

LO SPAZIO AFFINE

17 APRILE 2012

MOLTE QUANTITÀ CHE SI INCONTRANO IN FISICA hanno un un valore numerico e una direzione; per esempio, le forze, le velocità e le accelerazioni. Come prototipo di questo tipo di quantità, consideriamo gli *spostamenti paralleli* o *traslazioni*. Supponiamo che un corpo rigido sia spostato (senza essere ruotato) in modo che un qualunque dato punto P del corpo sia mosso dalla posizione P alla posizione Q , come mostrato in figura 1.

Rappresentiamo questo movimento mediante un segmento di retta orientato — una freccia — che va da P a Q e che denotiamo \vec{PQ} . È importante aver chiaro che questa freccia codifica tutta l'informazione riguardo al movimento dell'intero corpo: infatti, se avessimo considerato un punto differente sul corpo, diciamo P' , allora il suo movimento sarebbe stato descritto da una freccia $\vec{P'Q'}$ parallela a \vec{PQ} e della stessa lunghezza. In altre parole, le caratteristiche importanti degli spostamenti sono la loro *direzione* e la loro *lunghezza*, ma non la collocazione spaziale dei loro punti *iniziali* e *terminali* — la “testa” e la “coda” della freccia.

Un'altra importante caratteristica degli spostamenti è il moto in cui differenti spostamenti si combinano. Se prima si effettua uno spostamento che muove il dato punto da P a Q e poi si effettua un altro spostamento che muove il punto da Q a R , l'effetto complessivo è lo stesso se avessimo spostato direttamente il punto da P a R . La freccia \vec{PR} , che rappresenta questo spostamento complessivo, è ottenuta mettendo la freccia \vec{QR} con la sua coda nella testa di \vec{PQ} e tracciando la freccia dalla coda di \vec{PQ} alla testa di \vec{QR} , come mostrato in figura 2.

PER VETTORE LIBERO, o vettore geometrico, si intende, intuitivamente, una “freccia” che può essere spostata in qualunque posizione dello spazio tridimensionale, a patto che la sua direzione e la sua lunghezza non cambino. I vettori sono solitamente denotati con una lettera sormontata da una freccia, \vec{a} , oppure da una lettera scritta in grassetto, \mathbf{a} . Nel seguito useremo quest'ultima notazione.

Denotiamo con \mathbf{a} il vettore che descrive lo spostamento illustrato in figura 1: una traslazione di tutti i punti dello spazio nella direzione \mathbf{a} di un tratto di lunghezza a . Denotando questa azione con il simbolo $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ (sempre con riferimento alla figura), avremo $Q = \mathcal{T}_{\mathbf{a}}(P)$ e $Q' = \mathcal{T}_{\mathbf{a}}(P')$. Una notazione più suggestiva è la seguente:

$$Q = P + \mathbf{a}, \quad (1)$$

il che suggerisce $Q - P$ come un altro modo di rappresentare il vettore che sposta il punto P nel punto Q . Riassumendo le notazioni,

$$Q - P = \vec{PQ} = \mathbf{a}.$$

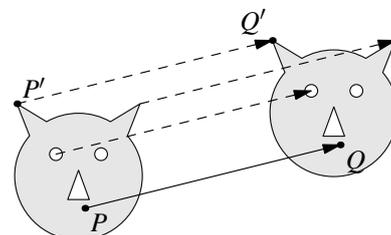


Figura 1: Spostamento di un corpo rigido.

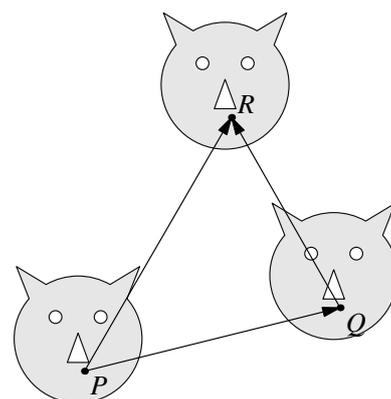


Figura 2: La composizione di due spostamenti è uno spostamento.

