

Nozioni elementari di meccanica classica

Le leggi newtoniane del movimento della materia

Nino Zanghì

1 Galileo, Newton, Laplace e Einstein	1
2 ABC di matematica	6
3 Le leggi newtoniane del movimento della materia	10
4 Simmetria e leggi fisiche	14
5 La meccanica come fondamento della teoria atomica	20
6 Spiegazione della prima legge della termodinamica	22
7 Lo spazio delle fasi	22
8 Meccanica hamiltoniana	24
9 Proprietà fisiche	25
10 Determinismo, caso, predicibilità	26
11 Simmetria per inversione temporale	29

1 Galileo, Newton, Laplace e Einstein

Incominciamo con una citazione di Galileo Galilei:

*Ma io vi dico che anco in astratto una sfera immateriale, che non sia sfera perfetta, può toccare un piano immateriale, che non sia piano perfetto, non in un punto, ma con parte della sua superficie; talché sin qui quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto: e sarebbe ben nuova cosa che i computi e le ragioni fatte in numeri astratti, non rispondessero poi alle monete d'oro e d'argento e alle mercanzie in concreto. Ma sapete signor Simplicio, quel che accade? Sì come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, invoglie ed altre bagaglie, così, quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che **difalchi gli impedimenti della materia**; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si riscontoreranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto né nella geometria o nella fisica ma nel calcolatore che non sa fare i conti giusti.¹*

¹ G. Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi, tolemaico e copernicano, a cura di Libero Sosio, Einaudi, Torino, p. 252).

Considerate l'acqua di un ruscello che scorre: dietro il suo movimento complesso ci sono le leggi meccaniche scoperte da Galileo e Newton. Un fenomeno ancora più semplice: gettate in aria una mela e osservate come essa si muove. Se, come diceva Galileo, difalcate *gli impedimenti della materia*, cioè, in questo caso, trascurate il rallentamento della mela dovuto all'attrito con l'aria, la legge di caduta della mela vi apparirà incredibilmente semplice: nel corso del tempo, la posizione verticale $z(t)$ del centro di massa del corpo segue la *legge oraria*

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

dove z_0 è la coordinate verticale iniziale, cioè al tempo $t = 0$ in cui avete lanciato la mela e fatto partire il cronometro, v_0 è la componente verticale della velocità iniziale (che le avete impartito lanciandola) e g è l'accelerazione di gravità terrestre ($9,8 \text{ m/s}^2$).

La legge oraria della caduta di un corpo nel campo gravitazionale terrestre fu scoperta da Galileo e rappresenta il prototipo di evoluzione temporale *meccanica*.

La legge oraria di caduta di un corpo nel campo gravitazionale terrestre si inquadra nello schema generale della meccanica, che tra la fine del XVIII secolo e l'inizio del XIX raggiunse il suo apice. In quegli anni il fisico e matematico Pierre-Simon conte di Laplace così scriveva:

*Quali sono le forze principali che mantengono pianeti, i satelliti e le comete nelle loro rispettive orbite? Quali forze particolari perturbano i loro moti ellittici? Quali cause provocano la retrocessione degli equinozi e il movimento degli assi di rotazione della terra e della luna? Da quali forze infine vengono sollevate le acque dei mari due volte al giorno? L'ipotesi di un solo principio dal quale tutte queste leggi dipendono è degna della semplicità e della maestà della natura. La generalità delle leggi che si presentano nei moti celesti ne sembrano indicare l'esistenza; e di già si intravede un tal principio nei rapporti fra tali fenomeni e la posizione relativa dei corpi nel sistema solare. Ma per farlo emergere con evidenza è necessario conoscere **le leggi del movimento della materia**.²*

Lo schema generale e potente per inquadrare le leggi del movimento della materia, a cui Laplace fa riferimento, era stato scoperto da Isaac Newton circa un secolo prima e si basa sulla congettura che l'accelerazione istantanea di un corpo, \mathbf{a} , sia una funzione universale della posizione del corpo e delle posizioni di tutti gli altri corpi presenti nell'universo.

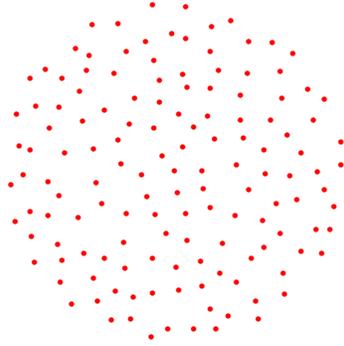
Poco più di cent'anni dopo Laplace, Einstein scriveva:

*Secondo il sistema di Newton il reale fisico è caratterizzato dai concetti di **spazio**, di **tempo**, di **punto materiale**, di **forza** (equivalente all'azione reciproca tra punti materiali). I fenomeni fisici devono intendersi, secondo Newton, come movimenti di punti materiali nello spazio, movimenti retti da leggi. Il punto materiale è l'unico rappresentante del reale... I corpi percettibili hanno manifestamente dato origine all'idea del punto materiale; si è immaginato il punto materiale come l'analogo dei corpi mobili, privo dei caratteri di forma, estensione, orientamento nello spazio, di tutte le proprietà intrinseche, insomma, all'infuori dell'inerzia e della traslazione e introducendovi l'idea di forza. Questi corpi materiali che hanno provocato psicologicamente la formazione del concetto "punto materiale", dovevano quindi, a loro volta, essere considerati sistemi di punti materiali. (A. Einstein, *Come io vedo il mondo*)*

²P.-S Laplace, *Exposition du système du monde*, De room, Bruxelles, 1827, pp. 179-180.

Punti materiali

Un corpo è formato da tantissimi atomi ($\sim 10^{23}$)



Un corpo appare come un punto materiale se guardato da lontano...



