

MECCANICA ONDULATORIA

Corso di Fisica Moderna

1 *L'ipotesi di de Broglie*

Il primo passo coraggioso verso una nuova meccanica dei sistemi atomici fu preso da Louis Victor de Broglie nel 1923. Nella sua tesi di dottorato ipotizzò che, poiché i fotoni hanno caratteristiche di onda e particella, forse tutte le forme di materia hanno anche proprietà delle onde e delle particelle. Questa era un'idea radicale senza conferma sperimentale in quel momento. Secondo de Broglie, le particelle hanno una doppia natura di onda e particella. Ad ogni particella è associata un'onda (non un'onda elettromagnetica!), che guida, o “pilota”, la particella nello spazio.

Più precisamente, se l'onda associata è monocromatica e di lunghezza d'onda λ , allora la velocità v della particella è data dalla relazione

$$v = \frac{h}{m\lambda} \tag{1}$$

dove m è la massa della particella e h è la costante di Planck. Equivalentemente, se m e v sono la massa e la velocità della particella, la lunghezza d'onda

dell'onda associata è

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2)$$

Infine, introducendo il vettore numero d'onda \mathbf{k} e il vettore quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ possiamo scrivere la relazione di de Broglie come

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (3)$$

Verifica sperimentale dell'ipotesi di de Broglie

De Broglie aveva già suggerito nel 1924 che un flusso di elettroni che attraversa una piccola apertura dovesse mostrare fenomeni di diffrazione.

Dalla teoria della diffrazione che abbiamo sviluppato nelle lezioni precedenti, segue che l'effetto di diffrazione è osservabile se la lunghezza d'onda λ è dell'ordine dell'apertura a della fenditura (se $\lambda \ll a$ l'effetto non si vede).

Problema 1. *Qual è la lunghezza d'onda di una palla da baseball di 140 g che si muove alla velocità di 27 m/s?*

Soluzione.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0.14 \text{ kg} (27 \text{ m} / \text{s})} = 1.7 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Anche un nucleo (la cui dimensione è 10^{-15} m) è troppo grande per difrarre questa lunghezza d'onda incredibilmente piccola! Questo spiega perché tutti gli oggetti macroscopici appaiono come particelle.

Problema 2. *Una particella di carica q e massa m viene accelerata da riposo attraverso una piccola differenza di potenziale V . (a) Trovare la sua lunghezza d'onda di de Broglie λ (assumendo che la particella sia non relativistica). (b) Calcolare λ se la particella è un elettrone e $V = 54.0\text{V}$.*

Soluzione. (a) *Quando una carica viene accelerata dal riposo attraverso una potenziale differenza V , il suo guadagno in energia cinetica, $mv^2/2$ deve essere uguale alla perdita di energia potenziale qV , vale a dire,*

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Poiché $p = mv$, possiamo esprimere questo nella forma

$$\frac{p^2}{2m} = qV \quad \text{ossia} \quad p = \sqrt{2mqV}$$

Sostituendo questa espressione per p nella relazione de Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

(b) La lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone che accelera in una differenza di potenziale di 54.0 V è

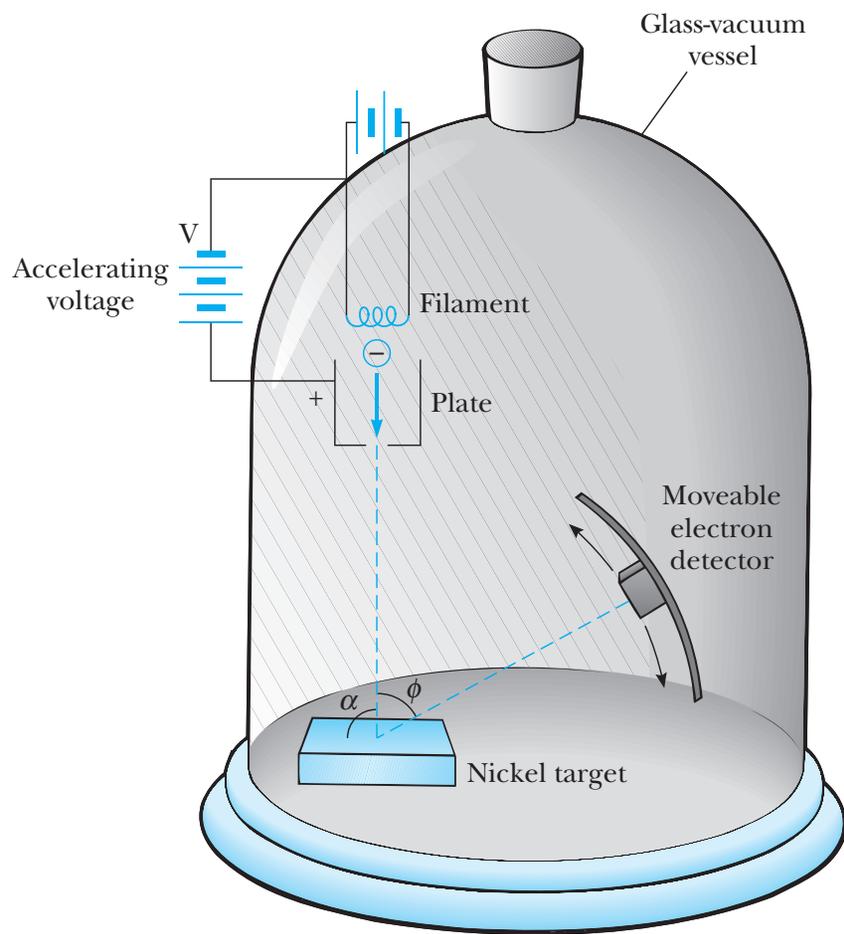
$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e q_e V}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(54.0 \text{ V})} = 1.67 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.67 \text{ \AA} \end{aligned}$$

Questa lunghezza d'onda è dell'ordine delle dimensioni atomiche e la spaziatura tra gli atomi in un solido. Tali elettroni a bassa energia vengono abitualmente utilizzati negli esperimenti di diffrazione elettronica per determinare le posizioni atomiche su una superficie.

L'esperimento di Davisson e Germer

La prova chiara della natura ondulatoria degli elettroni fu ottenuta nel 1927 dal lavoro di Davisson e Germer negli Stati Uniti e George P. Thomson in Inghilterra.