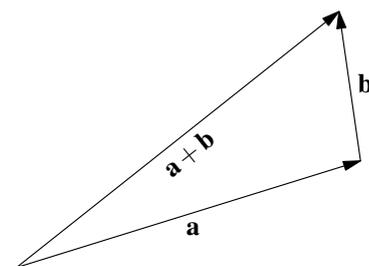


Figura 3: Somma di due vettori.

SUI VETTORI È DEFINITA UN'OPERAZIONE DI SOMMA, secondo la regola descritta sopra e illustrata dalla figura 3: per formare il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, si muove \mathbf{b} in modo che la sua coda coincida in posizione con la testa di \mathbf{a} e si congiunge la coda di \mathbf{a} con la testa di \mathbf{b} . Questa operazione è *commutativa*, cioè $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, come è espresso dalla nota regola del parallelogramma mostrata in figura 4.

In particolare, questo significa che le traslazioni commutano, cioè non importa l'ordine con cui vengono effettuate ovvero sono intercambiabili. Per chiarire meglio questo punto, in primo luogo osserviamo che se denotiamo con \mathcal{T}_a e \mathcal{T}_b le traslazioni dello spazio operate rispettivamente dai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , allora

$$\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_b = \mathcal{T}_c, \tag{2}$$

dove "o" rappresenta l'operazione di composizione e $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; in altre parole, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione, come illustrato dalle figura 2. Poiché $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (figura 4), ne segue che

$$\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_b = \mathcal{T}_b \circ \mathcal{T}_a. \tag{3}$$

La proprietà di commutatività delle traslazioni è resa manifesta della notazione 1, che ci permette di scrivere

$$(P + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = P + \mathbf{a} + \mathbf{b} = (P + \mathbf{b}) + \mathbf{a}. \tag{4}$$

L'INVERSO di una traslazione è la traslazione che inverte esattamente o neutralizza la traslazione originaria: si tratta della freccia in cui la coda e la testa di \mathbf{a} sono scambiate. Se \mathbf{a} è una traslazione, è naturale denotare il suo inverso con $-\mathbf{a}$. Combinando \mathbf{a} con $-\mathbf{a}$ i punti dello spazio restano invariati. In altre parole, la composizione di una traslazione con la sua inversa è la trasformazione identica,

$$(P + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = P + \mathbf{a} - \mathbf{a} = P.$$

Equivalentemente, detta \mathcal{I} la trasformazione identica, nelle notazioni dell'equazione (5), si ha

$$\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_{-\mathbf{a}} = \mathcal{I}. \tag{5}$$

Quanto detto può essere riassunto dall'affermazione che l'insieme delle traslazioni ha la struttura di *gruppo*. Si presti attenzione al fatto che la proprietà di commutatività espressa dall'equazione (3) non è tra le proprietà salienti di un gruppo. I gruppi per i quali l'ordine con cui vengono composti gli elementi è irrilevante sono detti gruppi commutativi. Molti gruppi rilevanti nella matematica e nella fisica sono in effetti *non* commutativi.

Osserviamo infine che la sottrazione di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} risulta definita come somma di \mathbf{a} con l'inverso di \mathbf{b} , cioè

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

come mostrato in figura 5.

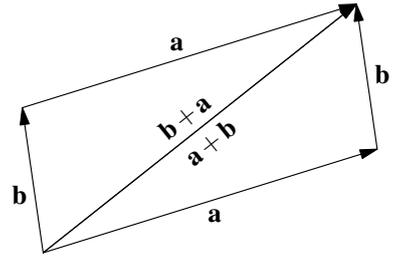


Figura 4: La regola del parallelogramma per sommare i vettori non è altro che un'espressione della commutatività della somma di vettori.

Un insieme di elementi forma un gruppo se:

- (i) su questi elementi è definita un'operazione di composizione tale che la composizione di due elementi di dell'insieme è ancora un elemento dell'insieme;
- (ii) se tra gli elementi dell'insieme esiste un elemento "neutro" detto identità;
- (iii) se per ogni elemento dell'insieme esiste uno e uno solo elemento dell'insieme, detto inverso, la cui composizione con l'elemento originario è l'identità.

