variazione di una grandezza, diciamo  $y$ , relativamente alla variazione di una altra grandezza, diciamo  $x$ , da cui  $y$  dipende**. Newton, che interpretava fisicamente  $x$  come **tempo**, chiamava tale tasso **flussione**; oggi è chiamato **derivata di  $y$  rispetto a  $x$**  ed è denotato in molti modi, una notazione particolarmente conveniente è  $D_x y$ . La regola di calcolo per  $D_x y$  scoperta indipendentemente da Newton e da Leibniz è

$$D_x y = \frac{dy}{dx}$$

Per spiegare questa regola facciamo riferimento alla costruzione geometrica in figura 8.6. La dipendenza di  $y$  da  $x$  è rappresentata da una curva nel piano cartesiano  $x$ - $y$ . Come esempio, abbiamo scelto la parabola  $y = x^2$ .

Geometricamente, il tasso di variazione è la pendenza della retta tangente, cioè,

$$D_x y = \text{pendenza della retta tangente alla curva nel punto } x$$

Ma,

$$\text{pendenza della retta tangente alla curva nel punto } x = \frac{QR}{PQ}$$

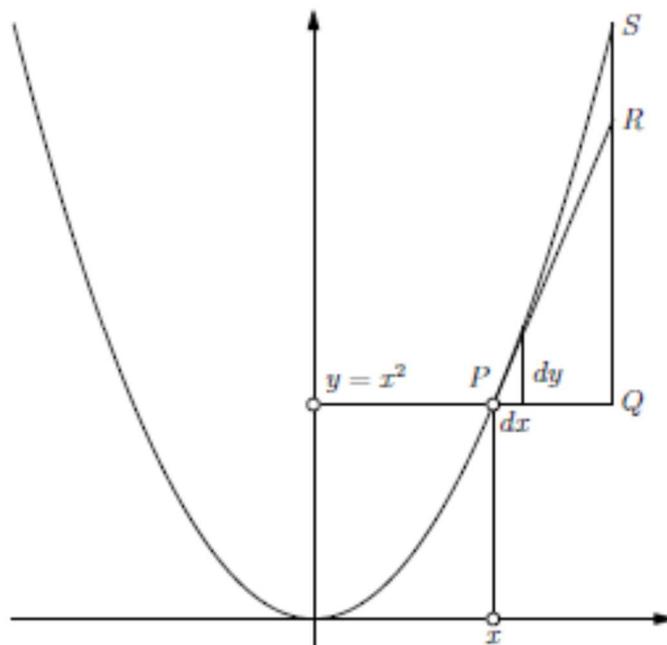


Figura 8.6: Calcolo della derivata.

dove  $PQ$  è un qualunque incremento di  $x$ . Si osservi che l'incremento di  $y$  è  $QS$  e questo è in generale diverso da  $PQ$ . Tuttavia, se si considera un incremento sufficientemente piccolo  $dx$ , allora l'incremento  $dy$  lungo curva è praticamente indistinguibile all'incremento lungo la retta tangente e, per similitudine dei triangoli, si avrà

$$\frac{QR}{PQ} = \frac{dy}{dx}$$

e quindi

$$D_x y = \frac{dy}{dx}.$$

In particolare per la parabola  $y = x^2$ , si ha  $dy = 2x dx$  e quindi  $D_x x^2 = 2x$ .

### LA CURVATURA

Il processo di derivazione può essere iterato: se  $z = D_x y$ , possiamo considerare la derivata di  $z$  rispetto a  $x$ , cioè

$$D_x z = \frac{dz}{dx}$$

Per questa quantità si usano le notazioni

$$D_x^2 y \quad \text{o} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ed è chiamata **derivata seconda** di  $y$ . La derivata significa la **pendenza** della curva. Ma cosa può significare la derivata seconda? Chiaramente significa il tasso (per unità di lunghezza  $x$ ) con cui la pendenza sta cambiando. In breve, è una misura della **curvatura** della curva.

Consideriamo ad esempio una retta come in figura 8.7 a sinistra. Qui la pendenza è costante e quindi il suo tasso di variazione è nullo (le rette hanno curvatura nulla). Ma se invece consideriamo una curva con una pendenza che aumenta, come in figura 8.7 a sinistra, la derivata seconda — la curvatura — è positiva. Questo è il caso della parabola  $y = x^2$  per cui

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

La curvatura può essere negativa, cioè la pendenza può diminuire, come illustrato in figura 8.8. Questo è il caso, ad esempio, della curva  $y = p x$ .

Queste considerazioni sono utili per determinare i massimi e i minimi di una curva. Questi si hanno in corrispondenza dei valori di  $x$  per cui la derivata — la pendenza della retta tangente — si annulla. E si avrà un minimo quando la derivata seconda — il tasso di variazione della pendenza — è positiva (questo è il caso della parabola per  $x = 0$ ), un massimo, quando è negativa (vedi figura 8.9).

### CINEMATICA

Osserviamo che se  $x$  rappresenta la posizione di un corpo in movimento, tale grandezza dipende dal tempo  $t$ . Allora

$$D_t x = \frac{dx}{dt} \equiv v \text{ è la velocità istantanea del corpo}$$

e 
$$D_t v = \frac{dv}{dt} \equiv a \text{ è l'accelerazione istantanea del corpo}$$

Posizione, velocità e accelerazioni sono le nozioni fondamentali della cinematica.

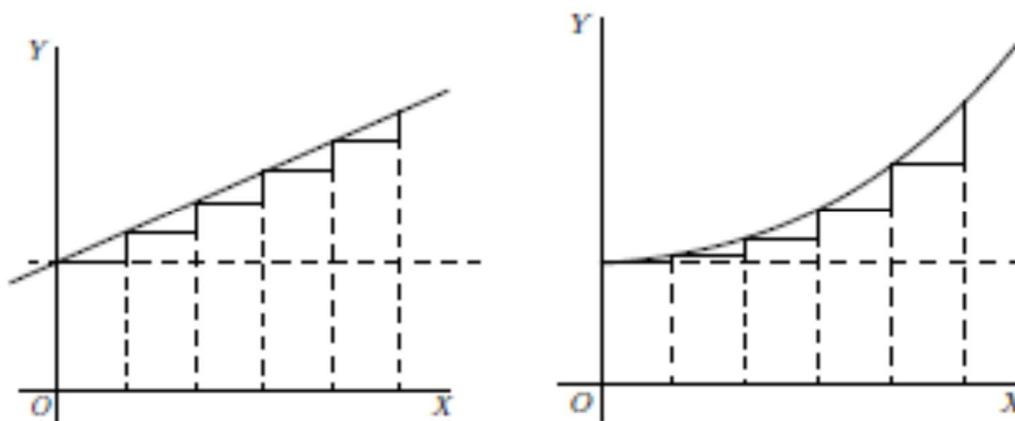


Figura 8.7: Significato geometrico della derivata seconda: la pendenza aumenta.

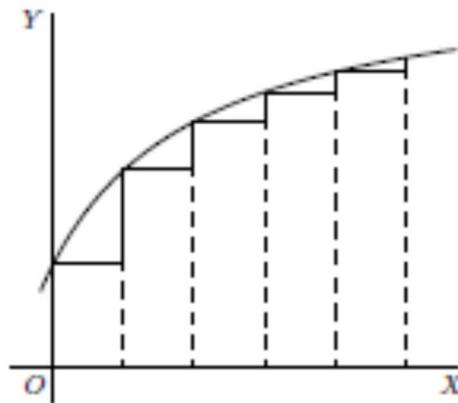


Figura 8.8: Derivata seconda negativa: la pendenza diminuisce.

### IL CALCOLO A PIÙ VARIABILI

Quando una grandezza, diciamo  $z$ , dipende da più variabili, diciamo  $x$  e  $y$ , la variazione infinitesima di  $z$  in conseguenza di incrementi  $dx$  e  $dy$  è

$$dz = D_x z dx + D_y z dy ,$$

dove  $D_x z$  è la derivata di  $z$  rispetto a  $x$  tenendo costante  $y$  e  $D_y z$  è la derivata di  $z$  rispetto a  $y$  tenendo costante  $x$ . Queste derivate sono dette **derivate parziali** e a volte sono denotate rispettivamente

$$\frac{\delta z}{\delta x} \quad \text{e} \quad \frac{\delta z}{\delta y}$$

con queste notazioni il differenziale di  $z$  si scrive

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Si osservi che la regola (4) a pagina 71 è un caso particolare di questa formula per  $z = xy$ .

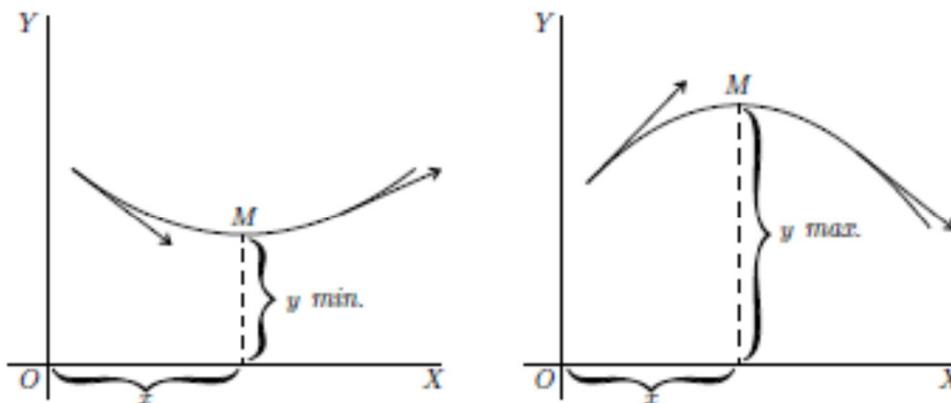


Figura 8.9: Massimi e minimi di una curva.

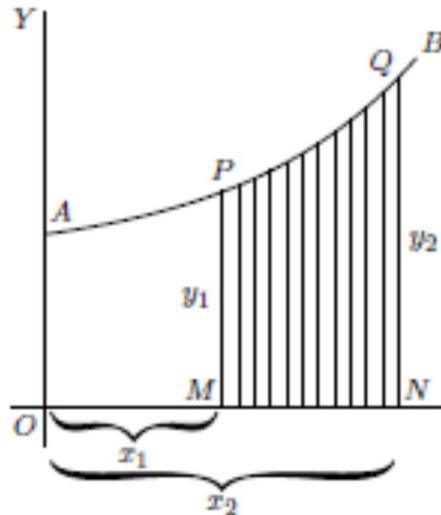


Figura 8.10: significato geometrico dell'integrale.

### INTEGRALI

Come abbiamo visto all'inizio di questo capitolo, l'integrale è l'area (con segno) della regione compresa tra la curva e l'asse delle  $x$  (le regioni sopra danno contributo positivo, quelle sotto contributo negativo). Con riferimento alla figura 8.10, l'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} y \, dx$$

è l'area della regione  $MNQP$ . L'integrale va inteso come la somma di tutti i rettangolini verticali: se le loro basi sono sufficientemente piccole, gli errori per difetto o per eccesso sono trascurabili. Questo fatto è abbastanza intuitivo ed è illustrato in figura 8.11.

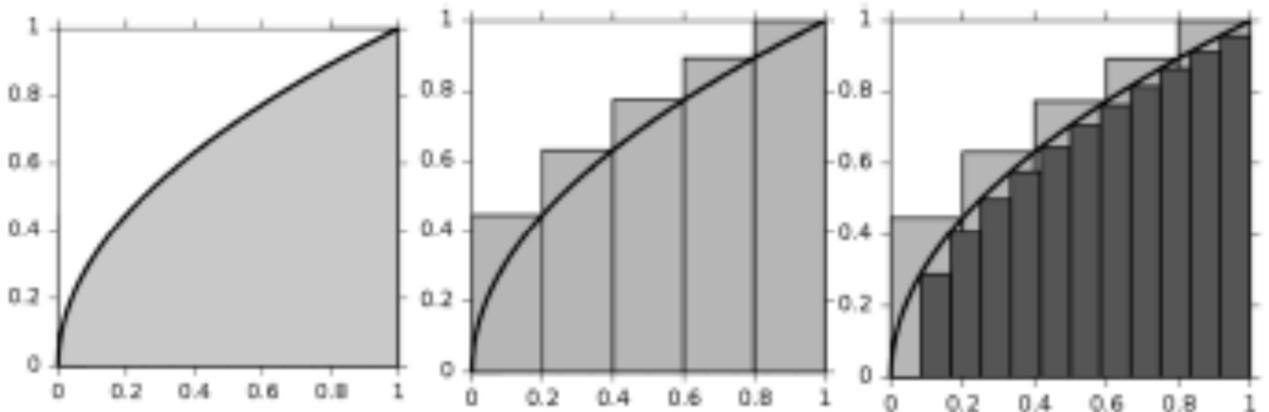


Figura 8.11: Approssimazioni per eccesso e per difetto di un'integrale.

## Il teorema fondamentale del calcolo

Il teorema fondamentale del calcolo si riferisce a differenziazione e integrazione, dimostrando che queste due operazioni sono essenzialmente le inverse l'una dell'altra. Prima della scoperta di questo teorema nel XV /II secolo, non era stato riconosciuto che queste due operazioni sono correlate. I matematici greci antichi, a partire da Democrito, sapevano come calcolare l'area mediante infinitesimi, e conoscevano la derivata — come pendenza della tangente. La rilevanza storica del teorema fondamentale del calcolo non è la capacità di calcolare derivate e integrali, ma la consapevolezza che le due operazioni apparentemente distinte, e con significato geometrico così profondamente diverso, sono in realtà strettamente correlate.

Il primo enunciato pubblicato e la prova di una versione ristretta del teorema fondamentale era di James Gregory (1638-1675). Isaac Barrow (1630- 1677) dimostrò una versione più generalizzata del teorema, mentre l'allievo di Barrow Isaac Newton completò lo sviluppo della teoria matematica. Gottfried Leibniz sistematizzò il teorema e introdusse la notazione che stiamo usando.

Enunciamo il teorema facendo riferimento alla figura 8.12. Consideriamo l'integrale

$$\int_a^x y dx$$

che rappresenta l'area tra l'ascissa e la curva  $y$ , dal punto fissato  $a$  al punto variabile  $x$ . Come cambia questa area quando si considera un piccolo incremento  $dx$ ? La variazione infinitesima dell'area è semplicemente l'area del rettangolino nero in figura, cioè

$$d\int_a^x y dx = y dx$$

Questo è il teorema fondamentale del calcolo, che può essere equivalentemente espresso in termini di derivata:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x y dx = y$$

Questa equazione ci dice che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione e quindi che il calcolo di aree può essere ricondotto al calcolo di derivate.

Supponiamo per esempio di dover calcolare l'integrale tra 0 e  $x$  di  $y = x^3$ . Sappiamo che  $x^3$  è la derivata di  $z = x^4/4$ , vale a dire

$$x^3 = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^4}{4} \right)$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x x^3 dx = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^4}{4} \right).$$

Se due curve hanno la stessa pendenza, possono al più differire per una costante, per cui

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^4}{4} \right)$$

La costante si determina imponendo che per  $x = a$ , l'area sia nulla:

$$0 = a^4/4 + \text{costante} \Rightarrow \text{costante} = -a^4/4.$$

In definitiva, l'integrale vale

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

L'esempio suggerisce che il teorema può essere espresso in una forma conveniente per il calcolo di integrali  $\int_a^b y dx$ . Sia  $z$  una quantità la cui derivata è  $y$ , cioè tale che

$$y dx = dz.$$

(una quantità di questo tipo è detta "primitiva" di  $y$ ) Allora

$$\int_a^b y dx = \int_a^b dz = z(b) - z(a)$$

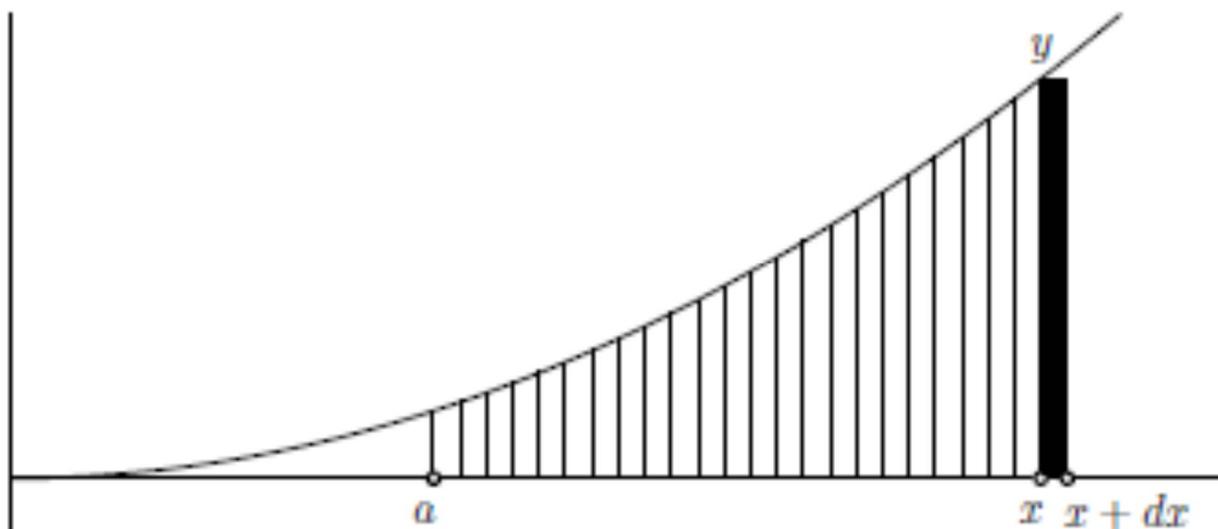


Figura 8.12: Calcolo della derivata

## Il cono di Democrito e gli indivisibili di Cavalieri

Concludiamo questo capitolo, ritornando al punto di partenza; illustrando un metodo di calcolo dei volumi che ha preceduto il calcolo differenziale e integrale. Ci sembra che un



Figura 8.13: I due mucchietti di monete hanno volumi uguali.

ritorno a nozioni in qualche modo più semplici possa aiutare a comprendere meglio le nozioni di base del calcolo integrale esposte in questo capitolo.

Per il calcolo del volume del cono, Democrito avrebbe potuto ragionare anche nel seguente modo. I volumi dei due mucchietti di monete in figura 8.13 sono chiaramente uguali perché formati da ugual numero di monete tutte con la stessa area e spessore. Quel che conta è che le aree e gli spessori siano uguali. Al limite gli spessori potrebbero essere nulli. Se si affettano due solidi e le aree delle fette sono uguali, anche i volumi dei solidi saranno uguali. Confrontando un cono con una piramide di uguale altezza, ci si convince facilmente che se l'area della base del cono è uguale a quella della piramide, anche le aree delle fette corrispondenti sono uguali (vedi figura 8.14). Quindi il volume del cono è uguale al volume di una piramide di uguale altezza stessa area di base. Che il volume di una piramide sia  $[\text{area base}] \times [\text{altezza}] / 3$ , segue da una facile costruzione geometrica (vedi figura 8.15).

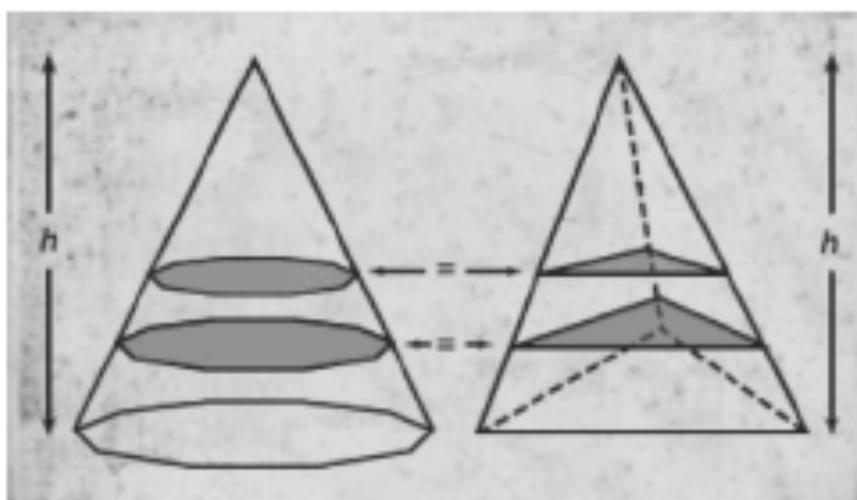


Figura 8.14: Il volume del cono è uguale a quello della piramide.

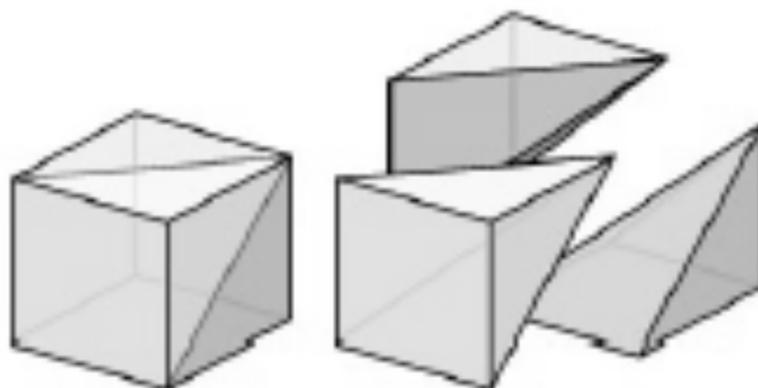


Figura 8.15: Il volume della piramide

Il metodo appena descritto è un metodo potente per il calcolo delle aree e dei volumi. Ad esempio, esso permette di determinare facilmente il volume della sfera, come si vede facendo riferimento alla figura 8.16: a sinistra una semisfera di raggio  $R$ , a destra un cilindro con base circolare di stesso raggio e altezza anch'essa uguale a  $R$  e un cono con vertice nel centro della sfera e stessa base del cilindro. L'osservazione cruciale è che l'area della sezione della sfera colorata in grigio scuro a sinistra è uguale alla corona circolare in grigio scuro a destra, entrambe a distanza  $z$  dal piano superiore. Infatti, il quadrato del raggio della sezione della sfera è  $R^2 - z^2$  (per il teorema di Pitagora). Allora la sua area è  $\pi(R^2 - z^2)$ , che chiaramente coincide con l'area della corona circolare a destra. Allora il volume della semisfera è uguale a  $R^3 - (1/3)\pi R^3 = (2/3)\pi R^3$ . Ne segue che il volume della sfera è  $(4/3)\pi R^3$ .

Questo calcolo del volume della sfera è dovuto a Luca Valerio (1552–1618), ma era già noto ad Archimede. La semisfera di figura 8.16 è nota come **scodella di Galileo**, perché Galileo ne parla nei suoi scritti a proposito degli argomenti trattati dal matematico Bonaventura Cavalieri (1598–1647), suo amico e tra i migliori suoi discepoli. Il metodo generale per il calcolo dei volumi che abbiamo descritto è noto come **metodo degli indivisibili** o **metodo di Cavalieri** e si basa sul seguente principio, noto come **Principio di Cavalieri**:

**Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.**

Gli "indivisibili" sono gli infiniti fogli di spessore infinitesimo che formano una figura solida. Il metodo degli indivisibili è chiaramente un'anticipazione del calcolo integrale.

Questo metodo fu al centro delle riflessioni di Galileo sulla natura del continuo di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo.

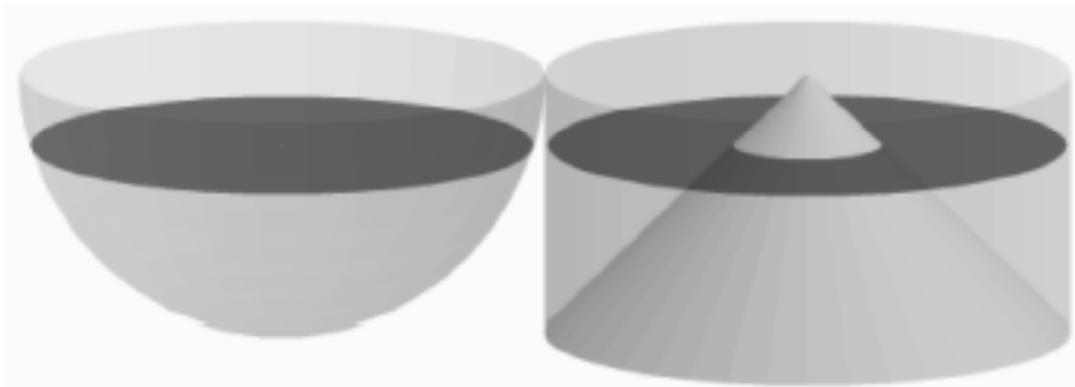


Figura 8.16: Costruzione per determinare il volume della sfera.

# 9 I LABIRINTI DELL'INFINITO E DEL CONTINUO DI GALILEO E LEIBNIZ

## Indice

Indivisibili e infinito attuale per Galileo	77
I paradossi dell'infinito	78
Il labirinto del continuo di Leibniz	81
Idealità del continuo e atomi formali	82
Indivisibili e infinito attuale per Leibniz	83

## Indivisibili e infinito attuale per Galileo<sup>12</sup>

Le concezioni di Galileo Galilei sulla natura del continuo furono influenzate sia dall'atomismo di Democrito sia dalle teorie aristoteliche. Questo emerge chiaramente quando si considera la prima giornata dei suoi *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche* intorno a *Due Nuove Scienze* (1638), e più in particolare l'ampia discussione sulla composizione dei materiali continui.

Salviati, portavoce di Galileo, propone una concezione atomica della materia, simile nello spirito a quella di Democrito: i corpi sono composti da "piccole particelle infinitamente indivisibili", in numero infinito, intervallate da una infinità di vuoti infinitamente piccoli. Salviati, cioè Galileo, ritiene che una grandezza continua sia costituita da indivisibili, anzi da un numero infinito di essi:

**Salv.** *Passo ora ad un'altra considerazione, ed è, che stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggio come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili, perché una divisione e subdivisione che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti siano infinite, perché altramente la subdivisione sarebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante, perché quanti infiniti fanno un'estensione infinita: e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili.*

Galileo riconosce che tale infinità di indivisibili non sarà mai prodotta da successive suddivisioni, ma sostiene di avere un metodo per generare tutto in una volta, passando così dal dominio del potenziale a quello dell'attuale:

<sup>12</sup> In alcune parti di questo capitolo seguiamo abbastanza fedelmente la trattazione di John S. Bell in *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*.

**Salv.** . . . Non so adesso, Sig. Simplicio, se i Signori Peripatetici, a i quali io ammetto, come verissimo concetto, il continuo esser divisibile in sempre divisibili, sì che continuando una tal divisione e suddivisione mai non si perverrebbe alla fine, si contenteranno di concedere a me, niuna delle tali loro divisioni esser l'ultima, come veramente non è, poiché sempre ve ne resta un'altra, ma bene l'ultima ed altissima esser quella che lo risolve in infiniti indivisibili, alla quale concedo che non si perverrebbe mai dividendo successivamente in maggiore e maggior moltitudine di parti; ma servendosi della maniera che propongo io, di distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo (artificio che non mi dovrebbe esser negato), crederei che dovessero quietarsi, ed ammetter questa composizione del continuo di atomi assolutamente indivisibili, e massime essendo questa una strada forse più d'ogni altra corrente per trarci fuori di molto intrigati laberinti, quali sono, oltre a quello già toccato dalla coerenza delle parti de i solidi, il comprender come stia il negozio della rarefazione e della condensazione, senza incorrer per causa di quella nell'inconveniente di dovere ammettere spazii vacui, e per questa la penetrazione de i corpi: inconvenienti, che amendue mi pare ch'assai destramente vengano schivati con l'ammetter detta composizione d'indivisibili.

Si osservi il riferimento alla condensazione e alla rarefazione di cui abbiamo parlato nel Capitolo 1.

Ma qual è questo metodo per "**distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo**"? Questo:

**Salv.** Ora, se l'infilettere una linea ad angoli, formandone ora un quadrato, ora un ottangolo, ora un poligono di quaranta, di cento o mille angoli, è mutazione bastante a ridurre all'atto quelle quattro, otto, quaranta, cento e mille parti che prima nella linea diritta erano, per vostro detto, in potenza, quando io formi di lei un poligono di lati infiniti, cioè quando io la infletta nella circonferenza d'un cerchio, non potrò io con pari licenza dire d'aver ridotto all'atto quelle parti infinite, che voi prima, mentre era retta, dicevi esser in lei contenute in potenza?

Vale a dire, il metodo consiste, semplicemente, nell'atto di piegare una linea retta in un cerchio. Come Nicola Cusano (1401–1464), Galileo considera il cerchio come un poligono di infiniti lati. Quando la linea retta è stata piegata in un cerchio, Galileo ritiene che la linea tal modo è stata resa in parti indivisibili, cioè punti.

## I paradossi dell'infinito

Mentre Galileo era fermo nella sua convinzione che un continuo è composto da un'infinità attuale di indivisibili in senso vero e proprio, egli ritiene che il numero di tali indivisibili non possa essere considerato come una quantità. Per mostrare questo presenta diversi paradossi riguardanti l'infinito. La conclusione che Galileo trae da questi paradossi è che il concetto di "quantità infinita" non può essere considerato come una quantità poiché manca di alcune delle proprietà essenziali che caratterizzano una quantità, come "più grande", "inferiore a", o "uguale a".

**Simp.** Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile: ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà l'infinità de i punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter esser capito in verun modo.

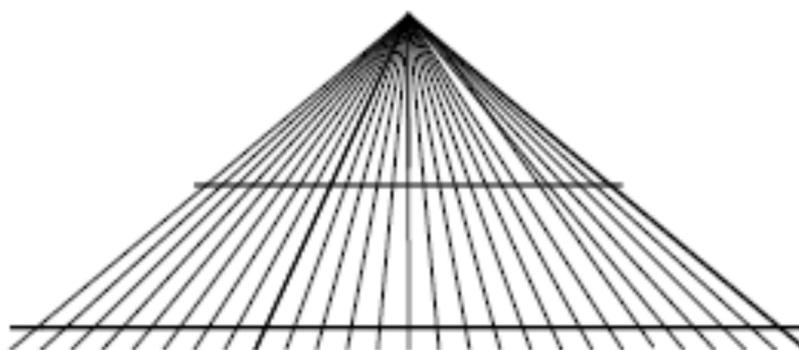


Figura 9.1: Il paradosso di Simplicio: se i continui sono fatti di punti, i punti del segmento più corto in alto possono essere messi in corrispondenza uno-a-uno con quelli di un segmento più lungo in basso.

Simplicio si oppone all'idea di un infinito attuale argomentando che i punti di un segmento possono essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli di un segmento di lunghezza maggiore, come mostrato in figura 9.1, e questo è paradossale. Galileo stringe i denti e accetta il paradosso, affermando che non possiamo attribuire all'infinito le proprietà del finito:

**Salv.** Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro.

Per chiarire il punto, Galileo considera un altro esempio. Confronta l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei loro quadrati, stabilendo un risultato che, in linguaggio moderno, potrebbe essere enunciato dicendo che questi due insiemi, pur essendo contenuti l'uno nell'altro, possono essere posti in corrispondenza biunivoca fra di loro.

**Salv.** Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti

*i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le loro radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de' i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un milione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.*

**Sagr.** *Che dunque si ha da determinare in questa occasione?*

**Salv.** *Io non veggio che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti...*

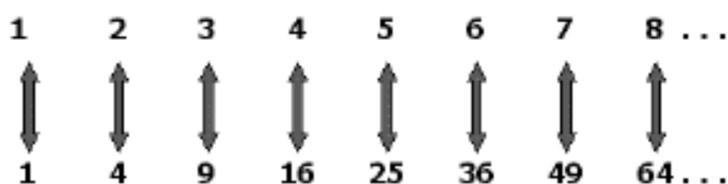


Figura 9.2: I numeri naturali e i loro quadrati possono essere messi in corrispondenza uno-a-uno.

Per Galileo, l'infinito e l'infinitesimo sono oltre alla nostra possibilità di comprensione:

*... l'infinito è per sé solo da noi incomprendibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli in-finiti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile.*

Il modo in cui gli indivisibili sono "congiunti insieme" per formare un continuo è confrontato da Galileo con la liquefazione di un solido:

*... e mentre che rompendo un solido in molte parti e seguitando di ridurlo in minutissima polvere, risoluto che si fusse ne gl'infiniti suoi atomi non più divisibili, perché non potremo dire, quello esser ritornato in un solo continuo, ma forse fluido come l'acqua o 'l mercurio o 'l medesimo*

metallo liquefatto? e non vediamo noi, le pietre liquefarsi in vetro, ed il vetro medesimo, co 'l molto fuoco, farsi fluido più che l'acqua?

. . . Io non so trovar miglior ripiego per risolvere alcune sensate apparenze, tra le quali una è questa. Mentre io piglio un corpo duro, o sia pietra o metallo, e che con martello o sottilissima lima lo vo al possibile dividendo in minutissima ed impalpabile polvere, chiara cosa è che i suoi minimi, ancor che per la lor piccolezza siano impercettibili a uno a uno dalla nostra vista e dal tatto, tuttavia son eglino ancor quanti, figurati e numerabili: e di essi accade che, accumulati insieme, si sostengono ammucchiati; e scavati sino a certo segno, resta la cavità, senza che le parti d'intorno scorrano a riempirla; agitati e commossi, subito si fermano tantosto che il motore esterno gli abbandona: e questi medesimi effetti fanno ancora tutti gli aggregati di corpuscoli maggiori e maggiori, e di ogni figura, ancora che sferica, come veggiamo ne i monti di miglio, di grano, di migliarole di piombo e d'ogni altra materia. Ma se noi tenteremo di vedere tali accidenti nell'acqua, nissuno ve ne troveremo; ma, sollevata, immediatamente si spiana, se da vaso o altro esterno ritegno non sia sostenuta; incavata, subito scorre a riempire la cavità; ed agitata, per lunghissimo tempo va fluttuando, e per spazii grandissimi distendendo le sue onde. Da questo mi par di potere molto ragionevolmente arguire, i minimi dell'acqua, ne i quali ella pur sembra esser risolta (poiché ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima polvere, anzi non ha consistenza nissuna), esser differentissimi da i minimi quanti e divisibili; né saprei ritrovarci altra differenza, che l'esser indivisibili.