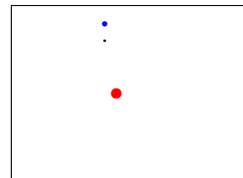
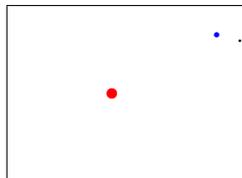
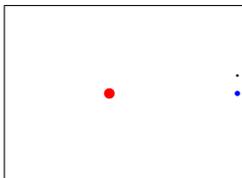
...ad esempio, un pianeta o una stella... oppure il sistema Sole-Terra-Luna

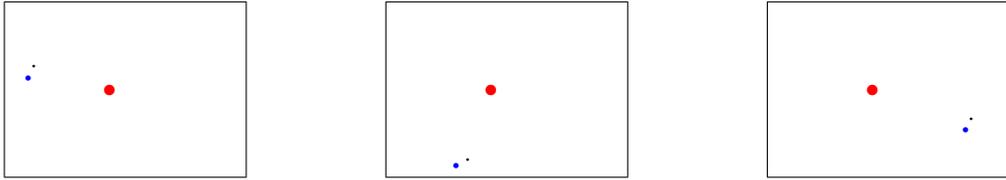


raggio del Sole: $6,96 \times 10^8$ m
raggio della Terra: $6,37 \times 10^6$ m
raggio della Luna: $1,74 \times 10^6$ m
distanza Terra-Sole: $1,49 \times 10^{11}$ m
distanza Terra-Luna: $3,84 \times 10^8$ m

Il movimento

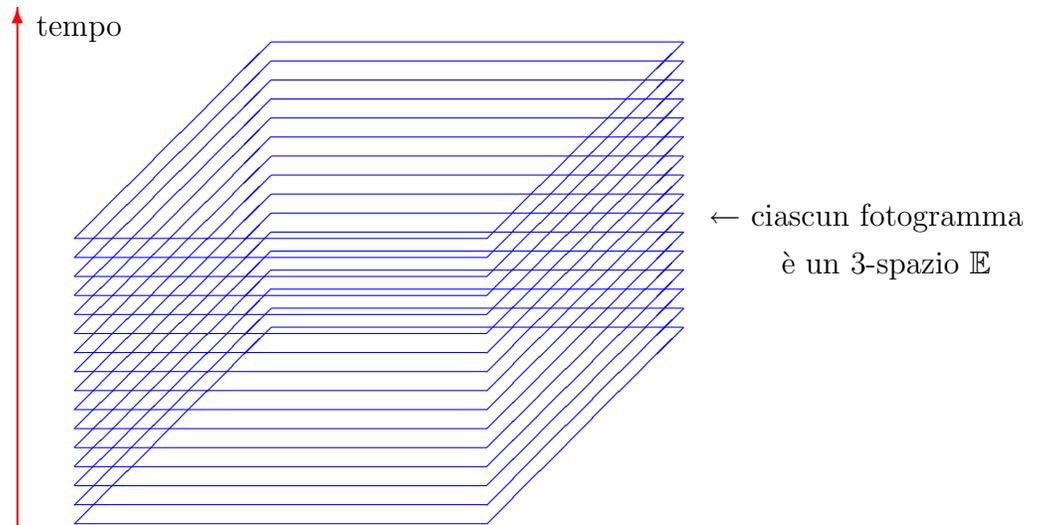
Metafora del movimento: il cinema...





Ogni fotogramma rappresenta la *configurazione* del sistema Terra-Sole-Luna ad un dato istante. In generale, la configurazione dell'universo ad ogni istante è un insieme di punti nello spazio euclideo 3-dimensionale (\mathbb{E}).

Incolliamo i fotogrammi 3-dimensionali e formiamo così un oggetto 4-dimensionale



Ogni \mathbb{E} ha un numero: il tempo in cui è stata scattata la fotografia: $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_\tau, \mathbb{E}_{2\tau}, \dots$ (τ è l'intervallo di tempo tra due scatti consecutivi)

Due problemi:

- *Come misuriamo il tempo?*
 - Con un orologio, cioè facendo riferimento ad un fenomeno fisico (un movimento) regolare.
 - Ad esempio, quando diciamo che il tizio ha percorso 1700 m in 4 minuti intendiamo che mentre il tizio ha percorso i 1700 m il sole si è spostato nel cielo di 1° .
 - Sembra un gatto che si morde la coda: per spiegare il movimento ci basiamo sul movimento! (“Perchè il mare è agitato?” “Perchè Nettuno è arrabbiato!” “E perchè Nettuno è arrabbiato?” “Ma non vedi come è agitato il mare!”)
- *Come identifichiamo due \mathbb{E} consecutivi?*

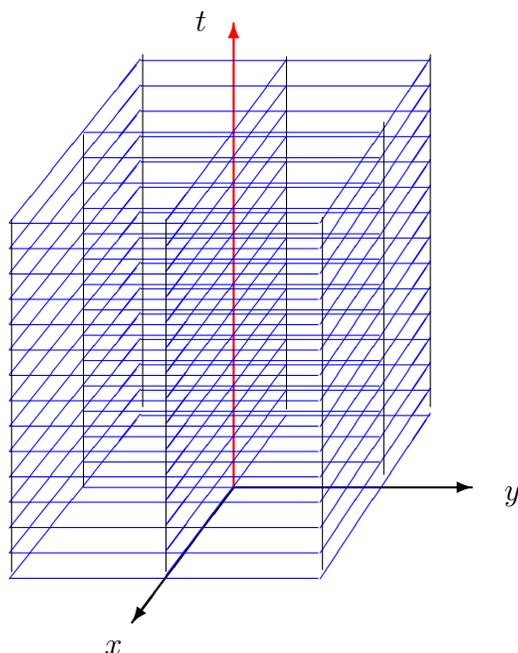
Al punto Q di \mathbb{E}_t quale punto di $\mathbb{E}_{t+\tau}$ associamo?

Come risponde Newton?

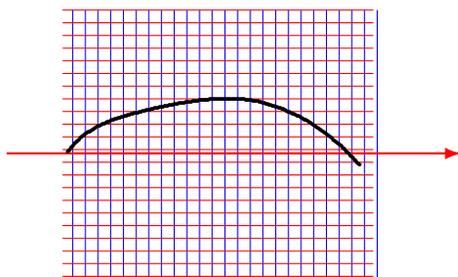
1. *“Il tempo assoluto vero e matematico senza alcuna relazione a nulla di esteriore, scorre uniformemente...”*
2. *“Lo spazio non relativo alle cose esterne, rimane sempre simile ed immobile...”*

1 definisce il tempo e 2 fornisce un criterio per identificare i 3-spazi e formare così lo spazio-tempo newtoniano...