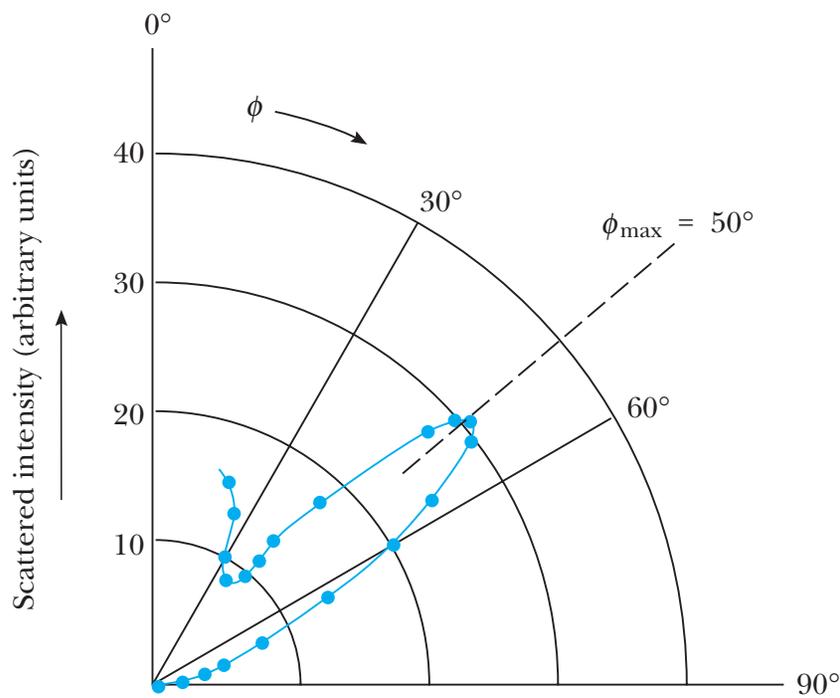
L'esperimento cruciale di Davisson e Germer fu una conseguenza di un tentativo di comprendere la disposizione degli atomi sulla superficie di un campione di nichel mediante diffusione di un fascio di elettroni a bassa velocità da un bersaglio di nichel policristallino.



Il loro dispositivo permetteva la variazione di tre parametri sperimentali: l'energia $q_e V$ degli elettroni ; l'orientamento α del bersaglio di nickel; e angolo di diffusione ϕ . Prima che si verificasse un incidente fortuito, i risultati sembravano abbastanza scontati Per energie di elettroni costanti di circa 100 eV, l'intensità diffusa diminuiva rapidamente con l'aumento di ϕ . Ma poi qualcuno per errore fece cadere un contenitore di aria liquida sull'apparato rompendo il vuoto e ossidando il bersaglio di nichel, che era stato ad alta temperatura.

Per rimuovere l'ossido, il campione fu ridotto riscaldandolo in una corrente di idrogeno che scorre. Quando l'apparato fu ricomposto, si trovarono risultati

molto diversi: furono osservate forti variazioni nell'intensità degli elettroni dispersi con angolo, come mostrato nella figura sotto.



Il riscaldamento prolungato aveva evidentemente ricotto il bersaglio del nichel, provocando lo sviluppo di ampie regioni monocristalline nel campione policristallino. Queste regioni cristalline fornivano il reticolo regolare esteso necessario per osservare la diffrazione elettronica. Una volta che Davisson e Germer realizzarono che si trattava della dispersione elastica di singoli cristalli che producevano risultati così insoliti (1925), iniziarono un'indagine approfondita dello scattering elastico da grandi cristalli singoli con orientamento cristallografico predeterminato.

Tuttavia, anche questi esperimenti non furono condotti all'inizio come test della teoria ondulatoria di de Broglie. Dopo discussioni con altri scienziati, gli

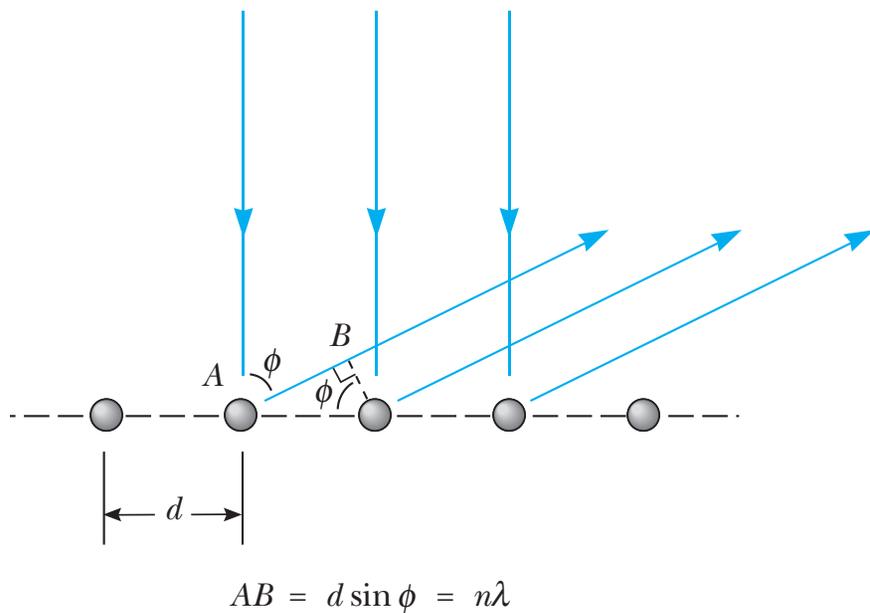
esperimenti e le loro analisi culminarono infine nel 1927 nella dimostrazione che gli elettroni sperimentano una diffrazione con una lunghezza d'onda di elettroni che è data da h/p .

Analisi dettagliata dell'esperimento finale (1927)

Davisson e Germer hanno calcolato la lunghezza d'onda degli elettroni da una semplice formula di diffrazione e hanno confrontato questo risultato con la formula di de Broglie h/p . Sebbene abbiano testato questo risultato su un'ampia gamma di orientamenti target ed energie di elettroni, consideriamo solo il caso semplice $\alpha = 90.0^\circ$, $V = 54.0V$ e $\phi = 50.0^\circ$. Dal problema 2, abbiamo

$$\lambda = 1.67 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.67 \text{ \AA}$$

La lunghezza d'onda sperimentale può essere ottenuta considerando gli atomi di nichel come reticolo di diffrazione di riflessione, come mostrato in figura.



Viene considerato solo lo strato superficiale di atomi perché gli elettroni a bassa energia, a differenza dei raggi X, non penetrano profondamente nel cristallo. L'interferenza costruttiva si verifica quando la differenza di lunghezza del percorso tra due raggi adiacenti è un numero intero di lunghezze d'onda, ossia $d \sin \phi = n\lambda$.

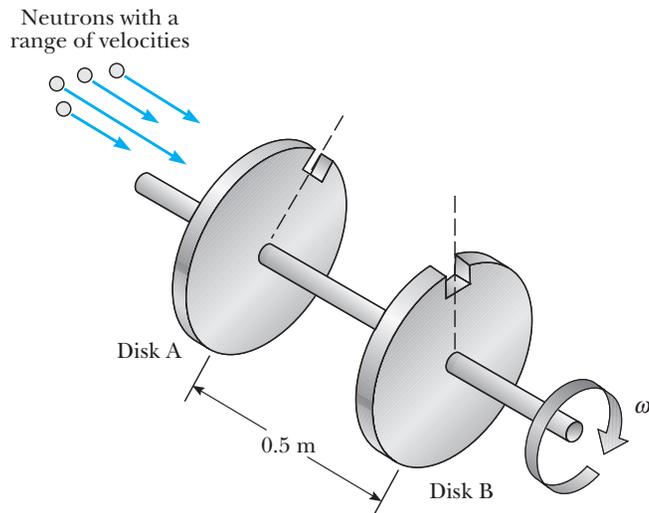
Poiché dalle misurazioni di diffrazione dei raggi X era noto che d fosse 2.15 \AA , Davisson e Germer calcolarono che λ doveva essere

$$\lambda = (2.15 \text{ \AA})(\sin 50.0^\circ) = 1.65 \text{ \AA}$$

in eccellente accordo con la formula di de Broglie.