## Il labirinto del continuo di Leibniz<sup>13</sup>

Leibniz è stato ossessionato dal problema del continuo. Usando le stesse parole di Galileo, lo chiamava il **labirinto del continuo**. Sappiamo infatti dalla sua stessa testimonianza che il suo sistema filosofico — la monadologia — si è sviluppata proprio a partire dai suoi tentativi di risolvere il problema di come e in che modo un continuo possa essere costruito a partire da elementi indivisibili. Leibniz si chiedeva: **se concediamo che ogni entità reale o è una semplice unità o una molteplicità, e che una molteplicità è necessariamente un aggregato di unità, come dobbiamo classificare il continuo geometrico di una linea?**

Nella ricerca di una risposta a questa domanda, Leibniz, così come Galileo, fu influenzato sia dall'atomismo di Democrito sia dalle teorie aristoteliche, ma gli esiti delle sue riflessioni, pur avendo alcuni punti in comune, furono anche profondamente differenti da quelle di Galileo.

Poiché una linea è divisibile in parti, non può essere una vera unità. Allora è una molteplicità, e di conseguenza una aggregazione di unità. Ma di che tipo di unità? Apparentemente, gli unici candidati per le unità geometriche sono i punti. Ma, seguendo Aristotele, i punti non sono altro che le estremità di un'estensione — i punti estremi di un segmento, ad esempio. Ne consegue che una quantità continua non è né un'unità né una aggregazione di unità. Leibniz concluse che una quantità continua non è un'entità reale, ma ha invece un carattere puramente ideale. In questo modo risolse il problema che, per essere intelligibile, il continuo dovesse essere semplice o composto di semplici. Quindi,

---

<sup>13</sup> Le citazioni di Leibniz fanno riferimento all'appendice di *The Philosophy of Leibniz* di Bertrand Russell e sono state tradotte da me dall'inglese.

*una quantità continua è una cosa ideale, che appartiene ai possibili, e agli attuali considerati possibili. Questo perché il continuo coinvolge parti indeterminate, mentre in ciò che è attuale non c'è nulla di indeterminato . . . Ma la scienza dei continui, vale a dire dei possibili, contiene verità eterne, che non sono mai violate dai fenomeni reali, poiché la differenza è sempre inferiore rispetto a qualsiasi data differenza assegnabile. [Russell, p. 296]*

*Propriamente parlando, il numero  $1/2$  in astratto è un mero rapporto, per nulla formato dalla composizione di altre frazioni, anche se nelle cose numerate ci si trova che c'è uguaglianza tra due quarti e una metà. E possiamo dire altrettanto della linea astratta, la composizione essendo presente solo in cose concrete . . . di cui queste linee astratte segnano le relazioni. [Dello stesso tipo] sono i punti matematici, che sono anch'essi solo modalità, cioè estremità. E siccome tutto è indefinito in una linea astratta, prendiamo nota in esso di tutto cioè che è possibile, come nelle frazioni di un numero, senza curarci delle divisioni effettivamente fatte, che designano questi punti in modo diverso. Ma nelle cose reali sostanziali, il tutto è il risultato o l'insieme di sostanze semplici, o di una molteplicità di unità reali. **Ed è la confusione dell'ideale e dell'attuale, che ha complicato tutto e prodotto il labirinto riguardante la composizione del continuo.** Coloro che compongono una linea con punti hanno cercato gli elementi primi nelle cose ideali o rapporti [cfr. la teoria delle proporzioni], diversamente da come è corretto; e coloro che hanno trovato che le relazioni come il numero o lo spazio (che comprende l'ordine o la relazione delle cose coesistenti possibili) non possono essere formate da un insieme di punti, hanno commesso l'errore di negare, per la maggior parte, gli elementi primi della realtà sostanziale, come se non ci fossero unità primitive o non ci fossero sostanze semplici. [Russell, p. 296]*

## **Idealità del continuo e atomi formali**

Leibniz riteneva che lo spazio e il tempo, come continui, sono ideali, mentre ciò che è reale, in particolare la materia, è discreto e composto di sostanze semplici unitarie che chiamò **monadi**:

*La materia non è continua ma discreta e **attualmente** divisa infinitamente, anche se nessuna parte assegnabile dello spazio è senza materia. Ma lo spazio, come il tempo, non è qualcosa di sostanziale ma è ideale, e consiste in possibilità, o in un ordine di coesistenza che è in qualche modo possibile. E così non ci sono divisioni in esso, ma in quanto tali sono fatte dalla nostra mente, e la parte è posteriore al tutto. Nelle cose reali, al contrario, le unità precedono la moltitudine, ed esistono moltitudini solo attraverso le unità. (Lo stesso vale per i cambiamenti, che non sono realmente continui.) [Russell, p. 296]*

*Lo spazio, proprio come il tempo . . . è qualcosa di indefinito, come ogni continuo le cui parti non sono reali, ma possono essere prese arbitrariamente, come le parti dell'unità, o le frazioni . . . Lo spazio è qualcosa di continuo ma ideale, la massa è discreta, vale a dire una moltitudine attuale . . .*

[un'aggregazione] composta da un numero infinito di unità. **In ciò che è attuale, i termini singoli vengono prima degli aggregati, negli ideali il tutto precede la parte.** Aver trascurato questa considerazione ha portato al labirinto del continuo. [Russell, p. 296]

In ciò che è ideale o continuo il tutto precede le parti . . . le parti sono qui solo potenziali; al contrario, tra le cose reali (vale a dire, sostanziali), il semplice precede gli aggregati, e le parti sono date effettivamente e prima del tutto. Queste considerazioni dissipano le difficoltà riguardanti il continuo —difficoltà che sorgono solo quando il continuo è considerato come qualcosa di reale, che possiede parti reali prima di ogni divisione che possiamo concepire, e quando la materia è considerata come una sostanza. **In realtà, non vi è nulla se non la quantità discreta, cioè la moltitudine di monadi o sostanze semplici.** [Russell, p. 297]

Leibniz spiega come egli arrivò a sviluppare la sua dottrina:

*In un primo momento, quando mi ero liberato dal giogo di Aristotele, ho pensato agli atomi e al vuoto, perché questa è la visione che meglio soddisfa la fantasia. Ma arrivato a questa, ho percepito, dopo molta meditazione, che è impossibile trovare i **principi di una vera unità** nella sola materia, o in ciò che è solo passivo, in quanto non è altro che una raccolta o aggregazione di parti ad infinitum. Ora, una molteplicità può derivare la sua realtà solo da vere unità, che vengono da altrove e sono tutt'altro che punti matematici, che sono solo estremità di una quantità estesa . . . , dei quali è certo che il continuo non può essere composto. Quindi, per trovare queste vere unità ero costretto a ricorrere ad un **atomo formale**, dal momento che un essere materiale non può essere sia materiale e perfettamente indivisibile o dotato di una vera unità. Era necessario, quindi, ricordare e, per così dire, riabilitare le **forme sostanziali** tanto depredate oggi, ma in modo tale da renderle intelligibili e da separare l'uso che dovremmo farne dall'abuso che ne è stato fatto. Ho quindi scoperto che la loro natura consiste nella forza, e che da questo ne consegue qualcosa di analogo alla percezione e all'appetito; e che, pertanto, esse devono essere concepite come imitazione dell'idea che abbiamo delle Anime.*

## Indivisibili e infinito attuale per Leibniz

A differenza di Galileo, Leibniz rigettò l'idea che un continuo sia formato da parti indivisibili. Eppure, nella filosofia di Leibniz, il concetto di punto, o di indivisibile, svolge un ruolo chiave. Infatti, pur essendosi liberato del giogo aristotelico, Leibniz ha continuato ad aderire alla dottrina aristotelica che i punti matematici sono estremità o posizioni e che non potranno mai, da soli, costituire un continuo. Pertanto:

*Un punto non è una certa parte della materia, né un numero infinito di punti potrebbe formare un'estensione.*

*. . . Il continuo è infinitamente divisibile. E questo appare nella linea retta, per il semplice fatto che la sua parte è simile al tutto. Così, quando l'intero può essere diviso, così lo può anche la parte, e similmente qualsiasi parte della parte. I punti non sono parte del continuo, ma estremità, e non*

*esiste la più piccola parte di una linea così come non esiste la più piccola frazione dell'unità.*

*Per quanto riguarda gli indivisibili, se sono intesi come semplici estremità del tempo o di una linea, non possono essere concepiti come contenenti nuove estremità delle loro parti attuali o potenziali. Donde, i punti non sono né grandi né piccoli, e nessun salto è necessario per passare attraverso di loro. Tuttavia, il continuo, anche se ha ovunque tali indivisibili, è sicuramente non composto da loro.*

Come osserva Russell, Leibniz distinse tre tipi di indivisibili:

- (1) i punti **metafisici**, o monadi, di cui sono composte le entità reali;
- (2) i punti **matematici**, o posizioni nello spazio;
- (3) e i punti **fisici**, che Russell identifica abbastanza plausibilmente con "un'estensione infinitesimale del tipo utilizzato nel calcolo infinitesimale".

Così:

*Gli atomi di materia sono contrari alla ragione . . . solo gli atomi della sostanza, vale a dire le unità che sono reali e assolutamente prive di parti, sono fonti di azioni e sono i principi primi assoluti della composizione delle cose e, per così dire, gli elementi ultimi dell'analisi delle sostanze. Potrebbero essere chiamati punti metafisici; possiedono una certa vitalità e una sorta di percezione e i punti matematici sono i loro punti di vista per rappresentare l'universo. Ma quando le sostanze corporee sono compresse, tutti i loro organi costituiscono solo un punto fisico alla nostra vista. Così i punti fisici sono solo indivisibili in apparenza; i punti matematici sono esatti, ma sono soltanto modalità; solo i punti metafisici [cioè, le monadi] ... sono esatti e reali, e senza di loro non ci sarebbe nulla di reale, perché senza vere unità non ci sarebbe molteplicità.*

Come Cusano e Galileo, Leibniz accetta la presenza dell'infinito attuale :

*Sono così tanto a favore dell'infinito attuale che invece di ammettere che la natura lo aborrisce, come si dice comunemente, ritengo che esso influenzi la natura dappertutto per indicare le perfezioni del suo Creatore. Così credo che ogni parte della materia è, non dico divisibile, ma in realtà divisa, e di conseguenza la particella più piccola dovrebbe essere considerata come un mondo pieno di un'infinità di creature. . .*

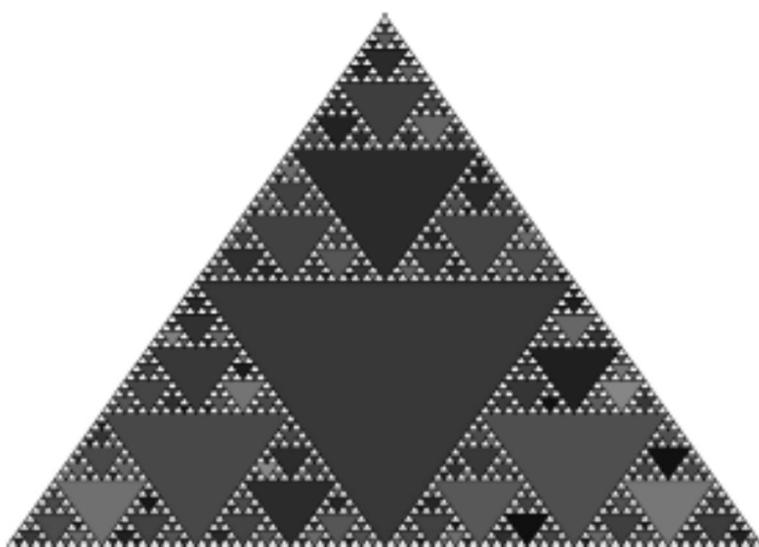


Figura 9.3: Triangolo di Sierpinski.

Questa immagine richiama la nozione moderna di frattale. Un frattale è un oggetto geometrico che è simile a se stesso a tutte le scale. Se si esegue lo zoom su un oggetto frattale sarà simile o esattamente come la forma originale. Questa proprietà viene chiamata auto-similarità. Un esempio di un oggetto auto-simile è mostrato in figura 9.3. È noto come triangolo di Sierpinski. Guardandolo più da vicino, osserviamo che il triangolo grande è composto di tre piccoli triangoli metà delle dimensioni (lunghezza del lato) dell'originale, a loro volta composto da tre triangoli più piccoli, e così via e così via.

I vertici di tutti i triangoli formano un aggregato infinito di punti che può essere visto come un modello delle monadi di Leibniz: un infinito attuale di punti. Il riferimento ai frattali non è un anacronismo. Leibniz stesso suggeriva che la natura è analoga a una conchiglia con un numero infinito di ripiegamenti senza fine che si ripetono in modo simile dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande.

Inoltre, Leibniz sosteneva che lo spazio era un'astrazione idealizzata dai rapporti tra i singoli soggetti o delle loro possibili posizioni e che poteva essere pensato in modo simile alle relazioni tra i membri della famiglia. Anche se le persone in una famiglia sono legate l'una all'altra, i rapporti non esistono indipendentemente dalle persone; analogamente, Leibniz riteneva che lo spazio non poteva esistere indipendentemente dagli oggetti nel mondo.

Il triangolo di Sierpinski fornisce anche un modello per la concezione di Leibniz dello spazio. Per Leibniz, così come per noi, le coordinate cartesiane sono ideali, nel senso che sono fornite da noi per rappresentare lo spazio. Ma Leibniz andava oltre e riteneva che anche lo spazio euclideo — il "foglio" su cui è disegnata la figura — fosse ideale. Ciò che è reale sono i punti metafisici — i vertici di tutti i triangoli del triangolo di Sierpinski — e le **relazioni geometriche** tra loro — le distanze tra i punti, gli angoli, ecc.

Per rimanere nell'analogia, secondo Leibniz, una struttura come il triangolo di Sierpinski è reale, ma la sua rappresentazione sul foglio è ideale: nient'altro che un modo conveniente per rappresentarla, analogamente a come usualmente rappresentiamo lo spazio usando le coordinate. In effetti, il triangolo di Sierpinski è una struttura che può

essere definita ricorsivamente, con poche righe di codice, senza far riferimento ad alcuna struttura geometrica, ma solo alle relazioni tra i "punti" della struttura.

La metafisica di Leibniz è dunque meno strana di quanto potrebbe essere sembrare a prima vista e la concezione dello spazio di Leibniz è stata ripresa quasi pari pari da vari autori, a partire dai padri fondatori del positivismo logico Moritz Schlick (1882–1936) e Hans Reichenbach (1891–1953), come risposta ai problemi sulla natura dello spazio posti dalla relatività generale di Einstein.

Leibniz riteneva anche che le relazioni "esterne" di ciascun punto con tutti gli altri punti della struttura fossero poi riducibili a proprietà "interne" di ciascun punto, essendo costitutive della natura stessa di ciascun punto.

Questo è un aspetto della metafisica di Leibniz che è irto di difficoltà e quindi ci fermiamo qui.

# 10 LA CONCEZIONE MODERNA DELL'INFINITO E DEL CONTINUO

## Indice

Achille e la tartaruga	87
La nozione di limite	91
Le successioni di Cauchy	93
L'atomismo matematico di Weirstrass e Dedekind	94
Campi numerici	96

La concezione moderna di continuo è opposta sia a quella di Aristotele sia a quella di Leibniz. Secondo la concezione moderna, un continuo è composto da punti — è un insieme di punti. Furono gli sviluppi della matematica a permettere un ritorno all'“atomismo matematico” di Galileo e a far comprendere che ciò che Leibniz riteneva impossibile — che un continuo sia composto da punti — è, in effetti, possibile; e che ciò in cui Leibniz e Galileo credevano — l'infinito attuale — è, in effetti, suscettibile di una precisa caratterizzazione matematica.

## Achille e la tartaruga

Il percorso che porta alle concezioni moderne di infinito e continuo è abbastanza tortuoso. La prima tappa fu la formulazione precisa della nozione di **limite**. Per spiegare questa nozione, partiamo dal paradosso di Achille e la tartaruga, che è uno dei paradossi di Zenone di Elea (489 a.C.–431 a.C.).

Ecco la descrizione del paradosso data dallo scrittore argentino Jorge Luis Borges (1899–1986):

*Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.*

È forte la tentazione di respingere questo argomento come un sofisma, ma spesso si reagisce così o per pigrizia o per paura. Pigrizia, perché pensare al paradosso dà la

sensazione che si è perennemente sul punto di risolverlo senza mai riuscirci (la stessa sensazione di Achille!). Paura, perché la sensazione di non saper risolvere il paradosso è forte: dire che Achille corre più veloce della tartaruga e che quindi ovviamente la supererà, dà la sensazione di cambiare argomento e di non aver affrontato il paradosso.

Il paradosso rivela una mancata corrispondenza tra il nostro modo di pensare il mondo e il modo in cui il mondo è in realtà. È stato detto che il paradosso è un trucco che fa pensare lo spazio, il tempo e il movimento nel modo sbagliato. La sfida diventa allora come identificare ciò che è sbagliato nel nostro modo di pensare.

Il movimento è possibile, naturalmente, e un veloce corridore può battere una tartaruga in una gara. Ma il compito di Achille sembra impossibile perché dovrebbe completare un numero infinito di compiti in una quantità finita di tempo. Ed è sottinteso che questo è impossibile. Ma perché dovrebbe esserlo?

Il problema ha a che fare con la nostra concezione di **infinito** e con il fatto che ci sono somme infinite divergenti e somme infinite convergenti. La più ovvia somma infinita divergente è

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

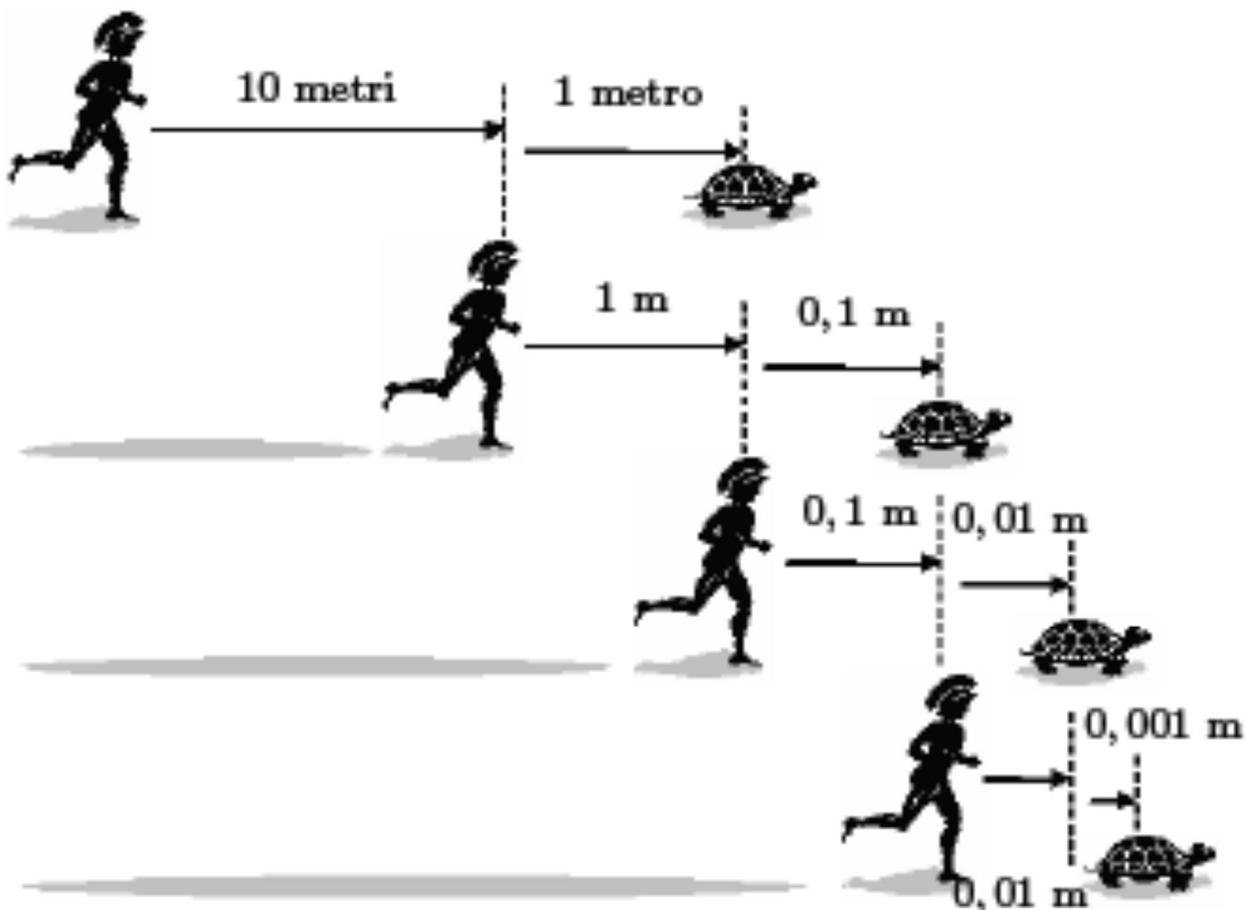


Figura 10.1: Achille e la tartaruga.

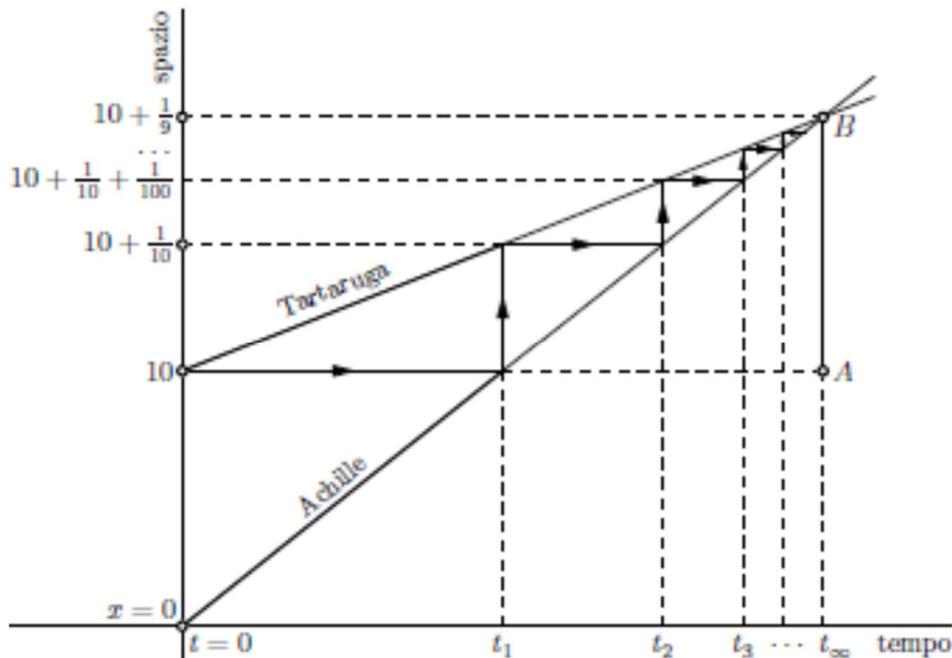


Figura 10.2: Diagramma spazio-temporale dei movimenti di Achille e la Tartaruga. Achille ha concesso 10 m di vantaggio alla tartaruga, per cui a  $t = 0$  Achille si trova in  $x = 0$  e la tartaruga in  $x_0 = 10$ . Al tempo  $t_1$  Achille ha percorso i 10 m, ma adesso la tartaruga si trova in  $x_1 = 10 + 1/10$ . Al tempo  $t_2$  Achille si trova nel punto  $x_2$ , ma adesso la tartaruga si trova in  $x_2 = 10 + 1/10 + 1/100$ . E così via. Achille raggiungerà la tartaruga se la somma infinita  $1/10 + 1/100 + \dots$  converge. Questo avverrà al tempo finito  $t_1$  corrispondente all'intersezione delle rette che rappresentano le leggi orarie di Achille e della tartaruga. Il segmento verticale AB rappresenta la somma infinita dei segmenti orientati verticali di lunghezze rispettivamente  $1/10, 1/100, 1/1000$ , ecc.

Questa somma infinita diverge, cioè se vogliamo assegnargli un valore, possiamo solo dire che esso è infinito. Se Achille avesse dovuto coprire questo tipo di distanze nel corso della gara, in altre parole, se la tartaruga avesse coperto progressivamente distanze sempre più grandi, piuttosto che più piccole, Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga.

La somma infinita che compare nel paradosso è

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

Anche se i numeri vanno all'infinito, la serie converge  $s = 1/9$ . Ci possiamo convincere di questo considerando la successione delle somme parziali

$$s_1 = 1/10, s_2 = 1/10 + 1/100, \dots, \quad s_n = \sum_{k=1}^n 10^{-k} = 0.11 \dots 1$$

Al crescere di  $n$  è chiaro che questa successione tende al valore  $s = 0.\overline{1} = 1/9$ . Ma per rendere certa questa conclusione, occorre chiarire che cosa sia il **limite** di una successione di numeri

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

Ci occuperemo di questo nella prossima sezione. Adesso assumiamo che ci sia un modo matematico preciso di chiarire il senso di una somma infinita e che questo modo permetta di stabilire inequivocabilmente se la somma infinita ha un valore finito o infinito.

La letteratura filosofica si è concentrata sulla difficoltà della nozione di “successione infinita di compiti” e nel risolvere il paradosso è stata proposta la distinzione tra “punto matematico” e “punto fisico”<sup>14</sup>. Sia come sia, c’è un elemento davvero cruciale nell’analisi del paradosso che è spesso trascurato dalla letteratura filosofica: non è sufficiente che le distanze coperte della tartaruga siano sempre più piccole affinché Achille la possa raggiungere. È possibile che una cosa più veloce insegua una cosa lenta per sempre senza mai raggiungerla, fintanto che sia la cosa più veloce e la cosa più lenta continuano a rallentare in un certo modo (vedi la figura 10.3).

Questo ha ancora a che fare con il fatto se la somma infinita ha un valore finito oppure infinito. Ad esempio, la somma infinita

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$$

sembra convergere ad un valore finito, ma in realtà è divergente. Se Achille percorre la prima parte della corsa a 1 Km/h, e la tartaruga a 1/2 Km/h, poi rallentano a 1/3 Km/h e 1/4 Km/h e così via, la tartaruga rimarrà sempre davanti ad Achille.

Chi non crede nell’infinito attuale sarà portato a dire: ma come facciamo a sapere che

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

“alla fine” raggiunge 1/9? Nessuno ha mai completato, o è in grado di completare la somma, perché non ha fine. La conclusione che una somma infinita può convergere a un numero finito è, in un certo senso, una teoria — ed è proprio tale teoria che esporremo nel resto di questo capitolo. Ma pensare ad essa come **solo** una teoria è eccessivamente riduttivo.

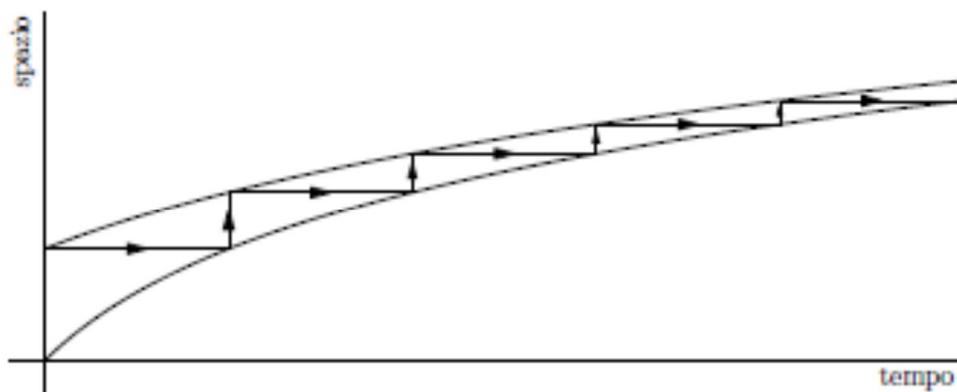


Figura 10.3: Una corsa in cui Achille non raggiunge mai la tartaruga.

<sup>14</sup> Si veda, ad esempio, R.M. Sainsbury, *Paradoxes* (1995).

In primo luogo perché che cosa potrebbe essere altrimenti? È insensato pensare che si possa comprendere qualcosa senza una teoria: quando pensiamo di non utilizzare una teoria, stiamo in realtà utilizzando tacitamente una delle teorie del **senso comune**, ma il senso comune non sembra avere abbastanza risorse per far fronte ai problemi dell'infinito! Sono le teorie che permettono di affinare i concetti e sono solo i concetti così affinati che ci permettono di comprendere il mondo. In secondo luogo, perché la teoria dell'infinito attuale ha dato enormi frutti: gran parte della matematica moderna (dalla teoria degli insiemi alla topologia) si basa su di essa e gran parte delle concettualizzazioni della fisica si basano su tali sviluppi della matematica.

Concludiamo questa sezione con due note:

- Mostriamo che la somma infinita

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$$

diverge. Si raggruppino i termini della serie nel seguente modo

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \dots$$

Ogni parentesi è maggiore di  $1/2$  perché contiene  $2^{n-1}$  termini tutti maggiori di  $1/2^n$ .  
Quindi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

e poiché la serie a destra ovviamente diverge anche quella sinistra deve divergere.

- Diamo un esempio di una corsa in cui Achille non raggiunge mai la tartaruga. In figura 10.3 sono rappresentate le leggi orarie di Achille (curva sotto) e della tartaruga (curva sopra). Ad ogni istante la velocità di Achille è superiore a quella della tartaruga, ma entrambi rallentano in un certo modo cosicché Achille non raggiungerà mai la tartaruga. La legge oraria scelta per la tartaruga è (in unità di misura opportune)  $x = \ln(2 + t)$  e quella di Achille è  $x = \ln(1 + t)$ , cosicché la velocità istantanea della tartaruga e di Achille sono rispettivamente  $v_{tar} = 1/(2 + t) < v_{Ach} = 1/(1 + t)$ .

## La nozione di limite

Intuitivamente, il limite di una successione di numeri è quel numero  $s$  (se esiste) a cui i numeri della successione si avvicinano arbitrariamente. La definizione moderna è la seguente:

**Si dice che la successione di numeri  $s_1, s_2, s_3, \dots$  converge al numero  $s$ , o, equivalentemente, che  $s$  è il limite della successione  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , se per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un intero  $N$  tale che, per tutti gli  $m > N$ , si ha  $|s - s_m| < \epsilon$ .**

Quando questa condizione è soddisfatta, si dice che  $s$  è il limite della successione  $s_1, s_2, s_3, \dots$  e si scrive

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Nel caso di Achille e la tartaruga, vediamo facilmente che il limite della successione delle somme parziali è  $0.\bar{1} = 1/9$ . Infatti, dato un qualunque  $\epsilon > 0$ , si prenda  $N$  tale che  $\underbrace{0.\bar{1} - 0.11 \dots 1}_N < \epsilon$ ; allora per tutti gli  $m > N$  si avrà che  $\underbrace{0.\bar{1} - 0.11 \dots 1}_m < \epsilon$ .

È sorprendente che un'idea così semplice sia stata formulata in modo preciso solo in un'epoca così tarda. L'uso di una definizione di questo tipo per formalizzare la nozione di limite risale a Bernard Bolzano (1781–1848) nel 1817.

Indubbiamente, Isaac Newton ne era a conoscenza, nell'ambito del concetto di derivata. Newton sapeva che la derivata  $D_{xy}$  (vedi pagina 72) non andava intesa come un rapporto tra quantità infinitesimali, ma piuttosto come il limite di un rapporto di quantità finite. Scriveva infatti:

*Tali rapporti finali . . . non sono in realtà i rapporti di quantità finali, ma i limiti . . . che possono avvicinarsi così tanto che la loro differenza è inferiore a una qualunque data quantità . . .*

Ma non elaborò ulteriormente questa nozione. Sia come sia, ciò che Newton aveva in mente è proprio la definizione moderna di derivata:

**$D_{xy}$  è la derivata di  $y$  nel punto  $x$ , se per qualunque data quantità  $\epsilon > 0$  esiste un incremento  $\Delta x$  finito (e non infinitesimale) di tale che**

$$\left| D_{xy} - \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| < \epsilon$$

**(essendo  $\Delta y$  la variazione di  $y$  corrispondente all'incremento  $\Delta x$ ).**

Quando questa condizione è soddisfatta, si dice che  $D_{xy}$  è il limite dei rapporti incrementali  $\Delta y/\Delta x$  e si scrive

$$D_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Una definizione di questo tipo era certamente nota a Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), anche se egli non la usò mai nel suo *Cours d'Analyse*. Fu Karl Weierstrass (1815–1897) a introdurla in maniera sistematica per fondare l'analisi matematica.

Così come la nozione di limite permette di rendere rigorosa la definizione di derivata, analogamente, essa permette di rendere rigorosa la nozione di integrale. Le approssimazioni per difetto e per eccesso di un integrale, come mostrato in figura 8.11, formano due successioni  $s_1, s_2, s_3, \dots$  e  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , rispettivamente e tali che tutti i termini della prima sono inferiori a quelli della seconda. L'integrale può essere allora definito come l'elemento separatore di queste due successioni.

Questa definizione solleva immediatamente due interrogativi: esiste un tale elemento separatore? E se esiste, è unico? La risposta a tali domande può essere cercata nella teoria delle proporzioni di Euclide, e questa fu la strada di Archimede e della matematica ellenistica. La matematica moderna ritrovò tale strada quando si ripropose il problema di chiarire che cosa sia un numero reale e di come esso sia collegato ad una successione di razionali.

## Le successioni di Cauchy

La successione delle somme parziali del paradosso di Achille e la tartaruga converge al numero razionale  $1/9$ , ma, in generale, non c'è nessuna ragione che una successione di razionali converga ad un numero razionale. È quindi utile disporre di una nozione di successione che non presupponga l'esistenza del limite. Una nozione di questo tipo è la seguente:

**Una successione  $s_1, s_2, s_3, \dots$  di numeri razionali è una *successione di Cauchy* se  $|s_n - s_m| < \epsilon$  per tutti gli  $n$  e  $m$  dopo un certo  $N$ , qualunque sia il numero razionale  $\epsilon > 0$  arbitrariamente scelto.**

Detto in breve, una successione è di Cauchy se i suoi elementi diventano arbitrariamente vicini man mano che la successione progredisce. Si veda la figura 10.4. Questa nozione è al cuore dell'analisi, perché, come oggi sappiamo (e come chiariremo nel seguito), i numeri reali possono essere costruiti completando i razionali con successioni di Cauchy di razionali e, più in generale, è alla base degli spazi **completi**, cioè quegli spazi in cui tutte le successioni di Cauchy hanno un limite<sup>15</sup>.