...un mazzo di carte con i fili neri (le linee di universo di punti in uno stato assoluto di quiete) che “cuciono” le carte tra loro e rendono rigida la struttura



Rovesciando l'asse del tempo e rappresentando il 3-spazio come se fosse 1-dimensionale (per semplicità) otteniamo



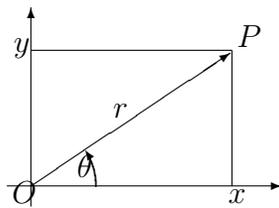
La curva nera rappresenta il movimento di un punto materiale (legge oraria del punto \equiv linea di universo del punto)

Nello spazio reale 3-dimensionale descriviamo il moto rispetto ad un sistema di riferimento...

2 ABC di matematica

Sistemi di riferimento

$Q \equiv (x, y)$ coordinate cartesiane



(r, θ) coordinate polari

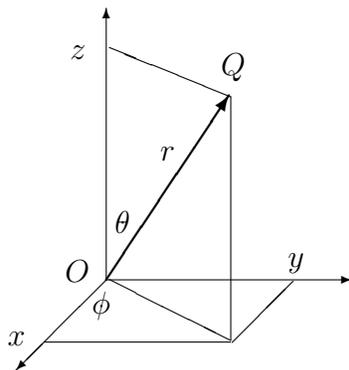
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

nello spazio: $Q \equiv (x, y, z) \equiv (r, \theta, \phi)$



vettore:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OQ} = (x, y, z)$$

Breve ripasso di geometria

- Spazio euclideo tridimensionale \mathbb{E} .
- A, B, \dots, Q, \dots , punti nello spazio euclideo \mathbb{E} .
- La “somma” di punti non è definita, ma la differenza si: $A - B$ è un vettore, usualmente denotato \overrightarrow{AB} , ed è il segmento orientato diretto da A a B .
- In generale i vettori sono enti matematici che si possono sommare e moltiplicare per un numero:
 - Se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono vettori anche $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è un vettore.
 - Se \mathbf{v} è un vettore e a è un numero anche $a\mathbf{v}$ è un vettore.

- Distanza da A a B : $|\overrightarrow{AB}|$ (lunghezza del segmento orientato).
- Rappresentazione vettoriale del punto Q nello spazio euclideo \mathbb{E} : fissato (convenzionalmente) un punto O nello spazio euclideo \mathbb{E} , il punto Q è rappresentato dal vettore $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OQ}$ che “parte” da O e arriva in Q .
- Rappresentazione in termini di coordinate : fissato (convenzionalmente) un sistema di assi cartesiani centrato in O , il vettore \mathbf{r} è rappresentato in termini delle sue coordinate rispetto a tale sistema di coordinate:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

- Distanza da A a B : se $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ è il vettore che rappresenta il punto A e $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ è il vettore che rappresenta il punto B , allora

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

La nozione di derivata

- $x = f(t)$ funzione.
- Derivata della funzione $x = f(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}$$

- Notazione di Newton: \dot{x} denota la derivata di $x = f(t)$ e \ddot{x} denota la derivata seconda.
- *Regole di calcolo:*

– Calcolare

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau}$$

- Semplificare $\Delta x / \Delta t$ tenendo conto che τ è “piccolo”: ad es. porre $\tau + \tau^2 = \tau$ ($10^{-6} + 10^{-12} = 10^{-6}$ per tutti gli scopi pratici)
- Dopo le semplificazioni porre $\tau = 0$.

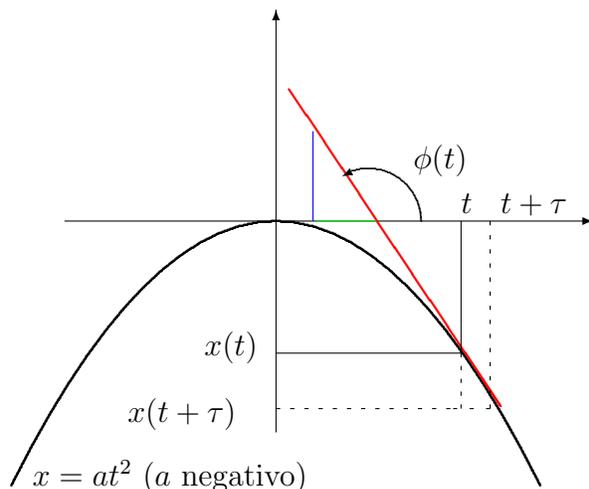
Esempio:

- $x = at^2$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{a(t + \tau)^2 - at^2}{\tau} = \frac{at^2 + 2at\tau + (\tau)^2 - at^2}{\tau} \approx 2at + \tau \approx 2at$$

Quindi

$$\dot{x} = 2at$$



Cinematica

- La posizione di un corpo è rappresentata da un punto Q nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{E} .
- Il corpo si muove. Il punto che rappresenta la sua posizione disegna nel corso del tempo una curva nello spazio euclideo tridimensionale, detta la *legge oraria* del corpo,

$$t \mapsto Q(t)$$

$t \in \mathbb{R}$ (retta reale) è il tempo. Fissato (convenzionalmente) un sistema di assi cartesiani centrato in O , il punto in movimento è rappresentato dal vettore $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

- La *velocità* \mathbf{v} misura la rapidità con cui varia nel tempo la posizione: è la derivata della posizione rispetto a tempo,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

- L'*accelerazione* \mathbf{a} misura il tasso di variazione della velocità,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)$$

- Le posizioni di N corpi sono rappresentate da N punti Q_1, \dots, Q_N nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{E} . Se i corpi si muovono, gli N punti disegnano nel corso del tempo N curve nello spazio euclideo tridimensionale:

$$t \mapsto Q_1(t), \dots, Q_N(t)$$

Esempi

- Esempi di leggi orarie:

1. *Moto rettilineo uniforme* lungo x

$$x = vt + x_0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

2. *Caduta di un grave* lungo y con velocità uniforme lungo x

$$x = vt, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2, \quad z = 0$$

3. Moto circolare uniforme nel piano $x - y$

$$x = A \cos(\omega t), \quad y = A \sin(\omega t), \quad z = 0$$

• Calcoli di velocità e accelerazione:

1. $x = vt$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{vt + v\tau - vt}{\tau} = v$$

$$\Rightarrow \dot{x} = v \quad \ddot{x} = 0$$

2. $y = -\frac{1}{2}gt^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{1}{2}g \frac{(t + \tau)^2 - t^2}{\tau}$$

$$= -\frac{1}{2}g(2t + \tau) \rightarrow -\frac{1}{2}g(2t)$$

$$= -gt$$

$$\Rightarrow \dot{y} = -gt \quad \ddot{y} = -g$$

3. $x = A \cos(\omega t) \quad y = A \sin(\omega t)$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = A \frac{\cos(\omega t + \omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$