Universalità dell'ipotesi di de Broglie

Se il postulato di de Broglie è vero per tutta la materia, allora qualsiasi oggetto di massa m ha proprietà ondulatorie e una lunghezza d'onda h/p . Negli anni successivi alla scoperta di Davisson e Germer, gli sperimentatori testarono il carattere universale del postulato di de Broglie cercando la diffrazione di altri fasci di particelle. Negli esperimenti successivi, è stata osservata diffrazione per gli atomi di elio (Estermann e Stern in Germania) e gli atomi di idrogeno (Johnson negli Stati Uniti). Dopo la scoperta del neutrone nel 1932, è stato dimostrato che i fasci di neutroni dell'energia appropriata mostrano anche diffrazione quando incidono su un bersaglio cristallino.



Problema 3 (Neutroni monocromatici).
Un fascio di neutroni con una singola lunghezza d'onda può essere prodotto mediante un selettore di velocità meccanico del tipo mostrato in figura. (a) Calcolare la velocità dei neutroni con una lunghezza d'onda di 1.00 \AA . (b) Quale velocità di rotazione (in rpm) dovrebbe avere l'albero per passare i neutroni con lunghezza d'onda di 1.00 \AA ?

Spiegazione di de Broglie dell'atomo di Bohr

Il modello dell'atomo di Bohr aveva molti difetti e problemi. Ad esempio,

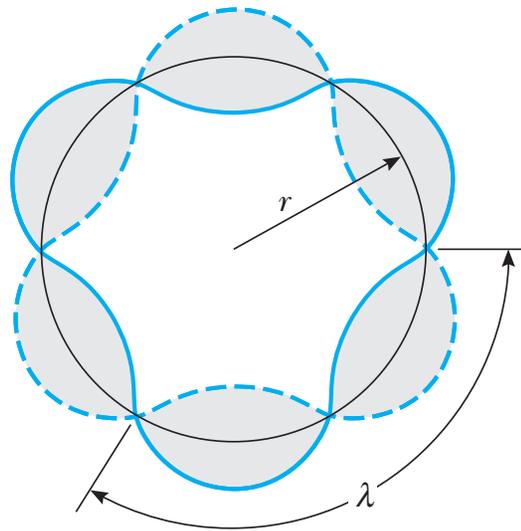
- poiché gli elettroni ruotano attorno al nucleo, come si può comprendere il fatto che sono consentite solo determinate energie elettroniche?
- Perché tutti gli atomi di un dato elemento hanno esattamente le stesse proprietà fisiche indipendentemente dalla varietà infinita di velocità iniziali

e posizioni degli elettroni in ogni atomo?

La grande intuizione di De Broglie fu di riconoscere che una teoria ondulatoria può rendere conto di questi problemi mediante l'interferenza. Ad esempio, una corda di chitarra pizzicata, sebbene inizialmente soggetta a un'ampia gamma di lunghezze d'onda, supporta solo onde stazionarie che hanno nodi a ciascuna estremità. Quindi, **solo un insieme discreto di lunghezze d'onda è consentito per le onde stazionarie, mentre altre lunghezze d'onda non incluse in questo insieme discreto scompaiono rapidamente per interferenza distruttiva.** Questo stesso ragionamento può essere applicato alle onde di de Broglie piegate in un cerchio attorno al nucleo. Sebbene inizialmente possa essere presente una distribuzione continua delle lunghezze d'onda, corrispondente a una distribuzione delle velocità iniziali degli elettroni, la maggior parte delle lunghezze d'onda e delle velocità muoiono rapidamente. **Le forme d'onda residue rappresentano quindi la natura identica di tutti gli atomi di un dato elemento e mostrano che gli atomi sono più simili ad un tamburo con modi di vibrazione discreti che ad un sistema solare in miniatura.**

Quantizzazione del momento angolare

La figura mostra il modello di onde stazionarie dell'elettrone nell'atomo di idrogeno corrispondente allo stato $n=3$ della teoria di Bohr. In generale deve valere



$$2\pi r = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ma $\lambda = h/(mv)$, quindi

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(4)

che è proprio la quantizzazione del momento angolare proposta da Bohr.

Quantizzazione dell'energia

Usando la (4), e ipotizzando di considerare solo orbite circolari, possiamo ora calcolare i livelli di energia consentiti e le lunghezze d'onda di emissione del-

l'atomo di idrogeno. Ricordiamo che l'energia potenziale elettrica del sistema è data da $U = qV = -ke^2/r$ dove k (la costante di Coulomb) ha il valore $1/(4\pi\epsilon_0)$. Quindi, l'energia totale dell'atomo, che contiene sia il termini cinetico che potenziale di energia, è

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{ke^2}{r}$$

Dalla legge di Newton

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

segue che

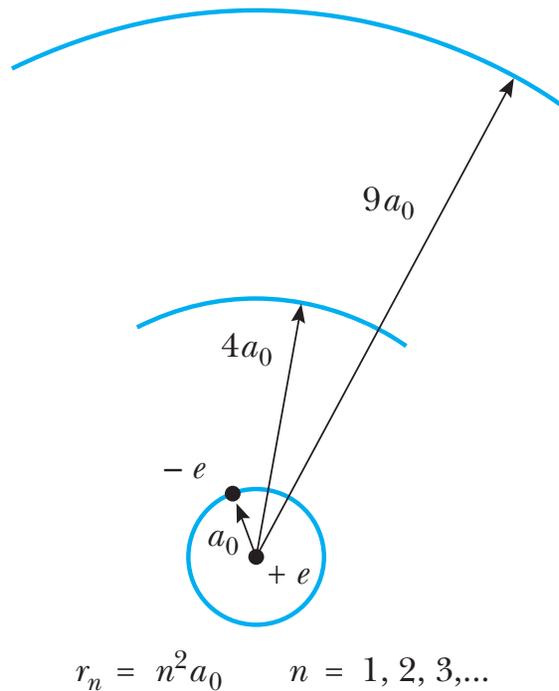
$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{ke^2}{2r} \tag{5}$$

da cui

$$E = -\frac{ke^2}{r}$$

Dalle (4) e (5) (2 equazioni per le incognite r e v) si ottiene

$$r = r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$



Questa equazione mostra che solo alcune orbite sono permesse. Il raggio più piccolo si verifica per $n = 1$, ed è chiamato il raggio di Bohr, ed è denotato a_0 . Il valore per il raggio di Bohr è

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0.529 \text{ \AA} \quad (7)$$

La teoria fornisce un valore per a_0 in buon accordo con la dimensione sperimentale dell'idrogeno.