Pur essendo nominate secondo Cauchy, è dubbio che Cauchy ne avesse apprezzato l'importanza, in particolare per fornire una **definizione rigorosa di numero reale**. Nel suo *Cours d'analyse* del 1821, non si preoccupa troppo della definizione dei numeri reali. Afferma che un numero reale è il limite di una successione di numeri razionali ma assume che i numeri reali siano noti. Non dice nulla circa la necessità che la successione sia quella che noi oggi chiamiamo di Cauchy — e questo è necessario se si vuole definire la convergenza di una successione senza assumere l'esistenza del suo limite.

Bolzano, d'altra parte, nel 1817 dimostrò che una successione limitata di Cauchy di numeri reali ha un estremo superiore. Successivamente lavorò alla sua propria teoria dei numeri reali che non pubblicò e che era basata proprio sulle successioni di Cauchy. Questa fu anche la strada che seguì Cantor. Ma prima di occuparci di lui, soffermiamoci su due suoi illustri predecessori.

---

<sup>15</sup> Sono completi, per esempio, gli **spazi di Hilbert**, che giocano un ruolo fondamentale nella formulazione della meccanica quantistica.

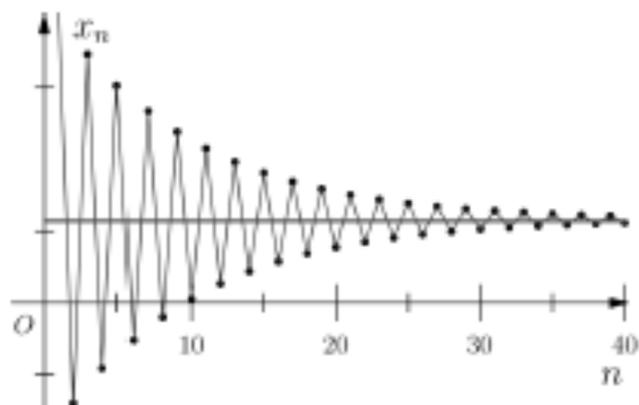


Figura 10.4: Grafico di una successione di Cauchy. Se lo spazio che contiene la successione di Cauchy è completo, il punto d'arrivo della successione, cioè il limite della successione, esiste.

## L'atomismo matematico di Weierstrass e Dedekind

Il matematico tedesco Karl Weierstrass per infondere completo rigore logico all'analisi, propose di fondare l'analisi matematica solamente sulla base della nozione di numero, eliminando l'intuizione spazio-temporale e la nozione di infinitesimo. La sua fu una sorta di "aritmetizzazione" dell'analisi che può essere vista come una forma di "atomismo matematico".

Nel perseguimento di questo obiettivo, Weierstrass doveva prima dare una definizione rigorosa di numero reale. La definizione che diede è la seguente: un numero reale (positivo) è definito come un insieme numerabile di numeri razionali positivi per cui la somma di ogni sottoinsieme finito rimane sempre al di sotto di un certo limite preassegnato; la specificazione delle condizioni per cui due di questi numeri reali possono essere considerati uguali, o uno strettamente minore dell'altro con l'altro è, come abbiamo già visto, analoga a quella data da Euclide nel libro V degli *Elementi*.

Weierstrass intendeva eliminare dalle fondamenta dell'analisi tutte le tracce dell'intuizione di movimento continuo. Per Weierstrass una variabile  $x$  è semplicemente un simbolo che designa un membro arbitraria di un dato insieme di numeri, e una variabile continua è una variabile il cui insieme corrispondente  $S$  ha la proprietà che ogni intervallo intorno a qualsiasi elemento  $x$  di  $S$  contiene elementi di  $S$  diversi da  $x$ . Questa proprietà è oggi nota come **densità**. In seguito (vedi sotto), ci si rese conto che la densità è troppo debole per definire il continuo.

Dopo gli sforzi di Weierstrass, il problema di formulare definizioni rigorose di continuità e dei numeri reali fu affrontato da Richard Dedekind (1831-1916). Dedekind focalizzò l'attenzione sulla domanda: **cos'è che distingue esattamente un dominio continuo da uno discontinuo?**

Sembra che egli sia stato il primo a riconoscere che la proprietà di densità, posseduta dalla serie ordinata di numeri razionali, non è sufficiente a garantire la continuità. Nel suo lavoro *Continuità e numeri irrazionali* (1872) egli osserva che quando i

numeri razionali sono associati a punti su una linea retta, "ci sono infiniti punti [sulla linea] ai quali non corrisponde un numero razionale" cosicché i numeri razionali hanno dei "buchi" in contrasto con la continuità della linea retta. E continua:

*In che cosa consiste allora questa continuità? Tutto deve dipendere dalla risposta a questa domanda, e solo attraverso di essa si ottiene una base scientifica per le ricerche su tutti i domini continui. Con vaghe considerazioni sulla connessione ininterrotta nelle parti più piccole, ovviamente, non si guadagna nulla; il problema è quello di indicare una caratteristica precisa della continuità che possa servire come base per deduzioni valide. Per molto tempo ho riflettuto vanamente su questo, ma alla fine ho trovato quello che cercavo. Questa scoperta, forse, sarà valutata diversamente da persone diverse; ma credo che la maggioranza troverà il suo contenuto piuttosto banale. Si compone di quanto segue. Nella sezione precedente è stata richiamata l'attenzione al fatto che ogni punto  $P$  della retta produce una separazione della stessa in due parti in modo tale che ogni punto di una porzione giace a fianco di ogni punto dall'altra. Trovo l'essenza della continuità nell'inverso, cioè, nel seguente principio :*

***Se tutti i punti della retta si dividono in due classi tali che ogni punto della prima classe si trova a fianco di ogni punto della seconda classe, allora esiste uno ed un solo punto che produce questa divisione di tutti i punti in due classi, questo taglio della linea retta in due parti.***

Dedekind considera questo "principio di continuità" come sostanzialmente indimostrabile; anzi, egli attribuisce ad esso, lo status di un assioma "**con cui noi attribuiamo alla linea la sua continuità, per cui pensiamo che la linea sia continua**". Non è — Dedekind sottolinea — necessario che lo spazio sia continuo in questo senso, poiché "molte delle sue proprietà resterebbero lo stesso anche se fosse discontinuo". E, in ogni caso,

*se sapessimo per certo che lo spazio fosse discontinuo non ci sarebbe nulla che ci impedirebbe . . . di riempire le sue lacune col pensiero e di renderlo così continuo; questo riempimento consisterebbe in una creazione di nuovi individui puntiformi e dovrebbe essere effettuato in conformità con il principio sopra.*

Il riempimento delle lacune nei numeri razionali attraverso la "creazione di nuovi individui puntiformi" è l'idea chiave alla base della costruzione di Dedekind del dominio dei numeri reali. Egli definisce dapprima un taglio come partizione  $(A_1, A_2)$  dei numeri razionali tale che ogni membro di  $A_1$  è minore di ogni membro  $A_2$ . Dopo aver notato che ogni numero razionale corrisponde, in modo evidente, a un taglio, egli osserva che infiniti tagli non sono generati da numeri razionali. La discontinuità o incompletezza del dominio dei numeri razionali consiste proprio in quest'ultimo fatto. Stando così le cose, continua,

*ogni volta che abbiamo un taglio  $(A_1, A_2)$  prodotto da nessun numero razionale, possiamo creare un nuovo numero, un numero irrazionale  $\alpha$ , che consideriamo completamente definito da questo taglio*

$(A_1, A_2)$ ; diremo che il numero  $\alpha$  corrisponde a questo taglio, o che produce questo taglio. Da ora in poi, quindi, ad ogni taglio definito corrisponde un definito numero razionale o irrazionale, e consideriamo due numeri come diversi o ineguali se e solo se corrispondono ai tagli essenzialmente diversi.

## Campi numerici

Le idee di Cantor verranno discusse separatamente nel prossimo capitolo. Concludiamo questo capitolo richiamando la nozione di campo numerico.<sup>16</sup>

Un campo numerico o, semplicemente, un campo, è una struttura algebrica con le stesse caratteristiche dell'algebra dei numeri reali: sono definite due operazioni, addizione e moltiplicazione, per le quali valgono le usuali proprietà associative e distributive. Esiste un elemento neutro per entrambe le operazioni (0 per l'addizione e 1 per la moltiplicazione) ed esistono gli inversi rispetto ad entrambe le operazioni, eccetto per l'elemento neutro dell'addizione, che non ha inverso rispetto alla moltiplicazione. Gli elementi di un campo numerico sono solitamente chiamati *scalari*. I numeri razionali, i numeri reali e i numeri complessi sono campi numerici, usualmente denotati con i simboli  $Q$ ,  $R$  e  $C$ , rispettivamente.<sup>17</sup>

A differenza dei razionali e dei reali, i complessi non sono un *campo ordinato*, vale a dire, non è possibile definire una relazione d'ordine che sia compatibile con addizione e moltiplicazione (in un campo ordinato, il quadrato di ogni elemento è necessariamente positivo, cosicché  $i^2 = -1$  preclude questa possibilità).

Come i reali, i complessi sono completi, sono cioè senza "buchi": tutte le successioni di Cauchy di numeri complessi convergono ad un numero complesso, così come accade per i reali (un'affermazione abbastanza digeribile anche senza dimostrazione essendo i complessi definiti da coppie di reali).

A differenza dei reali, i numeri complessi sono anche **algebricamente chiusi**, intendendo con questo che ogni polinomio ha radici complesse. Quest'ultima caratteristica è davvero notevole. La chiusura algebrica dei complessi è stabilita da uno dei teoremi più importanti dell'algebra chiamato, appunto, *teorema fondamentale dell'algebra*: ogni equazione di grado  $n$ , possiede almeno una radice nel campo dei complessi. E se ne ha una — come si può facilmente dimostrare — ne ha  $n$ , alcune delle quali, eventualmente, coincidenti.

---

<sup>16</sup> Questa sezione è abbastanza "tecnica" e può essere saltata in prima lettura.

<sup>17</sup> Ci sono anche campi numerici con un numero finito di elementi. Per esempio, i numeri interi da 0 a  $p - 1$ , dove  $p$  è un numero primo, formano un campo con addizione e moltiplicazione modulo  $p$ .

# 11 IL PARADISO DI CANTOR

## Indice

L'atomismo matematico di Cantor	97
L'infinito attuale di Cantor	99
L'ipotesi del continuo	101

Nel 1926, David Hilbert scrisse: "Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi". Scopo di questo capitolo è di dare un'idea di questo paradiso.

## L'atomismo matematico di Cantor

Circa nello stesso periodo in cui Dedekind pubblicava le sue ricerche sulla natura del continuo, Georg Cantor (1845–1918) formulò la sua teoria dei numeri reali. Presentò questa nella prima sezione di un articolo del 1872 sulle serie trigonometriche. Come Weierstrass e Dedekind, Cantor mirava a formulare una definizione adeguata dei numeri irrazionali.

In primo luogo gli serviva una nozione di convergenza che non presupponesse l'esistenza del limite. Ricorse quindi alla nozione di successione di Cauchy (vedi pagina 103). Chiamò **successione fondamentale** una successione di Cauchy di razionali (con  $\epsilon$  razionale nella definizione) e **stipulò** che ogni successione fondamentale avesse un limite definito.

Cantor vedeva questi limiti come niente di più che simboli formali connessi con le successioni fondamentali. Il dominio  $\mathbb{R}$  di tali simboli può essere considerato un allargamento del dominio  $\mathbb{Q}$  di numeri razionali, poiché ogni numero razionale  $r$  può essere identificato con il simbolo formale associato alla successione fondamentale  $r, r, \dots, r, \dots$ . Cantor mostrò che relazioni d'ordine e operazioni aritmetiche possono essere definite in  $\mathbb{R}$ . Dopo aver imposto una struttura aritmetica sul dominio  $\mathbb{R}$ , Cantor fu incoraggiato a fare riferimento ai suoi elementi come **numeri reali** e a  $\mathbb{R}$  come **l'insieme dei numeri reali**.

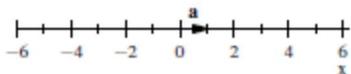
Cantor quindi considerò come i numeri reali così **definiti** dovessero essere associati a punti sul continuo lineare. Se un determinato punto sulla linea si trova ad una distanza dalla origine  $O$  avente un rapporto razionale al punto a distanza unitaria da detta origine, allora può essere rappresentato da un elemento di  $\mathbb{Q}$ . Altrimenti, ci si può avvicinare ad esso con una successione  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  di punti ciascuno dei quali corrisponde ad un elemento di  $\mathbb{Q}$ . Inoltre, tale successione può essere considerata come una successione fondamentale.

Spieghiamo più in dettaglio il contenuto del paragrafo precedente. Si denoti con  $\mathbf{a}$  un segmento orientato con la "coda" in un punto  $O$  (origine) arbitrariamente scelto sulla

retta. Chiaramente, la moltiplicazione di un tale segmento per un numero intero ha un chiaro significato (Euclide sarebbe stato d'accordo):  $2\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}$ ,  $3\mathbf{a} = 2\mathbf{a} + \mathbf{a}$  e così via.



La moltiplicazione per un numero intero negativo è analoga ma l'orientamento del segmento viene invertito — si ribalta la freccia. In questo modo tutti i numeri interi vengono identificati con punti della retta:



Analogamente, ha un diretto significato geometrico la moltiplicazione per un razionale  $m/n$ , dove  $m$  e  $n$  sono interi: l'uguaglianza

$$\mathbf{b} = \frac{m}{n} \mathbf{a}$$

significa che

$$n\mathbf{b} = m\mathbf{a} .$$

Infine, dato il segmento orientato  $\mathbf{a}$ , se  $m_i/n_i \rightarrow x$  è una successione fondamentale di razionali convergente al numero reale  $x$ , i vettori  $(m_i/n_i)\mathbf{a}$ , con le loro code tutte in una posizione fissata, formano una successione convergente di punti lungo la linea retta, il cui limite è la posizione della testa del segmento orientato  $x\mathbf{a}$



In questo modo Cantor mostra che ogni punto sulla linea corrisponde a un determinato elemento di  $\mathbb{R}$ .<sup>18</sup>

Viceversa, ogni elemento di  $\mathbb{R}$  **dovrebbe** determinare un punto definito sulla linea. Rendendosi conto che la natura intuitiva del continuo lineare preclude una dimostrazione rigorosa di questa proprietà, Cantor lo assume come un **assioma**, detto "di continuità":

**Viceversa, ad ogni numero corrisponde un determinato punto della linea, la cui coordinata è uguale a quel numero.**

Questo assioma è del tutto analogo al principio di continuità di Dedekind. Così, anche per Cantor, la nozione di continuità geometrica è identificata con la continuità dei numeri reali.

<sup>18</sup> Si osservi che questa corrispondenza dipende da scelte convenzionali:

- (1) di un punto  $O$  sulla retta, che viene messo in corrispondenza con lo zero,
- (2) la lunghezza del segmento orientato  $\mathbf{a}$  (scelta dell'unità di misura di lunghezza e dell'orientamento).

## L'infinito attuale di Cantor

L'aritmetizzazione di Cantor del continuo ebbe un'altra conseguenza importante. Era noto da tempo che le serie di punti di ogni coppia di segmenti di linea, anche se una di esse è infinita in lunghezza, possono essere collocati in corrispondenza uno-a-uno. Nel Capitolo 9 abbiamo visto come Galileo utilizzi questa osservazione (vedi la figura 9.1) per mostrare che l'infinito non è una quantità. Ma l'identificazione di Cantor dell'insieme di punti di un continuo lineare con un dominio di numeri permetteva di confrontare le taglie degli insiemi di punti in modo definitivo, usando l'idea ben fondata di una **corrispondenza biunivoca** tra insiemi di numeri.

Così, in una lettera a Dedekind, Cantor osserva che la totalità dei numeri naturali può essere messa in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri razionali positivi, e, più in generale, con la totalità delle sequenze finite di numeri naturali. Ne consegue che queste totalità hanno la stessa taglia; sono tutte numerabili. Il metodo usato da Cantor per contare i numeri razionali è illustrato in figura 11.1.

Cantor ora solleva quindi la questione se i numeri naturali possono essere messi in una corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i numeri reali positivi. Risponde subito in senso negativo. Nelle lettere a Dedekind scritte nel mese di Dicembre 1873, Cantor dimostra che, per qualsiasi successione di numeri reali, si possono definire i numeri in ogni intervallo che non sono nella sequenza. Ne consegue, in particolare, che l'insieme dei numeri reali è numerabile. Il metodo che Cantor utilizzò per dimostrare questo risultato, e che pubblicò molto dopo gli scambi epistolari con Dedekind, è noto come **metodo di diagonalizzazione**.

La dimostrazione procede per assurdo nel modo seguente:

- (1) Supponiamo che i numeri reali nell'intervallo  $[0, 1]$  siano numerabili.
- (2) Questo significa che gli elementi di  $[0, 1]$  possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali dando luogo a una successione di numeri reali  $s_1, s_2, s_3, \dots$  che esaurisce tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1.
- (3) Possiamo rappresentare ciascun numero della successione in forma decimale e visualizzare la successione di numeri reali come una matrice infinita che avrà più o meno quest'aspetto:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, 1709152\dots \\ s_2 &= 0, 2713416\dots \\ s_3 &= 0, 3091152\dots \\ s_4 &= 0, 0188201\dots \\ s_5 &= 0, 5293714\dots \\ s_6 &= 0, 5140817\dots \\ s_7 &= 0, 5490179\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

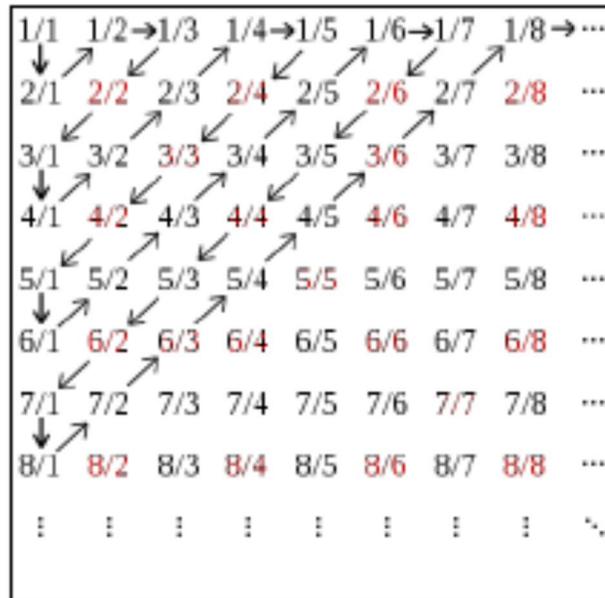


Figura 11.1: La griglia contiene tutti i numeri razionali, anzi ne contiene un po' di più (i numeri in rosso). I razionali si possono contare partendo da 1 e seguendo le frecce. Quando si incontra un numero in rosso (che è una ripetizione) semplicemente lo si salta. In questo modo i razionali sono messi in corrispondenza biunivoca con i naturali.

In realtà ci sono numeri che hanno più di una rappresentazione decimale: quelli che terminano con una sequenza infinita di 9 o di 0 ne hanno due, in tal caso conveniamo di prendere la rappresentazione che termina con 0.

(4) Ora concentriamo la nostra attenzione sulle cifre lungo la diagonale della matrice, cioè sulla successione il cui  $k$ -esimo elemento è la  $k$ -esima cifra decimale di  $s_k$ , come mostra la figura:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 0, \mathbf{1} 7 0 9 1 5 2 \dots \\
 s_2 &= 0, 2 \mathbf{7} 1 3 4 1 6 \dots \\
 s_3 &= 0, 3 0 \mathbf{9} 1 1 5 2 \dots \\
 s_4 &= 0, 0 1 8 \mathbf{8} 2 0 1 \dots \\
 s_5 &= 0, 5 2 9 3 \mathbf{7} 1 4 \dots \\
 s_6 &= 0, 5 1 4 0 8 \mathbf{1} 7 \dots \\
 s_7 &= 0, 5 4 9 0 1 7 \mathbf{9} \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

(5) Questa successione di cifre sulla diagonale, vista come un'espansione decimale, definisce un numero reale  $0, 1798719 \dots$ . Ora consideriamo un nuovo numero reale che abbia invece **tutte le cifre differenti dalla sequenza sulla diagonale**, per esempio

$$x = 0, 2613421 \dots$$

(6) All'inizio dell'argomento avevamo supposto che la nostra lista  $s_1, s_2, s_3, \dots$  enumerasse tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1, quindi dovremmo avere  $s_n = x$  per qualche  $n$ .

(7) Ma questo è impossibile perché la prima cifra di  $x$  è differente dalla prima di  $s_1$ , la seconda cifra di  $x$  è differente dalla seconda cifra di  $s_2, \dots$ , l' $n$ -esima cifra di  $x$  è differente da l' $n$ -esima cifra di  $s_n, \dots$ . Quindi  $x$  non è nella lista, contrariamente a quanto avevamo ipotizzato.

(8) Quindi, i reali non sono numerabili.

Sulla base di questo, Cantor arrivò alla conclusione che la **non numerabilità** fosse una **condizione necessaria** per la continuità di un insieme di punti.

Pochi anni dopo, Cantor stabilì l'esistenza di corrispondenze biunivoche tra spazi di dimensioni diverse. Mostrò che i punti di uno spazio di dimensione qualunque possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una linea. Questo risultato lo fece trasalire così che, in una lettera a Dedekind del giugno 1877 fu portato ad esclamare "*Je le vois, mais je ne le crois pas!*".

Si rende conto quindi che tali corrispondenze non possono essere continue, se gli spazi hanno dimensioni diverse.

Nel 1878 Cantor pubblicò un resoconto completo delle sue idee. Qui Cantor introduce esplicitamente il concetto di **potenza** (o cardinalità) di un insieme di punti: due insiemi sono detti essere di uguale potenza se esiste una corrispondenza uno-uno tra loro. Cantor presenta le sue dimostrazioni della numerabilità dei razionali sottolineando che "la successione dei numeri interi positivi costituisce ... il minimo di tutti le potenze che si verificano tra gli aggregati infiniti."

## L'ipotesi del continuo

Cantor si convinse che la natura essenziale di un continuo è pienamente rispecchiata nelle proprietà di un insieme di punti. In particolare, Cantor credeva che le proprietà fondamentali di un continuo risiedessero nella varietà delle potenze dei suoi sottoinsiemi di punti. Poiché la potenza di un continuo in qualsiasi numero di dimensioni è la stessa di quella di un continuo lineare, le proprietà essenziali dei continui arbitrari sono ricondotti a quelle di una linea. Nelle sue indagini sul continuo lineare Cantor aveva trovato che i suoi sottoinsiemi infiniti possedevano solo due potenze, quella dei numeri naturali e quello del continuo lineare stesso. Questo lo portò alla convinzione che queste erano le uniche potenze possibili di tali sottoinsiemi. Questa tesi divenne poi la famosa **ipotesi del continuo**. Cantor dedicò molti anni a tentare di dimostrarla, ma senza successo.

Kurt Gödel nel bellissimo articolo<sup>19</sup> *What is Cantor's Continuum Problem?* espone il problema del continuo con esemplare chiarezza:

*Il problema del continuo di Cantor è semplicemente la domanda: Quanti punti ci sono su una linea retta nello spazio euclideo? In altri termini, la domanda è: Quanti insiemi diversi di interi esistono?*

---

<sup>19</sup> Questo articolo è del 1964 ed è una versione rivista ed espansa di una versione precedente che Gödel scrisse nel 1947.

E continua:

*Questa domanda, naturalmente, potrebbe sorgere solo dopo che il concetto di “numero” è stato esteso a insiemi infiniti ; quindi si potrebbe dubitare se questa estensione può essere effettuata in maniera determinata in modo univoco e se, quindi , l’enunciazione del problema nei semplici termini usati sopra è giustificata.*

Troppo semplicistico? No, se si tiene conto della seguente precisazione che Gödel fa:

*Un più attento esame, tuttavia, dimostra che la definizione di Cantor dei numeri infiniti ha davvero questo carattere di unicità, e lo ha in un modo molto suggestivo. Perché qualunque cosa possa significare “numero”, quando esso è applicato agli insiemi infiniti, certamente vogliamo che abbia la proprietà che il numero di oggetti appartenenti ad una classe non cambia se, lasciando gli oggetti gli stessi, si cambiano in un modo qualunque le loro proprietà o le loro relazioni reciproche (ad esempio, i loro colori e la loro disposizione nello spazio). Da questo, tuttavia, ne segue subito che due insiemi . . . avranno lo stesso numero cardinale se i loro elementi possono essere messi in una corrispondenza uno-a-uno, che è la definizione di Cantor di uguaglianza tra i numeri. Questo perché se esiste una tale corrispondenza tra due insiemi A e B è possibile (almeno teoricamente) modificare le proprietà e le relazioni di ciascun elemento di A in quelle del corrispondente elemento di B, per cui A si trasforma in un insieme completamente indistinguibile da B, e quindi dello stesso numero cardinale. Per esempio, assumendo che un quadrato e un segmento di linea siano completamente riempiti con punti materiali [cioè, dotati di massa] (in modo che in ogni loro punto si trovi esattamente un punto materiale), ne segue, grazie al fatto dimostrabile che esiste una corrispondenza uno-a-uno tra i punti di un quadrato e di un segmento di linea e, quindi, anche tra i corrispondenti punti materiali, che i punti materiali del quadrato possono essere riorganizzati in modo esattamente a riempire il segmento di linea, e viceversa. Tali considerazioni, è vero , si applicano direttamente solo agli oggetti fisici, ma una definizione del concetto di “numero” che dipendesse dal tipo di oggetti che sono enumerati potrebbe difficilmente essere considerata soddisfacente.*

Sorprendentemente, non è possibile decidere quale sia la risposta del problema del continuo. Nella formulazione della moderna teoria degli insiemi, l’ipotesi del continuo — **che non esista nessun numero infinito intermedio tra l’infinito numerabile e l’infinito continuo dei numeri reali** – ha lo statuto di **ipotesi** o assioma. La sua indipendenza dagli altri assiomi della teoria degli insiemi fu dimostrata nel 1963 da Paul Cohen (1934–2007), completando un lavoro precedente del 1940 di Kurt Gödel (1906–1978).

# 12 GÖDEL E LA TEORIA DEGLI INSIEMI

## Indice

La moderna teoria degli insiemi secondo Gödel	103
Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel	106
L'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo	108
Diversi modi di intendere il metodo assiomatico	110
Matematica e realtà per Gödel	112

## La moderna teoria degli insiemi secondo Gödel

La moderna teoria degli insiemi è una branca della matematica creata principalmente da Cantor. I concetti basilari della teoria degli insiemi sono **insieme** (o "totalità", aggregato, ecc) e **appartenenza** (di un individuo all'insieme). Un insieme è pensato come una collezione di oggetti, chiamati elementi (o membri) dell'insieme. Inizialmente fu sviluppata quella che ora è chiamata teoria **ingenua** o **intuitiva** degli insiemi. Si scoprì che lasciando la possibilità di eseguire qualsiasi operazione sugli insiemi senza restrizioni si arrivava a paradossi come il **paradosso di Russell** che bloccò il tentativo di Gottlob Frege di produrre una completa fondazione della matematica sulla logica.

Correva l'anno 1902 quando Russell scrisse a Frege una lettera in cui lo informava di come aveva scoperto un'antinomia connessa con gli argomenti dei *Principi dell'aritmetica*, che il filosofo britannico aveva letto circa un anno prima. Il punto critico del tentativo di fondazione della matematica sulla logica compiuto da Frege era l'assioma detto di **astrazione** o di **estensione**, per il quale ogni proprietà individua l'insieme degli oggetti che la soddisfano (la proprietà di non appartenere a sé stesso, infatti, dà origine a un insieme dalle caratteristiche contraddittorie). Nel frattempo, l'antinomia era stata riscoperta da Ernst Zermelo (1871–1953), e va ricordato che era stata anticipata, pochi anni prima, da Cantor stesso.

Non entreremo nel merito del dibattito sulle antinomie della teoria ingenua degli insiemi, essendoci al riguardo un'ampia letteratura, anche filosofica. Delineeremo invece i tratti generali degli affinamenti della teoria cantoriana degli insiemi che evitano il paradosso di Russell e forniscono una robusta teoria matematica degli insiemi — anche se non una "logica" in senso stretto, come avrebbero forse voluto Frege e Russell. Si tratta della concezione **iterativa** della nozione di insieme.

Per descrivere tale concezione facciamo riferimento a come Kurt Gödel la espone nel già citato articolo *What is Cantor's Continuum Problem?*. Dopo aver esposto l'intuizionismo di Brouwer (1881–1966) e lo scetticismo di Brouwer e di altri matematici e filosofi sulla teoria degli insiemi di Cantor, Gödel scrive:

*Questo atteggiamento negativo verso la teoria degli insiemi di Cantor, però, non è affatto un esito necessario alla luce di un esame più approfondito dei suoi fondamenti, ma solo il risultato di certe concezioni filosofiche della natura della matematica, che **ammettono oggetti matematici solo nella misura in cui essi sono (o si crede che siano) interpretabili come atti e costruzioni della nostra mente**, o almeno completamente afferrabili dalla nostra intuizione.*

(Enfasi non nell'originale.) Lo scetticismo verso la teoria degli insiemi e l'infinito attuale non è dunque una conseguenza delle antinomie che, come Gödel spiega più avanti, non riguardano la teoria di Cantor, ma solo di un pre-giudizio filosofico secondo il quale gli enti matematici vanno interpretati come costruzioni della nostra mente. Tuttavia, continua Gödel:

*Per qualcuno che non condivide questi punti di vista, esiste una base soddisfacente della teoria degli insiemi di Cantor in tutta la sua estensione originaria, vale a dire, la teoria assiomatica degli insiemi . . . .*

I paradossi della teoria degli insiemi — sottolinea Gödel — non impediscono la costruzione di una tale teoria assiomatica, anche se questo ad una prima riflessione non sembrerebbe possibile:

*Potrebbe sembrare a prima vista che i paradossi della teoria degli insiemi costituiscano un ostacolo insormontabile per una tale impresa, ma un esame più attento mostra che essi non causano problemi di nessun tipo. Si tratta di problemi molto seri, ma **non** per la teoria degli insiemi di Cantor.*

Che l'antinomia di Russell e gli altri paradossi della teoria degli insiemi non causino alcun problema alla teoria di Cantor è un punto importante, sovente sottovalutato. Gödel ne spiega la ragione:

*Nella misura in cui gli insiemi intervengono e sono necessari in matematica (almeno nella matematica di oggi, inclusa tutta la teoria degli insiemi di Cantor), essi sono insiemi di interi o di numeri razionali (cioè di coppie di numeri interi), o di numeri reali (cioè di insiemi di numeri razionali), o di funzioni di numeri reali (cioè di insiemi di coppie di numeri reali), e così via; quando si asseriscono teoremi generali su tutti gli insiemi (o sull'esistenza di insiemi), essi possono sempre essere interpretati senza alcuna difficoltà a significare che valgono per gli insiemi di interi e per insiemi di numeri reali, ecc (rispettivamente, che esistono insiemi di interi, o insiemi di numeri reali, o . . . ecc., che hanno le proprietà asserite).*

Questo è un punto su cui Gödel ha insistito anche in altre occasioni: una volta accettato l'infinito attuale dei numeri interi, l'esistenza degli altri infiniti ne è una conseguenza inevitabile. In questo, la teoria di Cantor degli insiemi è in accordo con l'intuizione di Leibniz che l'infinito reale è quello di una totalità infinita discreta, quello formato cioè da individui e totalmente determinato da questi. Ciò che Leibniz non poteva prevedere è che mediante il processo di aritmetizzazione del continuo è possibile mettere in corrispondenza i numeri con i punti della retta. Ma i numeri razionali non sono altro che coppie di interi e i numeri reali non sono altro che insiemi numerabili di razionali (i tagli di Dedekind o le successioni fondamentali di Cantor).