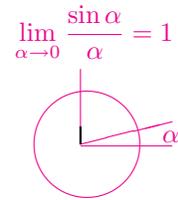
$$= A \frac{\cos(\omega t) \cos(\omega\tau) - \sin(\omega t) \sin(\omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$

$$\rightarrow A \frac{\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \sin(\omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$

$$= -A \sin(\omega t) \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau} = -A\omega \sin(\omega t) \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$$

$$\rightarrow -A\omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t)$$



In maniera analoga si trova

$$\dot{y} = A\omega \cos(\omega t)$$

Per il moto circolare uniforme si ha: $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$, $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega A = \omega r$. Quindi il modulo della velocità è costante. Inoltre,

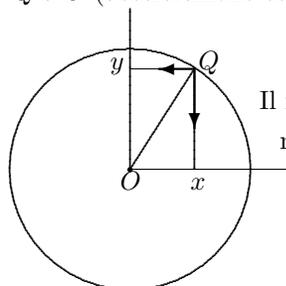
$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

Quindi il moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici.

L'accelerazione

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega r \mathbf{e}_r$$

è diretta da Q a O (accelerazione centripeta)



Il modulo della velocità non cambia, ma cambia la direzione!

modulo dell'accelerazione:

$$a = |\mathbf{a}| = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

- *Regola di Leibniz:*

$$\frac{d[f(t)g(t)]}{dt} = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

In particolare,

$$\frac{d[f(t)^2]}{dt} = 2f(t)\frac{df(t)}{dt}$$

- *Regola della funzione composta:* se $U = U(x)$ e $x = x(t)$ allora

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt}$$

3 Le leggi newtoniane del movimento della materia

Le leggi di Newton:

1. Prima legge della dinamica: “Ogni corpo continua nel suo stato di quiete o di moto uniforme lungo una linea retta a meno che non sia costretto a cambiare tale stato da una forza \mathbf{F} esercitata su di esso.”

2. Seconda legge della dinamica:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

dove m denota la massa del corpo e \mathbf{a} la sua accelerazione.

3. Terza legge della dinamica:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

dove \mathbf{F}_{12} è la forza esercitata dal corpo 1 sul corpo 2, e \mathbf{F}_{21} è la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1.

Newton congetturò che \mathbf{F} fosse una funzione universale delle posizioni del corpo e di tutti gli altri corpi con cui esso interagisce.

In questo modo Newton nel 1685 arrivò ad una legge di validità universale che governa le interazioni gravitazionali tra i corpi, unificando in questo modo la fisica sub-lunare e la fisica celeste. E questa fu la prima grande unificazione della fisica moderna: seconda la metafisica aristotelico-medioevale il mondo sub-lunare, cioè la Terra e tutto quello che stava tra la Terra e la Luna, era, per la sua essenza corruttibile, ontologicamente diverso dal mondo incorruttibile delle sfere celesti. L'accelerazione \mathbf{a} è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

e quindi le leggi del movimento di N corpi in mutua interazione gravitazionale,

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \dots, m_N\mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N$$

costituiscono un sistema di $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine per le traiettorie (leggi orarie) $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$ degli N corpi. Nel caso del sistema solare, le soluzioni di queste equazioni sono le leggi orarie dei pianeti — le ellissi di Keplero — e nell'approssimazione dei moti in prossimità della terra equivalgono alla legge oraria di caduta dei gravi di Galileo.

Le ellissi di Keplero o il movimento della Luna intorno alla Terra furono dedotte da Newton da queste equazioni nell'approssimazione in cui si trascurano le interazioni reciproche tra i pianeti

e si considerano le equazioni che descrivono solo il sistema Terra-Sole o il sistema Terra-Luna. Lo studio approssimato delle soluzioni delle equazioni complete dei corpi che formano il sistema solare fu oggetto di intenso studio nel XVIII e nel XIX secolo: si voleva determinare come le interazioni reciproche tra i pianeti modificassero nel corso del tempo le ellissi Kepleriane e quindi studiare la stabilità del sistema solare. A questo proposito ci limitiamo a menzionare i nomi di Lagrange, Laplace e Poincaré. Uno dei trionfi della teoria di Newton della gravitazione fu la scoperta puramente teorica del pianeta Nettuno fatta da Adams e Leverrier, basata sul fatto che le perturbazioni dell'orbita di Urano potessero essere spiegate solo ammettendo l'esistenza di un nuovo pianeta, di cui si calcolò esattamente l'orbita e si indicò quando e dove puntare i telescopi nel cielo per vederlo. La stabilità del sistema solare nel lungo arco di tempo dalla sua formazione (alcuni miliardi di anni) è ancora un problema aperto. Tuttavia, i risultati ottenuti da Kolmogorov, Arnold e Moser nel 1960, ci fanno sperare che una spiegazione completamente soddisfacente di questi problemi forse non è lontana.

Già a partire da Newton, e poi per tutto il XVIII e il XIX secolo, ci si rese conto che la legge di Newton $ma = \mathbf{F}$ era di validità molto più generale: nella “forza” \mathbf{F} si potevano includere interazioni più generali della gravità e spiegare in questo modo altri fenomeni, quali l'urto elastico tra sfere rigide o l'attrazione tra corpi elettricamente carichi. Ci si volse quindi alla ricerca delle “leggi di forza” che, insieme con la gravità, governano il comportamento di tutti i corpi nel nostro universo. Si sviluppò così, giungendo a piena maturazione nell'arco di due secoli, la *meccanica*, i cui tratti generali sono stati mirabilmente riassunti da Einstein³:

[...] i fondamenti della meccanica che noi caratterizzeremo schematicamente come segue:

- a) Concetto di punto materiale: oggetto corporeo che, per quanto riguarda la posizione e lo stato di moto, può venir descritto con sufficiente esattezza come un punto di coordinate $X_1, X_2, e X_3$. Il suo stato di moto (in relazione allo “spazio” [...]) viene descritto dando $X_1, X_2, e X_3$ in funzione del tempo.*
- b) Legge d'inerzia: l'annullarsi delle componenti dell'accelerazione di un punto materiale che si trovi sufficientemente lontano da tutti gli altri punti materiali.*
- c) Legge del moto (per il punto materiale): forza = massa \times accelerazione.*
- d) Legge della forza (azioni e reazioni tra i punti materiali).*

In questo schema il punto (b) non è altro che un caso particolare del punto (c). Una vera teoria sussiste comunque solo quando vengano date le leggi delle forze [...]. La meccanica classica è soltanto uno schema generale; essa diventa una teoria solo grazie all'indicazione esplicita della legge di forza (d), come quella che fu data, con grande successo, da Newton per la meccanica celeste.