La quantizzazione dei raggi dell'orbita porta immediatamente alla quantizzazione dell'energia:

$$E = E_n = -\frac{ke^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Inserendo i valori numerici nell'equazione si ottiene

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Gli interi n corrispondenti ai valori discreti o quantizzati dell'energia dell'atomo hanno il nome speciale di **numeri quantici**. Lo stato stazionario più basso è chiamato stato fondamentale, ha $n = 1$ e ha un'energia $E_1 = 13.6$ eV. Lo stato successivo, o primo stato eccitato, ha $n = 2$ e un'energia $E_2 = 3.4$ eV.

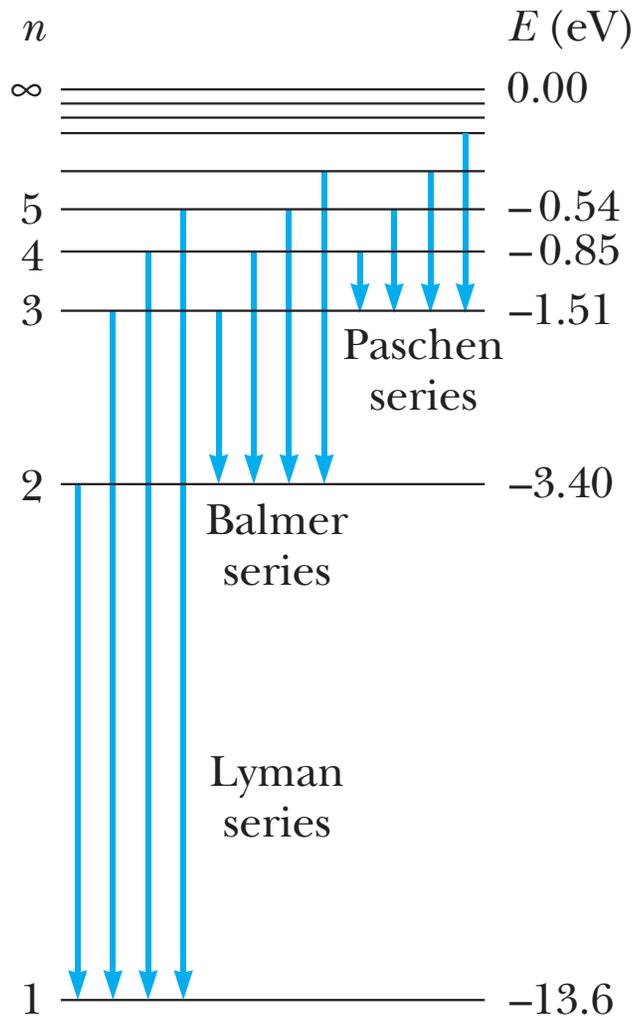


Diagramma dei livelli di energia che mostra le energie di questi stati di energia discreti e i corrispondenti numeri quantici. Il livello più alto, che corrisponde a $n = \infty$ (o $r = \infty$) ed $E = 0$, rappresenta lo stato per cui l'elettrone viene rimosso dall'atomo con zero energia cinetica. L'energia minima richiesta per ionizzare l'atomo (cioè per rimuovere completamente un elettrone nello stato fondamentale dall'influenza del protone) è chiamata energia di ionizzazione. Come si può vedere dalla figura, l'energia di ionizzazione per l'idrogeno è 13.6 eV.

2 Dall'ottica geometrica alla meccanica ondulatoria

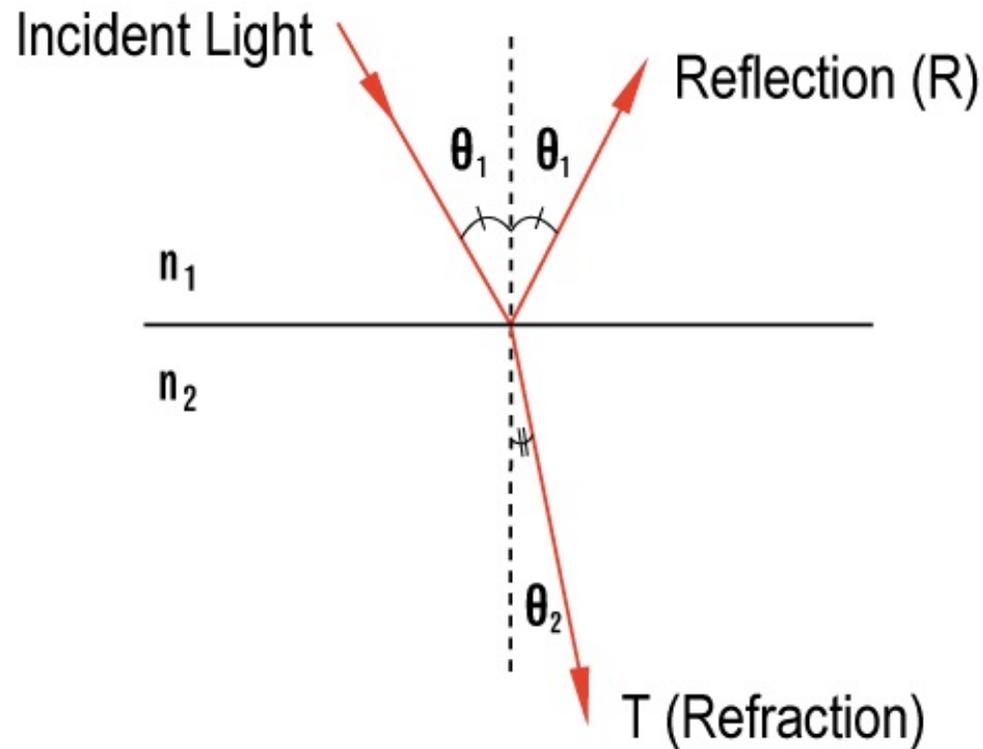
Abbiamo detto che la grande intuizione di De Broglie fu di riconoscere che una teoria ondulatoria può rendere conto dei fenomeni di quantizzazione in maniera molto naturale e a prevedere nuovi fenomeni, quali la diffrazione delle particelle.

Vogliamo adesso comprendere come sia possibile che fenomeni meccanici abbiano un aspetto ondulatorio. In effetti, era chiaro ben prima dell'ipotesi del quanto di luce di Einstein che i fenomeni associati alla propagazione luce avessero un aspetto meccanico, e che la meccanica, opportunamente riformulata, avesse un aspetto ondulatorio.

