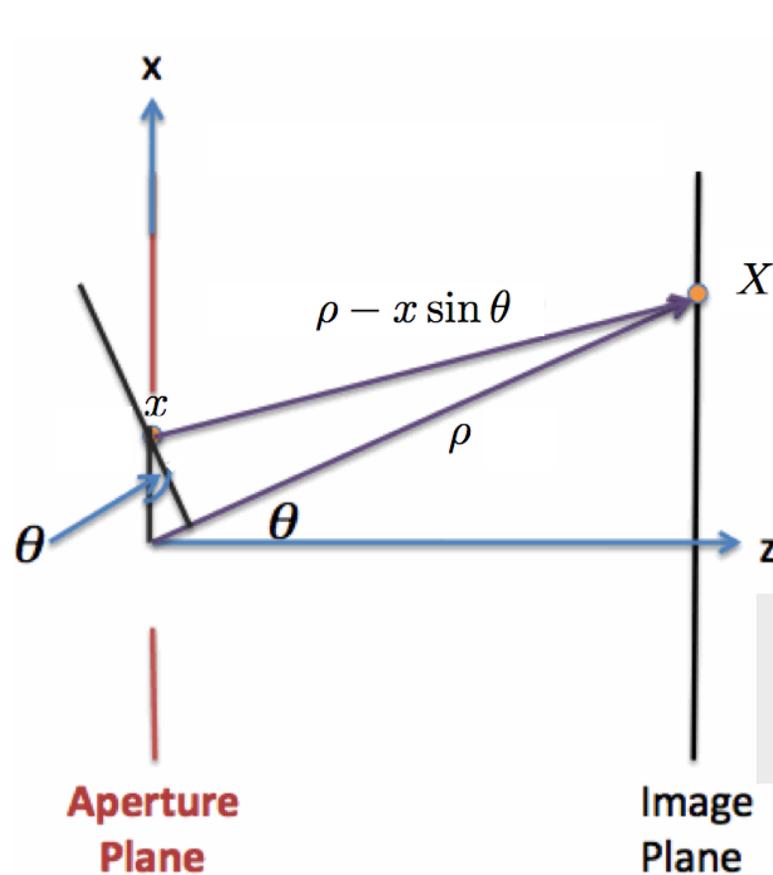


Esercizi sulla diffrazione

Corso di Fisica Moderna

Diffrazione



$$u(X) = u_0 \frac{e^{-i\omega t} e^{ik\rho}}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-ikx \sin \theta} dx$$

$$q = k \sin \theta$$

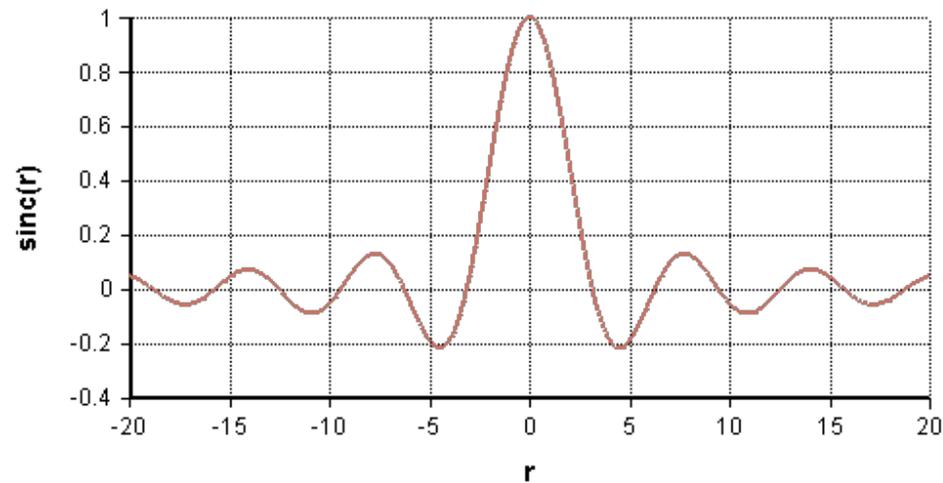
$$C = u_0 \frac{e^{-i\omega t} e^{ik\rho}}{\rho}$$

$$u(X) = C \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-iqx} dx$$

Diffrazione

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \hat{A}(q) = \int_{-a}^a e^{-iqx} dx = \frac{2}{q} \sin qa$$

$$\text{sinc } x \equiv \frac{\sin x}{x}$$



$$\hat{A}(q) = 2a \text{ sinc } qa$$

Diffrazione

$a = d/2$, $d =$ apertura della fenditura

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{d\pi}{\lambda} \sin \theta \right]$$

Esperimento delle due fenditure



Fenditura gaussiana centrata in x_1 con dispersione $\Delta x = \sigma$

$$A_1(x) = \mathcal{N} e^{-(x-x_1)^2/(2\sigma^2)}$$

\mathcal{N} costante di normalizzazione.