La meccanica celeste

Le leggi di Keplero

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore diretto dal sole verso un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali
3. Il periodo di rivoluzione $T \propto L^{3/2}$ (L asse maggiore dell'ellisse)

³A. Einstein, *Fisica e Realtà*, in “A. Einstein, Opere Scelte” a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, 1988.

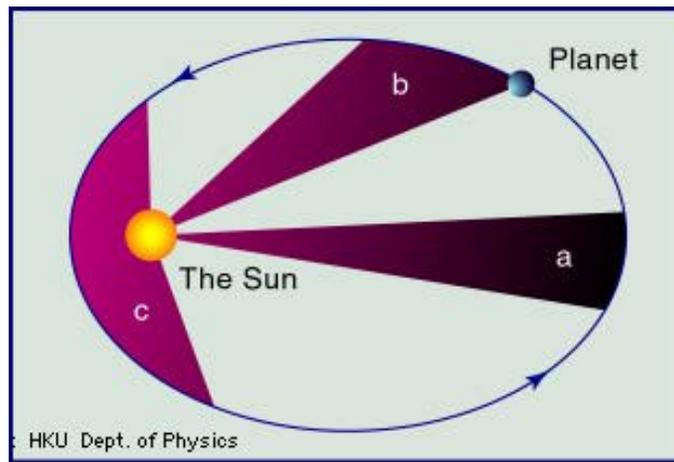


Figura 1: La seconda legge di Keplero in azione.

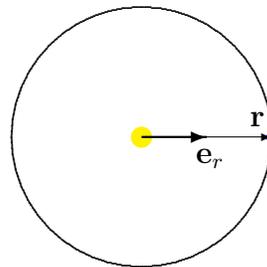
Nel caso particolare di moto circolare, le leggi di Keplero \implies

- Il pianeta si muove lungo una circonferenza di raggio r con il Sole nel centro
- Il pianeta si muove di *moto circolare uniforme* con velocità angolare costante $\omega = 2\pi/T$
- $T \propto r^{3/2} \implies \omega^2 = \frac{k}{r^3}$, dove k è la stessa per tutti i pianeti

La Legge di Gravitazione Universale

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{Newton})$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{vettore unitario dal Sole alla Terra})$$



Perchè $1/r^2$?

1. Keplero \implies Newton

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

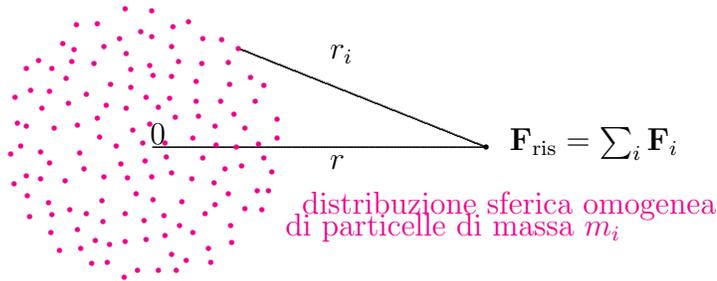
$$\text{accelerazione centripeta} \quad a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = k \frac{1}{r^2}$$

$$\implies F = ma = k \frac{km}{r^2}$$

dove k dipende solo dal sole ($k = GM$)

2. Newton \Rightarrow Keplero

3. Teorema di Newton (noto anche come teorema di Gauss):



Se

$$\mathbf{F}_i \propto \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{e}_{r_i}$$

allora

$$\mathbf{F}_{\text{ris}} = \sum_i \mathbf{F}_i \propto \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{dove} \quad M = \sum_i m_i$$

Forze conservative

Una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ è conservativa se esiste una funzione scalare $U = U(\mathbf{r})$, detta *energia potenziale*, tale che $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}}U$, dove $\nabla_{\mathbf{r}}$ è l'operazione matematica “*gradiente*”, che estende la nozione di derivata a funzioni a più variabili. La forza gravitazionale è conservativa con

$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r}$$

Per un sistema di N corpi interagenti tra loro, le forze di interazione sono conservative se esiste una funzione $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, detta *energia potenziale* del sistema, tale che

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1}U, \dots, \mathbf{F}_N = -\nabla_{\mathbf{r}_N}U$$

Teorema 1 Per un sistema di N corpi, governato da forze conservative e non soggetto a forze esterne, con energia potenziale $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, la quantità

$$E \equiv \frac{1}{2} \sum_1^N m v_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

si conserva nel corso del tempo, cioè

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Dim. Dimostriamo questo teorema per un corpo solo e nel caso unidimensionale. L'estensione a 3 dimensioni e più corpi è immediata. La premessa è la legge di Newton per forze conservative

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx}.$$

Il teorema si dimostra calcolando esplicitamente

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U(x) \right).$$

Il calcolo richiede sia la regola di Leibniz che la regola della derivata di una funzione composta che abbiamo visto in precedenza. Per la regola di Leibniz, abbiamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \frac{dv}{dt}$$

Per la regola della derivata di una funzione composta, abbiamo

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = -m \frac{dv}{dt} v$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la legge di Newton per forze conservative. Quindi

$$\frac{dE}{dt} = m v \frac{dv}{dt} - m \frac{dv}{dt} v = 0.$$

Q.E.D.

La quantità E è detta *energia totale* del sistema. Detta

$$K \equiv \frac{1}{2} \sum_1^N m \mathbf{v}_i^2$$

l'energia cinetica totale del sistema, il teorema di conservazione dell'energia per forze conservative, afferma semplicemente che la somma delle energie cinetica totale e potenziale di un sistema isolato (cioè non soggetto a forze esterne) resta costante nel corso del tempo,

$$E = K + U = \text{costante}.$$

Conservazione della quantità di moto

Due punti materiali in una regione di spazio lontano dall'influenza di altri corpi. Legge del moto:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2$$

Per la terza legge di Newton

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$

Tenendo conto di questo fatto, sommiamo membro a membro le equazioni del moto del corpo 1 e del corpo 2.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = 0$$

Da cui segue:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{costante}$$

Abbiamo appena dimostrato che la *quantità di moto totale*

$$\mathbf{p}_{\text{totale}} \equiv m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

si conserva, cioè non cambia nel corso del tempo.