Ottica geometrica e principio di Fermat

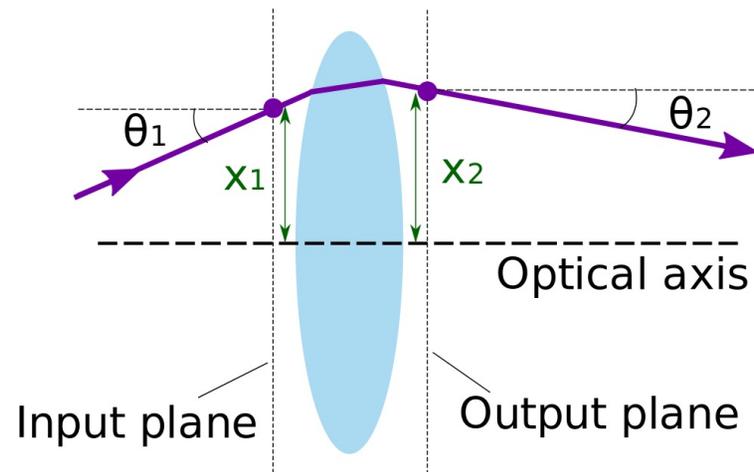
L'ottica geometrica descrive la propagazione della luce in termini di raggi. Passando attraverso uno strumento ottico, come un telescopio o un obiettivo fotografico, un raggio di luce viene sottoposto a un cambiamento di direzione in corrispondenza di ogni superficie rifrangente o riflettente. Il percorso dei raggi

può essere costruito se conosciamo le due semplici leggi che governano i cambiamenti di direzione: la legge di rifrazione di Snell e la legge della riflessione già nota ad Archimede.



Come semplice esempio, la figura sotto mostra la rifrazione dovuta ad una

lente in accordo con la legge di Snell.

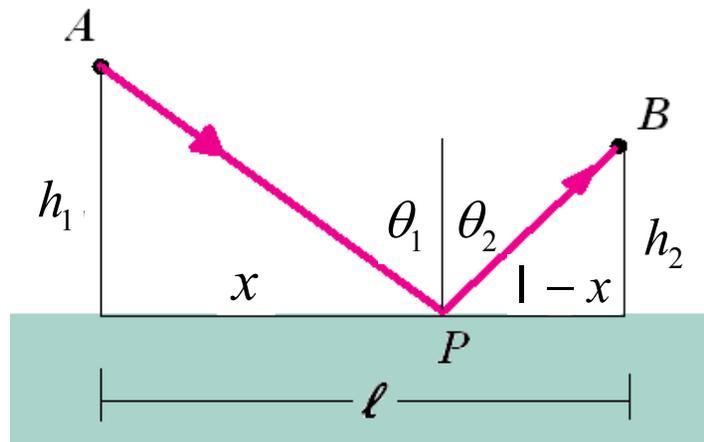


Fermat ha caratterizzato il percorso di un raggio di luce in un modo molto più generale. In mezzi diversi, la luce si propaga con velocità diverse e **di tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.** La minima deviazione dal percorso effettivamente compiuto significherebbe un ritardo. Questo è il famoso **principio di Fermat** del minimo tempo di percorrenza della luce, che con un solo enunciato include anche il caso più generale, quando la natura del mezzo non varia non repenti-

namente in corrispondenza di singole superfici, ma gradualmente da un posto all'altro. Prima di occuparci di questo caso più generale, è utile far pratica con il principio di Fermat, derivando da esso le leggi della riflessione e della rifrazione.

Riflessione e rifrazione dal principio di Fermat

Esercizio 1 (La legge della riflessione). *Consideriamo il raggio di luce mostrato in figura.*



Un raggio di luce che parte dal punto A si riflette sulla superficie nel punto P prima di arrivare al punto B, ad una distanza orizzontale l dal punto A.

Calcoliamo la lunghezza di ciascun percorso e dividiamo la lunghezza per la velocità della luce per determinare il tempo T impiegato dalla luce per viaggiare tra i due punti.

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c}$$

Per minimizzare il tempo imponiamo che la derivata del tempo rispetto a x sia uguale a zero.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(1 - x)}{c\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}} = 0$$

da cui

$$\frac{x}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(1 - x)}{c\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}$$

Ma il primo membro è $\sin \theta_1$ e il secondo è $\sin \theta_2$ (si veda la figura sopra). Quindi $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$, cioè

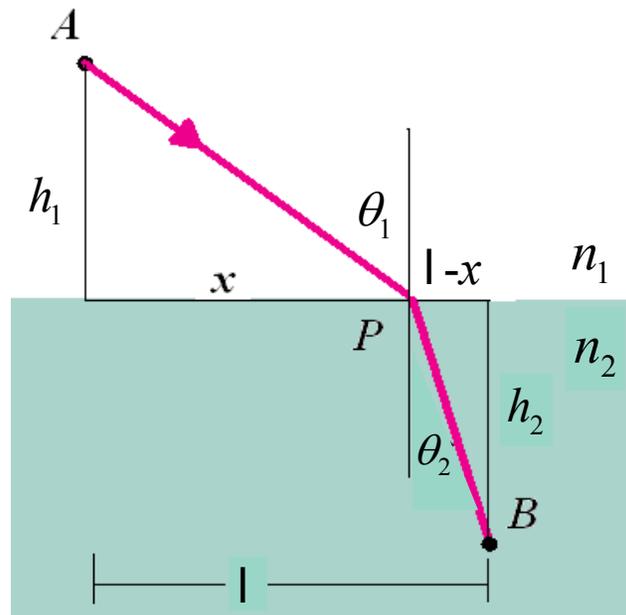
$$\theta_1 = \theta_2$$

che è la legge della riflessione già nota ad Archimede. ■

Per ottenere la legge della rifrazione dal principio di Fermat, ricordiamo preliminarmente che la velocità v_n di propagazione della luce in un mezzo con indice di rifrazione n è

$$c_n = \frac{c}{n}$$

Esercizio 2 (La legge della rifrazione). *Consideriamo un raggio di luce che viaggia dal punto A al punto B in mezzi con diversi indici di rifrazione, come mostrato in figura.*



Il tempo del viaggio tra i due punti è la distanza in ciascun mezzo divisa per la velocità della luce in quel mezzo:

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{c/n_2}$$

Per minimizzare il tempo imponiamo che la derivata del tempo rispetto a x sia uguale a zero.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1 x}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-n_2(1 - x)}{c\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}} = 0$$

da cui

$$\frac{xn_1}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{n_2(1 - x)}{c\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}$$