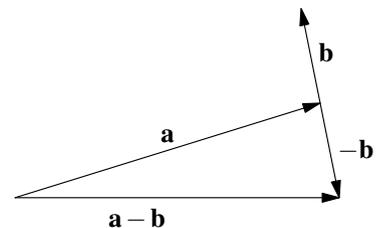


Figura 5: Differenza di due vettori.

LA MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO è una seconda importante operazione sui vettori che potrebbe anche essere chiamata *taratura*, in quanto permette di “tarare” la lunghezza di tutti i vettori paralleli ad un dato vettore, convenzionalmente scelto come vettore di riferimento, a cui, convenzionalmente, viene assegnata una lunghezza unitaria.

Il significato geometrico della moltiplicazione per un intero è immediata: si ha $2\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}$, $3\mathbf{a} = 2\mathbf{a} + \mathbf{a}$ e così via (figura 6).

Analogamente, ha un diretto significato geometrico la moltiplicazione per un razionale m/n , dove m e n sono interi: l’uguaglianza

$$\mathbf{b} = \frac{m}{n}\mathbf{a}$$

significa che

$$n\mathbf{b} = m\mathbf{a}.$$

Infine, dato un vettore \mathbf{a} , se $m_i/n_i \rightarrow x$ è una successione convergente di razionali (convergente al numero reale x), i vettori $(m_i/n_i)\mathbf{a}$, con le loro code tutte in una posizione fissata, formano una successione convergente di punti lungo una linea retta, il cui limite è la posizione della testa del vettore $x\mathbf{a}$ (figura 7).

Si ha così una corrispondenza tra i punti su una retta e l’insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Questa corrispondenza dipende da due scelte convenzionali: un punto O sulla retta, che viene messo in corrispondenza con lo zero, e la lunghezza del vettore \mathbf{a} che individua la direzione della retta (la lunghezza del vettore \mathbf{a} fissa l’unità di misura per le distanze tra i punti della retta, come mostrato in figura 8).

IN QUESTO MODO EMERGE UNA COSTRUZIONE ASSIOMATICA della geometria che presuppone il concetto di *numero reale*, in termini del quale è espressa la nozione di continuità geometrica. Questa costruzione utilizza soltanto i concetti geometrici primitivi (cioè indefiniti) di *punto* e di *vettore*. Le operazioni di base che collegano questi concetti sono tre:

- (i) due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} generano un terzo vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$,
- (ii) un numero reale λ e un vettore \mathbf{a} generano un vettore $\lambda\mathbf{a}$,
- (iii) un punto P e un vettore \mathbf{a} generano il punto $P + \mathbf{a}$.

Le operazioni (i) e (ii) sono regolate dagli *assiomi per i vettori*, la (iii) dagli *assiomi per punti e vettori*. Questi assiomi, riportati a margine, formano un sistema che, anche dal punto di vista logico, è una struttura molto più trasparente ed omogenea degli assiomi puramente geometrici di Euclide o Hilbert. Le nozioni geometriche usuali sono derivate da questo sistema e, tra queste, le più semplici sono quelle di retta e di piano.

Si osservi che la struttura definita dagli assiomi a margine non caratterizza ancora lo spazio euclideo, ma una struttura geometrica più “debole”, il cosiddetto *spazio affine*. In questo spazio non è definita alcuna nozione globale di



Figura 6: Moltiplicazione per 2 di un vettore



Figura 7: Convergenza di vettori= convergenza dei punti che rappresentano la testa dei vettori.

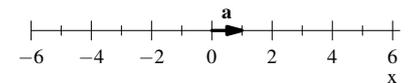


Figura 8: Corrispondenza tra numeri reali e punti di una retta.

distanza tra due punti. Si possono confrontare le lunghezze dei segmenti lungo una retta o lungo rette parallele, ma il confronto dipende dalla scelta convenzionale di un vettore di riferimento, assunto come vettore unitario (si veda la figura 8).