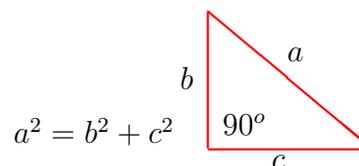
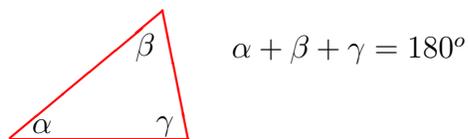
4 Simmetria e leggi fisiche

Una cosa è simmetrica se è possibile cambiare in essa qualche cosa lasciandone immutato l'aspetto (Hermann Weyl).

“La fisica teorica incomincia con la geometria di Euclide...” (Albert Einstein)

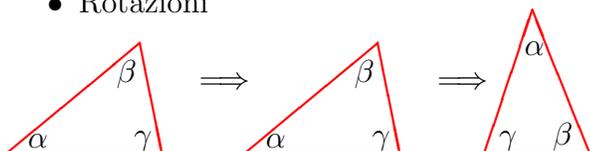
Incominciamo con le simmetrie di ciascuna carta del mazzo dello spazio-tempo di Newton ... cioè con le simmetrie delle “leggi” (gli assiomi e i teoremi) della *geometria euclidea*.

Le “leggi” della geometria euclidea ... per esempio:



Simmetrie delle leggi geometriche

- Traslazioni
- Rotazioni

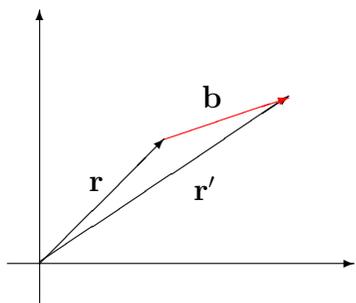


Le similitudini (trasformazioni di scala) non sono simmetrie della geometria euclidea. Traslazioni e rotazioni sono tutte (e sole) le trasformazioni che lasciano invariata la distanza tra due punti.

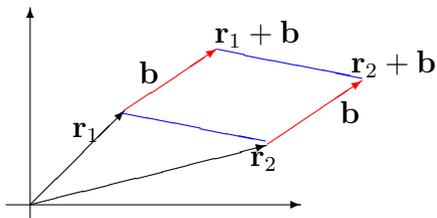
invariante fondamentale della geometria euclidea = distanza tra due punti

Traslazioni Una traslazione è definita da un vettore \mathbf{b} che agisce sullo spazio trasladando tutti i punti della distanza $b = |\mathbf{b}|$ nella direzione e verso individuati da \mathbf{b}

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b} \quad (*)$$

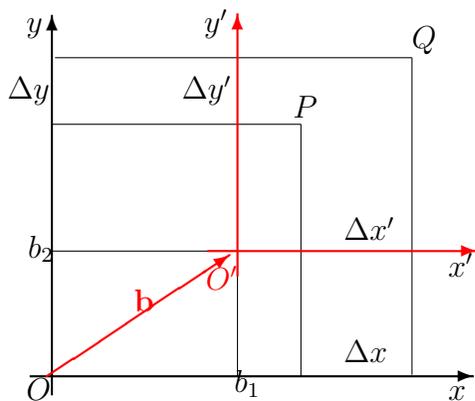


L'insieme dei vettori \mathbf{b} , che trasformano lo spazio secondo la (*), forma il gruppo della traslazioni
Le traslazioni lasciano invariata la distanza tra due punti



$$d' = |\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'| = |(\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}) - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{b})| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = d$$

Traslazioni del sistema di riferimento : $O \rightarrow O' = O + \mathbf{b}$

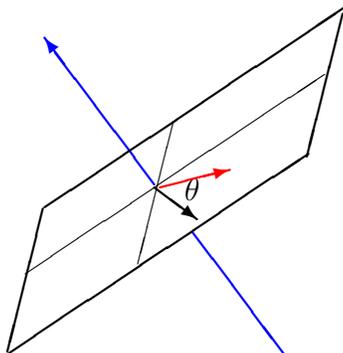


$$\begin{aligned} x' &= x - b_1 \\ y' &= y - b_2 \end{aligned}$$

La distanza d tra due punti è la stessa nei due sistemi di riferimento

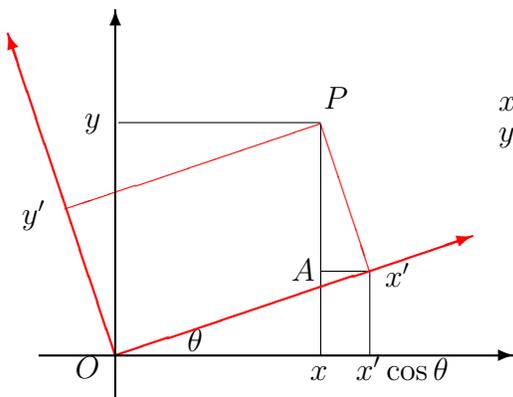
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$$

Rotazioni Tutti i punti dello spazio sono ruotati di un angolo θ attorno all'asse di rotazione:
 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$



La rotazione R è definita dal vettore unitario \mathbf{n} dell'asse di rotazione e dall'angolo θ : $R = R(\mathbf{n}, \theta)$.
 Le rotazioni lasciano invariata la distanza tra due punti.

Rotazioni del sistema di riferimento (di un angolo θ attorno all'asse z)



$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

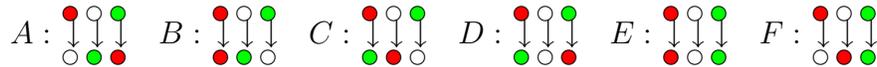
Esercizio Dimostrare (analiticamente) che la distanza tra due punti è invariante per rotazioni del sistema di riferimento

Gruppi di trasformazioni

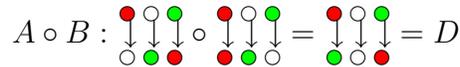
L'insieme delle trasformazioni che si ottengono componendo rotazioni e traslazioni formano un *gruppo* di trasformazioni, detto il **gruppo euclideo**.

Per familiarizzarci con la nozione matematica di gruppo consideriamo un esempio semplice....