Quindi

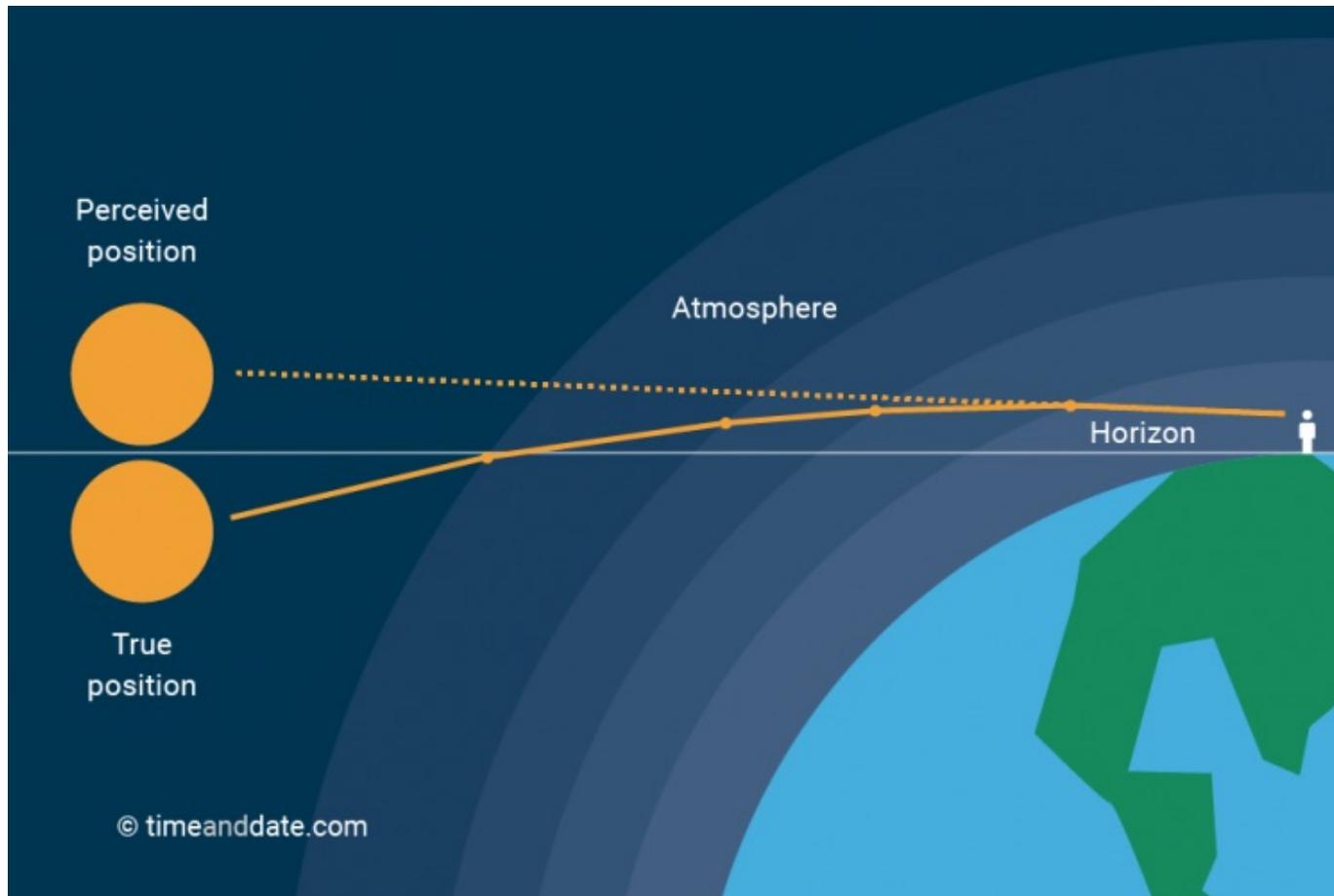
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 ,$$

che è la legge della rifrazione di Snell.



Indice di rifrazione variabile

Passiamo ora al caso generale in cui la natura del mezzo varia gradualmente da un punto ad un altro. L'atmosfera della terra ne fornisce un esempio. Più profondamente un raggio di luce penetra in essa dall'esterno, più lentamente progredisce in un'aria sempre più densa. Sebbene le differenze nella velocità di propagazione siano molto piccole, il principio di Fermat in queste circostanze richiede che il raggio di luce debba curvare verso terra, in modo che rimanga un po' più a lungo negli strati "più veloci" e raggiunga la sua destinazione più rapidamente rispetto al percorso rettilineo più corto, come mostrato nella figura seguente.



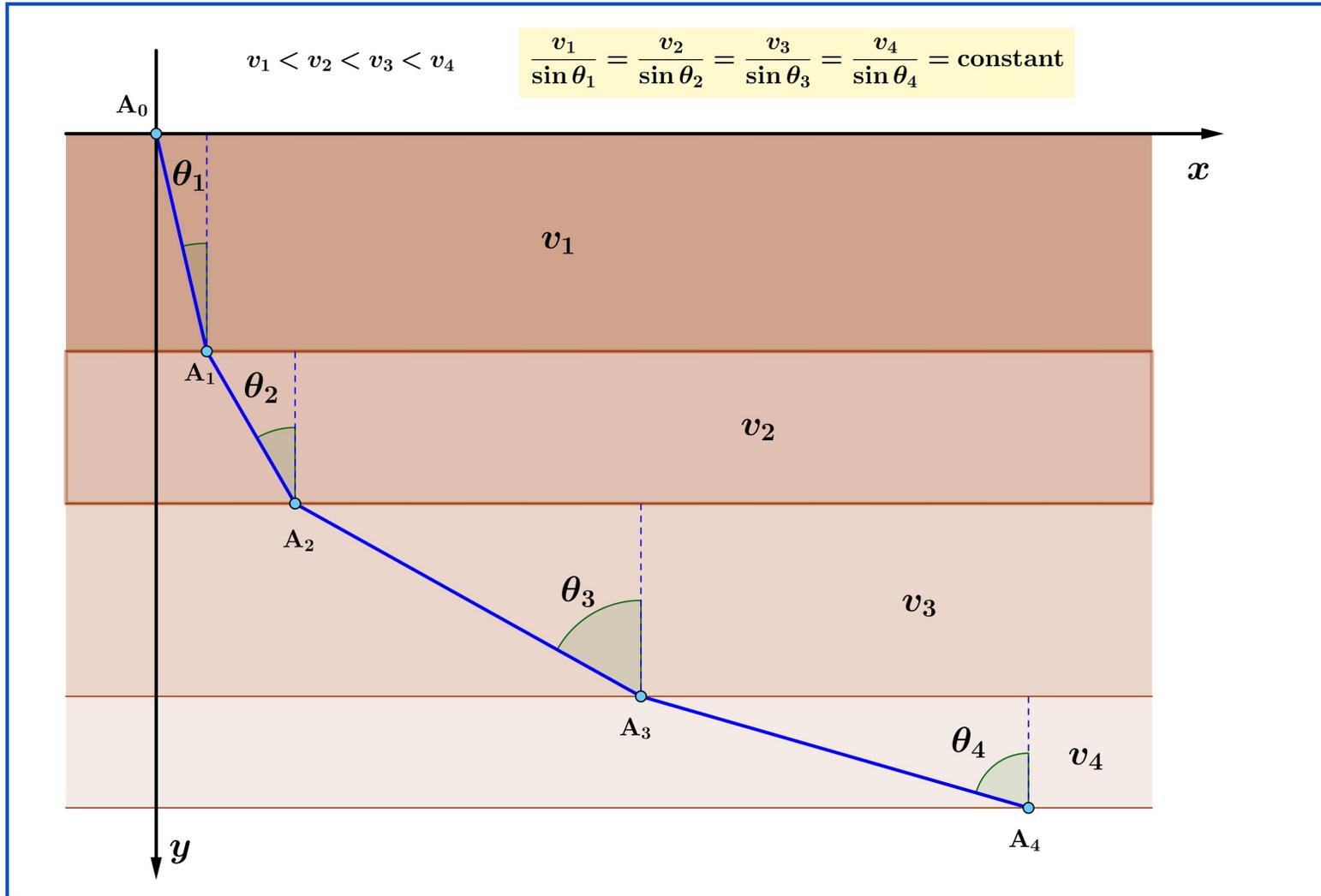
Per la stessa ragione, quando il sole è in profondità sull'orizzonte sembra non essere circolare ma appiattito: il suo diametro verticale sembra

accorciato. Anche questo fenomeno è il risultato della curvatura dei raggi.