Qualunque altro insieme è ottenuto da questi insiemi di base mediante un processo "iterativo" che Gödel così descrive:

*Questo concetto di insieme, tuttavia, secondo il quale un insieme è qualunque cosa ottenibile dai numeri interi (o da qualunque altro oggetto ben definito) mediante applicazione iterata dell'operazione "**insieme di**", e non qualcosa ottenuto dividendo la totalità delle cose esistenti in due categorie [quelle che appartengono all'insieme e quelle che non vi appartengono], non ha mai condotto ad alcuna antinomia; vale a dire, **l'uso perfettamente "ingenuo" e acritico di questo concetto di insieme si è finora dimostrato completamente auto-consistente.***

In breve, quando gli insiemi sono costruiti a partire da oggetti iniziali ben definiti, ad esempio, gli **interi**, e si costruiscono iterando l'operazione "**insieme di**", non si manifesta alcuna antinomia. A chiarimento di quanto ha appena detto, Gödel inserisce delle note a piè di pagina che è utile riportare. La prima riguarda il processo di iterazione dell'operazione "**insieme di**":

*Questa frase deve essere intesa in modo da includere anche iterazioni transfinite, la totalità degli insiemi ottenuti per iterazione finita formando nuovamente un insieme e una base per una ulteriore applicazione dell'operazione "**insieme di**".*

La seconda nota è un commento sull'operazione iterativa:

*L'operazione "**insieme di**" non può essere definita in modo soddisfacente (almeno allo stato attuale delle conoscenze), ma può essere solo parafrasata facendo ricorso ad altre espressioni che coinvolgono nuovamente il concetto di insieme, ad esempio: "moltitudine di  $x$ ", "composizione di qualsiasi numero di  $x$ ", "parte della totalità degli  $x$ "; ma a differenza del concetto di insieme in generale (**se considerato primitivo**) abbiamo una chiara idea di questa operazione.*

L'ultima nota è a commento di tutto il brano appena riportato ed è la chiave per capire perché non possono nascere paradossi:

*Risulta immediatamente da questa spiegazione del termine “insieme” che un insieme di tutti gli insiemi o altri insiemi di simile estensione non possono esistere, poiché ogni insieme così ottenuto immediatamente dà luogo ad un’ulteriore applicazione dell’operazione “insieme di” e pertanto, all’esistenza di insiemi più grandi [senza che questo processo termini mai].*

Per quanto l’operazione di “**insieme di**” allo stato attuale delle conoscenze non può essere definita in modo soddisfacente, un **affinamento** di tale nozione è fornito dalla formulazione assiomatica della teoria degli insiemi. Si tratta degli assiomi di Zermelo-Fraenkel (vedi sezione successiva) che, nella concezione di Gödel, regolano l’uso di questa nozione:

*Ma, inoltre, gli assiomi sottostanti l’uso senza restrizioni di questo concetto di insieme, o, almeno, una loro parte che è sufficiente per tutte le dimostrazioni matematiche prodotte fino ad ora, sono stati formulati così precisamente nella teoria assiomatica degli insiemi, che la questione se qualche data proposizione deriva da essi può essere trasformata, mediante il simbolismo logico, in un problema puramente combinatorio riguardante la manipolazione di simboli che anche l’intuizionista più radicale deve riconoscere come significativo.*

A questo punto, Gödel pone il problema di stabilire se dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel segue o non segue **l’ipotesi del continuo** a cui abbiamo accennato alla fine della sezione precedente. Concludiamo questa sezione citando il brano in cui Gödel pone i termini della questione:

*Così il problema del continuo di Cantor, non importa quale punto di vista filosofico si assuma, conserva innegabilmente almeno questo significato: accertare se una risposta, e se sì, quale risposta, può essere derivata dagli assiomi della teoria degli insiemi, come formulata nei sistemi citati [cioè il sistema assiomi di Zermelo-Fraenkel]. Naturalmente, se viene interpretato in questo modo, ci sono (assumendo la consistenza degli assiomi) a priori tre possibilità per la congettura di Cantor: può essere sia dimostrabile o disprovabile o indecidibile. La terza alternativa (che è solo una formulazione precisa della congettura sopra indicata che le difficoltà del problema sono forse non puramente matematiche) è la più probabile, e cercare una dimostrazione per esso è attualmente uno dei modi più promettenti di attaccare il problema. Un risultato in questa direzione è già stato ottenuto, e cioè che la congettura di Cantor non è disprovabile dagli assiomi della teoria degli insiemi, a condizione che questi assiomi siano coerenti.*

## **Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel**

Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel della teoria degli insiemi, abbreviati con **ZF**, sono gli assiomi standard della teoria assiomatica degli insiemi su cui si basa tutta la matematica moderna. Gli assiomi sono il risultato del lavoro di Thoralf Skolem (1887–1963) del 1922, basato su lavori precedenti di Abraham Fraenkel (1891–1965) dello stesso anno, che si basano a loro volta sul sistema assiomatico sviluppato da Ernst Zermelo (1871–1953) nel

1908. (A margine, notiamo che Zermelo incominciò la sua carriera accademica come fisico matematico assistente di Max Planck; celebre è una sua critica alla spiegazione meccanica della termodinamica data da Ludwig Boltzmann).

Gli assiomi di **ZF** descrivono le proprietà che ci aspettiamo che la nozione di insieme debba avere. La relazione di base è la relazione di **appartenenza** (di un elemento ad un insieme) rappresentata dal simbolo  $\in$ . Se un oggetto appartiene ad un insieme, si dice che esso è un **elemento** dell'insieme. Questo significa che la nozione più primitiva è la domanda:

**Questo dato oggetto è un elemento di quel dato insieme?**

Gli assiomi non sono altro che un modo per regolamentare l'uso delle nozioni di insieme e di appartenenza. Prima di passare agli assiomi, è utile richiamare alcune definizioni di base:

- (a) Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo che  $A$  è un **sottoinsieme** di  $B$  se tutti i membri di  $A$  sono elementi di  $B$ . Questa relazione si denota con  $A \subseteq B$ .
- (b) Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di  $A$  e  $B$  si denota con  $A \cup B$  è detto l'**unione** di  $A$  e  $B$ .
- (c) Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi comuni ad  $A$  e  $B$  si denota con  $A \cap B$  è detto l'**intersezione** di  $A$  e  $B$ .
- (d) Dato un insieme  $A$ , il simbolo  $\{A\}$  denota l'insieme che contiene  $A$ . Si osservi che  $A$  e  $\{A\}$  sono due oggetti distinti.
- (e) Sia  $x$  un elemento generico di  $A$ , in simboli  $x \in A$ , e  $P(x)$  una proprietà  $P$  che  $x$  può avere o non avere.  $P(x)$  è un insieme: l'insieme di tutti gli  $x \in A$  che godono della proprietà  $P$ . Questo insieme è denotato così

$$\{x | x \in A \cap P(x)\}$$

e la sua esistenza è garantita da uno degli assiomi di **ZF**.

È conveniente (ma non necessario!) formulare la teoria di **ZF** assumendo che gli elementi degli insiemi siano a loro volta insiemi o, detto diversamente, che gli insiemi che vengono regolamentati dagli assiomi sono quelli che esisterebbero se nel mondo non ci fossero altro che insiemi. Come conseguenza della concezione iterativa di insieme — di cui gli assiomi sono una codifica — tutti gli insiemi rilevanti per la matematica possono essere costruiti a partire dall'**insieme vuoto** (la cui esistenza è garantita da uno degli assiomi di **ZF**), e dalle regole che governano il processo di costruzione di insiemi così come sono formulate nella teoria di **ZF**. Questa teoria è basata sui seguenti assiomi:

- (1) **Assioma di estensionalità**. Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.
- (2) **Assioma dell'insieme vuoto**. Esiste un insieme, detto l'insieme vuoto e denotato  $\emptyset$ ; che non contiene alcun elemento.
- (3) **Assioma della coppia**. Se  $A$  e  $B$  sono insiemi, allora esiste un insieme contenente  $A$  e  $B$  come suoi soli elementi.

(4) **Assioma dell'insieme somma (o dell'unione).** Dato un insieme di insiemi  $A$ , esiste un insieme  $U$  che è l'unione di questi insiemi, vale a dire tutti gli elementi di  $A$  sono sottoinsiemi di  $U$  e  $U$  è il più piccolo insieme possibile con questa proprietà.

(5) **Assioma dell'infinito.** Esiste un insieme infinito. (Esiste un insieme  $A$  tale che  $\emptyset$  è in  $A$  ed ogni qual volta  $B$  è in  $A$ , anche  $B \cup \{B\}$  è in  $A$ ).

(6) **Assioma dell'insieme potenza.** Per ogni insieme  $A$  esiste un insieme  $B$ , tale che gli elementi di  $B$  sono esattamente i sottoinsiemi di  $A$ .

(7) **Assioma di regolarità.** In ogni insieme  $A$  che non è vuoto, c'è un elemento  $B$ , che non ha alcun elemento in comune con  $A$ .

(8) **Assioma di separazione.** Dato un sottoinsieme  $A$  e una proprietà  $P$ , allora la collezione di tutti i gli elementi  $x$  di  $A$  con la proprietà  $P$  è un insieme. (Questo è l'insieme al punto (e) sopra.)

(9) **Assioma di rimpiazzamento.** Data una funzione il cui dominio è un insieme, allora la sua immagine è un insieme.

Questi assiomi possono sembrare un po' strani, ma servono ad uno scopo. Ci dicono che alcuni insiemi esistono (insieme vuoto, insiemi infiniti); ci dicono come creare nuovi insiemi a partire da insiemi noti; ci dicono quando due insiemi sono uguali; e ci danno qualche strana condizione sul rapporto di appartenenza (l'assioma 7). Va precisato che gli assiomi 8 e 9 non sono realmente assiomi. Sono schemi di assiomi. Questo significa che questi sono in realtà liste infinite di assiomi che sono facilmente descritte formalmente (e un computer può facilmente verificare se un certo enunciato è un assioma in queste liste oppure no).

Tra le contraddizioni che questi assiomi risolvono c'è quella di Russell, che viene descritto dalla collezione di **"tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi"**, questa collezione non può essere un insieme secondo la teoria di **ZF** — anche se possiamo descrivere questa collezione. Con gli assiomi di **ZF** si ha che se questa collezione è un insieme allora emerge una contraddizione e quindi questa collezione non è un insieme.

## L'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo

L'ipotesi del continuo:

**(CH) Non esiste nessun numero infinito intermedio tra l'infinito numerabile e l'infinito continuo dei numeri reali,**

non può essere derivata dalla teoria di **ZF** e, come abbiamo già sottolineato, l'indipendenza di **CH** dagli assiomi di **ZF** fu dimostrata in maniera conclusiva circa cinquanta anni fa.

C'è un altro fatto che riguarda gli insiemi, questo davvero intuitivamente ovvio, che non può essere derivato dalla teoria di **ZF**. Supponiamo che sia data una collezione di contenitori, ognuno contenente almeno un oggetto. Sembra abbastanza naturale che sia possibile effettuare una selezione di esattamente un oggetto da ciascun contenitore e formare così un insieme che contiene esattamente un oggetto estratto da ciascun

contenitore. Per esempio, date le collezioni dei gatti, dei cani e dei canarini, possiamo formare l'insieme che contiene Fuffy, Fido e Titti rispettivamente. Se il numero di contenitori è finito, l'esistenza di un tale insieme segue da **ZF**, ma se tale numero è infinito, no; neanche se il numero di oggetti in ciascun contenitore è finito. Che un tale insieme esista va postulato e questa postulazione è l'assioma della scelta.

Formalmente, l'assioma della scelta può essere espresso in termine del concetto di **funzione di scelta**: una funzione  $f$  definita su un insieme  $X$  di insiemi non vuoti, è detta *funzione di scelta* se è tale che per ogni insieme  $s$  in  $X$ ,  $f(s)$  è un elemento di  $s$ . Con questo concetto, l'assioma stabilisce che

**(AC) Per ogni insieme  $X$  di insiemi non vuoti, esiste una funzione di scelta  $f$  definita su  $X$ .**

In molti casi, una tale selezione può essere fatta senza invocare l'assioma della scelta; questo è in particolare il caso se il numero di contenitori è finito, come per i gatti, i cani e i canarini, o se una regola di selezione è disponibile: una proprietà distintiva che vale esattamente per un oggetto in ogni contenitore. Per dare un esempio informale, per qualsiasi collezione (anche infinita) di paia di scarpe, si può scegliere la scarpa sinistra di ciascuna coppia per avere un'opportuna selezione, ma per un insieme infinito di paia di calze (ipotizzando che non presentino caratteristiche distintive), una tale selezione può essere ottenuta solo invocando l'assioma della scelta. Secondo l'aforisma attribuito a Russell:

*L'assioma della scelta è necessario per selezionare un insieme di calze da un insieme infinito di calze, ma non per selezionare un insieme di scarpe da un insieme infinito di scarpe.*

Fu Gödel a dimostrare che l'assioma della scelta è indipendente dagli altri assiomi della teoria di **ZF**.

C'è una differenza profonda tra l'assioma della scelta, **AC**, e l'ipotesi del continuo, **CH**. Mentre **AC** è ritenuto non problematicamente vero, per cui usualmente si utilizza lo schema di assiomi **ZFC = ZF+AC**, l'ipotesi del continuo, per molti logici e matematici, ha ancora lo statuto di un'ipotesi. Gödel, ad esempio, la riteneva falsa.

Arriviamo così a quello che può sembrare un enigma. Da un lato, l'ipotesi del continuo è dimostrabilmente irrisolvibile, e dall'altro, matematici e logici, a partire da Gödel e Hilbert, pensavano che fosse risolvibile. Come risolvere questa difficoltà? Che cosa significa, comunque, che qualcosa è dimostrabilmente irrisolvibile?

Alcuni problemi matematici possono essere estremamente difficili e quindi senza una soluzione fino ad ora, ma un giorno qualcuno potrebbe trovare una soluzione brillante. L'ultimo teorema di Fermat<sup>20</sup>, per esempio, è stato risolto per tre secoli e mezzo. Ma poi Andrew Wiles è stato in grado di risolverlo nel 1994. L'ipotesi del continuo

---

<sup>20</sup> L'ultimo Teorema di Fermat stabilisce che non esistono tre interi positivi  $a$ ,  $b$  e  $c$  in grado di soddisfare l'equazione  $a^n + b^n = c^n$ , se  $n$  è un intero maggiore di due.

è un problema di tipo molto diverso; in realtà siamo in grado di dimostrare che è impossibile da risolvere usando i metodi attuali, il che non è un fenomeno del tutto sconosciuto in matematica. Ad esempio, il problema antico della trisezione è: possiamo trisecare un dato angolo utilizzando solo una riga e compasso? I greci del periodo classico erano molto perplessi su tale tripartizione, e non c'è da stupirsi, perché nel XIX secolo è stato dimostrato che è impossibile, non solo difficile, ma impossibile. Hai bisogno di poco più di un righello e compasso per trisecare un angolo arbitrario, per esempio, un compasso e un righello con due segni su di esso.

È lo stesso con **CH**, l'ipotesi del continuo: sappiamo che è impossibile da risolvere con gli strumenti che abbiamo nella teoria degli insiemi in questo momento, cioè **ZFC**. E fino a poco tempo nessuno sapeva che cosa fosse in questo caso l'analogo di un righello con due segni su di esso. Dal momento che gli strumenti attuali della teoria degli insiemi sono così incredibilmente potenti da coprire tutta la matematica esistente, è quasi una questione filosofica: che cosa vuol dire che occorre andare oltre i metodi presenti della matematica e proporre qualcosa di nuovo? Eppure, questo è esattamente ciò che è necessario fare per risolvere l'ipotesi del continuo. Al momento ci sono programmi di ricerca in teoria degli insiemi che perseguono proprio questo obiettivo. Si tratta di sviluppi molto interessanti e affascinanti, nei quali, però, non possiamo addentrarci.

## Diversi modi di intendere il metodo assiomatico

A pagina 22 abbiamo brevemente esposto la concezione di Hilbert secondo cui le proprietà dei concetti indefiniti di un sistema assiomatico sono implicitamente definite dagli assiomi e non è necessario assegnare alcun significato esplicito ai concetti indefiniti. Nel caso della geometria, i concetti indefiniti di punto, retta, piano ecc, potrebbero essere sostituiti — dice Hilbert — da tavoli, sedie, boccali da birra e altri oggetti. Questa concezione, nota come **formalismo**, è talvolta considerata la concezione moderna e matura della matematica e la posizione di Frege, che si opponeva strenuamente ad essa, è ritenuta una concezione "vecchia" — inadeguata a tenere il passo con il modo moderno di pensare. Ma se il formalismo è il "modo moderno di pensare" non c'è da stare tranquilli, essendo più i problemi che crea che quelli che risolve. Nella prefazione alla seconda edizione dei suoi *Principles of Mathematics*, scritta nel 1937, Russell così caratterizza il formalismo hilbertiano:

*L'interpretazione formalista della matematica non è affatto nuova, ma per i nostri scopi possiamo ignorare le sue vecchie forme. Come presentata da Hilbert, per esempio nella sfera dei numeri, essa consiste nel lasciare gli interi indefiniti, ma asserendo tali assiomi che li riguardano in modo da rendere possibile la deduzione delle solite proposizioni aritmetiche. Vale a dire, noi non attribuiamo alcun significato ai nostri simboli 0, 1, 2, . . . tranne che essi devono avere determinate caratteristiche che sono stabilite dagli assiomi [ad esempio, gli assiomi di Peano]. . . . Pertanto i simboli 0, 1, 2, . . . non rappresentano una serie definita, ma ogni progressione qualunque. I formalisti hanno dimenticato che i numeri sono necessari, non solo per fare somme, ma per il conteggio. Tali proposizioni come "c'erano 12 Apostoli" o "Londra ha 6.000.000 di abitanti" non possono essere interpretate nel loro sistema. Perché il simbolo "0" può essere inteso che significhi qualsiasi numero intero finito, senza in tal modo rendere falso qualsiasi assioma [per i numeri naturali] e quindi ogni simbolo numerico diventa infinitamente ambiguo.*

In altre parole gli assiomi di Peano per i numeri naturali<sup>21</sup> non individuano inequivocabilmente i numeri naturali (non solo nel senso indicato da Russell, ma anche nel senso che esistono altre strutture, differenti dai numeri naturali, che soddisfano questi assiomi). Vale a dire, gli assiomi di Peano non definiscono univocamente i numeri naturali. Con la sua solita arguzia, Russell, così prosegue:

*I formalisti sono come un orologiaio che è talmente assorto nel fare i suoi orologi così belli da guardare che ha dimenticato che il loro scopo è di indicare il tempo, e quindi ha ommesso di inserire in essi qualunque ingranaggio.*

Russell mette quindi in evidenza un altro problema che riguarda l'esistenza degli enti definiti implicitamente secondo Hilbert da un sistema assiomatico:

*C'è un'altra difficoltà nella posizione formalista, che riguarda l'esistenza. Hilbert assume che se un insieme di assiomi non comporta una contraddizione, ci deve essere un insieme di oggetti che soddisfa gli assiomi; di conseguenza, invece di cercare di stabilire teoremi di esistenza producendo un esempio, si dedica ai metodi di dimostrare l'auto-consistenza dei suoi assiomi. Per lui, l'"esistenza", come è di solito compresa, è un inutile concetto metafisico che dovrebbe essere sostituito dal concetto preciso di non contraddizione.*

Per Russell il problema è nuovamente di aver tagliato il cordone ombelicale che lega le nostre teorie più astratte all'esperienza:

*Qui, di nuovo, [il formalista] ha dimenticato che l'aritmetica ha usi pratici. Non vi è alcun limite ai sistemi di assiomi non contraddittori che potrebbero essere inventati. Le **nostre ragioni** per essere particolarmente interessati agli assiomi che portano all'aritmetica ordinaria **sono esterne all'aritmetica**, e hanno a che fare con l'applicazione del numero al materiale empirico. Questa applicazione non è parte della logica o aritmetica; ma una teoria che la rende impossibile a priori non può essere corretta.*

Gödel, che su altre questioni di filosofia della matematica avrebbe dissentito da Russell, su questo sarebbe stato d'accordo. Per Gödel, l'assiomatizzazione è un modo per affinare e precisare concetti che nascono dalla nostra esperienza del mondo reale. Essa non va intesa

---

<sup>21</sup> Ecco gli assiomi di Peano:

(i) 0 (zero) è un numero naturale;

(ii) se  $n$  è un numero naturale, allora  $n_0$  (il successivo di  $n$ ) è un numero naturale;

(iii) se  $m$  e  $n$  sono numeri naturali, allora  $m_0 = n_0$  solo se  $m = n$ ;

(iv) se  $n$  è un numero naturale, allora  $n_0 \neq 0$ ;

(v) se lo 0 gode di una certa proprietà e se, inoltre, qualora un numero goda di quella proprietà anche il successivo di questo ne gode, allora ogni numero naturale gode di quelle proprietà.

come opposta all'evidenza intuitiva del senso comune, ma come uno strumento che permette di affinarne e precisarne i contorni.

Quando i concetti dell'esperienza ordinaria sono spinti in direzioni molto lontane da essa, diventano sfocati e confusi e dobbiamo ricorrere a **teorie** — cioè ad assiomatizzazioni — per poter comprendere che cosa succede. Abbiamo incontrato una situazione di questo tipo quando abbiamo considerato il paradosso di Achille e la tartaruga e indicato come sia stata necessario lo sviluppo di una teoria per risolvere il paradosso. Inoltre, una concezione del metodo assiomatico analoga a quella di Gödel la si ritrova nella lettera di Einstein a Solovine (vedi pagina 27) e in un'idea che Einstein richiama spesso:

*Tutta la scienza non è altro che un affinamento del senso comune.*

## Matematica e realtà per Gödel

Per Gödel, la matematica è, in un certo senso, una scienza empirica. Gödel chiarisce questo nel seguente modo:

*Va notato che l'intuizione matematica non deve essere concepita come una facoltà che dà una conoscenza immediata degli oggetti di cui si occupa. Piuttosto sembra che, come nel caso dell'esperienza fisica, ci formiamo le nostre idee di quegli oggetti anche sulla base di qualcos'altro che è dato immediatamente. Solo che questo qualcosa d'altro qui non sono — o non lo sono primariamente — le sensazioni. Che qualcosa oltre alle sensazioni sia effettivamente dato immediatamente segue (indipendentemente dalla matematica) dal fatto che anche le nostre idee che si riferiscono agli oggetti fisici contengono componenti qualitativamente diverse dalle sensazioni, o semplici combinazioni di sensazioni, ad esempio, l'idea stessa di oggetto, anche se il nostro pensiero non può creare alcun elemento qualitativamente nuovo, ma solo riprodurre e combinare quelli che sono dati. Evidentemente, **il "dato" alla base della matematica è strettamente legato agli elementi astratti contenuti nelle nostre idee empiriche.** E in nessun modo consegue, tuttavia, che i dati di questo secondo tipo, perché non possono essere associati con azioni di certe cose su i nostri organi di senso, siano qualcosa di puramente soggettivo, come Kant affermava. Piuttosto, anch'essi possono rappresentare un aspetto della realtà oggettiva, ma, a differenza delle sensazioni, la loro presenza in noi può essere dovuto a un altro tipo di rapporto tra noi e la realtà.*

Queste idee di Gödel sono molto controverse e sono state giudicate aspramente da alcuni filosofi di scuola analitica. D'altro canto, che **il "dato" alla base della matematica è strettamente legato agli elementi astratti contenuti nelle nostre idee empiriche** è qualcosa che sia Edmund Husserl (1859–1938) sia Charles Sanders Peirce (1839–1914) avrebbero sottoscritto senza esitare.

Indubbiamente, è richiesto un lavoro di chiarificazione e analisi critica delle idee di Gödel, ma non sembra irragionevole ritenere che esse possano portare ad una comprensione del rapporto tra matematica e realtà che superi i problemi dell'empirismo e

della concezione kantiana. Si tratta di comunque problemi molto difficili che non è nostra intenzione affrontare qui.

Concludiamo con un altro brano di Gödel riguardante la natura realista della matematica:

*... [la matematica] nella sua forma più semplice, quando si applica il metodo assiomatico, non a qualche sistema ipotetico-deduttivo come la geometria (dove il matematico può far valere solo la verità condizionale dei teoremi), ma alla matematica propriamente detta, cioè il corpo di quelle proposizioni matematiche, che valgono in senso assoluto, senza ulteriori ipotesi. Devono esistere proposizioni di questo tipo, perché altrimenti non potrebbero neanche esistere alcun teorema ipotetico... . Per esempio, alcune implicazioni della forma:*

*Se tali e tali assiomi sono assunti, allora tali e tali teoremi valgono, deve essere necessariamente vero in senso assoluto. Analogamente, qualsiasi teorema della teoria finitistica dei numeri, come  $2 + 2 = 4$ , è senza dubbio, di questo tipo.*

# 13 LA GEOMETRIA EUCLIDEA MODERNA

## Indice

Spostamenti rigidi e vettori	114
La nozione di spazio vettoriale	117
La nozione di spazio affine	117
La nozione di spazio euclideo	122

Abbiamo già sottolineato che l'assiomatizzazione della geometria euclidea oggi "in uso" si basa sulle formulazioni algebriche della geometria basate sulla nozione di **vettore** sviluppate nella seconda metà del Diciannovesimo secolo principalmente dal tedesco Hermann Grassmann (1809–77), dall'inglese William Clifford (1845–1879) e dall'italiano Giuseppe Peano (1858–1932). Con questi sviluppi si ha una fusione completa tra geometria ed algebra, il punto di arrivo di un lungo percorso incominciato con Euclide. L'assiomatizzazione che illustreremo è quella data dal fisico e matematico tedesco Hermann Weyl (1885–1955) nel suo libro *Raum, Zeit, Materie* pubblicato nel 1918.

## Spostamenti rigidi e vettori

La nozione moderna di **vettore** può essere compresa a partire da un processo di astrazione di una nozione concreta: lo **spostamento parallelo** o traslazione rigida di un corpo rigido. Supponiamo che un corpo rigido sia spostato (senza essere ruotato) in modo che un qualunque dato punto  $P$  del corpo sia mosso dalla posizione  $P$  alla posizione  $Q$ , come mostrato nella figura 13.1.

Questo movimento è rappresentato mediante un segmento di retta orientato  $\overrightarrow{PQ}$  (una freccia che va da  $P$  a  $Q$ ). È importante aver chiaro che questa freccia codifica tutta l'informazione riguardo al movimento dell'intero corpo: infatti, se avessimo considerato un punto differente sul corpo, diciamo  $P'$ , allora il suo movimento sarebbe stato descritto da una freccia  $\overrightarrow{P'Q'}$  parallela a  $\overrightarrow{PQ}$  e della stessa lunghezza. In altre parole, le caratteristiche importanti degli spostamenti sono la loro *direzione* e la loro *lunghezza*, ma non la collocazione spaziale dei loro punti *iniziali e terminali* — la "testa" e la "coda" della freccia.

Gli spostamenti sono solitamente denotati con una lettera sormontata da una freccia,  $\vec{a}$ , oppure da una lettera scritta in grassetto,  $\mathbf{a}$ . Nel seguito useremo quest'ultima notazione. Con

$$Q = P + \mathbf{a}$$

si denota una traslazione nella direzione individuata da  $\mathbf{a}$  di un tratto di lunghezza  $a$ .

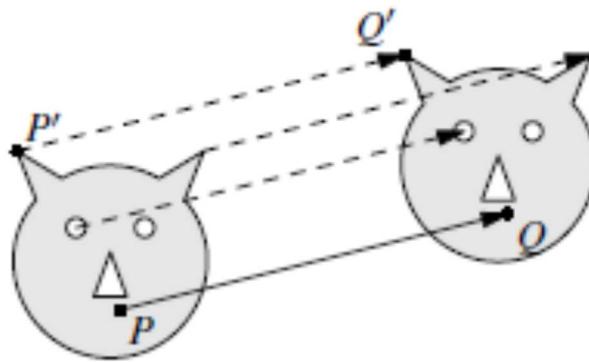


Figura 13.1: Spostamento rigido di una figura nel piano.

Un'altra importante caratteristica degli spostamenti è il moto in cui differenti spostamenti si combinano. Se prima si effettua uno spostamento che muove il dato punto da  $P$  a  $Q$  e poi si effettua un altro spostamento che muove il punto da  $Q$  a  $R$ , l'effetto complessivo è lo stesso se avessimo spostato direttamente il punto da  $P$  a  $R$ . La freccia  $\overrightarrow{PR}$ , che rappresenta questo spostamento complessivo, è ottenuta mettendo la freccia  $\overrightarrow{QR}$  con la sua coda nella testa di  $\overrightarrow{PQ}$  e tracciando la freccia dalla coda di  $\overrightarrow{PQ}$  alla testa di  $\overrightarrow{QR}$  come mostrato in figura 13.2.

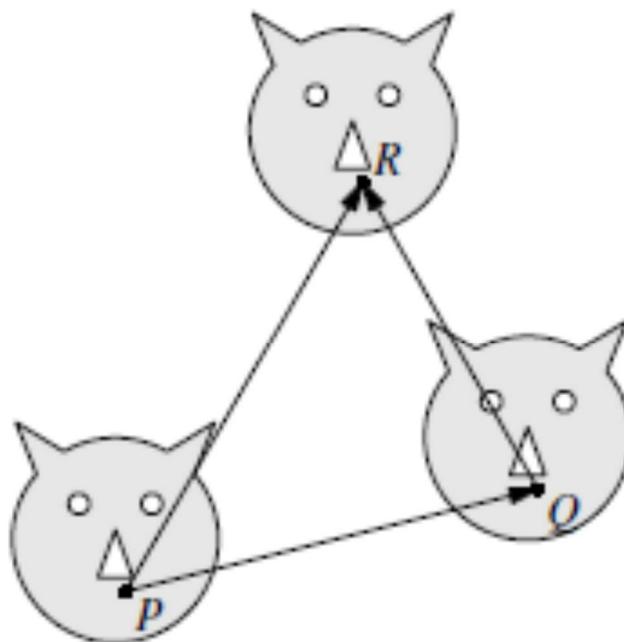
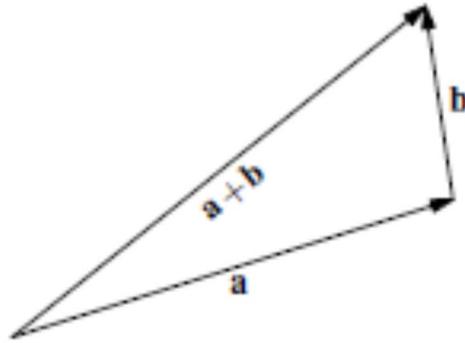


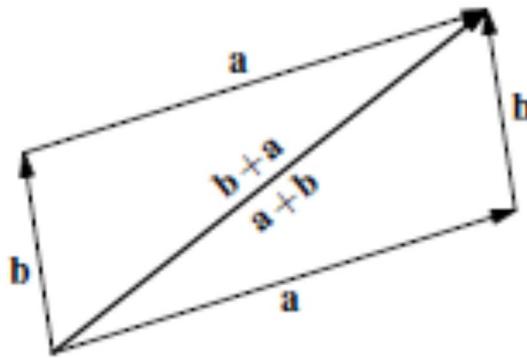
Figura 13.2: proprietà fondamentale degli spostamenti.

Gli spostamenti esemplificano le proprietà generali dei **vettori**, come la proprietà appena descritta.

Sui vettori è definita un'operazione di somma, secondo la regola descritta sopra e illustrata sotto.

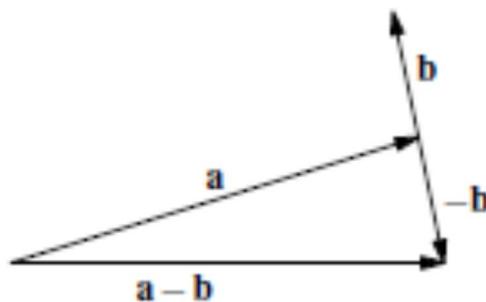


Per formare il vettore  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , si muove  $\mathbf{b}$  in modo che la sua coda coincida in posizione con la testa di  $\mathbf{a}$  e si congiunge la coda di  $\mathbf{a}$  con la testa di  $\mathbf{b}$ . Questa operazione è *commutativa*, cioè  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ , come è espresso dalla nota regola del parallelogramma:



L'inverso di uno spostamento è lo spostamento che inverte esattamente o neutralizza lo spostamento originario: si tratta della freccia in cui la coda e la testa di  $\mathbf{a}$  sono scambiate. Se  $\mathbf{a}$  è uno spostamento, è naturale denotare il suo inverso con  $-\mathbf{a}$ . Combinando  $\mathbf{a}$  con  $-\mathbf{a}$  i punti dello spazio restano invariati. Per i vettori in generale vale la stessa proprietà: esiste un vettore nullo  $\mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  per ogni vettore  $\mathbf{a}$ . Risulta così definita la sottrazione di due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  come somma di  $\mathbf{a}$  con l'inverso di  $\mathbf{b}$ , cioè

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) .$$



La moltiplicazione di un vettore per un numero è una seconda importante operazione sui vettori che potrebbe anche essere chiamata *taratura*, in quanto permette di “tarare” la lunghezza di tutti i vettori paralleli ad un dato vettore, convenzionalmente scelto come vettore di riferimento, e a cui, convenzionalmente, viene assegnata una lunghezza unitaria. Questo è esattamente ciò che abbiamo trattato nel capitolo precedente (vedi pagina 98).

## La nozione di spazio vettoriale

Uno **spazio vettoriale** è una struttura matematica che ha le stesse proprietà algebriche degli spostamenti rigidi. Consiste di elementi, chiamati **vettori**, per i quali sono definite due operazioni: la somma di vettori e la moltiplicazione dei vettori per un numero; queste operazioni hanno le seguenti proprietà (**a**, **b**, **c** denotano vettori generici e  $\mu$ ,  $\lambda$  numeri appartenenti ad un campo numerico<sup>22</sup>).

Ecco gli assiomi che regolano tali operazioni:

### Leggi di somma

(1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (legge commutativa)

(2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (legge associativa)

(3) Se **a** e **b** sono due vettori, allora c'è uno e un solo vettore **x** per cui vale l'equazione  $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$ . È chiamato la differenza di **a** e **b** e si denota con  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  (Possibilità della sottrazione).

### Leggi di moltiplicazione per un numero

(4)  $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$  (prima legge distributiva)

(5)  $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$  (legge associativa)

(6)  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

(7)  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  (seconda legge distributiva)

Si osservi che da (3) discende l'esistenza del vettore nullo **0**.

## La nozione di spazio affine

La discussione sugli spostamenti rigidi che ci ha permesso di arrivare, per astrazione, alla nozione di spazio vettoriale presupponeva la nozione usuale di spazio euclideo. La logica può tuttavia essere invertita facendo emergere una costruzione assiomatica della geometria che presuppone il concetto di *numero reale*, in termini del quale è espressa la nozione di continuità geometrica. Questa costruzione utilizza soltanto i concetti geometrici primitivi di *punto* e di *vettore*. Le operazioni di base che collegano questi concetti sono tre:

(i) due vettori **a** e **b** generano un terzo vettore  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,

(ii) un numero reale  $\lambda$  e un vettore **a** generano un vettore  $\lambda\mathbf{a}$ ,

---

<sup>22</sup> Usualmente, si considera il campo dei reali o quello dei numeri complessi; se si considerasse un campo finito si avrebbe uno spazio vettoriale con un numero finito di punti.

(iii) un punto  $P$  e un vettore  $\mathbf{a}$  generano il punto  $P + \mathbf{a}$ .

Le operazioni (i) e (ii) sono regolate dagli *assiomi per i vettori*, la (iii) dai seguenti *assiomi per punti e vettori*:

(8) Ogni coppia (ordinata) di punti  $P$  e  $Q$  in  $A$  determina un vettore  $\mathbf{a}$ , simbolicamente espresso come  $\mathbf{a} = Q - P$  (oppure  $\overrightarrow{PQ}$ ).

(9) Se  $P$  è un qualunque punto in  $A$  e  $\mathbf{a}$  un qualunque vettore, esiste uno e un solo punto  $Q$  in  $A$  tale che  $Q = P + \mathbf{a}$ .