Il gruppo tricolore. Sono date tre palle $\bullet \circ \bullet$ il cui colore può essere cambiato. Le possibili trasformazioni di colore sono



consideriamo la composizione di due trasformazioni



Analogamente si verifica che

$$A \circ F = B \quad A \circ E = A \quad A \circ C = E \quad F \circ D = A \quad \dots$$

Notate che

$$B \circ A = \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} \circ \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} = \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} = F \neq D \quad \Rightarrow \quad A \circ B \neq B \circ A$$

Esercizio Costruire la tavola per l'operazione \circ del gruppo tricolore

La nozione di gruppo Un insieme di trasformazioni di uno spazio (insieme) forma un **gruppo** se

1. la composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione
2. per ogni trasformazione esiste una trasformazione "inversa", cioè tale che quando viene composta con la trasformazione si ottiene la trasformazione identica.

Esempio per 2: $E = \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix}$ è la trasformazione identica. C è l'inverso di A e viceversa ($C = A^{-1}$, $A = C^{-1}$),

$$A \circ C = \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} \circ \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} = \begin{matrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \circ & \bullet \end{matrix} = E$$

Simmetria delle leggi fisiche

Il gruppo euclideo è una simmetria delle leggi della geometria euclidea ... e delle leggi della fisica. L'invarianza delle leggi fisiche rispetto ad un gruppo di trasformazioni è la nozione più importante di tutta la fisica!

Si consideri una situazione fisica s ben definita governata da una legge fisica \mathcal{L} (ad es., le traiettorie dei pianeti e del sole governati dalle leggi di Newton). *La legge \mathcal{L} è invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni G se la situazione fisica trasformata s_g , dove $g \in G$, soddisfa ancora la legge \mathcal{L}*

Esempio: Gruppo euclideo Se fate qui un esperimento con certi oggetti e poi fate lo stesso esperimento là con gli stessi oggetti *traslati* o *ruotati* ottenete gli stessi risultati ... potreste però sbattere contro il muro o finire sottoterra... Il senso del principio di invarianza è che dovete traslare o ruotare "abbastanza roba" che possa avere influenza sul fenomeno che state considerando ... ad esempio, se fate un esperimento con un pendolo e vi spostate a 100.000 m di altezza per ottenere gli stessi risultati dovete spostare anche la terra.

Conseguenze dell'invarianza euclidea

- Un punto materiale in una regione di spazio lontano dall'influenza di altri corpi.

Legge del moto $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

- Invarianza per traslazioni: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}$
 $\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \implies \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}$ (vettore costante)
- Invarianza per rotazioni: $R\mathbf{F} = \mathbf{F} \implies \mathbf{F} = 0$ (vettore nullo)
- Quindi $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$, cioè moto rettilineo uniforme.

- Due punti materiali in una regione di spazio lontano dall'influenza di altri corpi.

Legge del moto: $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

(È stata applicata la terza legge di Newton per stabilire la forza che 2 esercita su 1, data la forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ che 1 esercita su 2.)

- Invarianza per traslazioni:
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$
- Invarianza per rotazioni:
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

Principio di relatività galileana

Dicesi *sistema di riferimento inerziale* un sistema di riferimento “rigido” che si muove con velocità costante rispetto allo spazio assoluto.

Principio di invarianza galileana Le leggi del moto sono le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale \equiv sono invarianti per cambiamento di sistema di riferimento inerziale (impossibilità di misurare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale).

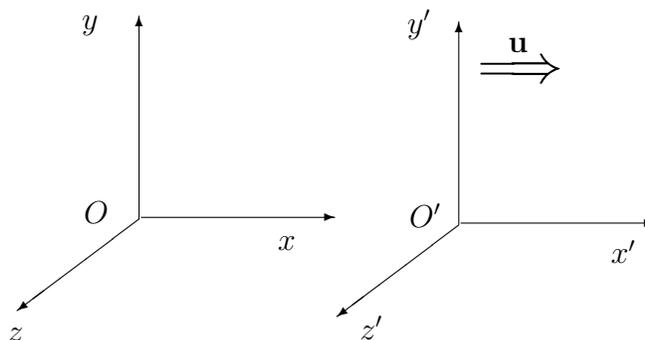
Nelle parole di Galileo:

Nella maggior stanza che sia sotto coverta di alcun grande navilio rinserratevi con qualche amico, e quivi fate di vaer mosche, farfalle e simili animaletti volanti; pigliatevi anche un gran vaso con acqua, e dentrovi de' pescetti; accomodate ancora qualche vaso che alto che vada gocciolando in un altro basso e di angusta gola: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci, gli vedrete andar vagando indifferentemente verso qual si voglia parte delle sonde del vaso; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto. . . .

Osservate che avrete bene tutte queste cose, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e 'n là) voi non riconoscrete una minima mutazione in tutte le nominate cose, nè meno da cosa che sia in voi stesso, potreste assicurarvi se la nave cammina o sta ferma. . . . E se voi di tutti questi effetti mi domanderete la ragione, vi risponderò per ora: perché il moto universale della nave, essendo comunicato all'aria e a tutte quelle cose che in essa vengono contenute, e non essendo contrario alla naturale inclinazione di quella, in loro indelebilmente si conserva.

In breve, è impossibile decidere sulla base di esperimenti compiuti all'interno di un sistema, se esso sia in quiete o in moto rettilineo uniforme. Le leggi della fisica sono invarianti per cambiamento di sistema di riferimento inerziale.