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(q) &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x_1)^2/(2\sigma^2)} e^{-iqx} dx, \quad \text{camb. variabile } y = x - x_1 \\ &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/(2\sigma^2)} e^{-iq(y+x_1)} dy \\ &= \mathcal{N} e^{-iqx_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/(2\sigma^2)} e^{-iqy} dy \\ &= \mathcal{N} e^{-iqx_1} \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-q^2\sigma^2/2} \\ &= \mathcal{N}' e^{-iqx_1} e^{-q^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

Fenditura gaussiana centrata in x_2 con stessa dispersione $\Delta x = \sigma$

$$A_2(x) = \mathcal{N} e^{-(x-x_2)^2/(2\sigma^2)}$$

\mathcal{N} stessa costante di normalizzazione. Allora

$$\hat{A}_1(q) = \mathcal{N}' e^{-iqx_2} e^{-q^2\sigma^2/2}$$

Doppia fenditura

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

Campo sullo schermo

$$\begin{aligned} u(X) &= C [\hat{A}_1(q) + \hat{A}_2(q)] \\ &= C' (e^{-iqx_1} + e^{-iqx_2}) e^{-q^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = u(X)\overline{u(X)} &= |C'|^2 (e^{-iqx_1} + e^{-iqx_2}) (e^{iqx_1} + e^{iqx_2}) e^{-q^2\sigma^2} \\ &= |C'|^2 (1 + e^{-iq(x_1-x_2)} + e^{iq(x_1-x_2)} + 1) e^{-q^2\sigma^2} \\ &= |C'|^2 2 [1 + \cos(q(x_1 - x_2))] e^{-q^2\sigma^2} \end{aligned}$$

Distanza tra le fenditure d , $x_1 = d/2$, $x_2 = -d/2$

$$I \propto (1 + \cos qd) e^{-q^2\sigma^2}$$

Ma

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad q = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$$

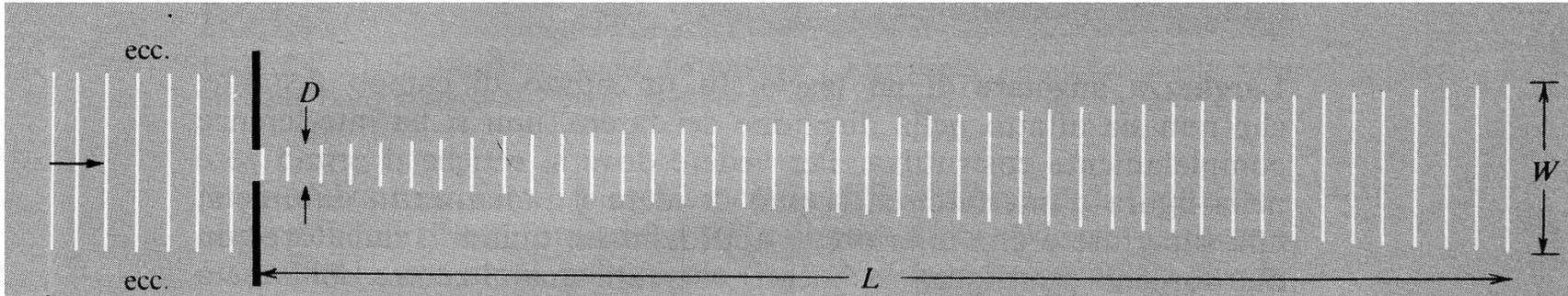
Quindi

$$I = I_0 \cos^2 \left[\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right] e^{-q^2 \sigma^2}$$

La larghezza angolare di un fascio è limitata dalla diffrazione

Sorge ora l'interessante e importantissimo quesito: si può generare, con un progetto accurato, un fascio di onde che sia proprio come un "segmento trasversale" di un'onda piana, nel senso che tutte le onde si propagano esattamente nella stessa direzione e si abbia quindi un fascio perfettamente parallelo che conservi indefinitamente la stessa larghezza? No. Se la direzione "dominante" è lungo z e se la larghezza spaziale del fascio (in un dato valore di z) è D , vi sarà una distribuzione angolare delle direzioni di propagazione con una "larghezza totale a metà massimo dell'intensità" di circa λ/D (come verrà dimostrato sotto). In maniera analoga, se si ha un'onda perfettamente piana emessa da una sorgente puntiforme distante e incidente su un foro di larghezza D , la larghezza angolare del fascio trasmesso è circa λ/D . La larghezza angolare può essere trascurata soltanto se $\lambda \ll D$. Si dice che **la larghezza angolare è limitata dalla diffrazione**.

Dimostrazione



$$\frac{X}{L} = \sin \theta \approx \theta$$

Sia Δx la larghezza della fenditura. Per il teorema della larghezza di banda (Fourier) $\Delta q \Delta x \approx 1$. Ma

$$\Delta q = \Delta(k \sin \theta) = k \Delta(\sin \theta) \approx k \Delta \theta \quad \Rightarrow \quad k \Delta \theta \Delta x \approx 1$$

$$\Delta \theta \approx \frac{1}{k \Delta x} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$$

Quindi, con riferimento alla figura sopra,

$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{D}$$