(10) Se  $Q - P = \mathbf{a}$  e  $R - Q = \mathbf{b}$ , allora  $R - P = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

(Si osservi che da queste proprietà segue che  $Q - P = \mathbf{0}$  se e solo se i punti  $Q$  e  $P$  coincidono.)

Questi assiomi formano un sistema che, anche dal punto di vista logico, è una struttura molto più trasparente ed omogenea degli assiomi puramente geometrici di Euclide o Hilbert. Le nozioni geometriche usuali sono derivate da questo sistema e, tra queste, le più semplici sono quelle di retta e di piano.

## RETTE

Se  $O$  è un punto e  $\mathbf{e}_1$  è un vettore (diverso dal vettore nullo), i punti terminali di tutti i vettori della forma  $P - O = x\mathbf{e}_1$  (essendo  $x$  un arbitrario numero reale), formano una linea retta. Equivalentemente, diciamo che la retta passante per il punto  $O$  nella direzione del vettore  $\mathbf{e}_1$  è l'insieme dei punti  $P$  tali che

$$P = O + x\mathbf{e}_1,$$

al variare di  $x$  nell'insieme dei numeri reali. Si osservi che questa definizione della nozione di retta coincide con quella data nel capitolo precedente (vedi pagina 98) si basa **soltanto** sulle nozioni coinvolte negli assiomi della geometria affine. (I punti per cui l'ascissa  $x$  è positiva formano una semiretta, quelli per cui  $x$  è negativa formano l'altra semiretta che termina in  $O$ .)

Da un punto di vista fisico, l'equazione sopra descrive la traiettoria di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme nello spazio fisico tridimensionale, con  $x$  che misura la distanza percorsa da  $O$  a  $P$  e il vettore  $\mathbf{e}_1$  che caratterizza la direzione del movimento. Se poniamo  $x = vt$ , dove  $v$  è il modulo della velocità e  $t$  è il tempo, l'equazione della retta può essere scritta, equivalentemente, come

$$P = P(t) = O + vt\mathbf{e}_1.$$

$O$  è il punto dove si trova il punto materiale al tempo  $t = 0$ .

## PIANI

Sia adesso  $\mathbf{e}_2$  un altro vettore che non è della forma  $x\mathbf{e}_1$ , allora le teste di tutti i vettori  $P - O$  che hanno la forma  $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$  formano un piano  $\pi$  (essendo  $x$  e  $y$  arbitrari numeri reali). Questa concezione di piano è in accordo con la concezione sintetica di piano determinato da 3 punti non collineari nello spazio: in questo caso, i tre punti sono il punto  $O$  e i punti

che rappresentano le teste dei vettori  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ . Il piano così ottenuto è dunque caratterizzato come l'insieme dei punti  $P$  tali che

$$P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,$$

al variare di  $x$  e  $y$  tra tutte le coppie di numeri reali. Si veda la figura 13.3.

Quando l'espressione a destra dell'equazione precedente fornisce il vettore nullo solo quando i numeri  $x$  e  $y$  sono entrambi uguali a zero, i vettori sono detti **linearmente indipendenti**. La nozione (algebrica) di indipendenza lineare traduce quindi la nozione geometrica che tre punti non sono collineari.

Si ha così che due vettori linearmente indipendenti forniscono una coordinatizzazione numerica del piano da essi individuato, le coordinate cartesiane di un punto del piano essendo date dalla coppia  $(x, y)$  di numeri reali (vedi la figura 13.3). Il piano può dunque essere pensato come una **molteplicità** (manifold, in inglese) doppia, analogamente la retta può essere pensata come una molteplicità singola.

E analogamente al caso della retta, anche qui la coordinatizzazione si basa su scelte convenzionali:

- (1) la scelta del punto  $O$  (origine),
- (2) la scelta di due vettori  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  nel piano (altre scelte di vettori nello stesso piano avrebbero dato un'equivalente rappresentazione cartesiana dello stesso).

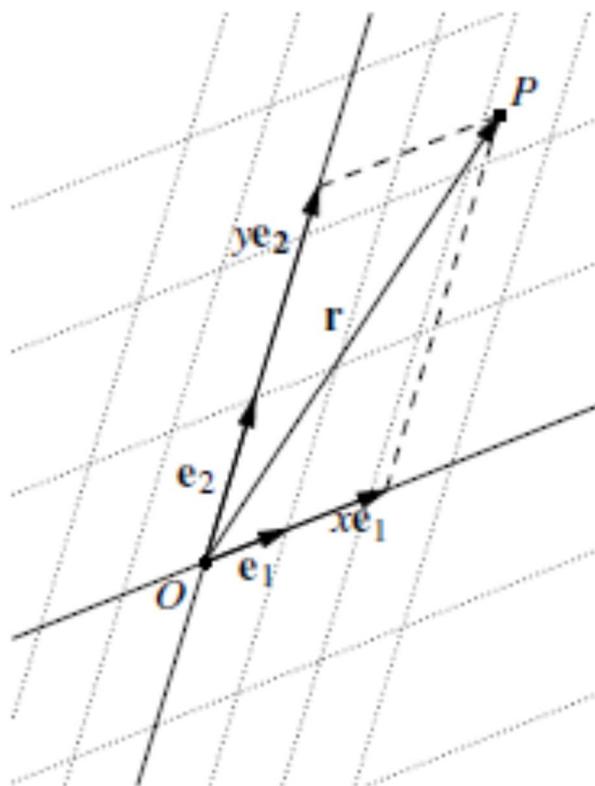


Figura 13.3: Coordinatizzazione del piano.

## DIMENSIONE DELLO SPAZIO

Se consideriamo adesso un vettore  $\mathbf{e}_3$  che non giace nel piano individuato da  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , qualunque punto  $P$  dello spazio è rappresentato dall'equazione

$$P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

al variare di  $x$ ,  $y$  e  $z$  tra tutte le triple di numeri reali. In questo modo si ha una coordinatizzazione dello spazio in termini di triple di numeri  $(x, y, z)$ . Lo spazio può quindi essere visto come una molteplicità tripla (e, come prima, occorre prestare attenzione ai caratteri convenzionali di tale rappresentazione).

Questa rappresentazione dello spazio è resa possibile dall'indipendenza lineare dei tre vettori  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , cioè quando l'espressione a destra dell'equazione precedente fornisce il vettore nullo solo quando i numeri  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono tutti e tre uguali a zero.

A questo punto, incontriamo il concetto di dimensione. Nello spazio reale non possiamo andare oltre la terza dimensione; sono presenti tre vettori linearmente indipendenti, ma non di più. Confrontata con la semplice "legislazione dello spazio" (per usare un termine Kantiano) espressa dal nostro sistema di assiomi, che questa dimensione sia il numero 3 appare come una caratteristica **contingente**. Sarebbe altrettanto lecito (per la struttura assiomatica) sostituire il numero 3 con qualsiasi numero  $n$  di dimensioni, postulando che ce ne siano  $n$ , ma non di più, di vettori linearmente indipendenti. Un sistema di coordinate per lo spazio consisterebbe quindi di un punto  $O$  (l'origine) e di  $n$  vettori. Per  $n = 1, 2, 3$ , si ottengono così rispettivamente la geometria della linea, del piano e dello spazio.

A questo riguardo, il matematico e fisico Hermann Weyl, nel suo bel libro *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, osserva:

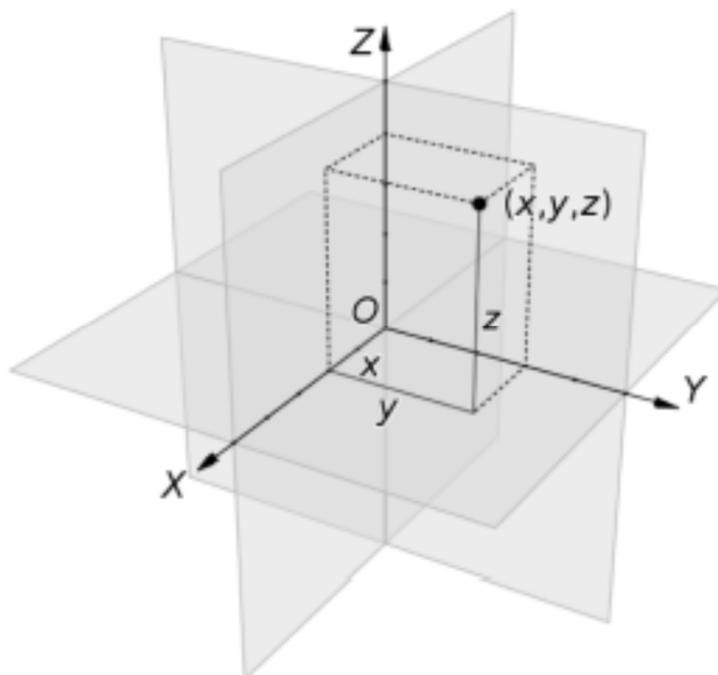


Figura 13.4: Coordinatizzazione dello spazio.

*Solo sulla base del concetto di geometria n-dimensionale a cui conduce questa formalizzazione in un modo convincente, il problema del numero delle dimensioni diventa significativo: Quali peculiarità interne distinguono il caso  $n = 3$  tra tutti gli altri? Se Dio, nella creazione del mondo, ha scelto di fare spazio a tre dimensioni, è possibile che si possa dare una spiegazione 'ragionevole' di questo fatto svelando tali peculiarità?*

Il piano cartesiano è di solito rappresentato come nella figura 7.4 con gli assi delle ascisse e delle ordinate disposti ortogonalmente l'uno all'altro; analogamente lo spazio, come in figura 13.4. Si osservi che questa rappresentazione è convenzionale, a meno che non si tratti di un piano o di uno spazio euclideo in cui si ha relazione di ortogonalità. Questa sottolineatura non vale solo per la geometria dello spazio (nello spazio affine non si ha alcuna nozione di ortogonalità), ma anche per la fisica: se, ad esempio, le ascisse rappresentano i volumi di un gas e le ordinate le pressioni, è solo una questione di convenienza grafica usare un sistema d'assi cartesiani ortogonali: la perpendicolarità tra gli assi e la distanza tra i punti del piano non ha alcun significato fisico.<sup>23</sup>

In effetti, la struttura geometrica definita dagli assiomi riportati a pagina 117 non caratterizza l'usuale spazio euclideo, ma una struttura geometrica più "debole", il cosiddetto *spazio affine*. In questo spazio non è definita alcuna nozione globale di distanza tra due punti. Si possono solo confrontare le lunghezze dei segmenti lungo una retta o lungo rette parallele, basandosi sulla scelta convenzionale di un vettore di riferimento, assunto come vettore unitario. Nello spazio affine il parallelismo tra rette è una nozione assoluta, ma non quella di angolo tra direzioni e dunque non è possibile confrontare le lunghezze di vettori lungo rette non parallele; inoltre, non è definita la nozione di rette ortogonali. In breve, in questa geometria, non esiste una nozione di **congruenza** (solo segmenti paralleli possono essere confrontati per stabilire se sono congruenti). La geometria euclidea è una struttura più ricca, equipaggiata con una nozione metrica di distanza tra punti e di angolo tra direzioni. Sono queste nozioni a rendere possibile la definizione di una nozione di congruenza di figure geometriche.

A commento di quanto presentato finora, è interessante un passo tratto dall'altrettanto bel libro di Hermann Weyl, *Space, Time, and Matter*:

*È evidente da questi argomenti che la geometria affine nella sua interezza semplicemente ci insegna che lo spazio è una **regione di quantità lineari in tre dimensioni** ( il significato di questa affermazione sarà sufficientemente chiaro, senza ulteriori spiegazioni). Tutti i fatti dell'intuizione [che sono stati alla base di questa costruzione] sono semplicemente forme dissimulate di questa verità. Ora, se da un lato è molto soddisfacente poter dare una base comune nella teoria conoscenze per le molte varietà di affermazioni riguardanti lo spazio, le configurazioni spaziali, e le relazioni spaziali che, presi insieme, costituiscono la geometria, si deve altresì sottolineare che ciò dimostra*

---

<sup>23</sup> Analogo discorso vale per la rappresentazione spazio-temporale di un movimento unidimensionale, con le ascisse che rappresentano il tempo e le ordinate lo spazio (o viceversa): anche in questo caso l'ortogonalità e la distanza euclidea tra punti dello spazio-tempo non hanno in generale significato fisico; ad esempio, in fisica classica, solo la distanza euclidea tra punti con la stessa coordinata temporale ha significato: è la distanza spaziale tra due eventi che avvengono nello stesso tempo (a causa dell'invarianza galileiana, la distanza spaziale tra eventi che accadono in tempi differenti non ha alcun significato invariante).

*molto chiaramente, con quanto poco di matematica corretta si pretende di esporre la natura intuitiva dello spazio. La geometria non contiene alcuna traccia di ciò che rende lo spazio di intuizione ciò che è in virtù delle sue proprie qualità interamente distintive . . . Si lascia alla metafisica di rendere questo "comprensibile", o addirittura di mostrare perché e in che senso è incomprensibile.*

## La nozione di spazio euclideo

Per realizzare il passaggio dalla geometria affine alla geometria **metrica**, è necessario che lo spazio abbia una struttura in qualche modo **rigida**. Nelle formulazioni elementari della geometria, tale "rigidità" è incapsulata nella nozione di **prodotto scalare**.

Consideriamo allora la nozione di prodotto scalare tra due vettori **a** e **b** così come l'abbiamo appresa a scuola. Dopo aver selezionato un vettore **e** definito come unità, misuriamo la lunghezza di **a** e la lunghezza (negativa o positiva a seconda dei casi) della proiezione ortogonale di **b** su **a** e moltiplichiamo questi due numeri tra loro. Il numero (positivo o negativo a seconda dei casi) così ottenuto è il prodotto scalare tra **a** e **b** ed è usualmente denotato con  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (vedi figura 13.5). Si verifica facilmente che il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

- (i) è simmetrico, cioè,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (ii)  $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (e analoga proprietà rispetto al primo fattore)
- (iii)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$  è sempre positivo (eccetto quando **a** è nullo) ed è uguale al quadrato della lunghezza di **a**.

Si osservi che è il quadrato della lunghezza che è una funzione "semplice" del vettore e non la sua lunghezza.

Supponiamo adesso che sia data una regola che soddisfi le proprietà (i), (ii), (iii). Non importa che sia un prodotto scalare definito geometricamente come in figura 13.5 o che lo spazio abbia dimensione 3. Quello che conta è che la regola, che chiameremo  $g$ , associ, cioè, ad ogni coppia di vettori **a** e **b** un numero, che denoteremo  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , in modo tale che le proprietà (i), (ii), (iii) siano soddisfatte. A costo di ripeterci, questo vuol dire che devono valere le seguenti relazioni:

- (i)  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  (simmetria)
- (ii)  $g(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \lambda g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu g(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  (linearità nel secondo argomento)
- (iii)  $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$  (= 0 se e solo se  $\mathbf{a} = 0$ ) (positività)

Si osservi che la linearità nel primo argomento

$$(iv) g(\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \lambda g(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \mu g(\mathbf{c}, \mathbf{a})$$

è una diretta conseguenza della condizione di simmetria (i). Una regola  $g$  che soddisfa queste proprietà è detta **forma bilineare definita positiva**.

Quando è data una qualunque regola  $g$  che soddisfa queste condizioni, allora possiamo procedere a rovescio nel seguente modo. Sia  $n$  la dimensione dello spazio.

**Definiamo**

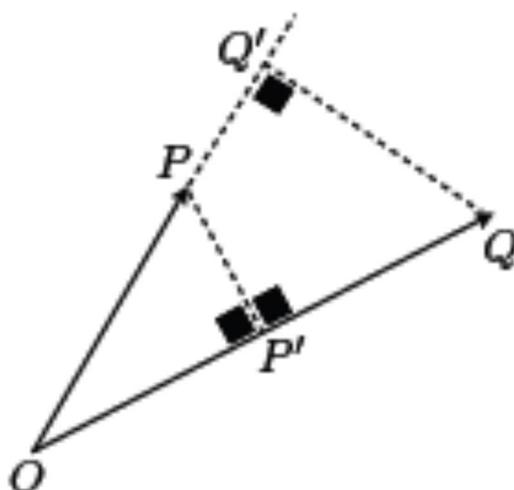


Figura 13.5: Il prodotto scalare del vettore  $\mathbf{a} = \overline{OP}$  con il vettore  $\mathbf{b} = \overline{OQ}$  è uguale a  $|OP| \cdot |OQ'|$ , dove  $OQ'$  è la proiezione ortogonale di  $OP$  su  $OQ$  (il simbolo  $\blacksquare$  denota un angolo retto). Con un semplice ragionamento geometrico si verifica che  $|OP| \times |OQ'| = |OQ| \cdot |OP'|$  e quindi che il prodotto scalare è simmetrico,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .

- (a) il prodotto scalare tra due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  come  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,
- (b) il quadrato della lunghezza di un vettore  $\mathbf{a}$  come  $a^2 = g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ .
- (c) l'angolo tra due vettori come

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{a^2 b^2}}$$

Quando  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  (e quindi quando l'angolo tra i due vettori è  $\pi/2$  o  $-\pi/2$ ) i due vettori sono detti **ortogonali**.

### Scegliamo

- (c) un vettore unitario  $\mathbf{e}$  come unità di misura, cioè tale che  $g(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 1$ .

Allora risultano univocamente definite le lunghezze di tutti i vettori dello spazio e le loro relazioni angolari. Risulta cioè univocamente definita la geometria euclidea dello spazio. Dunque, l'assioma che ci permette di trasformare la geometria affine nella geometria euclidea è il seguente **assioma metrico**:

- (11) Se è scelto un vettore  $\mathbf{e}$  come vettore unitario, allora due vettori qualunque  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  determinano un unico numero  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;  $g$  è una forma bilineare simmetrica definita positiva;  $g(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 1$ .

$g$  è usualmente chiamata **forma metrica fondamentale** o semplicemente **metrica**.  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  è detto il prodotto scalare di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e per brevità è denotato  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Mostriamo in che modo l'assioma metrico definisca univocamente la geometria euclidea dello spazio  $e$ , in particolare, come sia possibile riottenere l'usuale geometria analitica cartesiana, nel caso di uno spazio bidimensionale in cui è definita una metrica  $g$ . Scegliamo un qualunque punto  $O$  come origine e consideriamo un vettore qualunque  $\mathbf{e}_1$  che ha la coda in  $O$ . Consideriamo adesso un vettore  $\mathbf{e}_2$  linearmente indipendente da  $\mathbf{e}_1$ . In termini di  $\mathbf{e}_1$  e rappresentiamo i punti  $P$  del piano in termini del vettore  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ . Per quanto visto sopra

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

Calcoliamo la lunghezza di  $\mathbf{a}$  usando la metrica  $g$ . Sfruttando le proprietà di simmetria e di linearità rispetto al primo e al secondo argomento, otteniamo

$$\mathbf{a}^2 = g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = x^2g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 2xyg(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + y^2g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$$

Poniamo  $g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$ , cioè stipuliamo che  $\mathbf{e}_1$  fornisca l'unità di lunghezza in termini della quale misuriamo le lunghezze di tutti i vettori del piano. Osserviamo che  $\mathbf{e}_2$  è un vettore arbitrario del piano indipendente da  $\mathbf{e}_1$ . Possiamo allora sfruttare questa libertà scegliendolo ortogonale a  $\mathbf{e}_1$ , cioè tale che  $g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ , e di lunghezza unitaria, secondo l'unità di misura fissata da  $\mathbf{e}_1$ , cioè tale  $g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$ . Sulla base di queste stipulazioni, la formula per il quadrato della lunghezza di  $\mathbf{a}$  diventa

$$\mathbf{a}^2 = x^2 + y^2$$

Inoltre, come si vede facilmente,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = x$  e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = y$ . Quindi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  permettono di costruire un **sistema di coordinate cartesiane** nel piano. Rispetto a questo sistema, le coordinate  $(x, y)$  di un punto sono le proiezioni del vettore lungo gli assi individuati da  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ; l'uguaglianza  $\mathbf{a}^2 = x^2 + y^2$  non è nient'altro che il teorema di Pitagora (vedi la figura 13.6). Il numero  $|\mathbf{a}|^2$  è il quadrato della distanza di un generico punto di coordinate  $\equiv (x, y)$  dall'origine  $O$ . Allora il quadrato della distanza tra due punti  $P$  e  $Q$  dello spazio sarà dato da

$$\overrightarrow{PQ}^2 = g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = (x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2,$$

dove  $(x_p, y_p)$  e  $(x_o, y_o)$  sono le coordinate dei punti  $P$  e  $Q$  rispetto al sistema cartesiano determinato da  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Da 2 dimensioni si passa facilmente ad  $n$ . In generale, per uno spazio di dimensione  $n$  con una metrica  $g$ , possiamo costruire un insieme  $n$  vettori indipendenti  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , la cui lunghezza, definita dalla regola  $g$  vale 1, e tali che  $g$  applicato a coppie distinte di questi vettori vale 0. Allora, se si rappresenta un vettore in un sistema di coordinate cartesiane,

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

analogamente al caso bidimensionale si avrà

$$\mathbf{a}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

L'esistenza di una forma metrica fondamentale è il vero contenuto del teorema di Pitagora e quindi la chiave di volta di tutte le relazioni metriche della geometria Euclidea. Il sistema assiomatico che la caratterizza, alternativo a quelli di Euclide e Hilbert è quello costituito dagli assiomi (1) – (11) presentati in questo capitolo. Questo sistema si è rivelato più fecondo e utile sia del sistema originario di Euclide sia di quello più recente di Hilbert.

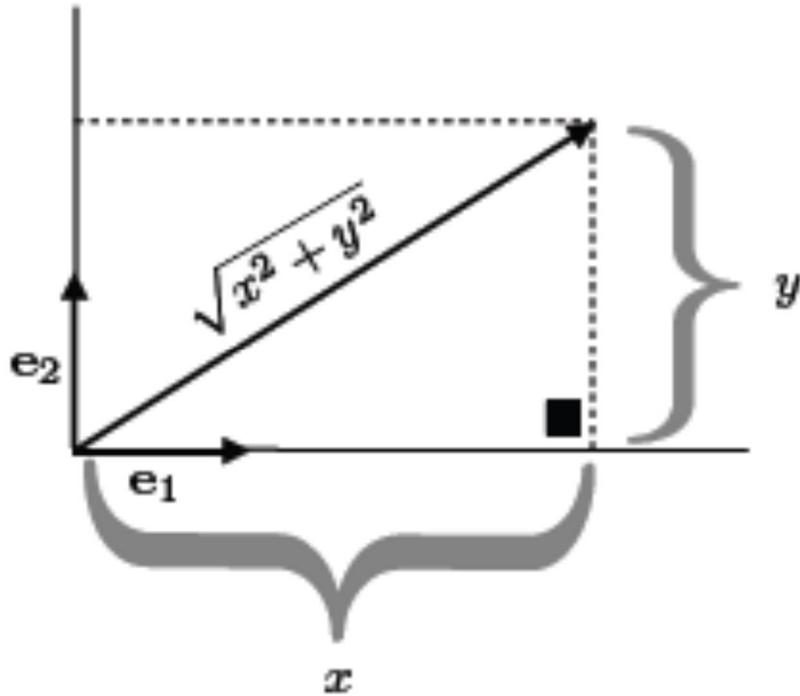


Figura 13.6: Coordinate cartesiane e teorema di Pitagora.

# 14 SPAZI ILLIMITATI MA FINITI

## Indice

La distinzione tra infinito e illimitato	126
Vita in una 2-sfera	127
Vita in una 3-sfera	130
L'universo di Dante	131
La forma dell'universo	133

## La distinzione tra infinito e illimitato

Il 10 giugno del 1854, Bernhard Riemann (1826–866), nella sua lezione per diventare libero docente pose le basi della **geometria differenziale**, lo strumento principe utilizzato dalla fisica del Ventesimo secolo per investigare le proprietà spaziali del nostro universo. Il titolo del saggio era *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria* e fu pubblicato postumo. Si dice che la lezione ricevette il plauso di Carl Friedrich Gauss (1777–1855), il matematico più influente del tempo e uno dei più grandi di tutti i tempi. Riguardo a Riemann, il logico, scienziato e filosofo Charles Sanders Peirce scrisse: “Bernhard Riemann è riconosciuto da tutti i matematici come la più alta autorità in filosofia della geometria”.

Ci occuperemo di Peirce più avanti e nel capitolo 18 analizzeremo in dettaglio il saggio di Riemann. Per il momento, ci limitiamo a discutere una distinzione importante che Riemann mette in evidenza quando discute le proprietà geometriche dello spazio. Scrive:

*Nell'estendere la costruzione dello spazio nell'incommensurabilmente grande bisogna distinguere tra assenza di confini ed infinitezza; quella appartiene alle relazioni di estensione, questa alle relazioni metriche. Che lo spazio sia una molteplicità ad estensione tripla senza confini è un'ipotesi che viene applicata in ogni concezione del mondo esterno, nella quale in ogni istante la regione delle percezioni reali viene completata e vien costruita la posizione possibile di un oggetto in esame; tale ipotesi viene confermata progressivamente da queste applicazioni. L'assenza di confini dello spazio possiede perciò una certezza empirica più grande di una qualsivoglia esperienza esterna. Ma da questo non segue affatto l'infinitezza. . .*

In breve,

**spazio infinito:** è di estensione non finita = non esiste una distanza massima tra i punti dello spazio.

**spazio illimitato:** è non limitato = senza limiti = senza confini.

La distinzione sottolineata da Riemann risolve un problema che era già stato posto nell'antichità e che, probabilmente, si pone ogni bambino quando si chiede se il mondo finisce da qualche parte. Scriveva Tito Lucrezio Caro (98–55 a.C.) nel *De rerum natura*:

*E inoltre, supponiamo ora che tutto lo spazio esistente sia limitato e che qualcuno corra avanti, all'estrema riva, spingendosi fino all'ultimo punto, e scagli un dardo volante: preferisci tu pensare che esso, lanciato con valide forze, vada ove è stato vibrato e voli lontano, o credi che qualcosa possa arrestarlo e ad esso opporsi? O l'una o l'altra ipotesi occorre infatti che tu ammetta e scelga? Ma sia l'una che l'altra ti preclude ogni via di scampo e ti obbliga a riconoscere che il tutto si estende senza confine. Infatti, sia che esista qualcosa che l'arresti e gl'impedisca di giungere ove è stato vibrato e di conficcarsi nel segno, sia che più oltre esso voli, il punto donde è partito non è il confine estremo. In tal modo ti incalzerò e, dovunque porrai l'estrema riva, chiederò: "che sarà poi del dardo?". Avverrà che in nessun luogo si potrà fissare il confine, e la possibilità della fuga sempre allontanerà la via d'uscita.*

Lucrezio ripresenta le riflessioni di Archita di Taranto (V secolo a.C.) che riteneva assurdo pensare che non si potesse andare al di là . . . e ancora al di là. . . . Da qui il paradosso : se l'Universo fosse finito, avrebbe un bordo, ma questo bordo potrebbe essere indefinitamente oltrepassato. Per gli Stoici il bordo era mobile: il mondo materiale è finito ma è circondato da un vuoto infinito; allungare una mano al di là significherebbe semplicemente ingrandire il cosmo, facendone arretrare la frontiera. Se l'universo fosse racchiuso dalla superficie delle stelle fisse, il paradosso sarebbe insolubile.

Lo spazio euclideo è sia infinito in estensione sia illimitato, ma si possono immaginare spazi senza confini, che tuttavia sono finiti in estensione. L'esempio più semplice è la superficie di una sfera: lo spazio è finito, ma illimitato — questa è la distinzione sottolineata da Riemann. Il paradosso è risolvibile e, in effetti, in maniera molto semplice.

## Vita in una 2-sfera

Immaginare come sarebbe vivere in un mondo le cui proprietà geometriche sono diverse dal nostro è un esperimento mentale utile. Questo gioco incominciò con il fisico e scienziato Hermann von Helmholtz (1821–1894) con lo scopo di mostrare che l'intuizione geometrica dello spazio non è necessariamente euclidea (come riteneva Kant). Nello stesso spirito, ma più con intenti divulgativi e pedagogici, è il romanzo del 1884 *Flatland: Racconto fantastico a più dimensioni* del maestro di scuola inglese Edwin Abbott Abbott.

La descrizione che daremo riprende quella data dal filosofo Hans Reichenbach (1891–1953), anche se seguiremo molto fedelmente (praticamente verbatim) la riformulazione che ne dà Graham Nerlich nel bel libro *The shape of space*.

Supponiamo che ci sia un pianeta perfettamente sferico coperto da una pellicola idealmente sottile di acqua. Pesci intelligenti nuotano nell'acqua e possono manipolare oggetti in vari modi che descriveremo tra breve. Hanno una visione binoculare, ma possono vedere solo nella pellicola d'acqua e non al di fuori di essa. Sia loro sia i raggi di luce sono completamente intrappolati nella pellicola: essi non sono in grado di saltare fuori dall'acqua e non percepiscono di essere spinti verso il basso dalla forza gravitazionale; i raggi di luce sono lungo cerchi massimi della sfera, essendo intrappolati nella pellicola a causa dell'indice di rifrazione del fluido (diciamo che sia così senza cavillare troppo). I segmenti dei cerchi massimi sono le **geodetiche** sulla sfera, nel senso che dati due punti sulla sfera il cammino di minore distanza tra i due punti è il segmento di cerchio massimo che passa per i due punti. Supponiamo anche che il corpo di un pesce possa avere una dimensione significativa rispetto alla superficie sferica in cui vive. Egli non ha alcuna concezione di alto o basso, ma solo di avanti e indietro e di lateralmente. La sua concezione del mondo è che ha solo due dimensioni e che egli stesso è una creatura con area ma nessun volume. Supponiamo che il pesce abbia un righello per fare misure lineari. Il righello è un segmento lungo una geodetica, quindi se il pesce guarda lungo il suo bordo con un occhio solo, gli apparirà dritto (coincide con il cammino della luce). Dati due righelli di questo tipo, si troveranno a filo contro l'altro per quanto egli li separi, li giri e li ricongiunga. Essi "scivolano dolcemente" uno sopra l'altro. (Questo significa, naturalmente, che il pesce non deve fare ruotare i righelli "fuori" dal suo spazio, un'operazione di questo tipo per lui significherebbe che il righello si riduce ad un punto.) Se il pesce appoggia il righello su una qualunque curva solida che non è lineare nello spazio, allora il righello si adatta ad essa in modo o convesso o concavo (vedi Fig. 5.5 in figura 14.1). Cioè, il righello può oscillare sulla superficie, o può lasciare un vuoto quando la tocca. Questo è un semplice test qualitativo per stabilire se una linea è curva oppure no.

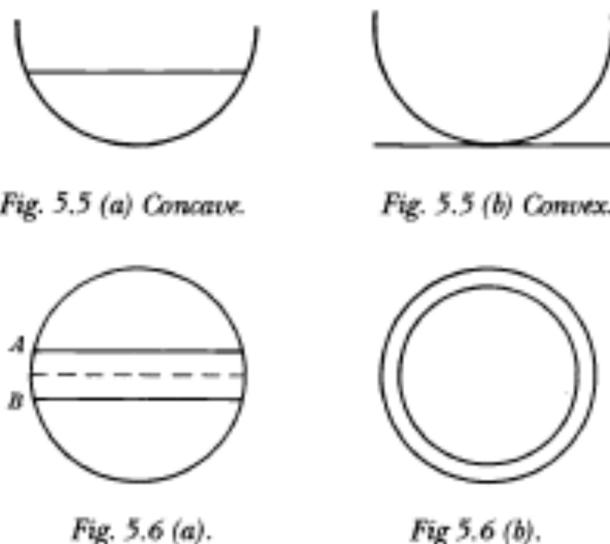


Figura 14.1: Figure tratte dal libro *The shape of space* di Graham Nerlich.

Supponiamo che ci siano due recinzioni circolari sulla superficie del pianeta (come cerchi di latitudine sulla terra). In Fig. 14.1, la Fig. 5.6 mostra questi recinti da una

elevazione perpendicolare al piano dell'equatore (linea tratteggiata), poi da un'altra elevazione parallela al piano equatoriale, sebbene da questo punto di vista un cerchio sia nascosto. Ogni recinzione definisce due spazi contraibili<sup>24</sup>: ovunque il pesce nuoti, sarà all'interno di un recinto (in realtà, all'interno di entrambe le recinzioni). Quale sarà la sua esperienza?

Per il pesce, supponiamo che sia la visione sia la sua libertà di movimento siano ostacolati da una recinzione chiusa *A*. Egli scopre che il suo righello si adatta ad essa in modo concavo. (La recinzione non è un cerchio massimo.) Egli segue la recinzione tutto intorno con il suo righello, misurandone la sua circonferenza. Il righello la tocca in modo concavo ovunque, come ci aspetteremmo. Può vedere la recinzione in ogni direzione guardi. Le recinzioni s'incurva dietro di lui ovunque vada.

Supponiamo che ora superi la recinzione e si sposti nella regione tra le curve *A* e *B*. Da questo lato, il suo righello toccherà la superficie *A* in modo convesso: può oscillare. Mentre gira attorno al recinto da questo lato, egli lo troverà ovunque convesso e che si incurva allontanandosi da lui.

Mentre viaggia noterà il recinto *B* che è a quanto pare è alla stessa distanza da *A* dappertutto. Supponiamo che ora vada da *A* a *B*, passando attraverso la linea equatoriale tratteggiata in fig. 5.6 (a). Egli appoggia il suo righello su *B* e — sorpresa! — scopre che oscilla. Il recinto si incurva in modo convesso da questo lato, ovunque si muova lungo di esso. Constata che la lunghezza del recinto *B* è la stessa di *A*. Questo non potrebbe accadere in una regione del piano euclideo compresa tra due curve. L'esperienza metrica euclidea suggerirebbe che la recinzione *B* debba essere concava perché si arriva ad essa allontanandosi dalla recinzione *A*. Inoltre, proprio perché si arriva a *B* allontanandosi da *A* ci si aspetta che la sua lunghezza sia maggiore di quella di *A*. Ma la superficie sferica ha caratteristiche topologiche e metriche differenti da quelle del piano euclideo.

