

RUDIMENTI DI TEORIA DELLE ONDE

INDICE

1. Equazione delle onde	1
1.1. Principio di sovrapposizione	2
1.2. Onde elettromagnetiche e la corda vibrante	2
2. Soluzione per separazione delle variabili	4
2.1. Equazione dell'oscillatore armonico	4
2.2. Equazione di Helmholtz	4
2.3. Onde monocromatiche	5
3. Onde in una dimensione	5
3.1. Separazione delle variabili	6
3.2. Onde in uno spazio illimitato	6
3.3. Onde in uno spazio limitato	7
4. Onde in tre dimensioni	10

1. EQUAZIONE DELLE ONDE

L'equazione delle onde è un'importante equazione alle derivate parziali lineari del secondo ordine per la descrizione delle onde, come le onde meccaniche (ad esempio onde d'acqua, onde sonore e onde sismiche) o le onde elettromagnetiche. Storicamente, il problema di una corda vibrante come quella di uno strumento musicale è stato studiato da d'Alembert, Eulero, Bernoulli e Lagrange.

Eq. delle onde per il campo scalare $u = u(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$(1) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

dove c è la velocità di propagazione e

$$(2) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

è il laplaciano.

In una dimensione spaziale, l'equazione delle onde diventa (1) diventa

$$(3) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.1. Principio di sovrapposizione. Il principio di sovrapposizione afferma che onde sovrapposte si sommano algebricamente per creare un'onda risultante. In base al principio, le onde sovrapposte $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, non ostacolano il movimento o la propagazione di ciascuna. Pertanto, la funzione d'onda u risultante può essere scritta come:

$$(4) \quad u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t) + \dots, u_n(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Questo principio è una conseguenza della linearità dell'equazione delle onde.

La sovrapposizione di onde può portare ai seguenti tre rilevanti effetti:

- Ogni volta che due onde della stessa frequenza viaggiano con la stessa velocità lungo la stessa direzione allora si sovrappongono e creano un effetto definito come *interferenza delle onde*.
- In una situazione in cui due onde con frequenze simili si muovono con la stessa velocità lungo direzioni opposte, si sovrappongono per produrre *onde stazionarie*.
- Infine, quando due onde con frequenze leggermente variabili viaggiano con la stessa velocità lungo la stessa direzione in un mezzo specifico, si sovrappongono per produrre *battimenti*.

1.2. Onde elettromagnetiche e la corda vibrante. Consideriamo sotto forma di esercizi risolti due casi in cui emerge l'equazione delle onde.

Esercizio 1 (Onde elettromagnetiche). *Mostrare che nel vuoto ciascuna componente del campo elettrico \mathbf{E} e del campo magnetico \mathbf{B} soddisfa l'equazione delle onde.*

Soluzione. Nel vuoto $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, dunque le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

(essendo $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, la velocità della luce nel vuoto). Ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A},$$

prendiamo il rotore della terza equazione (scambiando la derivata temporale con il rotore),

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}.$$

Tenuto conto della prima e della quarta, otteniamo

$$-\Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

vale a dire,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0.$$

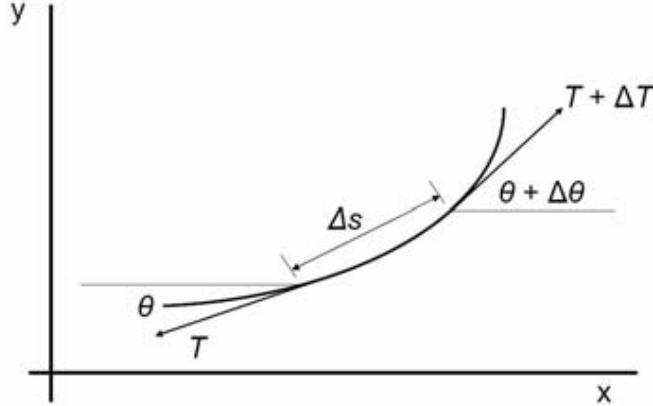
Prendendo il rotore della quarta equazione e procedendo in modo analogo, si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0.$$

Risulta così dimostrato che nel vuoto ogni componente u dei campi elettrici e magnetici soddisfa l'equazione delle onde per $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. ■

Esercizio 2 (Corda vibrante). Ottenere l'equazione delle onde per la corda vibrante.

Soluzione. Il diagramma delle forze per un elemento di corda di lunghezza Δs soggetto ad una tensione \mathbf{T} è mostrato nella figura a margine.