Nello spazio affine il parallelismo tra rette è una nozione assoluta, ma non quella di angolo tra direzioni e dunque non è possibile confrontare le lunghezze di vettori lungo rette non parallele; inoltre, non è definita la nozione di rette ortogonali. In breve, in questa geometria, non esiste una nozione di *congruenza* (solo segmenti paralleli possono essere confrontati per stabilire se sono congruenti). La geometria euclidea è una struttura più ricca, equipaggiata con una nozione di distanza tra punti e di angolo tra direzioni. Sono queste nozioni a rendere possibile la definizione di una nozione di congruenza di figure geometriche.

PASSIAMO A DISCUTERE RETTE E PIANI. Se O è un punto e \mathbf{e} è un vettore (diverso dal vettore nullo), i punti terminali di tutti i vettori della forma $P - O = x\mathbf{e}$ (essendo x un arbitrario numero reale), formano una linea retta. Equivalentemente, diciamo che la retta passante per il punto O nella direzione del vettore \mathbf{e} è l'insieme dei punti P tali che

$$P = O + x\mathbf{e} \tag{6}$$

al variare di x nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Si osservi che questa definizione esatta della nozione di retta si basa soltanto sulle nozioni coinvolte negli assiomi della geometria affine. I punti per cui l'ascissa x è positiva formano una semiretta, quelli per cui x è negativa formano l'altra semiretta che termina in O .

Da un punto di vista fisico, (6) descrive la traiettoria di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme nello spazio fisico tridimensionale, con x che misura la distanza percorsa da O a P con \mathbf{e} che caratterizza la direzione del movimento. Se poniamo $x = vt$, dove v è il modulo della velocità e t è il tempo, l'equazione della retta può essere scritta, equivalentemente,

$$P = P(t) = O + vt\mathbf{e}. \tag{7}$$

Si osservi che O è il punto dove si trova il punto materiale al tempo $t = 0$. Ancora equivalentemente, l'equazione della retta, può essere espressa rispetto ad un altro punto O' scelto come riferimento. Dalla (6) si ha

$$P - O' = O - O' + x\mathbf{e}.$$

Detto \mathbf{r} il vettore $P - O'$ e \mathbf{r}_0 il vettore $O - O'$, l'equazione della retta diventa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + x\mathbf{e},$$

ovvero, in termini cinematici,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + vt\mathbf{e}, \tag{8}$$

ASSIOMI DELLA GEOMETRIA AFFINE

(I) Assiomi per i vettori

Leggi di somma

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (legge commutativa)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}) + \mathbf{c}$ (legge associativa)
3. Se \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due vettori, allora c'è uno e un solo vettore \mathbf{x} per cui vale l'equazione $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$. È chiamato la differenza di \mathbf{a} e \mathbf{b} e significa $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (Possibilità della sottrazione).

Leggi di moltiplicazione per un numero

4. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (prima legge distributiva)
5. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (legge associativa)
6. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
7. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (seconda legge distributiva)

(II) Assiomi per punti e vettori

1. Ogni coppia (ordinata) di punti P e Q determina un vettore \mathbf{a} , simbolicamente espresso come $\mathbf{a} = Q - P$ (oppure \overrightarrow{PQ}).
2. Se P è un qualunque punto e \mathbf{a} un qualunque vettore, esiste uno e un solo punto Q tale che $Q = P + \mathbf{a}$.
3. Se $Q - P = \mathbf{a}$ e $R - Q = \mathbf{b}$, allora $R - P = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

N.B. Si osservi che da (Ic) discende l'esistenza del vettore nullo $\mathbf{0}$ e che da (II) segue che $Q - P = \mathbf{0}$ se e sole se i punti Q e P coincidono.

dove \mathbf{r}_0 è il raggio vettore iniziale del punto materiale e $\mathbf{r}(t)$ il suo raggio vettore al tempo t (rispetto all'origine O').