Ora lasciamo che il pesce passi attraverso la recinzione *B*. Egli si ritroverà visibilmente al suo interno. La recinzione si incurva dietro di lui e può essere vista come concava dappertutto. Esso racchiude uno spazio manifestamente contrattile. Il pesce è ancora dentro un recinto, come lo è sempre stato, e ora non c'è altro posto dove andare anche se non ha raggiunto alcun confine del mondo, nel senso di Archita e Lucrezio.

Le esperienze visive del pesce non saranno particolarmente straordinarie, fatta eccezione per alcuni effetti piuttosto strani di movimento e di distanza prospettica (cfr. Reichenbach, 1958). La visuale da dentro ciascuna recinzione non sarà particolarmente degna di nota. Quel che è invece straordinaria è l'integrazione tra le diverse percezioni visive. Entrambi i recinti appariranno convessi, quando il pesce si trova in una posizione intermedia tra i due recinti. Ma appena passerà vicino ad uno o l'altro, l'aspetto cambierà in modo insolito, un po' come quando si guarda attraverso una lente. Come gli oggetti si allontanano dal pesce lungo un percorso lineare, dapprima appariranno più piccoli in quanto l'angolo visuale si contrae nel modo usuale, ma una volta che sono oltre la distanza di un quarto di cerchio massimo, le loro dimensioni apparenti incominceranno a crescere in dimensioni, dal momento che l'angolo di visuale aumenterà. La dimensione apparente e la distanza saranno collegati in un modo molto meno semplice che nello spazio euclideo. Un analogo effetto lente ingrandito darà al pesce una visione enormemente ingrandita, riempiendo l'intero campo visivo, della parte posteriore del proprio corpo.

---

<sup>24</sup> Uno spazio è detto contrattile se può essere schiacciato con continuità in un punto.

## Vita in una 3-sfera

Qualcuno ha detto che il valore filosofico dell'esperimento mentale appena descritto è nullo, perché l'esperienza di un essere bidimensionale — se esistesse — sarebbe profondamente differente dalla nostra. Ma una tale obiezione ha poco peso. Se il modello bi-dimensionale è chiaro, allora non è molto difficile andare oltre e immaginare le nostre esperienze in uno spazio sferico tridimensionale.

Proprio come lo spazio della superficie di una sfera, detto "2-sfera", può essere definito come l'insieme dei punti equidistanti da un certo punto in un spazio euclideo tridimensionale, si definisce lo spazio, detto 3-sfera, come l'insieme dei punti equidistanti da un punto in uno spazio euclideo quadridimensionale. Questa definizione, che fa riferimento ad uno spazio di dimensione più elevata, non impedisce di poter dare una descrizione puramente interna delle forme degli spazi, secondo i metodi scoperti da Gauss (vedere sotto), né ci impegna minimamente a credere che vi sia un vero spazio a quattro dimensioni in cui la 3-sfera è immerso.

La descrizione della 3-sfera segue passo passo la descrizione della 2-sfera. Ma ora le recinzioni non sono recinti circolari, ma sferici. Le relazioni di contenimento sono però proprio come prima.

Supponiamo che un essere senziente (un abitante di quell'universo o uno di noi finito non-si-sa-come là) si svegli dentro una stanza di forma sferica e che le pareti della stanza siano un sottile guscio sferico. Chiaramente la stanza è uno spazio contrattile. Per comodità di narrazione, assumiamo che non ci sia gravità e che l'essere possa fluttuare liberamente nello spazio. Egli dispone di un righello. Inizia a esplorare questo nuovo ambiente misurando il guscio sferico dentro cui si trova. È concavo: ogni estremità del righello tocca un punto della parete, ma non il centro della sbarra. Vede il guscio curvarsi dietro di lui ovunque. Sulla base di quello che vede e misura, gli è chiaro che è all'interno di un guscio sferico di circonferenza di una data circonferenza  $c$ . Chiamiamo  $A$  questo guscio.

Adesso fa breccia nel guscio ed esce fuori. Appoggia il righello sul guscio da questo lato e vede che oscilla. La superficie è convessa, naturalmente. Si muove con attenzione sul guscio; lo trova ovunque convesso e praticamente delle stesse dimensioni che all'interno— il guscio è di spessore trascurabile. Ma, nel suo viaggio nel mondo esterno — fluttua liberamente, avevamo detto —, si accorge di un altro guscio  $B$ , ovunque alla stessa distanza da  $A$ . Più precisamente, per ogni punto su  $A$ , c'è un punto su  $B$  più vicino ad esso. La distanza tra un punto su  $A$  e il punto più vicino su  $B$  è uguale per tutte le posizioni  $A$ . Così il guscio  $B$  racchiude il guscio  $A$ . Ciascuno di essi definisce uno spazio contrattile. Lo spazio era certamente contrattile sul lato del guscio  $A$  dove l'esploratore aveva incominciato.  $B$  è un guscio dall'altro lato di  $A$ : è sia una superficie chiusa sia ad una distanza costante da  $A$ . Quindi  $B$  racchiude  $A$ .

Ora il nostro esploratore si muove da  $A$  a  $B$  e appoggia il suo righello sul guscio. Oscilla! Il guscio  $B$  è ovunque convesso e si incurva lontano in tutte le direzioni. La sua circonferenza esterna risulta la stessa di  $A$ . Eppure i gusci sono ovunque alla stessa distanza. Ogni punto su  $B$  ha un punto più vicino su  $A$  e tutte queste coppie di punti sono alla stessa distanza. Di sicuro, questa combinazione di cose non potrebbe accadere in uno spazio euclideo. Ora l'esploratore fa breccia nel guscio  $B$  e si ritrova dentro di esso. Sarà leggermente meno in circonferenza da questo lato che dall'altro. Tutto intorno a lei sarà perfettamente visibile: è solo uno spazio delle dimensioni di una stanza. Il righello si

adatta al guscio, da questo lato, in modo concavo, come nella stanza dove aveva incominciato. E, ovviamente, gli si incurva attorno in ogni punto. Così il guscio *B* racchiude il guscio *A* nel senso che entrambi sono spazi contrattili nel punto da cui ha iniziato. Ma il guscio *A* racchiude anche il guscio *B*; entrambi gli spazi sono contrattili nel punto in cui finisce. Non può uscire da entrambi i gusci, anche se può passare dall'uno all'altro. Semplicemente, non c'è nessuna altra parte "al di fuori" dove andare. L'intero spazio è stato attraversato in un tempo piuttosto breve.

La visione in questo spazio a tre dimensioni sarà strettamente analoga alla visione nella superficie di una sfera descritta prima. Sembra che ci sia poco senso nel ripetere le caratteristiche menzionate allora; non c'è motivo di pensare che la proiezione prospettica su un piano retinico riveli qualche nuovo fenomeno sorprendente di percezione.

## L'universo di Dante

Nel Paradiso, Dante si avvicina alla domanda di Archita e Lucrezio (e probabilmente di tutti i bambini di tutti i tempi e luoghi): l'universo ha un confine? Egli descrive la sua ascesa, sfera per sfera, fino al Primo mobile, al di là del quale c'è l'Empireo, sede di Dio e degli angeli. Ciascun semi-universo, su entrambi i lati del Primo mobile, è composto da nove sfere concentriche che prima aumentano di diametro e poi diminuiscono. Dante è confuso su questo e Beatrice gli dà una spiegazione nel Canto *XV III*.<sup>25</sup>

In un articolo pubblicato sull'*American Journal of Physics* nel 1979, il fisico Mark Peterson, ripropone un'idea suggerita per la prima volta nel 1925 dal matematico tedesco Andreas Speiser (1885-1970) nel suo *Klassische Stücke der Mathematik*. L'idea è che l'unico

---

25

Distante intorno al punto un cerchio d'igne  
si girava sì ratto, ch'avria vinto  
quel moto che più tosto il mondo cigne;  
e questo era d'un altro circumcinto,  
e quel dal terzo, e 'l terzo poi dal quarto,  
dal quinto il quarto, e poi dal sesto il quinto.  
Sopra seguiva il settimo sì sparto

150

già di larghezza, che 'l messo di luno  
intero a contenerlo sarebbe arto.  
Così l'ottavo e 'l nono; e chiascheduno  
più tardo si movea, secondo ch'era  
in numero distante più da l'uno;  
e quello avea la fiamma più sincera  
cui men distava la favilla pura,  
credo, però che più di lei s'invera.  
La donna mia, che mi vedea in cura  
forte sospeso, disse: "Da quel punto  
depende il cielo e tutta la natura.

... "

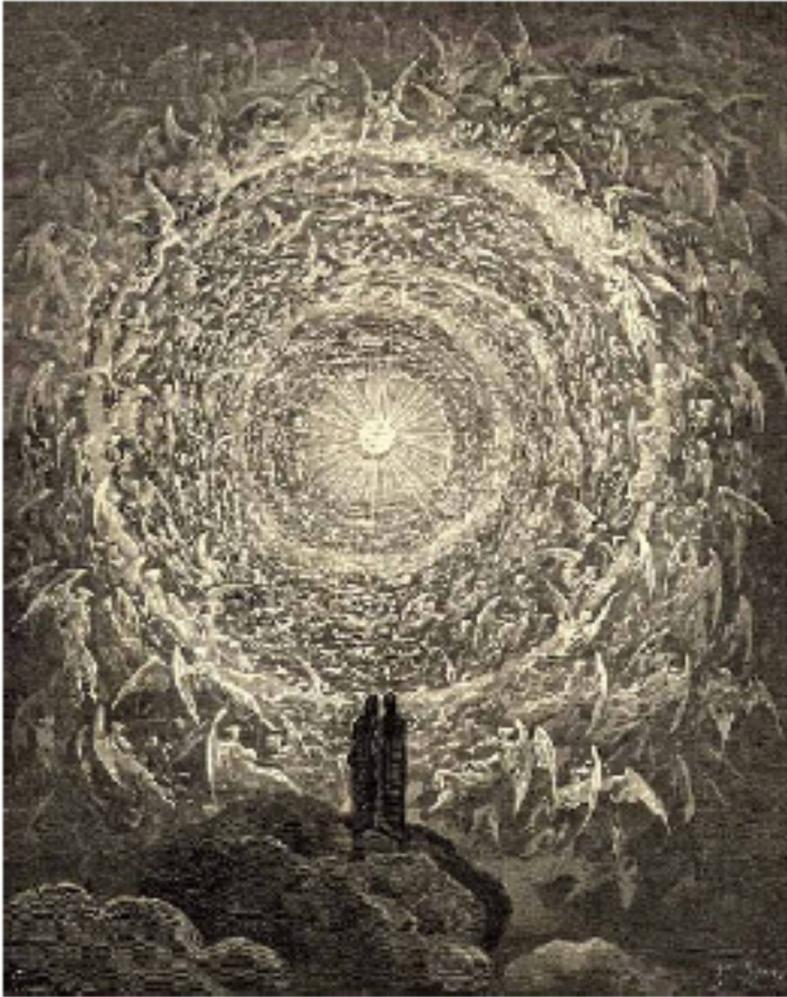


Figura 14.2: Dante e Beatrice contemplanò l'empireo, Gustave Doré, 1868.

modo di dare senso all'universo descritto da Dante nella Divina Commedia è in termini di una 3-sfera.

Pensiamo al pesce nella 2-sfera che passa dal Polo Nord al Polo Sud. Nel suo viaggio attraverserà cerchi concentrici (i paralleli) di dimensioni crescenti fino a raggiungere l'Equatore. Da allora i circoli inizieranno a diminuire di dimensioni. Il mondo di Dante è, però, tridimensionale, e piuttosto che cerchi, attraversa delle sfere, proprio come succede nella 3-sfera: man mano che si ascende dalla Terra alle sfere celesti, queste aumentano di diametro e poi diminuiscono. Il punto interessante che Beatrice spiega a Dante è che le sfere hanno un grado, una "grandezza" che non corrisponde alla loro dimensione, ma che è indicata dalla loro velocità. Mentre i diametri aumentano e poi diminuiscono, la velocità di rotazione delle sfere aumenta costantemente come si attraversa il Primo Mobile.

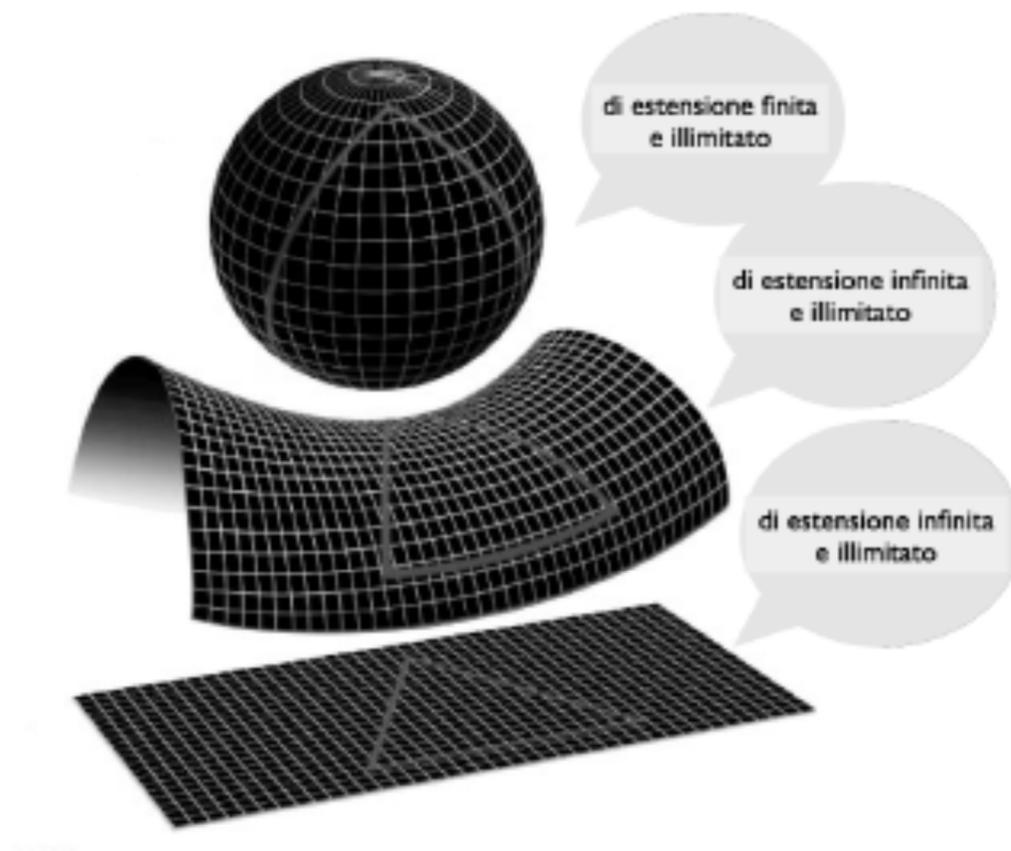


Figura 14.3: Le tre possibili forme dell'universo.

## La forma dell'universo

Secondo la cosmologia contemporanea, sotto l'ipotesi che la materia nell'universo sia distribuita in modo omogeneo e isotropico, le possibili forme geometriche dell'universo sono solo 3. Ciò che li distingue è un parametro che, matematicamente, rappresenta la curvatura dello spazio e, fisicamente, la densità della materia. Queste tre possibilità sono visualizzate in figura 14.3 nella loro forma bidimensionale (naturalmente, per rappresentare lo spazio fisico, bisognerà passare ai loro analoghi tridimensionali):

- (1) Una 3-sfera (in alto in figura). Questo spazio è illimitato ma di estensione finita. La somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti.
- (2) Una 3-pseudosfera (in mezzo) Questo spazio è illimitato e estensione infinita (ce ne occuperemo in seguito). La somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti.
- (3) Lo spazio euclideo, infinito e illimitato. La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti.

# 15 L'APPROCCIO ASSIOMATICO

## Indice

La geometria come scienza empirica	134
L'approccio assiomatico alle geometrie non euclidee	136
Dimostrazioni di coerenza	137
L'interpretazione euclidea di Beltrami	138
L'approccio di Gauss e Riemann	140
Riflessi sulla concezione kantiana	140

Secondo la scienza moderna, quale sia la geometria appropriata per rappresentare le proprietà spaziali del mondo fisico è un problema empirico. In questo senso la geometria fisica è decisamente una scienza a posteriori. Il percorso che portò a questa consapevolezza è stato abbastanza tortuoso ed è avvenuto per lo più all'interno della scienza del Diciannovesimo secolo. Con questo capitolo incominciamo a tratteggiare tale sviluppo ed indicarne le tappe salienti.

## La geometria come scienza empirica

Heinrich Olbers (1758–1840) è stato un medico tedesco, molto conosciuto per l'attività di astronomo, che gli permise di conseguire notevoli risultati. È noto per un famoso paradosso che prende il suo nome e che Olbers propose nel 1826: **come è possibile che il cielo notturno sia buio nonostante l'infinità di stelle presenti nell'universo?** (In realtà il paradosso era già stato descritto da Keplero nel 1610). I presupposti di base perché il paradosso sia tale sono: che l'universo abbia estensione infinita; che l'universo esista da tempo infinito e sia immutabile; che l'universo sia omogeneo e isotropo, ovvero le stelle siano disposte in modo uniforme nello spazio. Il paradosso (che fu risolto nel Ventesimo secolo con l'ipotesi di espansione dell'universo) rimanda ad un rapporto tra fisica e geometria ben più intricato di quanto si ritenesse nei secoli precedenti.

Nel Diciannovesimo secolo nacque la consapevolezza che la geometria dovesse essere considerata una scienza empirica e validata **a posteriori**, come per tutte le scienze empiriche. Il carattere empirico della geometria era chiaro a Gauss nel 1817, quando così scriveva a Olbers:

*Mi persuado sempre di più che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata, non, per lo meno, dall'intelletto umano o per l'intelletto umano. Può darsi che in una diversa vita noi si giunga, sulla natura dello spazio, ad idee diverse, le quali ci sono per ora inattingibili. Ma fino da allora è necessario porre la geometria non accanto all'aritmetica, la*

*quale è puramente a priori, ma all'incirca sullo stesso piano della meccanica.*

Nel 1818 Gauss, a quel tempo direttore dell'Osservatorio di Göttingen, ricevette l'incarico di fare un grande progetto di rilevamento cartografico con lo scopo di ottenere una mappatura dello stato di Hannover. Gauss usò il metodo della triangolazione (cfr. il capitolo 5, pagina 47). Come parte di questo progetto fece le misurazioni di precisione senza precedenti di un triangolo che si estende tra tre cime. Per lungo tempo si è pensato che lo scopo teorico di queste misure fosse stato quello di verificare l'ipotesi della geometria euclidea, cioè, di stabilire se la somma degli angoli del triangolo deviava da  $180^\circ$ . Tuttavia, Gauss non ha mai effettivamente detto questo. Gauss era consapevole che, se la questione poteva essere decisa empiricamente, sarebbe stato necessario ricorrere a misure di distanze molto più grandi su scala astronomica, come le distanze stellari. In risposta ad una lettera di Gauss del 1829, l'astronomo tedesco Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) ammise che

*La nostra geometria è incompleta e deve essere supplementata da con una correzione ipotetica che scompare nel caso in cui la somma degli angoli di un triangolo piano =  $180^\circ$  . . . Questa sarebbe la vera geometria, mentre quella euclidea è la geometria pratica, almeno per misure sulla terra.*

Che il problema della geometria **vera** — cioè fisica — fosse da risolvere in maniera empirica — cioè a posteriori — era qualcosa di cui c'era consapevolezza ancor prima che divennero note le cosiddette **geometrie non-euclidee**. Oltre alle anticipazioni di Gauss (probabilmente del 1813, ma non pubblicate), i fondatori delle geometrie non-euclidee sono stati senza dubbio il matematico ungherese János Bolyai e (1802–1860) e il matematico russo Nikolaj Ivanovic Lobachevskij (1792–1856), entrambi i quali (al contrario di Gauss) pubblicarono separatamente e in maniera indipendente le loro scoperte che una geometria diversa e valida come quella di Euclide era possibile. Mentre l'unica opera di Bolyai su quello che lui chiamava la "geometria assoluta" risale al 1831, il primo studio di Lobachevskij era di 1829, seguito nel 1840 da un libretto in tedesco, *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Anche se lavorarono in modo indipendente e in un isolamento quasi totale, le due teorie erano notevolmente simili. Entrambi credevano che la verità della geometria euclidea era una domanda da determinare empiricamente. Bolyai terminò il suo lavoro ricordando che non è possibile decidere soltanto attraverso il ragionamento matematico se la geometria del mondo fisico è euclidea o non euclidea; questo è un compito per la fisica. Analogamente, Lobachevskij in un suo lavoro del 1835 sosteneva che la verità della geometria, quella euclidea o quella non euclidea,

*può essere verificata solo, come tutte le altre leggi di natura, in modo sperimentale, ad esempio mediante osservazioni astronomiche.*

## L'approccio assiomatico alle geometrie non euclidee

Nelle geometrie di Bolyai e Lobachevskij non vale il quinto postulato di Euclide. Il punto cruciale per comprendere perché le geometrie non-euclidee hanno avuto un certo impatto in filosofia, in particolare con riferimento alla dottrina kantiana dello spazio, è che la negazione del quinto postulato apre un conflitto palese con la nostra intuizione. Se da un lato — qualunque siano le nostre preferenze filosofiche — sembra naturale pensare che non deve essere la nostra intuizione a validare una teoria empirica dello spazio, essendo il problema di natura empirica, dall'altro lato, sembra altrettanto naturale concordare con Kant che la forma della nostra intuizione dello spazio è euclidea. Chiunque abbia studiato la geometria probabilmente avrà avuto questa sensazione (almeno questa è stata la mia esperienza): perché mai il quinto postulato non è un teorema dimostrabile a partire dagli altri? Una volta che mi è intuitivamente chiara la nozione di retta, non è forse intuitivamente evidente che per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela a tale retta? Come potrebbe essere diversamente?

A volte, si dice che il quinto postulato non aveva quel carattere di “evidentemente vero” a priori che avevano gli altri postulati e assiomi di Euclide e quindi che negli oltre duemila anni successivi alla diffusione degli *Elementi* di Euclide, molti sono stati i tentativi di dimostrarlo, o di riformularlo e sostituirlo con altri equivalenti. Mi sembra che esattamente il contrario sia vero: proprio perché intuitivamente non si riesce a concepirne alternative, che si è cercato di dimostrarlo! Tuttavia tali tentativi sono falliti in quanto i ragionamenti riconducevano sempre all'uso del postulato stesso. Nei primi decenni del Diciannovesimo secolo, il fallimento di tutti i tentativi effettuati aveva convinto i matematici dell'impossibilità di dimostrare il quinto postulato. È da questo momento che inizia a farsi strada l'idea di costruire altre geometrie che ne facciano a meno. Nascono così le prime geometrie non euclidee e i loro modelli, inizialmente per dimostrarne l'inconsistenza e quindi, per assurdo, per dimostrare il quinto postulato.

Tra i tentativi più interessanti di dimostrare per assurdo il quinto postulato va senza dubbio ricordato il lavoro del gesuita e matematico italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733). La sua dimostrazione non era corretta, ma molti dei suoi teoremi lo erano e successivamente si rivelarono utili per comprendere come stavano le cose. Tra le riformulazioni del quinto postulato, menzioniamo quella proposta nel 1795 dal matematico scozzese John Playfair (1748–1819):

**(v<sub>p</sub>) Per un dato punto, può essere tracciata esattamente una sola retta parallela ad una data retta (non contenente il punto).**

(In effetti, il postulato di Playfair è più restrittivo di quello di Euclide.)

La negazione di v<sub>p</sub> comporta solo due alternative logicamente possibili:

(v<sub>ness.</sub>) Per un dato punto, non può essere tracciata alcuna retta parallela ad una data retta.

(v<sub>molte</sub>) Per un dato punto, si possono tracciare più rette parallele a una data retta.

La sostituzione del quinto postulato con uno di questi porta a geometrie che in seguito vennero dette **non euclidee**. La geometria in cui il postulato v è sostituito da v<sub>ness.</sub> è detta **ellittica**, quella in cui è sostituito da v<sub>molte</sub> è detta **iperbolica**. Si veda la figura 15.1. La nuova geometria introdotta da Lobachevskij e Bolyai è la geometria iperbolica, mentre la geometria ellittica fu introdotta successivamente da Riemann.

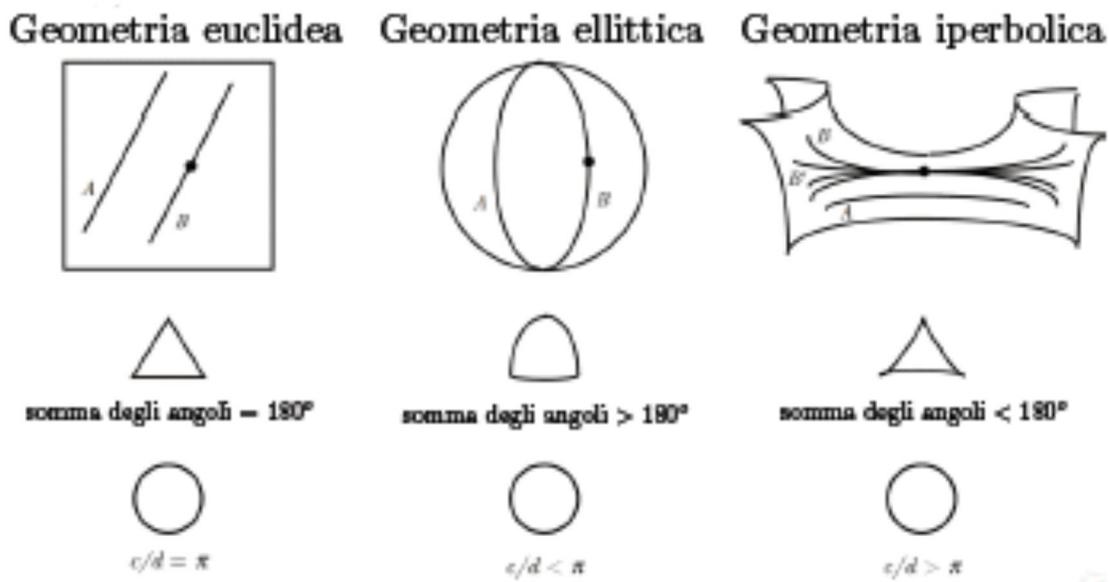


Figura 15.1: Confronto tra le geometrie euclidea, ellittica e iperbolica.

## Dimostrazioni di coerenza

Solitamente, quando si trattano le geometrie non-euclidee, si mette in evidenza il problema della coerenza o consistenza dei sistemi assiomatici ottenuti sostituendo il postulato  $v$  di Euclide con  $v_{ness}$ , o con  $v_{molte}$ . Un sistema assiomatico è coerente o consistente quando gli assiomi e le definizioni di base non generano contraddizioni. Per dimostrare la coerenza di un sistema assiomatico formale, se ne fornisce un **modello**. Un modello di un sistema assiomatico formale è una qualunque interpretazione (cioè l'assegnazione di significato) dei termini primitivi tale che gli assiomi diventino enunciati veri. Se si riesce a far questo si ha quindi una dimostrazione di coerenza del sistema assiomatico. Possono darsi diversi tipi di modelli, i quali testimoniano in diversi gradi la coerenza di un sistema. Alcuni sono semplici, fisici, concreti e comprensibili fino all'ultimo particolare e riescono a dimostrare la coerenza **assoluta** di un sistema, altri si limitano a trasferire la questione della coerenza da un sistema ad un altro e forniscono una dimostrazione di coerenza detta **relativa**.

La coerenza della geometria ellittica è pressoché immediata: la 2-sfera e la 3-sfera sono "sostanzialmente" modelli per questa geometria. Questo si vede facilmente per la 2-sfera con il disegno di figura 15.1: le rette sono cerchi massimi e dato un punto esterno ad una retta non ci sono parallele che passano per esso in quanto le rette che passano per esso intersecano sempre la retta data. Quindi nella geometria ellittica non esistono rette parallele.<sup>26</sup> Si osservi che in questo modo si ottiene una dimostrazione di coerenza della

<sup>26</sup> Questo pone un problema. In geometria piana, si dimostra, senza fare uso del postulato  $v$  di Euclide che per un punto passa almeno una parallela ad una retta data (Proposizione 31 degli elementi di Euclide). Questo dimostra che se si nega il postulato  $v$  di Euclide, allora, potrebbe essere necessario modificare anche altri assiomi del corpo teorico per rendere la teoria coerente. Questi problemi furono affrontati e risolti da Felix Klein (1849–1925) che nel 1871 diede una dimostrazione completa di coerenza della geometria ellittica.

geometria ellittica **relativa** alla geometria euclidea (in quanto le proprietà metriche della 2-sfera sono quelle dello spazio euclideo in cui la 2-sfera è immersa).

Analoga fu la dimostrazione di coerenza della geometria iperbolica data da Eugenio Beltrami (1836–1900) nel 1868. Il lavoro di Beltrami s'intitola *Saggio di interpretazione della geometria non Euclidea*. In esso, Beltrami osserva che le **geodetiche** — le linee di minore distanza — di una superficie a curvatura negativa costante, la cosiddetta **pseudosfera** di Beltrami (si veda la figura 15.2), possiedono le proprietà che sono assunte come assiomi delle rette indicate nella geometria iperbolica piana. Si osservi che nel titolo del lavoro di Beltrami appare la parola "interpretazione"; in effetti, questo apre la strada alla nozione moderna di *interpretazione* mediante un modello di un sistema assiomatico, nel senso a cui abbiamo accennato sopra.

## L'interpretazione euclidea di Beltrami

Si potrebbe pensare che dopo il lavoro di Beltrami del 1868, fosse naturale che bisognasse rispondere negativamente alla domanda (K) di pagina 54. Contrariamente ad una mitologia cresciuta nella filosofia della scienza del Ventesimo secolo, neppure Beltrami giunse a questa conclusione.

In effetti, si deve riconoscere che la negazione di uno dei postulati della geometria euclidea non porti a contraddizioni e permetta la formulazione di una teoria coerente è in pieno accordo con il carattere **sintetico** che Kant attribuisce a tali postulati. Per Kant, la loro necessità non è di tipo logico, cioè la loro negazione non viola il principio di contraddizione. Se ciò accadesse non sarebbero più sintetici, ma analitici, e per Kant le proposizioni della geometria euclidea sono sintetiche e non analitiche.

La dimostrazione di coerenza di Beltrami, dunque, anziché esserne una confutazione, porta acqua al mulino della concezione kantiana. E lo fa in un senso forte: la dimostrazione di coerenza della geometria iperbolica piana di Beltrami è **relativa** alla geometria euclidea, nel senso che ne viene fornita un'interpretazione in termini di geometria euclidea (si veda la figura 15.2).

È utile dare un'occhiata a come Beltrami stesso interpreta i suoi risultati. In un articolo dello stesso anno in cui analizza la geometria iperbolica di ipersuperfici a curvatura costante negativa in spazi di dimensione arbitraria<sup>27</sup>, scrive:

*Così tutti i concetti della geometria non euclidea trovano un perfetto riscontro nello spazio di curvatura costante negativa. Solamente fa d'uopo osservare che mentre quelli relativi alla semplice planimetria ricevono in tal modo un'interpretazione vera e propria, poiché diventano **costruibili** sopra una superficie **reale**, quelli all'incontro che abbracciano tre dimensioni non sono suscettibili che di una rappresentazione analitica, poiché lo spazio in cui tale rappresentazione verrebbe a concertarsi è diverso da quello cui generalmente diamo tal nome. Per lo meno, l'esperienza non sembra essere messa d'accordo coi risultati di questa geometria più generale, se non si suppone infinitamente grande la costante  $R$ , cioè **nulla** la curvatura dello spazio; il che peraltro potrebbe non essere dovuto che alla piccolezza dei triangoli che noi possiamo misurare, ossia alla piccola*

<sup>27</sup> E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, Annali di matematica pura ed applicata (1868-69).



Figura 15.2: La pseudosfera di Beltrami è una superficie di rivoluzione generata dalla rotazione della trattrice intorno al suo asintoto. È chiamata pseudosfera perché la sua curvatura  $k$  è costante in ogni punto e opposta a quella di una sfera di raggio  $R$  ( $k = -1/R^2$ ). [ Nota. La **trattrice** è una particolare curva geometrica, definita dall'equazione  $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ , con condizione iniziale  $y(a) = 0$ . Fu introdotta per la prima volta da Claude Perrault nel 1670, e studiata in seguito da Isaac Newton nel 1676 e da Christian Huygens nel 1692.]

*estensione dello spazio a cui le nostre osservazioni si estendono, non altrimenti da ciò che accade per le misure prese sopra una piccola parte di superficie terrestre, la precisione delle quali non è sufficiente a mettere in evidenza la sfericità del globo.*

In breve, Beltrami trae le seguenti morali:

- (1) La geometria iperbolica piana può essere ridotta — che è molto più che “essere interpretata” — alla geometria della superficie della pseudosfera, che è **reale**, in quanto è una superficie dello spazio euclideo, che è reale.

- (2) Si può costruire uno spazio tridimensionale iperbolico come una ipersuperficie in uno spazio euclideo quadri-dimensionale, ma questo non è l'usuale spazio euclideo (ha una dimensione in più).
- (3) Si potrebbe comunque ipotizzare che questa geometria tri-dimensionale iperbolica sia una possibilità per lo spazio fisico, ma a patto che la costante che ne caratterizza la curvatura sia tale da renderla praticamente indistinguibile dall'usuale geometria euclidea dell'esperienza ordinaria.

## L'approccio di Gauss e Riemann

L'approccio di Gauss e Riemann alla geometria fu profondamente diverso — e molto più fecondo — dell'approccio assiomatico. Gauss fu il primo a capire che la geometria non-euclidea di una superficie poteva essere caratterizzata in modo *intrinseco*, cioè senza fare riferimento allo spazio euclideo in cui la superficie è immersa.

Riemann portò le idee di Gauss alle loro logiche conseguenze fornendo gli strumenti per descrivere uno spazio geometrico non euclideo senza dover fare riferimento ad uno spazio euclideo esterno in cui tale spazio è immerso. Questo è, ovviamente, molto rilevante per la geometria empirica, perché rende possibile agli abitanti di uno spazio determinarne la geometria senza dover fare riferimento ad uno spazio euclideo "esterno", ma misurando solo angoli e distanze *nello* spazio in cui vivono (come per i pesci del capitolo 14).