Il materiale di cui è fatta la corda ha densità lineare di massa costante μ ; con s denotiamo la lunghezza d'arco lungo la corda. L'equazione del moto è ottenuta applicando la seconda legge di Newton ad un elemento di lunghezza Δs (ed ignorando effetti di torsione). La componente x dell'equazione è

$$(T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos \theta = \mu \Delta s \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

la componente y è

$$(T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin \theta = \mu \Delta s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

La barra sopra le derivate significa l'accelerazione mediata sull'elemento di massa in Δs . Dividendo per Δs e passando al limite $\Delta s \rightarrow 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(T \cos \theta) &= \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial s}(T \sin \theta) &= \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Ma, per piccoli θ ,

$$\cos \theta = \frac{\partial x}{\partial s} \approx 1, \quad \sin \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \approx \frac{\partial}{\partial x}.$$

In definitiva,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

La prima equazione è banalmente risolta e stabilisce che lungo x non c'è deformazione elastica; la seconda, posto $c = \sqrt{T/\mu}$, è proprio l'equazione delle onde (3). ■

2. SOLUZIONE PER SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Ricerca di soluzioni a variabili separate, cioè della forma

$$(5) \quad u = T(t)\phi(\mathbf{r}).$$

Inserendo una funzione di questa forma nell'eq. (1), si ottiene

$$\frac{1}{c^2}\ddot{T}u = T\Delta u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\Delta\phi}{\phi}$$

L'uguaglianza può essere verificata solo se entrambi i membri dell'equazione sono costanti. Chiamiamo $-k^2$ questa costante, che è detta *costante di separazione*. Allora l'eq. (1) diventa il sistema di equazioni

$$(6) \quad \ddot{T} + k^2c^2T = 0$$

$$(7) \quad \Delta\phi + k^2\phi = 0$$

Si osservi che deve essere $k^2 > 0$ per avere soluzioni di (6) limitate nel tempo; si esclude quindi il caso $k^2 < 0$ (cioè k immaginario). A parte questo, non ci sono a priori altre restrizioni su k , che può quindi essere per il momento un qualunque numero reale.

2.1. Equazione dell'oscillatore armonico. L'eq. (6) è l'equazione dell'*oscillatore armonico*

$$(8) \quad \ddot{T} + \omega^2T = 0$$

per

$$(9) \quad \omega = \omega(k) = c|k|.$$

Si osservi che ω è una quantità positiva. Questa equazione ha due soluzioni linearmente indipendenti. Come base delle soluzioni si possono prendere le funzioni trigonometriche,

$$(10) \quad \{\sin \omega t, \cos \omega t\}$$

oppure gli esponenziali immaginari

$$(11) \quad \{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}.$$

2.2. Equazione di Helmholtz. L'eq. (7) è detta *equazione di Helmholtz*. Questa equazione va intesa come equazione agli autovalori. Per metter in evidenza questo, possiamo riscriverla così: $\Delta\phi = -k^2\phi$. Occorre cioè trovare quei particolari valori di k e i corrispondenti *autovettori* $\phi = \phi(\mathbf{k})$ che soddisfano l'equazione.

2.3. **Onde monocromatiche.** La soluzione dell'equazione delle onde a variabili separate

$$(12) \quad u_k(\mathbf{r}, t) = [c_k e^{i\omega(k)t} + d_k e^{-i\omega(k)t}] \phi_k(\mathbf{r})$$

dove ϕ_k è l'autovettore corrispondente all'autovalore $-k^2$ è detta *onda monocromatica* di frequenza $\omega = c|k|$.

3. ONDE IN UNA DIMENSIONE

In una dimensione spaziale, l'equazione delle onde è data dall'eq. (3). D'Alembert ha dimostrato che tutte le soluzioni della (3) sono della forma

$$(13) \quad u = f(x - ct) + g(x + ct),$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie (purché differenziabili due volte). Per comprenderne il significato, si supponga che la corda sia illimitata dalle due parti e che $g = 0$, per cui

$$(14) \quad u(x, t) = f(x - ct).$$

Poiché questa funzione dipende solo da $x - ct$, questa soluzione descrive un'onda che si propaga inalterata nella direzione positiva dell'asse delle x : in un sistema di riferimento in moto con velocità c la soluzione avrebbe sempre, nel corso del tempo, la stessa forma: un'onda di questo tipo è detta *progressiva*. La soluzione

$$(15) \quad u(x, t) = g(x + ct).$$

corrisponde invece ad un'onda *regressiva*, cioè un'onda che si propaga inalterata nella direzione negativa dell'asse delle x . La soluzione generale (13) corrisponde ad una sovrapposizione di questi due tipi d'onde.