Esercizio 3 (Rifrazione in un mezzo con indice di rifrazione variabile). *In figura è mostrato il cammino di tempo minimo di un raggio luminoso dal punto A_0 al punto A_4 che passa attraverso quattro regioni con indice di rifrazione variabile che diminuisce nella direzione positiva delle y e quindi con velocità v*

crescenti.



Ogni cammino intermedio $A_j A_{j+2}$ ($j = 0, 1, 2$) è un cammino di tempo minimo tra i punti A_j and A_{j+2} . Quindi, per la legge di Snell

$$\frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{\sin \theta_2} = \frac{v_3}{\sin \theta_3} = \frac{v_4}{\sin \theta_4} = \text{cost.}$$

Ora, se al posto delle regioni discrete avessimo un continuum con velocità $v(y)$ essendo una funzione crescente progressiva regolare di y , allora al posto del percorso rettilineo a tratti si avrebbe una curva continua liscia

$$\frac{v(y)}{\sin[\theta(y)]} = v(y) \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = v(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = v(y) \sqrt{1 + y'^2} = \text{cost.}$$

Ora

$$v(y) = \frac{c}{n(y)}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e $n(y)$ è l'indice di rifrazione variabile. Quindi, per trovare il percorso $y = y(x)$ per la funzione data $n(y)$ dobbiamo

risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{n(y)} = \text{cost.}$$

Notiamo che caso in cui $v(y) = \sqrt{2gy}$ questa equazione diventa

$$\sqrt{y(1 + y'^2)} = \text{constant} \quad (05)$$

Questa è l'equazione della brachistocrona. La brachistocrona è il percorso della luce in una regione con indice di rifrazione variabile

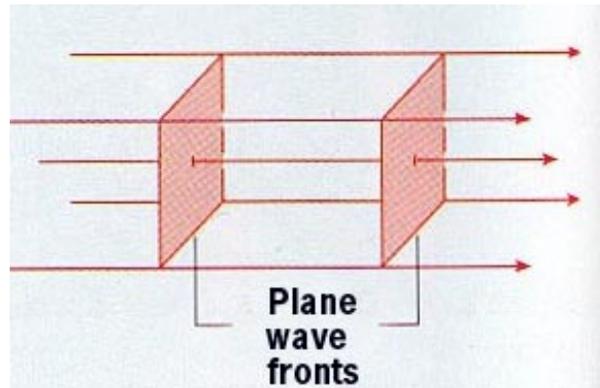
$$n(y) = \frac{\text{costante}}{\sqrt{y}}$$



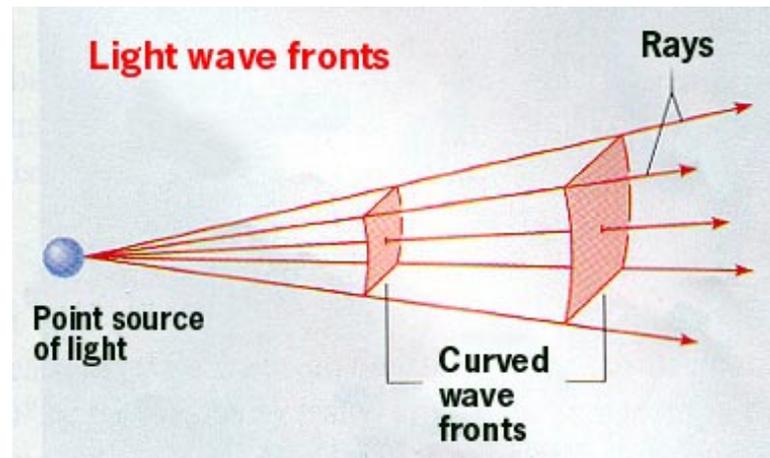
Principio di Fermat e teoria ondulatoria della luce

Secondo la teoria ondulatoria della luce, i raggi luminosi sono le traiettorie ortogonali ai fronti d'onda, che puntano nella direzione normale alla superficie

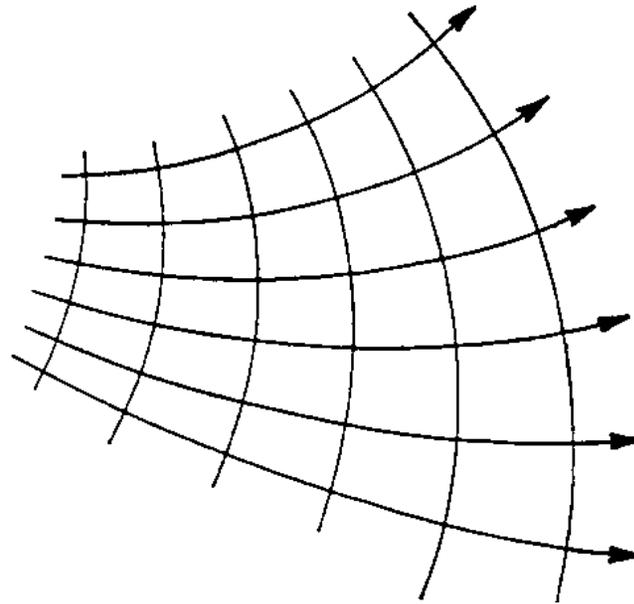
d'onda in cui quest'ultima avanza. La figura sotto mostra il caso più semplice raggi ortogonali a onde piane.



Un altro caso semplice sono le superfici d'onda sferiche concentriche con raggi associati anch'essi rettilinei.



In generale, i fronti d'onda possono essere tali che i raggi risultano curvi come illustrato sotto.