Ci occuperemo dei contributi di Gauss e Riemann nei capitoli successivi, per il momento ci limitiamo a sottolineare che la nuova geometria di Riemann include le geometrie non euclidee, ma anche altre geometrie che non possono essere ottenute semplicemente modificando il quinto postulato di Euclide. Essa fornisce dunque strumenti per concepire lo spazio che vanno molto al di là di quelli forniti dall'approccio assiomatico. Essa, inoltre, non si basa su un sistema assiomatico non interpretato la cui coerenza è dimostrata fornendone un modello euclideo come fece Beltrami: la coerenza di questa geometria non ha bisogno di alcun riferimento ad un spazio euclideo "esterno".

In breve, soltanto con la geometria di Riemann si ha un superamento definitivo dell'idea che lo spazio euclideo fosse un presupposto fondamentale per qualunque teoria dello spazio.

## Riflessi sulla concezione kantiana

Per Kant non possiamo sapere se l'universo sia spaziale "in sé stesso", euclideo o non-euclideo o altro. Tempo e spazio sono qualcosa che è fornito dalle nostre facoltà cognitive. Per Kant, dire che cosa è davvero il caso significa dare giudizi oggettivi sul mondo degli oggetti fenomenici. Se scopriamo che l'universo è in realtà, oggettivamente (in senso kantiano), non euclideo quando la nostra intuizione spaziale suggerisce che è euclideo, allora qui c'è un conflitto tra le facoltà di comprensione (intelletto) e l'intuizione. Alla luce di quanto abbiamo discusso in questo capitolo e nel capitolo precedente, si può facilmente vedere che cosa questo significhi: la negazione del postulato delle parallele viola la nostra intuizione (a meno di non modellare la nuova geometria all'interno di geometria euclidea,

come fece appunto Beltrami per una superficie iperbolica); ma non produce alcuna incoerenza logica. E in effetti questo è il punto fondamentale di Kant nel chiamare la nostra percezione dello spazio euclideo "intuizione": **non ho altra base per il postulato delle parallele** — non posso argomentare per esso seguendo un principio di logica o aritmetica; né posso argomentare a suo favore sulla base di scoperte a posteriori della fisica sulla natura del mondo.

Nulla dice che la nostra intuizione spaziale debba essere **corretta**, sia nel senso metafisico di cosa-in-sé, o nel senso kantiano di essere sempre confermata da livelli superiori di giudizi teorici dell'intelletto, come quelli della fisica. E quanto segue resta comunque un fatto: dal punto di vista della scienza cognitiva, noi percepiamo il mondo in termini euclidei. Nessuna scoperta al di fuori della scienza cognitiva potrebbe cambiare il fatto che questo è il modo in cui intuiamo il mondo. Tutto questo è un modo per dire che lo spazio della fisica **non è** la stessa cosa dello spazio dell'esperienza ordinaria (il primo è concettuale e a posteriori, quest'ultimo è intuitivo e a priori).

Se la geometria non euclidea fornisce una concezione dello spazio più adeguata, questo non significa che Kant deve rivedere il suo concetto di intuizione come spazio euclideo; deve piuttosto rivedere la sua concezione del rapporto tra l'intelletto e l'intuizione — rendendo conto della possibilità di conflitto e della possibilità di una concezione dello spazio a posteriori non-intuitiva. Questo conflitto tra l'intelletto e l'intuizione non è qualcosa che Kant aveva previsto — e dubito che gli sarebbe piaciuto.

## 16 L'APPROCCIO DI GAUSS E RIEMANN

### Indice

La nozione di curvatura intrinseca	142
Il "Theorema Elegantissimum"	143
Il "Theorema Egregium"	144
Riemann e la ridefinizione della geometria	146
Il concetto di grandezza molteplicemente estesa	148

### La nozione di curvatura intrinseca

Per stabilire in modo sperimentale quale sia la geometria dello spazio, occorre disporre di teorie che chiariscano che cosa siano e quali siano le "forme" possibili dello spazio. Nessuno più di Gauss e Riemann ha contribuito a chiarire queste nozioni. Le parole-chiave sono **curvatura** e **geometria intrinseca di uno spazio**.

Se si prende un pezzo di carta e lo si piega delicatamente, esso si piega in una sola direzione alla volta. In qualsiasi punto della carta, è possibile trovare almeno una direzione attraverso la quale vi è una linea retta sulla superficie. Si può piegarlo in un cilindro, o in un cono, ma non si può mai piegarlo senza sguaiarlo o distorcerlo per ottenere una porzione della superficie di una sfera. Analogamente, se si prende la buccia di una sfera, non si può appiattirla sul piano senza distorsioni o ripiegamenti. Nemmeno una piccola zona della buccia di una sfera può essere appiattita senza alcuna distorsione, anche se la distorsione è molto piccola per un piccolo pezzo della sfera. Ecco perché le mappe di piccole aree della Terra sono abbastanza fedeli, ma le mappe delle aree più grandi sono costrette ad avere notevoli distorsioni.

Le descrizioni fisiche di ciò che accade quando si piegano diverse superfici senza distorsioni hanno a che fare con la geometria intrinseca delle superfici e la geometria intrinseca ha a che fare con le proprietà geometriche che possono essere rilevate da misurazioni lungo la superficie, senza considerare lo spazio circostante.

C'è un modo per spiegare la struttura geometrica intrinseca di una superficie che dice quando una superficie può o non può essere piegata in un'altra. Il concetto fu messo a punto da Gauss ed è chiamato la **curvatura gaussiana** di una superficie, o spesso semplicemente la curvatura di una superficie. Questo tipo di curvatura non deve essere confusa con la curvatura di una curva. La curvatura di una curva è una proprietà geometrica estrinseca, che racconta come la curva è piegata nel piano o nello spazio. La curvatura gaussiana è una proprietà geometrica intrinseca: rimane la stessa, non importa quanto una superficie sia piegata, purché non sia distorta, né allungata o compressa.

Per avere una idea qualitativa di come funziona la curvatura, ecco alcuni esempi. Una superficie che sporge in tutte le direzioni, come la superficie di una sfera, ha una

curvatura positiva. Un test rozzo per la curvatura positiva è che se si prende qualsiasi punto della superficie, c'è un piano che tocca la superficie in quel punto tale che la superficie si trova tutta su un lato, tranne che in quel punto. Non importa come (gentilmente) piegate la superficie, la proprietà rimane. Un foglio di carta, o la superficie di un cilindro o cono, ha curvatura nulla. Una superficie a sella ha curvatura negativa: ogni piano passante per un punto della sella effettivamente interseca la superficie della sella in due o più parti.

La curvatura gaussiana è una quantità numerica associata ad una area di una superficie ed è strettamente legata alla nozione di difetto angolare di un vertice di un poliedro. Ricordiamo che il difetto angolare di un vertice di un poliedro è la quantità che manca alla somma degli angoli delle facce intorno al vertice per formare un angolo giro. Per esempio, in un vertice di un cubo ci sono tre angoli di  $\pi/2$ , cosicché il difetto angolare è  $2\pi - 3 \times (\pi/2) = \pi/2$ . Si può visualizzare il difetto angolare tagliando lungo un bordo in quel vertice, e poi appiattendolo intorno del vertice nel piano. Si formerà un'apertura dove è la fessura; l'angolo di cui si apre è il difetto angolare. Se la somma degli angoli supera l'angolo giro, come succede per molti (non tutti) poliedri non convessi, allora il difetto è negativo. Se un poliedro è convesso, allora i difetti di tutti i suoi vertici sono positivi.

La curvatura gaussiana totale di una regione di una superficie è l'angolo con cui il suo contorno si apre quando la regione è appiattita. Da questa nozione, mediante un processo di limite, si può passare alla nozione di curvatura in ogni punto della superficie. Non entriamo nei dettagli tecnici di questa procedura, la cui teoria generale fu presentata nel saggio *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato da Gauss nel 1828. Osserviamo solo che la superficie di una 2-sfera di raggio  $R$  ha una curvatura costante, cioè la stessa per ogni punto della superficie, pari a  $1/R^2$ , mentre un piano ha curvatura 0.

## II "Theorema Elegantissimum"

Un teorema notevole è quello che Gauss chiamò "*Theorema Elegantissimum*". Questo teorema vale per superfici di curvatura variabile, ma, per evitare tecnicismi, lo enunceremo solo per il caso particolare di superfici a curvatura costante. Il teorema riguarda i triangoli **geodetici** su una superficie, cioè i triangoli i cui lati sono curve di minima distanza —cioè segmenti di cerchi massimi—, e stabilisce che

$$\text{curvatura} = \frac{(\text{somma degli angoli del triangolo}) - \pi}{\text{area del triangolo}}$$

Si osservi che se applichiamo questa formula a una 2-sfera di raggio 1, si ottiene

$$\text{area del triangolo sferico} = (\text{somma degli angoli del triangolo}) - \pi ,$$

il che significa che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di  $\pi$ , un fatto noto al matematico alessandrino Menelao, vissuto intorno al primo secolo d.C., che aveva scritto un trattato di geometria sferica e introdotto la nozione di triangolo sferico, i cui lati sono segmenti di cerchi massimi. La formula precedente per l'area di un triangolo sferico fu scoperta dal matematico e astronomo inglese Thomas Harriot (1560–1621).

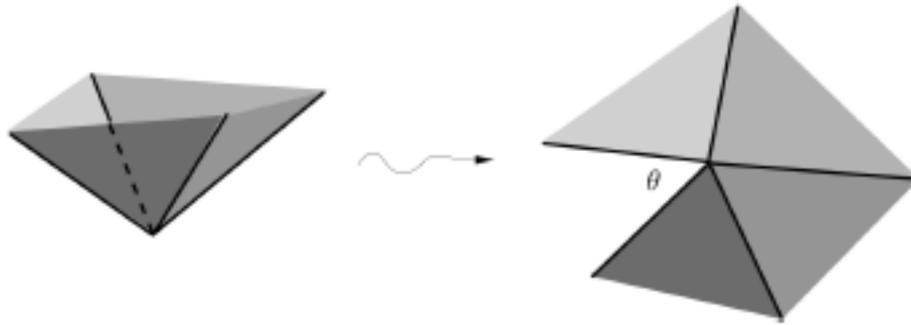


Figura 16.1: Piramide (rovesciata) con 4 lati aperta nel vertice. L'angolo  $\theta$  è il difetto angolare nel vertice.  $2\pi - \theta$  è una misura della "curvatura" della piramide nel vertice.

Si osservi inoltre che dalla formula per la curvatura di Gauss, segue che

- (1) curvatura positiva  $\Rightarrow$  somma degli angoli del triangolo  $> 180^\circ$ ,
- (2) curvatura negativa  $\Rightarrow$  somma degli angoli del triangolo  $< 180^\circ$ ,
- (3) curvatura nulla  $\Rightarrow$  somma degli angoli del triangolo  $= 180^\circ$ ,

che sono proprio i tre casi considerati alla fine del capitolo precedente e illustrati in figura 14.3. Inoltre, la geometria corrispondente a (2) è proprio la geometria non-euclidea scoperta indipendentemente da Bolyai e Lobachevskij a distanza di pochi anni dalla pubblicazione del saggio di Gauss.

## II 'Theorema Egregium'

Uno dei teoremi più importanti del saggio del 1828, chiamato da Gauss "*Theorema Egregium*", stabilisce che la curvatura gaussiana di una superficie può essere determinata solo dalla misura di angoli, distanze e loro variazioni sulla superficie stessa, senza ulteriore riferimento al particolare modo in cui la superficie è immersa nello spazio euclideo tridimensionale. Così la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco di una superficie. Gauss presentò il teorema in questo modo (tradotto dal latino): "Se una superficie curva si sviluppa su qualsiasi altra superficie, la misura della curvatura in ogni punto rimane invariata." In linguaggio moderno, il teorema può essere enunciato dicendo che la curvatura gaussiana di una superficie è invariante per trasformazioni locali isometriche (cioè tali da lasciare invariata la distanza).

Come corollario del "Theorema Egregium", risulta spiegato il fatto empirico da cui siamo partiti: un pezzo di carta non può essere piegato su una sfera senza accartocciarsi. Viceversa, la superficie di una sfera non può essere dispiegato su un piano piatto senza distorcere le distanze. Questo perché il piano ha curvatura 0 e la superficie della sfera ha curvatura  $1/R^2$ . Se si schiaccia un guscio d'uovo vuoto, i suoi bordi devono dividersi prima che si appiattisca. Matematicamente parlando, una sfera e un piano non sono isometrici, neanche localmente. Questo fatto è di enorme importanza per la cartografia: implica che nessuna mappa planare (piatta) della Terra può essere perfetta, anche per una porzione della superficie terrestre. Così ogni proiezione cartografica distorce necessariamente almeno alcune distanze.



Figura 16.2: Triangoli geodetici su una 2-sfera e su una superficie con curvatura costante negativa.

Ancora più importanti furono le ripercussioni sullo sviluppo della geometria "fisica". Anche se Gauss aveva tenuto per sé i risultati più "rivoluzionari" (la possibilità di geometrie non euclidee), il suo saggio del 1828 segnò una svolta decisiva nelle teorie sullo spazio, spostando l'attenzione sulle proprietà intrinseche delle superfici, a prescindere dallo spazio in cui sono immerse. Questo significa — con riferimento ai "pesci" del capitolo 14 — che è possibile determinare se lo spazio è una 2-sfera o un piano soltanto misurando distanze e angoli (ma non si potrebbe decidere, soltanto con misure di distanze e angoli, se si tratta di un cilindro o di un piano, avendo entrambi curvatura nulla).

Chi estese le idee di Gauss sulla geometria intrinseca delle superfici a geometrie tri-dimensionali (e più in generale  $n$  dimensionali) fu Riemann. Egli fornì gli strumenti per descrivere uno spazio geometrico "curvo" senza dover fare riferimento ad uno spazio euclideo esterno in cui tale spazio è immerso. Questo è, ovviamente, molto rilevante per la geometria empirica, perché rende possibile agli abitanti di uno spazio determinarne la geometria senza dover fare riferimento ad uno spazio euclideo "esterno", ma misurando solo angoli e distanze **nello** spazio in cui vivono.



Figura 16.3: Una conseguenza del “Theorema Egregium” è che la Terra non può essere visualizzata su una mappa senza distorsioni. La proiezione di Mercatore, qui illustrata, conserva gli angoli ma fallisce nel preservare le aree.

## Riemann e la ridefinizione della geometria

Nella sua lezione *Sulle ipotesi che sono di fondamento della Geometria del 1854*, pubblicata postuma nel 1867, Riemann gettò le basi di una geometria totalmente nuova, oggi detta geometria riemanniana, sostituendo il concetto di retta con quello metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza tra due punti. Si possono così costruire geometrie a curvatura costante, oppure che varia in ogni punto, in qualunque numero di dimensioni, ognuna corrispondente ad uno spazio geometrico caratterizzato intrinsecamente — oggi detto **varietà riemanniana  $n$ -dimensionale**.

L'obiettivo di Riemann era di ridefinire la geometria mediante una generalizzazione dello schema di Euclide. Non cambiò semplicemente i postulati, come fecero Bolyai e Lobachevskij. Probabilmente, Riemann non conosceva neanche il loro lavoro. La sua intenzione era di portare alle loro logiche conseguenze le idee di Gauss sulle proprietà geometriche intrinseche delle superfici e di utilizzarle per caratterizzare in modo intrinseco spazi di dimensione arbitraria. Fece questo costruendo il concetto di spazio sulla nozione altamente astratta di “grandezza molteplicemente estesa”.

Aprì la sua lezione con il passo seguente, che è molto citato.

*È noto che la geometria presuppone come qualcosa di dato sia il concetto di spazio che i concetti basilari per le costruzioni nello spazio. Essa dà di questi solo definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali appaiono sotto la forma di assiomi. Il rapporto tra questi postulati rimane quindi nell'oscurità, non si vede se e in che modo la loro connessione sia necessaria, né, a priori, se sia possibile.*

“Da Euclide a Legendre”, dichiara Riemann, niente è stato fatto per rimuovere questa oscurità. E continua:

*Ciò ha la sua origine nel fatto che il concetto generale di grandezza molteplicemente estesa, sotto il quale sono comprese le grandezze spaziali, rimane completamente non elaborato. Mi sono perciò proposto in primo luogo il compito di costruire il concetto di una grandezza molteplicemente estesa dal concetto generale di grandezza. Risulta così che una grandezza molteplicemente estesa è passibile di diverse relazioni metriche, e che lo spazio costituisce quindi solo un caso particolare di una grandezza triplamente estesa. Da qui segue una conseguenza necessaria, che le leggi della geometria non si possono derivare dal concetto generale di grandezza, ma che invece quelle proprietà mediante le quali lo spazio si distingue dalle altre grandezze triplamente estese pensabili possono essere ricavate solo dall'esperienza. Da ciò deriva il proposito di studiare i fatti più semplici, dai quali si possono determinare le relazioni metriche dello spazio — un proposito che per la natura della questione non è completamente determinato; invero si possono dare più sistemi di fatti semplici che sono sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio; il più importante per lo scopo presente è quello scelto per fondamento da Euclide. Queste questioni di fatto sono come tutte le questioni di fatto non necessarie, ma solo di certezza empirica, sono ipotesi; si può così studiare la loro probabilità, che entro i limiti dell'osservazione è tuttavia assai grande . . .*

Riassumendo:

- (1) Il punto di partenza di Riemann è analitico. Egli costruisce il concetto di spazio tridimensionale basandosi sulla nozione astratta di “grandezza triplamente estesa”. Questo significa che i punti di tale grandezza possono essere descritti da tre coordinate, ma questo non significa che la grandezza sia fatta da triple di numeri! Le triple di coordinate ammissibili sono infinite e sono scelte in modo arbitrario. Quel che conta è che individuano una grandezza geometrica, **non** come la individuano. Quindi il punto di arrivo è sintetico.<sup>28</sup>
- (2) Tra tutti i possibili modi in cui il numero di triple di numeri può essere strutturato, il marchio di fabbrica dello spazio è in termini di relazioni metriche, ovvero di distanze. Ma sono innumerevoli i modi in cui si può assegnare una distanza tra punti (“si possono dare più sistemi di fatti semplici che sono sufficienti a

---

<sup>28</sup> Mi riferisco alla distinzione tra geometria analitica e geometria sintetica, che mi auguro si insegni ancora nei licei.

determinare le relazioni metriche dello spazio”), come renderà esplicito più avanti nell’articolo. La nozione di distanza della geometria di Euclide è solo una tra le tante possibili.

- (3) Tutte queste possibilità portano Riemann a concludere che la scelta ultima tra tutte le possibili geometrie non può essere decisa da criteri matematici o da considerazioni generali sulla nozione di grandezza molteplicemente estesa. Solo l’esperienza può dirlo. Egli non specifica quali esperienze possono dirlo perché è “un proposito che per la natura della questione non è completamente determinato”. Perciò Riemann lascia aperta la questione del perché pensiamo di vivere in uno spazio euclideo.

## Il concetto di grandezza molteplicemente estesa

Riemann si prefigge di chiarire la nozione di grandezza molteplicemente estesa. È consapevole che questa nozione non è facile da precisare. E al lettore chiede indulgenza perché, dice: “a lavori siffatti di natura filosofica, dove la difficoltà sta più nei concetti che nella costruzione, sono poco abituato . . . e al di fuori di qualche [suggerimento di] Gauss e di alcune ricerche filosofiche di Herbart, non ho potuto avvalermi di alcun lavoro precedente.”

Quindi Riemann procede a considerare separatamente la nozione di grandezza molteplicemente estesa e le relazioni possibili delle misure di tali grandezze. Nello spiegare il significato della prima, Riemann afferma:

*Concetti di grandezza sono possibili solo se si trova un concetto generale, che ammette modi di determinazione diversi. A seconda che tra questi modi di determinazione abbia luogo dall’uno all’altro una transizione continua o no, essi costituiscono molteplicità continue o discrete; i singoli modi di determinazione si chiamano nel primo caso punti, nel secondo elementi di questa molteplicità.*

Come esempi di nozioni i cui modi di determinazione danno luogo a molteplicità continue, Riemann offre i colori e le posizioni degli oggetti. Quindi continua:

*Parti determinate di una molteplicità, distinte mediante un contrassegno od un confine, si chiamano quanti. Il loro confronto quantitativo avviene per le grandezze discrete con la numerazione, per le grandezze continue con la misura. La misura consiste in una sovrapposizione delle grandezze da confrontare; per misurare è quindi richiesto un modo di usare una grandezza come misura di paragone per l’altra.*

Riemann quindi mostra come una molteplicità continua può essere costruita. Nel fare questo parla di “concetto il cui modo di determinazione costituisce una molteplicità continua”. Per brevità e per facilitare il collegamento con la terminologia contemporanea, renderemo questa espressione con “punto in una molteplicità continua”:

*Se in una molteplicità continua si passa da un punto ad un altro, i punti attraversati costituiscono una molteplicità singolarmente estesa, della quale il carattere distintivo essenziale è: in essa è possibile un progredire continuo solo secondo due direzioni, in avanti o indietro. Se ora si pensa che questa molteplicità vada in un'altra del tutto distinta, e di nuovo di quel certo tipo, cioè in modo tale che ogni punto vada in un punto determinato dell'altra, allora tutti i punti così ottenuti costituiscono una molteplicità doppiamente estesa. In modo analogo si ottiene una molteplicità triplamente estesa, quando ci si raffigura che una molteplicità doppiamente estesa vada in un'altra completamente distinta in quel certo modo, ed è facile vedere come questa costruzione si possa ripetere.*

La definizione di Riemann è molto più vaga al confronto di quella moderna, ma ha l'importante vantaggio di essere costruttiva. I dettagli tecnici che Riemann dà più avanti nell'articolo dimostrano che la nozione moderna gli era chiara. Possiamo considerare la sua scelta di una definizione intuitiva come un'indicazione del desiderio di essere comprensibile al suo pubblico formato da scienziati, ma non necessariamente matematici esperti. Va detto che in quel tempo anche la maggior parte dei matematici avrebbero aver trovato l'idea piuttosto difficile, perché lo studio della geometria  $n$ -dimensionale era appena incominciato.

Idee riguardanti le coordinate dei punti (nel senso illustrato nella figura 16.3 per la superficie della Terra) sono introdotte in modo indiretto quando Riemann propone di decomporre una qualunque molteplicità continua in una molteplicità uni-dimensionale e in una molteplicità che ha una dimensione in meno dell'originale:

*. . . si introduca nella molteplicità data una funzione continua della posizione, e precisamente una funzione tale che non sia costante lungo una parte di questa molteplicità. Ogni sistema di punti sui quali la funzione ha un valore costante costituisce allora una molteplicità continua con meno dimensioni di quella data. Col variare della funzione queste molteplicità vanno con continuità l'una nell'altra; si può quindi assumere che da una di queste si generino le restanti, e parlando in generale, ciò può accadere in modo tale che ogni punto vada in un punto determinato dell'altra; i casi eccezionali, il cui studio è importante, possono essere qui trascurati . . . Ripetendo  $n$  volte questo procedimento la determinazione della posizione in una molteplicità ad estensione  $n$ -pla si ricondurrà ad  $n$  determinazioni di grandezza . . .*

# 17 LA GEOMETRIA DEI LUOGHI

## Indice

Continuità e vicinanza	150
La topologia come teoria dei luoghi	152
Nozioni topologiche fondamentali	153
Formulazioni più astratte in termini di aperti	154
Varietà continue e differenziabili	155

Le idee di Riemann furono il germe che nell'arco di alcuni decenni portò alla concezione moderna di una molteplicità o varietà  $n$ -dimensionale. Interrompiamo la lettura della lezione di Riemann (che completeremo in un capitolo successivo) e occupiamoci di questi sviluppi della matematica a cavallo tra il Diciannovesimo e il Ventesimo secolo che portarono alla nozione moderna di varietà  $n$ -dimensionale e allo sviluppo della **topologia**.

## Continuità e vicinanza

La topologia (dal greco  $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ , luogo) è lo studio delle proprietà più elementari e più profonde dello spazio: la **continuità** e la **vicinanza**. Il punto di partenza della topologia sono le seguenti domande: Che cosa significa che in uno spazio le cose sono vicine l'una all'altra? Che cosa sappiamo di uno spazio, se conosciamo soltanto le relazioni di vicinanza tra i suoi punti?

La topologia mira a caratterizzare le possibili strutture di un insieme di punti che permettono di stabilire in che modo i punti sono vicini gli uni agli altri. La maggior parte delle strutture topologiche di base sono costruite utilizzando insiemi infiniti di punti, dove non esiste la nozione di vicinanza immediata — due punti uno accanto all'altro — ma dove tra due punti c'è sempre un continuo di regioni sempre più piccole che definiscono le relazioni di vicinanza. Il tipo di continuità di cui si occupa la topologia è come la continuità di una superficie: è quella nozione fondamentale di cose che sono vicine le une alle altre, con la possibilità di avere sottoinsiemi di punti sempre più minuscoli intorno a un punto. In un certo senso, la topologia caratterizza le **forme** geometriche, intese però come forme malleabili, flessibili, tortuose; perché tutto ciò che conta è che i punti siano vicini agli altri punti — non importa in che direzione o a quale distanza.

Consideriamo ad esempio la tazza e la ciambella di figura 17.1. Dal punto di vista della topologia, esse hanno **la stessa forma** — tecnicamente, si dice che sono omeomorfe (letteralmente, di "forma simile"). Sono entrambe dei **tori**. In topologia, la forma esatta non importa: ciò che conta è la continuità di base dell'oggetto geometrico: che cosa è

collegato a cosa, quali punti sono vicini a quali altri punti; sono queste proprietà che caratterizzano la sua **forma topologica**.

La trasformazione che fa passare da un oggetto geometrico ad un altro della stessa forma topologica è detta **omeomorfismo**. Dire che due regioni sono omeomorfe o, equivalentemente, che sono collegate da un omeomorfismo, significa che c'è una particolare corrispondenza biunivoca fra queste regioni che traduce tecnicamente l'idea intuitiva di "deformazione senza strappi" (cioè continua). È importante aver chiaro che in un omeomorfismo le distanze tra punti non sono preservate, ma accorciate, allungate e in generale distorte.

Se si pensa la tazza fatta di argilla, è possibile rimodellare la tazza e darle una forma di ciambella, senza strapparla, o romperla, o incollando eventuali bordi insieme. Una può diventare l'altra solo schiacciandola e allungandola. In questo senso, in topologia, esse hanno la stessa forma. D'altra parte, una sfera è una forma differente: non si può trasformare una ciambella in una sfera senza tagliarla; e non si può trasformare una sfera in un toro senza fare un foro in essa, o allungandola in un tubo e incollando insieme le estremità. Non è possibile trasformare l'una nell'altra senza cambiare la continuità di base della forma.

In termini un po' più precisi: prendete una sfera e fate un buco attraverso di essa per trasformarla in un toro. Se ci pensate i punti che circondano il buco della ciambella, prima erano vicini ai punti che adesso sono sul lato opposto del foro. Dopo che il foro è stato fatto, sono diventati lontani — dovete andare tutto intorno al foro per arrivare a loro, mentre prima erano proprio accanto. Così avete cambiato i rapporti vicinanza facendo quel buco. **Continuità** e **vicinanza** sono dunque due nozioni strettamente collegate tra loro. Tutta la topologia non è altro che un approfondimento di queste due nozioni.

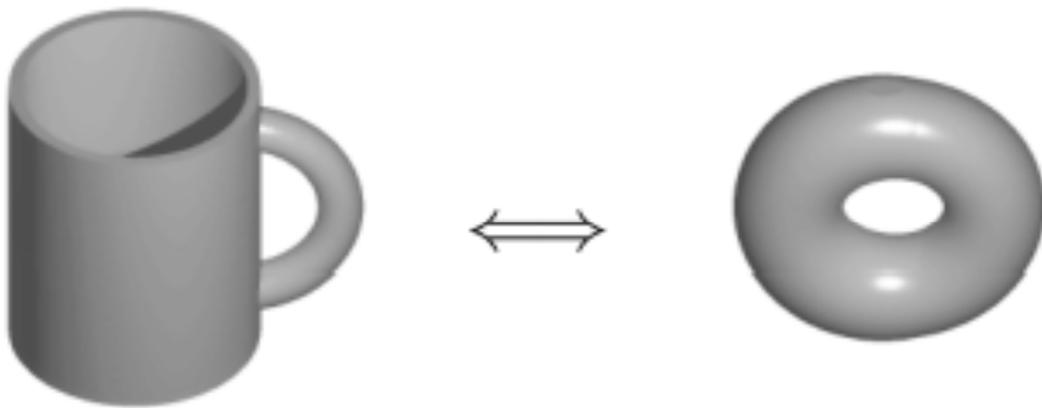


Figura 17.1: Una tazza ed una ciambella sono omeomorfe. Mediante "deformazione senza strappi", si può infatti costruire un omeomorfismo fra i due oggetti.

## La topologia come teoria dei luoghi

Cantor aveva concluso che la **non numerabilità** fosse una **condizione necessaria** per la continuità di un insieme attualmente infinito di punti. Ci si rese presto conto che non era sufficiente. Ci si può chiedere: quali sono le caratteristiche di un insieme di punti che fanno sì che esso possa essere considerato uno spazio?

Come abbiamo visto sopra, in uno spazio la nozione cruciale è quella di vicinanza. Con questa nozione fu caratterizzato il concetto di **spazio topologico**. Uno spazio topologico è un dominio dotato di una struttura sufficiente per consentire di definire una trasformazione continua dello spazio in sé stesso che permetta di identificare forme topologicamente simili. A tal fine, il concetto di spazio topologico deve quindi incarnare qualche nozione di **intorno**. È stato in termini del concetto di intorno che Felix Hausdorff (1868–1942) ha introdotto, nel 1914, il concetto di spazio topologico.

Supponiamo che venga dato un insieme  $X$  di elementi che possono essere enti come punti nello spazio fisico, nel piano o in curve dello spazio  $n$ -dimensionale, numeri reali o complessi, anche se non facciamo alcuna ipotesi sulla loro esatta natura. Gli elementi di  $X$  saranno chiamati punti. Ora si supponga inoltre che in corrispondenza di ogni punto  $x$  di  $X$  venga data una collezione  $U_x$  di sottoinsiemi di  $X$ , i cui membri, chiamati **interni** di  $x$ , sono soggetti alle seguenti condizioni:

- (i) Per ogni punto  $x$ , c'è almeno un intorno  $U_x$  che contiene il punto  $x$ .
- (ii) L'intersezione di due interni di  $x$  contiene un intorno di  $x$ .
- (iii) Se  $y$  è un punto in  $U_x$ , esiste un intorno  $U_y$  tale che  $U_y \subseteq U_x$ .
- (iv) Se  $x \neq y$ , esistono interni  $U_x$  e  $U_y$  che non hanno punti in comune (cioè,  $U_x \cap U_y = \emptyset$ ).

La teoria che ne risulta è un **affinamento** della nozione intuitiva di vicinanza, la nozione più fondamentale alla base della nostra concezione intuitiva dello spazio.

Possiamo pensare ogni intorno  $U_x$  come un modo per determinare una nozione di vicinanza a  $x$ : i punti di  $U_x$  sono quindi detti " **$U_x$ -vicini**" a  $x$ . Usando questa terminologia, (i) può essere interpretato come l'affermazione che, per ogni intorno  $U_x$ ,  $x$  è  **$U_x$ -vicino** a sé stesso; (ii) che, per interni qualsiasi  $U_x$  e  $V_x$  di  $x$ , esiste un intorno  $W_x$  tale che qualsiasi punto  **$W_x$ -vicino** a  $x$  è sia  **$U_x$ -vicino** sia  **$V_x$ -vicino** a  $x$ ; (iii) che, per ogni punto  $y$  che è  **$U_x$ -vicino** a  $x$ , ci sono punti  **$U_y$ -vicini** a  $y$  che sono  **$U_x$ -vicini** a  $x$ ; e (iv) che due punti possono essere sempre separati, nel senso che ci sono vicini dell'uno che non sono vicini dell'altro e viceversa.

Uno spazio topologico, in breve, uno spazio, può ora essere definito come un insieme  $X$  con un'assegnazione, per ogni punto  $x$  di  $X$ , di un insieme di sottoinsiemi di  $X$  che soddisfa le condizioni (i) - (iv). Come esempi di spazi topologici abbiamo: la retta reale  $\mathbb{R}$  con gli interni che consistono di tutti gli intervalli aperti con raggi razionali centrati in  $x$ ; il piano euclideo con interni che consistono in tutti i dischi aperti con raggi razionali centrati in  $x$ ; lo spazio euclideo a tri-dimensionale spazio con interni tutte le sfere aperte con raggi razionali centrate in  $x$ . Qualsiasi sottoinsieme  $A$  di uno qualsiasi di questi spazi diventa uno spazio topologico prendendo come interni le intersezioni con  $A$  di tutti gli interni nello spazio che contiene  $A$ .

## Nozioni topologiche fondamentali

La maggior parte dei concetti topologici possono essere definite esclusivamente in termini di intorni. Così,

- (1) un **punto limite** di un insieme di punti è quel punto tale che ciascuno dei suoi intorni contiene punti dell'insieme; un punto limite di un insieme è quindi un punto che, mentre non è necessariamente nell'insieme, è comunque "arbitrariamente vicino" ad esso (è sul suo bordo, per esempio);
- (2) il **bordo** di un insieme  $A$  è l'insieme dei punti  $x$  che sono punti limite sia di  $A$  sia del suo complemento  $X \setminus A$ ;
- (3) un insieme è **aperto** se include un intorno di ciascuno dei suoi punti e **chiuso** se contiene tutti i suoi punti limite (si dimostra facilmente che gli insiemi chiusi sono proprio i complementi degli insiemi aperti);
- (4) uno spazio o un sottoinsieme di uno spazio è chiamato **compatto** se ogni insieme infinito di punti ha un punto limite (perciò i punti della retta euclidea non formano un insieme compatto perché l'insieme infinito dei numeri interi positivi non ha punti limite).
- (5) un insieme è detto connesso se non importa come sia diviso in due insiemi disgiunti, almeno uno di questi contiene punti limite dell'altro.