Dimostrazione della (13). Preliminarmente si mostra che l'equazione (3) può essere riscritta nella forma

$$(16) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

mediante il cambiamento di variabili

$$(17) \quad \begin{cases} \eta = x - ct \\ \xi = x + ct \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta) \\ x = \frac{1}{2c}(\xi + \eta) \end{cases}$$

Per vedere che la (16) è equivalente alla (3), calcoliamo come cambiano le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial \eta} + c \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{aligned}$$

e, derivando ancora una volta,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

Quindi,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi},$$

da cui la (16). L'equazione (16) può essere trattata come una coppia di equazioni ordinarie consecutive

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

il che vuol dire che $\partial u / \partial \xi$ non dipende da η , vale a dire è una funzione della sola ξ : $\partial u / \partial \xi = G(\xi)$. Integrando (e indicando con g la primitiva della G), $u = g(\xi) + f$, dove f non dipende da ξ , ma può dipendere da η . Dunque $u = g(\xi) + f(\eta)$, che, ritornando alle variabili x e t , è proprio la (13). ■

3.1. Separazione delle variabili. Le soluzioni dell'equazione delle onde in una dimensione possono anche essere ottenuti mediante il metodo di separazione delle variabili esposto precedentemente. In una dimensione spaziale, l'equazione di Helmholtz diventa

$$(18) \quad \phi'' + k^2 \phi = 0$$

Quindi, come per l'oscillatore armonico, una base per le soluzioni sono le funzioni seno e coseno,

$$(19) \quad \{\sin kx, \cos kx\}$$

oppure gli esponenziali immaginari

$$(20) \quad \{e^{ikx}, e^{-ikx}\}.$$

Trattiamo separatamente le onde in uno *spazio illimitato* e le onde in uno *spazio limitato*.

3.2. Onde in uno spazio illimitato. In una dimensione spaziale, questo corrisponde allo studio della propagazione di onde sulla retta reale. Qualunque k è un autovalore. Scegliendo la base degli esponenziali immaginari, abbiamo

$$(21) \quad \text{autovalore } k^2 \longrightarrow \text{autovettore } e^{ikx}$$

dove k può essere positivo o negativo; cioè, per ogni autovalore k^2 ci sono 2 autovettori, $e^{i|k|x}$ e $e^{-i|k|x}$. Ricordiamo che l'equazione dell'oscillatore armonico (8) ha due soluzioni indipendenti (le funzioni trigonometriche (10) o gli esponenziali

immaginari (11)). Per comodità, utilizziamo gli esponenziali immaginari. Quindi, poiché per definizione $\omega = \omega(k) \equiv c|k|$ è positivo, per un dato k , positivo o negativo, si hanno due soluzioni a variabili separate dell'equazione delle onde:

$$(22) \quad e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$(23) \quad e^{ikx} e^{i\omega t} = e^{i(kx + \omega t)}$$

Per interpretarle fisicamente, prendiamone la parte reale e raccogliamo k (assumiamo $k > 0$):

$$(24) \quad \cos(kx - \omega t) = \cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right] = \cos [k(x - ct)]$$

$$(25) \quad \cos(kx + \omega t) = \cos \left[k \left(x + \frac{\omega}{k} t \right) \right] = \cos [k(x + ct)]$$

Il confronto con la soluzione generale (13) mostra che (24) è un'onda progressiva che propaga da sinistra a destra la funzione $f(x) = \cos kx$. Quindi il parametro k (finora introdotto solo come costante di separazione) assume il significato di numero d'onde dell'onda armonica $\cos kx$; ricordiamo che $k = 2\pi/\lambda$ dove λ è la lunghezza d'onda; inoltre la relazione $\omega = c|k|$, cioè $c = \omega/|k| = \omega\lambda/(2\pi) = \nu\lambda$ stabilisce che c è la velocità di fase dell'onda. Analoghe considerazioni per la seconda soluzione, mostrano che (25) è un'onda armonica regressiva che si propaga da destra a sinistra con stessa velocità e stessa lunghezza d'onda.

Combinando linearmente ciascuna delle due soluzioni $e^{i(kx - \omega t)}$ e $e^{i(kx + \omega t)}$ con ampiezze arbitrarie, diciamo $\hat{f}(k)$ per la prima e $\hat{g}(k)$ per la seconda si ottiene una soluzione per ogni k . Integrando su tutti i k (principio di sovrapposizione), si ottiene

$$(26) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{f}(k) e^{i(kx - c|k|t)} + \hat{g}(k) e^{i(kx + c|k|t)} \right] dk$$

che è la soluzione generale dell'equazione delle onde espressa come sviluppo in integrale di Fourier. (L'integrazione tra $-\infty$ e $+\infty$ tiene conto sia dei valori positivi di k sia di quelli negativi.)