Se adesso scriviamo \mathbf{e}_1 al posto di \mathbf{e} , e \mathbf{e}_2 è un altro vettore che non è della forma $x\mathbf{e}_1$, allora le teste di tutti i vettori $P - O$ che hanno la forma $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ formano un piano Π (essendo x e y un arbitrari numeri reali). Questa concezione di piano è in accordo con la concezione elementare di piano determinato da 3 punti nello spazio che giacciono sul piano: in questo caso, i tre punti sono il punto O e i punti che rappresentano le teste dei vettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Il piano Π è dunque caratterizzato come l'insieme dei punti P tali che

$$P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \tag{9}$$

per $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (il prodotto cartesiano di \mathbb{R} con se stesso, cioè l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) , dove x e y sono numeri reali); naturalmente, possiamo porre $P - O = \mathbf{r}$ e scrivere $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Si veda la figura 9.

IN QUESTO MODO SI PERVIENE AD UNA COORDINATIZZAZIONE numerica del piano Π , che è messo in corrispondenza uno-a-uno con il piano \mathbb{R}^2 , il cosiddetto *piano cartesiano*, cioè l'insieme di tutte le coppie di numeri reali. Analogamente a come una retta è messa in corrispondenza con \mathbb{R} (si veda la figura 8), anche qui, ci si trova davanti a scelte convenzionali: il punto O e i due vettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 che giacciono nel piano Π .

Il piano \mathbb{R}^2 è di solito rappresentato come in figura 10, con gli assi delle ascisse e delle ordinate disposti ortogonalmente l'uno all'altro. Si osservi che questa rappresentazione è convenzionale (a meno che non si tratti di un piano euclideo in cui è data una nozione di ortogonalità). Questa sottolineatura non vale solo per la geometria (nello spazio affine non si ha alcuna nozione di ortogonalità), ma anche per la fisica: se, ad esempio, le ascisse rappresentano i volumi di un gas e le ordinate le pressioni, è solo una questione di convenienza grafica usare un sistema d'assi cartesiani ortogonali: la perpendicolarità tra gli assi e la distanza tra i punti del piano non ha alcun significato fisico. Analogamente vale per la rappresentazione spazio-temporale di un movimento unidimensionale, con le ascisse che rappresentano il tempo e le ordinate lo spazio (o viceversa): anche in questo caso l'ortogonalità e la distanza euclidea tra punti dello spazio-tempo non hanno in generale significato fisico; ad esempio, in fisica classica, solo la distanza euclidea tra punti con la stessa coordinata temporale ha significato: è la distanza spaziale tra due eventi che avvengono nello stesso tempo (a causa dell'invarianza galileiana, la distanza spaziale tra eventi che accadono in tempi differenti non ha alcun significato invariante).

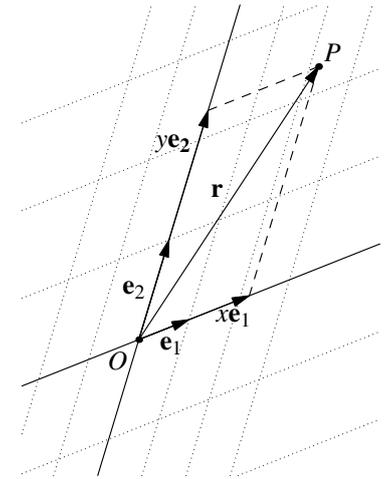


Figura 9: Piano definito dal punto O e dai due vettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 .

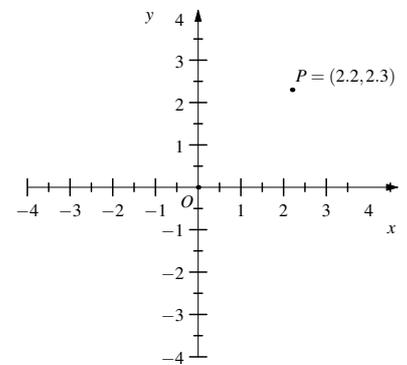


Figura 10: rappresentazione in \mathbb{R}^2 del piano della figura 9.