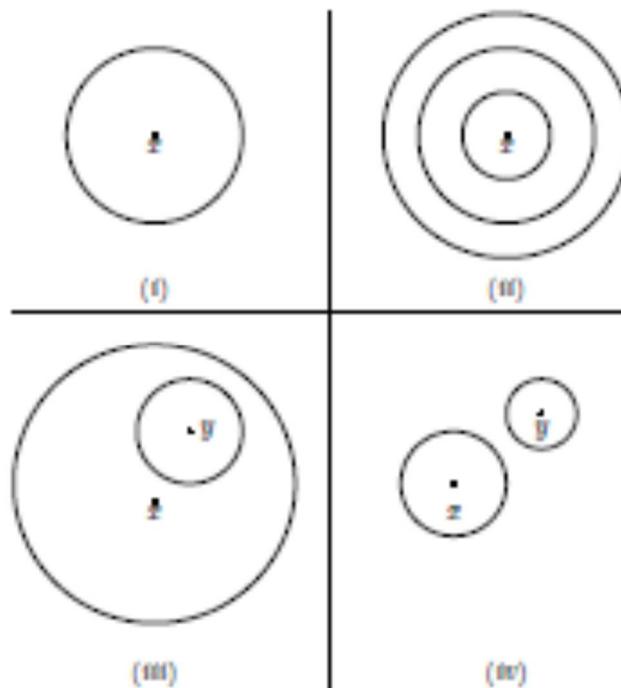


Figura 17.2: Illustrazione dei 4 assiomi di Hausdorff.

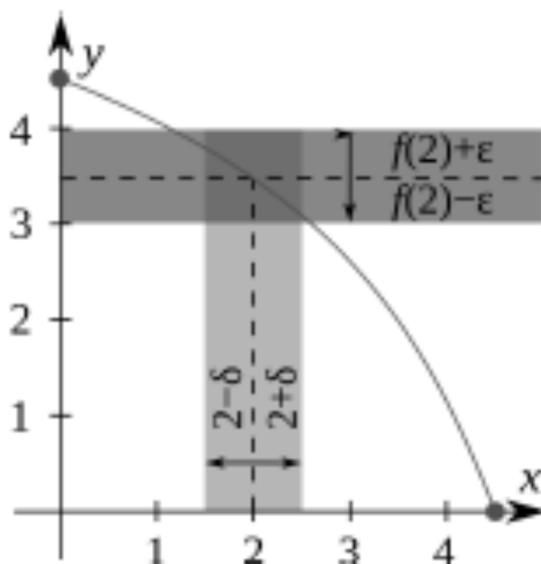


Figura 17.3: Funzione da  $\mathbb{R}$  (asse delle  $x$ ) a  $\mathbb{R}$  (asse delle  $y$ ), continua in  $x = 2$ : preso un qualunque intorno  $(f(2) - \epsilon, f(2) + \epsilon)$  di  $y = f(2)$  esiste un intorno  $(2 - \delta, 2 + \delta)$  di  $x = 2$  tale che tutti i suoi punti sono trasformati dalla funzione  $f$  nell'intorno di  $f(2)$ .

A questo punto è possibile introdurre la nozione di **funzione continua** e di **omeomorfismo**. Una funzione continua presuppone che ad ogni punto di uno spazio è associato un unico punto del secondo, o spazio immagine (questa è la nozione insiemistica di funzione), e che dato un qualunque intorno del punto immagine c'è un intorno del punto originale (o di ciascun punto originale, se ce ne sono molti) i cui punti sono trasformati nell'intorno dello spazio immagine. Questo concetto non è niente di più di una generalizzazione della definizione  $\epsilon - \delta$  di una funzione continua, con  $\epsilon$  che specifica l'intorno di un punto nello spazio immagine e  $\delta$  un intorno del punto originale (vedi figura 17.3).

Un omeomorfismo tra due spazi  $X$  e  $Y$  è una corrispondenza uno-a-uno che è continua in entrambe le direzioni; vale a dire, le trasformazioni da  $X$  a  $Y$  e da  $Y$  a  $X$  sono continue. Il compito fondamentale della topologia degli insiemi di punti è di scoprire e classificare le proprietà che sono invarianti per trasformazioni continue e omeomorfismi. Tutte le proprietà elencate sopra sono invarianti topologici.

## Formulazioni più astratte in termini di aperti<sup>29</sup>

Come abbiamo visto sopra, un insieme aperto è definito in termini di intorni. Tuttavia può anche essere assunto come nozione primitiva su cui basare la topologia. La matematica contemporanea preferisce questo modo di caratterizzare una topologia. Si ha in questo modo uno strumento più flessibile e più conveniente dal punto di vista matematico; lo svantaggio è che in questo modo si perde la nozione intuitiva di vicinanza. Si tratta di una caratterizzazione più astratta che è comunque equivalente a quella in termini di intorni e quindi ci limitiamo a dare la definizione senza commentarla ulteriormente.

<sup>29</sup> Questa sezione può essere omessa senza pregiudicare la comprensione di quanto segue.

Una topologia su un insieme  $X$  è definita come una famiglia  $\mathcal{T}$  di sottoinsiemi di  $X$  che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) l'unione (anche infinita) di elementi di  $\mathcal{T}$  appartiene a  $\mathcal{T}$  ;
- (b) l'intersezione di ogni coppia di elementi di  $\mathcal{T}$  appartiene a  $\mathcal{T}$ ;
- (c)  $X$  stesso e l'insieme vuoto ; appartengono a  $\mathcal{T}$  .

## Varietà continue e differenziabili

La definizione moderna di una molteplicità (manifold, in inglese) o varietà  $n$ -dimensionale è uno spazio che può essere coperto, in modo coerente, da regioni che sono **omeomorfe** a regioni dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale. Vale a dire, una varietà è uno spazio che **localmente** ha una forma simile allo spazio euclideo.

Più precisamente, una varietà  $M$  è uno spazio topologico tale che esiste un omeomorfismo da una regione  $U$  di  $M$  allo spazio euclideo (vedi la figura 17.4). Un tale omeomorfismo è detto "carta" (nel senso cartografico del termine, ad esempio, una regione della terra è rappresentata da una carta in un atlante (figura a sinistra).

Se  $\psi$  è un'altra carta per un'altra regione  $V$  che ha una parte in comune con  $U$ , la composizione  $\psi^{-1} \circ \phi$  è una trasformazione dallo spazio euclideo in sé stesso (figura a destra). Se questa funzione è **liscia**, cioè differenziabile, la varietà  $M$  è detta **liscia** o **differenziabile**.

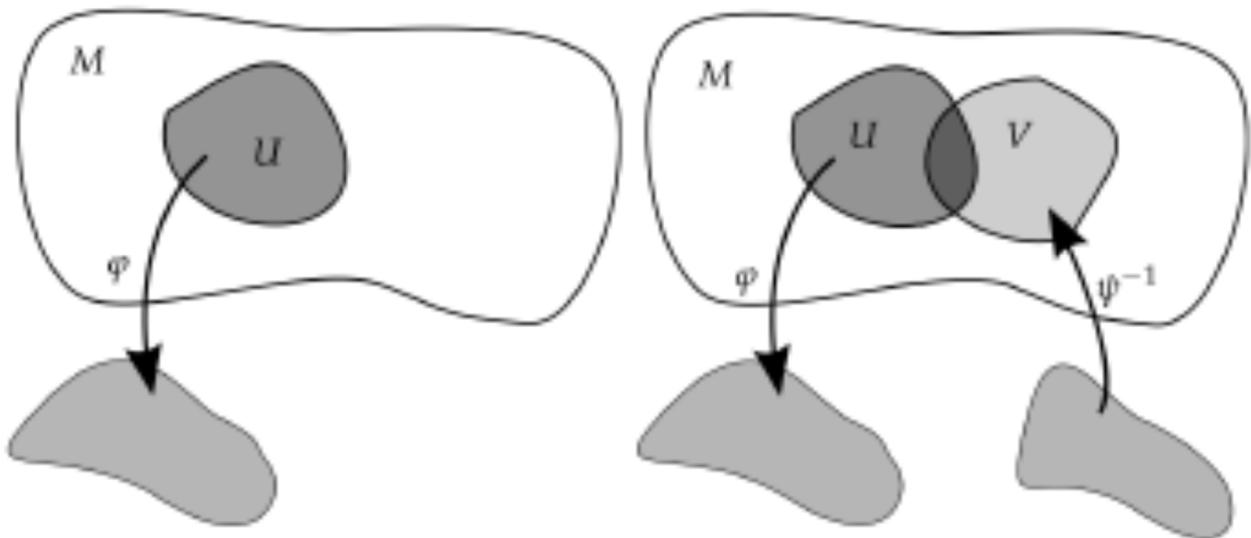


Figura 17.4: Nozione moderna di molteplicità  $M$  o varietà.

# 18 RIEMANN E LA FORMA DELLO SPAZIO

## Indice

Relazioni metriche	156
Spazi a curvatura costante	157

## Relazioni metriche

La sezione II, in cui le relazioni metriche sono sviluppate, fornisce i fondamenti della moderna geometria differenziale riemanniana. Riemann si scusa per la necessità di formule astratte, promettendo che dopo queste seguirà un'interpretazione geometrica. Nota che le sue idee sono basate sul saggio di Gauss del 1828 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Quindi introduce e affina il metodo delle coordinate introdotto da Gauss per studiare le proprietà geometriche.

Il metodo delle coordinate segnò lo sviluppo della geometria differenziale dopo di lui ed è ancora usato oggi dai fisici. Si è rivelato un metodo utilissimo per i calcoli, ma ha avuto — e ancora ha — l'effetto negativo di ostacolare la comprensione del significato geometrico profondo delle idee di Riemann. Hermann Weyl scrisse che l'introduzione di numeri come coordinate in geometria è un atto di violenza. Presenteremo quindi le idee di Riemann evitando tale metodo, anche a costo di dover ricorrere a idee che furono messe a punto dopo di lui. Il matematico che più contribuì ad una formulazione della geometria indipendente dalle coordinate fu Élie Cartan (1869–1951).

Ciò che non eviteremo sarà l'uso della nozione di **infinitamente piccolo**.

Il primo problema è di determinare la lunghezza di una curva. Una curva è determinata quando è noto come varia il punto  $P$  sulla curva in funzione di un parametro.

Riemann considera gli elementi di una curva  $P + \mathbf{h}$ , la distanza tra  $P$  e  $P + \mathbf{h}$  è

$$h_2 = g_P(\mathbf{h}, \mathbf{h})$$

$$(\Delta s_k)^2 = g_{P_k}(\overrightarrow{P_k P_{k+1}}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}})$$

$$[\text{distanza tra } P = P_0 \text{ e } Q = P_n] = \Delta s_0 + \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_{n-1}$$

$$ds = \sqrt{g_P(\mathbf{h}, \mathbf{h})}$$

L'idea principale di Riemann può essere riassunta nel seguente modo. Riemann osserva che la misura richiede che la quantità misurata sia indipendente dal luogo e di

conseguenza adotta l'ipotesi che la lunghezza delle linee sia indipendente dalla loro posizione cosicché ogni linea è misurabile mediante ogni altra.

Se si definisce la distanza come la radice quadrata di una funzione quadratica delle coordinate, allora Riemann mostra che affinché la lunghezza di una linea sia indipendente dalla sua posizione, lo spazio in cui la linea si trova deve avere una curvatura costante. *“Il carattere comune di queste molteplicità, la misura della curvatura delle quali sia costante, si può anche esprimere in questo modo: in esse le figure si possono muovere senza stiramento . . . di conseguenza nelle molteplicità con misura della curvatura costante si può dare alle figure qualsiasi posizione a piacere.”*

## Spazi a curvatura costante

Nella sezione finale del saggio, Riemann passa alla questione dell'applicazione del suo apparato tecnico allo spazio empirico per la determinazione delle sue proprietà metriche. In uno spazio di curvatura costante in cui la lunghezza di una linea è indipendente dalla posizione, la verità empirica del teorema di Euclide che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti è sufficiente a determinare le proprietà metriche dello spazio. Ma tale determinazione empirica **incombe in difficoltà nei casi del molto grande e del molto piccolo:**

*Se si suppone che i corpi esistano indipendentemente dalla posizione, allora la misura della curvatura è ovunque costante, e segue dalle misure astronomiche che non può essere diversa da zero; in ogni caso il reciproco del suo valore dev'essere un'area rispetto alla quale la regione raggiungibile con i nostri telescopi dev'essere praticamente nulla. Ma se una siffatta indipendenza dei corpi dalla posizione non ha luogo, non è possibile dalle relazioni metriche su grande scala trarre alcuna conclusione su quelle nell'infinitamente piccolo; allora la misura della curvatura in ogni punto in tre direzioni può avere un valore arbitrario, purché la curvatura complessiva di ogni porzione misurabile dello spazio non sia sensibilmente diversa da zero . . . Ora i concetti empirici sui quali sono fondate le determinazioni metriche dello spazio, il concetto di corpo rigido e quello di raggio di luce, sembrano tuttavia perdere la loro validità nell'infinitamente piccolo; è quindi assai ben concepibile che le relazioni metriche dello spazio nell'infinitamente piccolo non siano conformi ai postulati della geometria, e ciò si dovrebbe di fatto assumere, nel momento in cui i fenomeni si lasciassero spiegare così in maniera più semplice.*

*Il problema della validità dei postulati della geometria nell'infinitamente piccolo si collega con il problema del fondamento intrinseco delle relazioni metriche dello spazio. In tale problema . . . si viene ad utilizzare l'osservazione prima fatta, che in una molteplicità discreta il principio delle relazioni metriche è contenuto nel concetto stesso di questa molteplicità, mentre nel caso di una continua questo deve venire da fuori. Quindi o la realtà che sta alla base dello spazio costituisce una molteplicità discreta, oppure il fondamento delle relazioni metriche va cercato fuori, in forze di legame che agiscono su di esso.*

## 19 GEOMETRIA E FISICA

### Indice

Vita nel disco di Poincaré	158
Convenzionalismo e olismo	160
La posizione di Einstein	161

### Vita nel disco di Poincaré

Nel suo famoso libro *Science et Hypothèse*, Henri Poincaré (1854–1912) descrive la fisica di un piccolo “universo” e le teorie fisiche che i suoi abitanti potrebbero formulare. L’universo considerato da Poincaré è bidimensionale, euclideo e ha la forma del disco unitario aperto (cioè senza bordo). La sua temperatura è (diciamo) 40° Celsius al centro del disco e diminuisce linearmente allo zero assoluto (–273.15°Celsius) al suo confine. Le lunghezze degli oggetti (comprese le creature viventi ) sono proporzionali alla temperatura.

Come farà una piccola creatura piatta dotata di ragione che vive in questo disco a descrivere le principali leggi fisiche del suo universo? La prima domanda che essa potrebbe fare potrebbe essere: il mondo è limitato o illimitato, finito o infinito? Per rispondere a questa domanda, viene organizzata una spedizione, ma, man mano che la spedizione si sposta verso il bordo del disco, le gambe degli esploratori diventano più piccole, i loro passi più corti. In breve, non potranno mai raggiungere il limite, e concluderanno perciò che il mondo è illimitato e infinito. Le loro conclusioni empiriche saranno dunque differenti da quelle dei pesci che abbiamo incontrato nel capitolo 14, i quali potevano concludere, mediante osservazione, che il loro mondo era senza confini, ma finito.

La domanda successiva potrebbe essere: la temperatura dell’universo varia? Avendo costruito un termometro (sulla base di differenti coefficienti di dilatazione dei vari materiali ), gli scienziati lo portano in giro per l’universo e fanno misurazioni. Tuttavia, poiché le lunghezze di tutti gli oggetti cambiano in modo simile con la temperatura, il termometro dà la stessa misura in tutto l’universo. Gli scienziati - concludono che la temperatura è costante in tutto l’universo.

Poi gli scienziati potrebbero studiare le linee rette, cioè, indagare qual è il percorso più breve tra due punti. Essi scoprono che il percorso più breve è ciò che percepiamo come l’arco di cerchio contenente i due punti e ortogonale al confine del disco (questo perché un tale percorso circolare avvicina l’investigatore al centro del disco, e quindi aumenta la lunghezza dei suoi passi ). Inoltre, essi troveranno che il percorso più breve è unico e considereranno tali percorsi come “linee rette”.

Continuando a sviluppare la geometria, gli abitanti del piccolo universo piatto di Poincaré decideranno che c'è più di una parallela a una retta data passante per un punto dato e che la somma degli angoli di triangoli è minore di  $180^\circ$ .

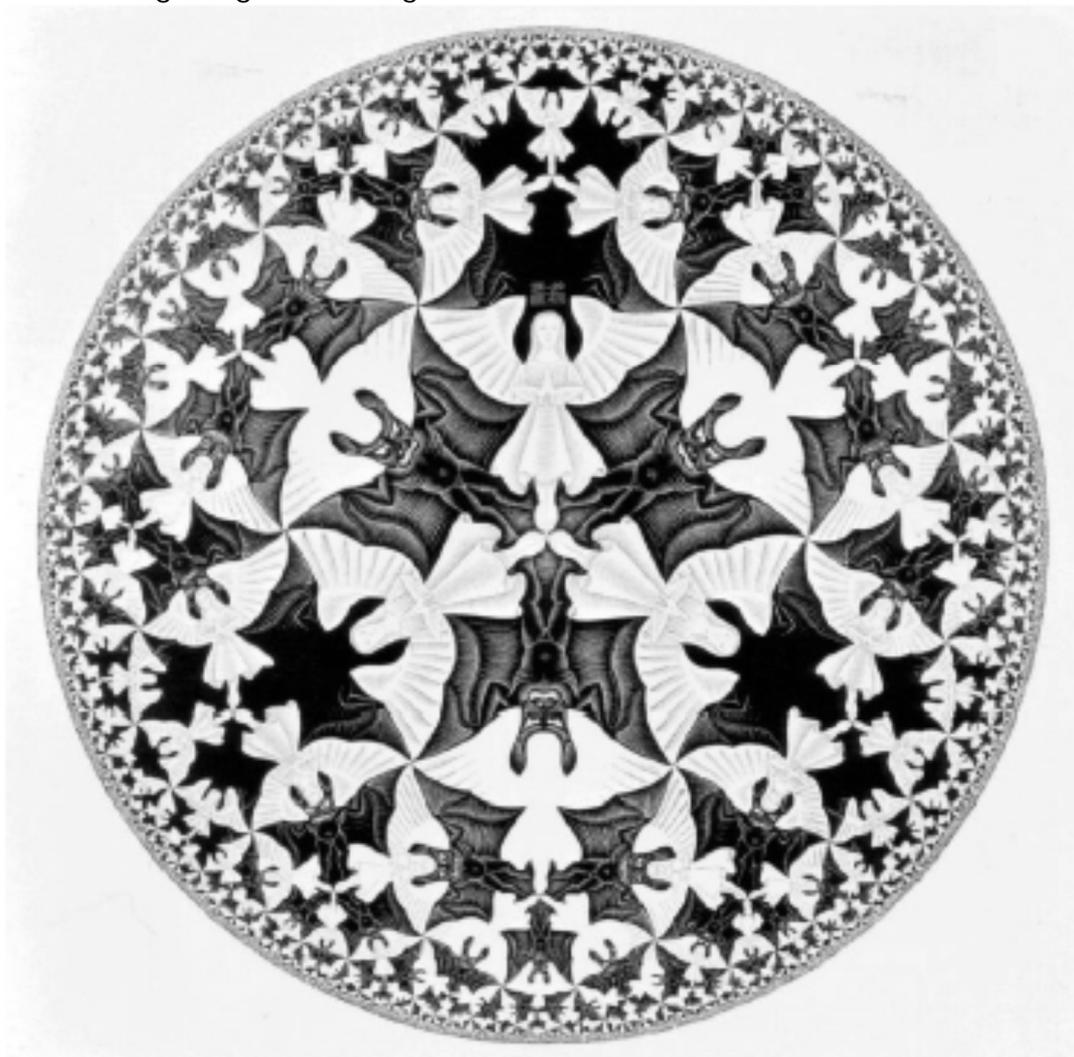


Figura 19.1: M. C. Escher, *Circle Limit IV: Heaven and Hell*, 1960.

Così arriveranno alla conclusione che vivono in un universo piatto infinito a temperatura costante e governato dalle leggi della geometria iperbolica. Ma ciò non è vero — il loro universo è un disco finito, la sua temperatura è variabile (tende allo zero assoluto quando ci si avvicina al confine) e la geometria sottostante è euclidea, non iperbolica!

La conclusione filosofica che Poincaré ne trae è che non c'è nulla nella scienza della geometria che determina quali oggetti nel mondo fisico devono essere identificati con linee rette e corpi rigidi. La geometria in sé e per sé non può quindi mai essere verificata mediante misurazione fisica — è solo la congiunzione di geometria con una serie di ipotesi circa il comportamento di certe cose fisiche (corpi solidi, raggi di luce) — in breve, è solo la congiunzione di geometria e fisica, che può essere conforme o non conforme alla verifica empirica. Modificando la fisica, possiamo sostenere qualsiasi geometria vogliamo: "nessun esperimento", scriveva Poincaré, "sarà mai in contraddizione con il postulato di Euclide; ma, d'altra parte, nessun esperimento sarà mai in contraddizione con il postulato di Lobachevskij!".

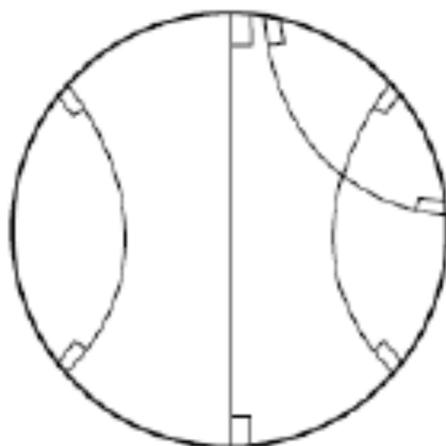


Figura 19.2: Rette parallele nel disco di Poincaré. Si osservi che per un punto passano infinite rette ad una retta data.

## Convenzionalismo e olismo

La posizione di Poincaré è nota come **convenzionalismo**. Il convenzionalismo implica che la geometria fisica sia fissata da una scelta arbitraria tra alternative equivalenti. Secondo questa posizione, l'applicazione empirica della geometria dipende da principi che non sono essi stessi empirici, ma che vanno intesi piuttosto come stipulazioni convenzionali.

Più tardi i filosofi della scienza avrebbero usato la parola **sottodeterminazione** per descrivere situazioni come quella analizzata da Poincaré: la scelta della geometria è sottodeterminata dall'esperienza, perché si possono dare due descrizioni del mondo che si differenziano per quanto riguarda la geometria, ma che hanno esattamente le stesse conseguenze osservabili. Tuttavia, mentre Poincaré insisteva sul carattere convenzionale della scelta della geometria, egli non pensava che la scelta fosse arbitraria. Le geometrie differiscono in termini di convenienza. Quale delle due è più conveniente dipende dall'esperienza, che quindi ci guida nella scelta della geometria. Data la nostra esperienza reale con le proprietà dei corpi solidi, e data la superiore semplicità della geometria euclidea, Poincaré era convinto che "la geometria euclidea è, e rimarrà, la più conveniente." Tuttavia, i suoi assiomi non sono "né intuizioni sintetiche a priori né fatti sperimentali. Sono convenzioni.

La posizione di Hans Reichenbach (1891–1953) ha molti punti in comune con quella di Poincaré. Egli cercò di caratterizzare il contributo dell'intelletto esattamente nel modo opposto a quello di Kant<sup>30</sup>, cioè in termini della sua **arbitrarietà**. Così troviamo sia Reichenbach e Schlick a sostenere che l'intelletto fornisce forme (liberamente scelte) che trasformano la sensazione bruta in esperienza articolata. Così dove Kant vedeva la teoria dell'intelligenza creativa come semplice perché riassumibile da un'unica lista abbastanza

<sup>30</sup> Secondo la dottrina kantiana, ciò che l'intelletto fornisce è incorporato nella struttura di una qualunque mente che può avere esperienza del mondo e le forme della nostra conoscenza sono fisse, certe, a priori, in particolare, è a priori la nostra conoscenza della geometria euclidea.

corta di **categorie**, Reichenbach la vedeva semplice perché le categorie sono del tutto arbitrarie. Queste idee di Reichenbach e Schlick erano maturate nel corso di discussioni con Einstein, che era tutt'altro che un filosofo ingenuo<sup>31</sup>. In una lettera a Max Born del luglio 1918, Einstein scriveva<sup>32</sup>:

*Sto leggendo i Prolegomeni di Kant qui, tra le altre cose, e sto cominciando a comprendere l'enorme potere suggestivo che emanava da lui allora come oggi. Una volta che gli concedi soltanto che esistano i giudizi sintetici a priori, sei intrappolato. Ho dovuto annacquare l' a priori in convenzionale, in modo da non contraddirlo, ma anche così non tutti i dettagli vanno a posto. Comunque è molto bello da leggere, anche se non è buono come il lavoro del suo predecessore Hume. Hume aveva anche un istinto di gran lunga più robusto.*

Einstein ripeté lo stesso punto — che ciò che Kant considera a priori è più propriamente da intendersi come convenzionale — praticamente in ognuno dei tanti commenti che scrisse sull'argomento fino alla metà degli anni 1920. Poi la sua posizione si fece più articolata e si distaccò dalle posizioni dei neopositivisti.

Ciò nonostante, Einstein non era d'accordo con la conclusione di Poincaré, sostenendo che dovremmo scegliere non ciò che produce la geometria più semplice, ma ciò che massimizza la semplicità della geometria più la fisica, come accade nella relatività generale. In effetti, la stessa idea di stipulazione convenzionale della geometria non ha neanche senso nel contesto della relatività generale, che collega la struttura geometrica alla distribuzione di materia.

Il disaccordo tra la sua posizione e quelle di Reichenbach e Schlick crebbe nel corso degli anni Venti fino a raggiungere una netta separazione di vedute. In particolare, Einstein non condivideva le loro battaglie contro la metafisica: per lui la fisica era un tipo di metafisica. Per Einstein, il nocciolo non era l'arbitrarietà della geometria, ma l'arbitrarietà nella nostra decisione su quali elementi della teoria siano da ritenersi a priori, non essendoci una base sistematica di principio che permetta di distinguere in modo assoluto l'analitico dal sintetico. Questo lo portò ad una concezione olistica che ha molti tratti in comune con quella proposta da Willard Van Orman Quine (1908–2000).

## La posizione di Einstein

La sottigliezza della posizione di Einstein è manifesta in un passo della "Risposta alle Critiche" nel volume *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* edito da Schilpp (1949). Qui Einstein anticipa un argomento che è meglio noto ai filosofi nella forma che gli diede Quine in *Due dogmi dell'empirismo* (1951). Il punto di vista riguardante il contenuto empirico di una teoria sviluppato da Schlick e Reichenbach, con relativa distinzione analitico-sintetico, è il progenitore del verificazionismo principalmente preso di mira da

---

<sup>31</sup> Si veda: Don Howard. *Einstein and the Development of 20th Century Philosophy of Science*, in "Cambridge Companion to Einstein".

<sup>32</sup> Don Howard, op. cit.

Quine. Einstein contro Schlick e Reichenbach anticipa i principali argomenti critici di Quine contro il verificazionismo e la distinzione analitico-sintetico.

Per esporre la sua posizione, Einstein fa ricorso ad un dialogo immaginario tra Poincaré e Reichenbach. Il dialogo inizia con "Poincaré" che afferma che i teoremi geometrici non sono, di per sé, verificabili perché non esistono, infatti, corpi esattamente rigidi con cui interpretarli. "Reichenbach", risponde come l'Einstein del 1921 (vedi pagina 25), che possiamo cavarcela abbastanza bene con i corpi quasi rigidi della nostra esperienza, finché facciamo evidenti correzioni per fattori quali cambiamenti di temperatura:

*POINCARÉ: I corpi empiricamente dati non sono rigidi, e pertanto non possono essere utilizzati per la realizzazione di intervalli geometrici. Pertanto, i teoremi della geometria non sono verificabili.*

*REICHENBACH: Ammetto che nessun corpo possa essere immediatamente utilizzato per la "definizione reale" dell'intervallo. Tuttavia, questa definizione reale può essere ottenuta prendendo in considerazione l'influenza della temperatura sul volume, l'elasticità, . . . ecc. La fisica classica ha sicuramente dimostrato che ciò è possibile in pratica, senza incorrere in contraddizioni.*

Il "Poincaré" di Einstein osserva che nel fare queste correzioni dobbiamo usare le leggi fisiche che presuppongono la geometria euclidea, e conclude che ciò che è in gioco in un esperimento è, quindi, l'intero corpo di leggi composto di fisica e geometria. Qui Einstein interrompe con la seguente osservazione parentetica: "(La conversazione non può continuare in questo modo, perché il rispetto dello scrittore per la superiorità di Poincaré come pensatore e scrittore non lo permette; in quanto segue, pertanto, un anonimo "non-positivista" è sostituito a Poincaré). Quando il dialogo riprende, "Reichenbach" concede che il punto di vista di Poincaré è attraente:

*REICHENBACH: C'è qualcosa di molto attraente in questa concezione. Ma, d'altra parte, è da notare che l'attenersi al senso oggettivo di lunghezza e all'interpretazione delle differenze di coordinate come distanze (in fisica pre-relativistica) non ha mai portato a complicazioni. Non saremmo dunque giustificati, sulla base di questo fatto sorprendente, se continuassimo ad operare, almeno provvisoriamente, con il concetto di lunghezza misurabile, supponendo che i regoli misuratori rigidi esistano veramente? In ogni caso, per Einstein sarebbe stato impossibile de facto (anche se non teoricamente) costruire la teoria della relatività generale, se non avesse aderito al significato oggettivo di lunghezza.*

*Contro la concezione suggerita da Poincaré è da sottolineare che quello che conta non è soltanto la massima semplicità possibile della geometria da sola, ma piuttosto la massima semplicità possibile di tutta la fisica (compresa la geometria). Questo, soprattutto, è il significato del fatto che oggi dobbiamo respingere come cosa inopportuna il suggerimento di aderire alla geometria euclidea.*

Finora il dialogo è proceduto in modo prevedibile e Reichenbach sembra difendere la posizione sostenuta da Einstein. Ma ora c'è un'inattesa giravolta. Dopo aver strappato da "Reichenbach" l'ammissione a denti stretti che "Poincaré" potrebbe avere ragione, in teoria, che fisica e geometria vanno verificate insieme, anche se con la clausola che è la semplicità di tutto questo (fisica più geometria) che deve essere giudicata, il "Non-

positivista" sottolinea che "Reichenbach" ha così violato uno dei suoi postulati fondamentali — l'equazione di significato con la verifica:

NON-POSITIVISTA: *Se, nella situazione che hai detto, tu sostieni che la distanza sia un concetto legittimo, che ne è poi del tuo principio fondamentale (significato = verificabilità)? Non dovrai giungere al punto di essere costretto a negare il significato dei concetti geometrici e dei teoremi e riconoscere significato solo all'interno di una teoria della relatività completamente sviluppata (che, però, non esiste ancora come un prodotto finito)? Non dovrai ammettere che, se la parola ha il senso da te usato, nessun "significato" può essere attribuito ai singoli concetti e affermazioni di una teoria fisica, e nemmeno al sistema complessivo, se non in quanto esso rende **comprensibile** ciò che è dato nell'esperienza? Perché i singoli concetti che intervengono in esso dovrebbero aver bisogno di una qualsiasi giustificazione particolare, se sono indispensabili soltanto nel quadro della struttura logica della teoria, e la teoria si convalida solonella sua totalità?*

Dopo di che, Einstein continua (a questo punto completamente identificato con il "non-positivista"):

*Mi sembra, inoltre, che tu non abbia reso giustizia alcuna ai risultati filosofici davvero significativi di Kant. Da Hume, Kant aveva imparato che ci sono concetti (come, ad esempio, quello di nesso causale), che svolgono un ruolo dominante nel nostro pensiero, e che, tuttavia, non possono essere dedotti mediante un processo logico dal dato empirico (un fatto che alcuni empiristi riconoscono, è vero, ma che sembrano dimenticare continuamente). Che cosa giustifica l'uso di tali concetti? Supponiamo che egli avesse risposto in questo modo: **Il pensiero è necessario per capire il dato empirico, e i concetti e le "categorie" sono necessari come elementi indispensabili del pensiero.** Se fosse rimasto soddisfatto di questo tipo di risposta, avrebbe evitato lo scetticismo e non avresti potuto trovare in lui nessun difetto. Egli, tuttavia, è stato tratto in inganno dal parere erroneo — difficile da evitare nel suo tempo — che la geometria euclidea fosse necessaria al pensiero e fornisse una conoscenza certa (cioè non dipendente dall'esperienza sensoriale) sugli oggetti della percezione "esterna". Da questo errore facilmente comprensibile, ha concluso l'esistenza di giudizi sintetici a priori, che sono prodotti dalla sola ragione e che, di conseguenza, possono pretendere di essere validi in senso assoluto. Credo che la tua critica è diretta non tanto contro Kant in persona, quanto contro coloro che ancora oggi condividono gli errori dei "giudizi sintetici a priori".*

## BIBLIOGRAFIA

Bell, J. S., *The continuous and the infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimetrica, 2008.

Beltrami, E., *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, Annali di matematica pura e applicata (1868-1869).

Einstein, A., *Geometry and Experience. An expanded form of an Address to the Prussian Academy of Sciences* in Berlin on January 27th, 1921.

Gödel, K., *What is Cantor's Continuum Problem?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 54, No. 9 (Nov., 1947), pp. 515-525.

Herschel, John F. W., *Preliminary discourse on the study of natural philosophy*, Londra, 1831.

Howard, D., *Einstein and the development of 20<sup>th</sup> Century Philosophy of Science*, in "Cambridge Companion to Einstein".

Riemann, B., *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* in Einstein, *Relatività. Esposizione divulgativa*, Bollati Boringhieri, 2011.

Rovelli, Carlo, *Anassimandro. La natura del pensiero scientifico*, Bompiani, 2007.

Russo, Lucio, *La Rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 1996 (III ed. ampliata 2003).

Schrödinger, Erwin, *La Natura e i Greci*, in *L'immagine del mondo*, Boringhieri, 1963.

Weyl, H., *Raum, Zeit, Materie*, Ulan Press, 2012.