Esercizio 3. *Mostrare che (26) è della forma (13) con $\hat{f}(k)$ e $\hat{g}(k)$ le trasformate di Fourier di $f(x)$ e $g(x)$.*

3.3. Onde in uno spazio limitato. Consideriamo due casi:

- (1) Corda vibrante fissata agli estremi
- (2) Corda vibrante a forma di anello

Incominciamo con (1). Consideriamo la corda fissata in $x = 0$ e $x = L$. Allora vanno considerate solo le soluzioni dell'equazione di Helmholtz (18) che soddisfano le condizioni al contorno

$$(27) \quad \phi(0) = \phi(L) = 0.$$

Le sole soluzioni che soddisfano questa condizione sono

$$(28) \quad \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori sono

$$(29) \quad k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

e a ciascun autovalore è associato il solo autovettore $\sin(k_n x)$.

Ricordiamo nuovamente che l'equazione dell'oscillatore armonico (8) ha due soluzioni indipendenti. Analogamente a prima, per un dato k_n e corrispondente frequenza

$$(30) \quad \omega_n \equiv ck_n = \frac{n\pi c}{L} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

si hanno due soluzioni a variabili separate dell'equazione delle onde:

$$(31) \quad e^{-i\omega_n t} \sin(k_n x)$$

$$(32) \quad e^{i\omega_n t} \sin(k_n x)$$

Una combinazione lineare di queste (usando le formula di Eulero) può essere scritta come

$$(33) \quad [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo introdotto l'ampiezza A_n dell'onda e la sua fase φ_n .¹ Per ogni intero n questa soluzione a variabili separate dell'equazione delle onde è *modo normale di vibrazione della corda*: tutte le parti del sistema si muovono di moto armonico con la stessa frequenza e con una relazione di fase fissa; queste frequenze dei modi normali di un sistema sono chiamate frequenze naturali o frequenze risonanti. Un modo normale è dunque una *soluzione stazionaria*: se la corda è fatta vibrare con le caratteristiche di un modo normale, nel corso del tempo si manterrà sempre nello stesso modo e nessun altro modo verrà eccitato. Nella figura sotto sono riassunte le caratteristiche dei modi normali in termini della loro lunghezza d'onda λ_n e frequenza ν_n

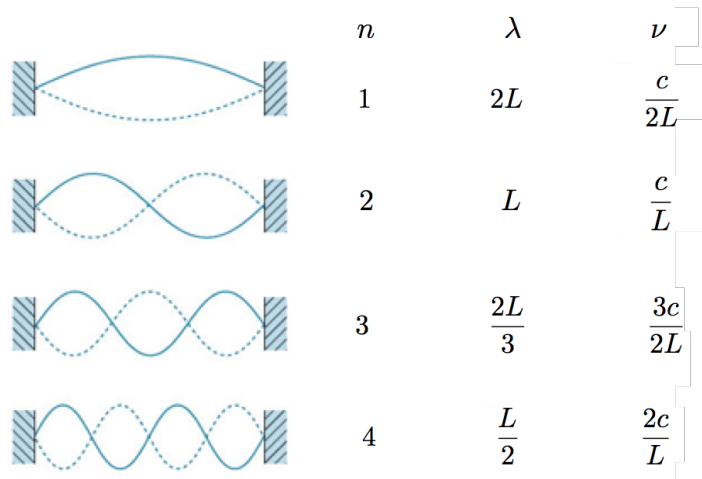
$$(34) \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad \nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Per il *principio di sovrapposizione*, una qualunque soluzione può essere espressa come combinazione lineare (serie di Fourier)

$$(35) \quad u(x, t) = \sum_n [a_n e^{-i\frac{n\pi c}{L}t} + b_n e^{i\frac{n\pi c}{L}t}] \sin \frac{n\pi}{L}x$$

Esercizio 4. *Spiegare come ottenere il modo normale (33) sovrapponendo un'onda progressiva e un'onda regressiva.*

¹Ricordando $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, si ha $A_n \cos \varphi_n = a_n$ $A_n \sin \varphi_n = -b_n$.



Esercizio 5. Siano

$$u(x, t)|_{t=0} = q(x) \quad e \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = p(x),$$

dove $q = q(x)$ e $p = p(x)$ sono due funzioni assegnate che rappresentano la configurazione della corda e la sua velocità all'istante iniziale $t = 0$. Mostrare che i coefficienti a_n e b_n nella (35) sono dati dalle formule

$$(36) \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$(37) \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Esercizio 6 (Corda vibrante a forma di anello). Intendiamo con questo una corda chiusa disposta lungo una circonferenza di raggio R , come mostrato in figura.



Quali lunghezze d'onda sono permesse? Come sono fatte le soluzioni in cui le onde viaggiano in senso orario? E quelle in senso antiorario? Quali sono le soluzioni che corrispondono a modi normali?

4. ONDE IN TRE DIMENSIONI