Dal punto di vista della teoria ondulatoria, si può comprendere la curvatura del raggio di luce come una deviazione del fronte d'onda, che deve e verificarsi quando le parti vicine di un fronte d'onda avanzano a velocità diverse. In effetti, **il principio di Fermat è una conseguenza della teoria ondulatoria della luce.**

Derivazione matematica del principio di Fermat

Incominciamo col considerare un'onda piana

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

Il luogo dei punti investiti all'istante t dalla perturbazione ondulatoria è un piano ortogonale al vettore \mathbf{k} . Tale piano rappresenta il *fronte d'onda* i cui punti vibrano con la stessa fase $\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$. Il fronte d'onda si sposta nel tempo avanzando nella direzione di \mathbf{k} e il suo moto è descritto dalla condizione

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{cost.}$$

per cui il fronte d'onda avanza con velocità di fase ω/k . **I raggi di luce si muovono ortogonalmente al fronte d'onda** come mostrato nella figura sopra. Lo stesso vale per le onde sferiche

$$\frac{1}{r} e^{ikr - \omega t}$$

dove adesso i punti che vibrano con la stessa fase sono superfici sferiche concentriche descritte dalla condizione

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = kr - \omega t = \text{cost.} ,$$

cioè

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \omega t = \text{cost.}$$

Adesso il numero d'onda cambia da punto a punto e il numero d'onda locale risulta

$$\mathbf{k} = \nabla\Phi_0(\mathbf{r})$$

dove $\Phi_0(\mathbf{r}) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. I raggi di luce si muovono nella direzione di \mathbf{k} , cioè **ortogonalmente alle superfici sferiche**, che è proprio la direzione del vettore $\nabla\Phi_0(\mathbf{r})$.

In un mezzo materiale omogeneo e isotropo (per esempio l'aria in condizioni costanti di pressione e temperatura), la velocità di fase vale c/n , dove $n(> 1)$ è l'indice di rifrazione del mezzo. Di conseguenza si riduce anche la lunghezza d'onda, ma un'onda piana rimane un'onda piana nel suo propagarsi e lo stesso vale per un'onda sferica.

Se il mezzo non è omogeneo, l'indice di rifrazione varia da punto a punto influenzando la dipendenza da \mathbf{r} della fase $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}) - \omega t$. Se un'onda piana penetra in un tale mezzo il fronte d'onda nel mezzo non è più un piano $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, ma è dato dalla condizione

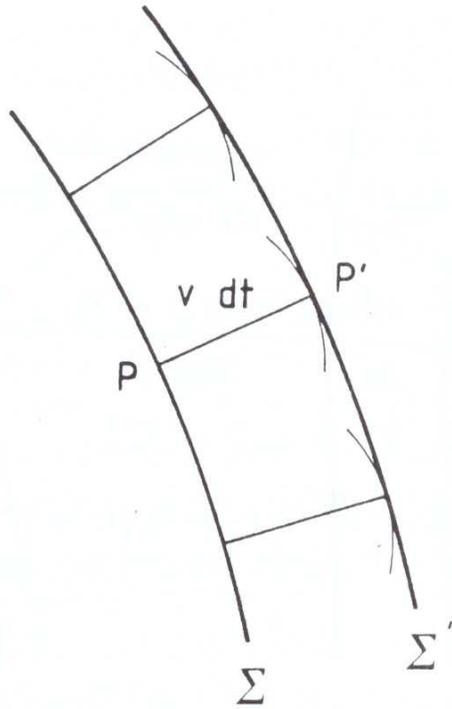
$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \text{cost.}$$

e il suo avanzamento nello spazio è regolato dalla condizione di fase costante,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}) - \omega t = \text{cost.}$$

Principio di Huygens

Da un punto di vista geometrico, l'avanzamento del fronte d'onda può essere ricostruito ricorrendo al principio di Huygens, in base al quale ogni punto del fronte d'onda Σ diventa a sua volta sorgente di luce per il mezzo circostante, emettendo onde in tutte le direzioni, che si propagano con velocità $v = c/n$, come mostrato nella figura sotto.

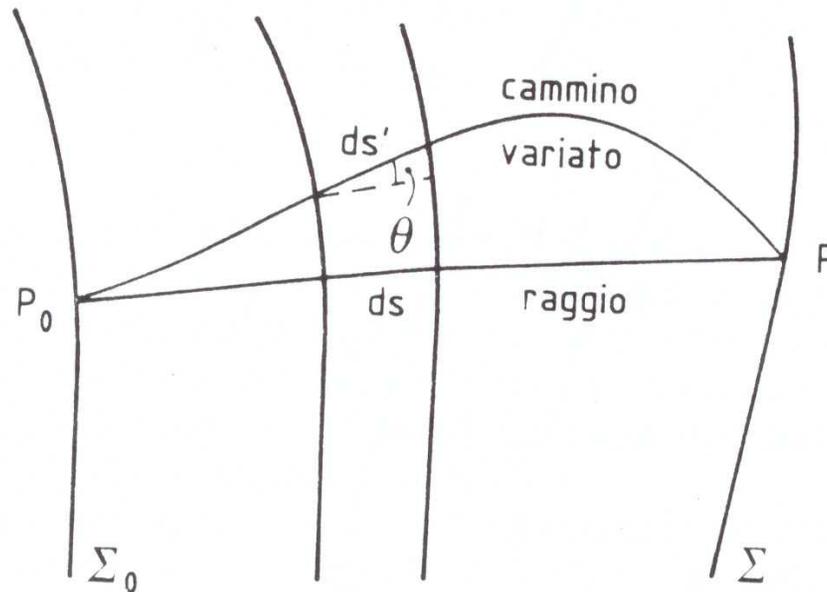


Dopo un tempo dt , a partire dal fronte d'onda Σ si può costruire un fronte d'onda Σ' , ottenuto come involuppo di tutte le superfici sferiche di raggio $v dt$, centrate nei vari punti di Σ . Il raggio luminoso, che è partito dal punto P su Σ , ha raggiunto il punto P' su Σ' muovendosi in direzione perpendicolare al fronte d'onda Σ .

Perciò il vettore d'onda locale risulta

$$\mathbf{k} = \nabla\Phi_0(\mathbf{r}) \quad (9)$$

Per individuare il cammino percorso da un raggio di luce monocromatica per andare da un punto P_0 al generico punto P , durante l'intervallo di tempo finito T , conviene considerare un sistema di fronti d'onda generati dalla superficie Σ_0 cui appartiene P_0 come mostrato in figura.



Il tempo necessario al raggio di luce per andare da P_0 a P è dato da:

$$T = \int_{P_0}^P \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_{P_0}^P n ds \equiv \frac{1}{c} L \quad (10)$$

dove L è la lunghezza del *cammino ottico* percorso dal raggio di luce da P_0 a P . Se, in accordo con la (9), la propagazione viene descritta secondo traiettorie sempre perpendicolari al fronte d'onda, nella (10) il contributo $n ds$ va preso nella direzione del vettore \mathbf{k} , cioè perpendicolarmente al fronte d'onda. Dato che ogni altro contributo $nds' = nds / \cos \theta$ risulta non inferiore a nds ($|\cos \theta| \leq 1$, vedere figura sopra) nella (10) l'intervallo di tempo T risulta minimo lungo la traiettoria effettivamente descritta dal raggio di luce. Questo è il principio di Fermat, che in termini variazionali si esprime nel modo seguente:

$$\delta L = \delta \int n ds = 0$$

Ne consegue che il gradiente del cammino ottico, diretto come \mathbf{k} , ha componenti pari ai coseni direttori di \mathbf{k} moltiplicati per n e quindi

$$(\nabla L)^2 = n^2$$