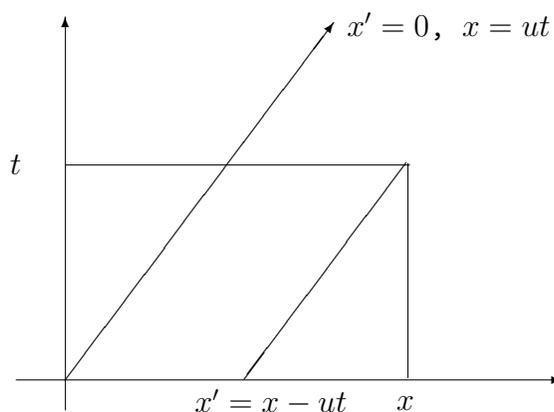
O' è in moto con velocità \mathbf{u} lungo x rispetto a O . Per $t = 0$, $O \equiv O'$



Trasformazione tra i due sistemi di riferimento

$$y' = y, \quad z' = z, \quad x' = x - ut$$

Rappresentazione spazio-temporale



Il gruppo di Galileo

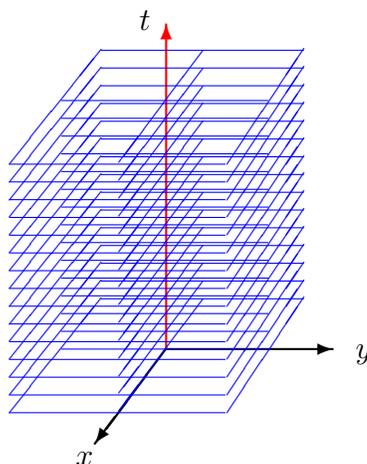
È il gruppo \mathcal{G} di trasformazioni generato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{b} && \text{traslazioni spaziali} \\ \mathbf{r}' &= R\mathbf{r} && \text{rotazioni spaziali} \\ t' &= t + a && \text{spostamento nel tempo} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{u}t && \text{cambiamento di sistema inerziale} \end{aligned}$$

Le leggi di Newton sono invarianti rispetto a \mathcal{G}

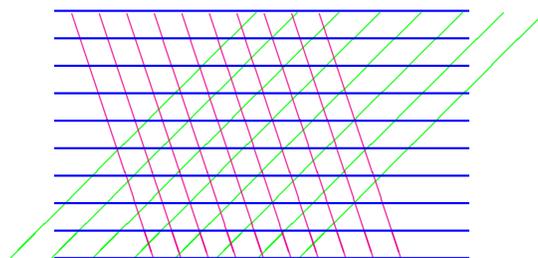
Lo spazio-tempo assoluto di Newton **non** è invariante rispetto a \mathcal{G}

Lo spazio-tempo galileano



Non ci sono più le linee nere che cuciono la struttura e la rendono rigida...

Cioè che è assoluto è la “foliazione” dello spazio-tempo in spazi tridimensionali \mathbb{E}_t ($t = 1, t = 2, \dots$), ma l’identificazione tra i punti di due \mathbb{E} consecutivi dipende dal sistema di riferimento inerziale che si considera:



La distanza spaziale tra due eventi non simultanei dipende dalla scelta del sistema di riferimento!
“Lo spazio è relativo...” ... e se anche lo scorrere del tempo fosse relativo?

5 La meccanica come fondamento della teoria atomica

Qualunque sia la forma dettagliata delle leggi di forza, è importante comprendere che lo schema generale della meccanica, in cui le leggi di forza si inquadrano, inevitabilmente porta ad una concezione atomica della materia. Questo punto è stato messo in evidenza da Einstein nel passo citato già citato che così prosegue:

La nozione di “punto materiale” è fondamentale per la meccanica. Se cerchiamo ora di formulare la meccanica degli oggetti materiali che per la loro natura non possono essere trattati come punti materiali (e, strettamente parlando, ogni oggetto “percepibile dai nostri sensi” appartiene a questa categoria) allora nasce la questione: in quale maniera immagineremmo che l’oggetto possa essere costituito da punti materiali, e quali forze dovremmo presupporre che agiscano fra essi? La formulazione di tale questione è indispensabile, se si pretende che la meccanica descriva l’oggetto completamente.

È proprio della meccanica supporre che questi punti materiali e la legge delle forze agenti tra essi siano invariabili, dato che alterazioni temporali sarebbero al di fuori dei fini esplicativi della meccanica stessa. Da ciò possiamo vedere che la meccanica classica deve condurci a una costituzione atomica della materia.

Per quanto oggi la costituzione atomica della materia sia un dato di fatto penetrato nel senso comune, fino all'inizio del XX secolo non esisteva un'evidenza sperimentale inoppugnabile in favore dell'esistenza degli atomi. Ancora nel 1897, quando Boltzmann faceva il bilancio della lezione dell'atomismo, erano forti le resistenze. Si trattava di resistenze nutrite da una visione fortemente empirista della fisica: gli atomi erano "invisibili" sia all'uomo della strada che al fisico sperimentale e, in quanto tali, relegati nel bagaglio della metafisica. Eppure, nel XVIII e nel XIX secolo molti arrivarono alle stesse conclusioni di Einstein: Newton stesso ebbe una visione profondamente atomistica della realtà e fu il primo a sostenere una teoria corpuscolare della luce, con un anticipo di più di duecento anni rispetto all'ipotesi del fotone di Einstein.

Uno dei primi modelli atomici di un «oggetto percepibile dai nostri sensi», trattato secondo i canoni della meccanica newtoniana dei punti materiali, riguarda un gas contenuto in un cilindro con pistone. Il modello a cui stiamo facendo riferimento è del 1738 e fu studiato da D. Bernoulli nella sua *Hydrodynamica*. Fu uno dei primi tentativi moderni di comprendere le leggi macroscopiche dei gas in termini di atomi che si muovono in accordo con le leggi dinamiche di Newton. Ma fu prematuro e non ebbe seguito per più di cent'anni. Nel 1738 la termodinamica non esisteva ancora, e le leggi generali del comportamento dei gas erano ancora sconosciute. Tuttavia, il modello considerato da Bernoulli ci offre lo spunto per delineare le basi di una teoria atomica della materia basata sulle leggi del movimento di punti materiali.

Immaginiamo che il gas sia costituito da N atomi. Se vogliamo applicare lo schema newtoniano delle leggi del movimento e descrivere davvero, da filosofi geometri, il movimento reale degli atomi ci troviamo a dovere affrontare due problemi. Un problema è quale siano le leggi di forza che governano le interazioni tra gli atomi, le leggi secondo cui, nelle parole di Feynmann, «queste piccole particelle si muovono intorno in moto perpetuo, attraendosi quando sono a distanza ravvicinata, ma respingendosi quando sono schiacciate l'una contro l'altra.» Oggi sappiamo che queste forze sono d'origine elettromagnetica e sono determinate dalla particolare struttura elettronica interna di atomi e molecole. La comprensione profonda dell'origine di queste forze richiede che si vada oltre lo schema della fisica classica; ad esempio, l'origine delle cosiddette forze di van der Waals di interazione intermolecolare è squisitamente quantistica. Sia come sia, oggi siamo in una situazione migliore di quella in cui si trovava Bernoulli e disponiamo di formule esplicite per rappresentare matematicamente queste forze.

Il secondo problema è che anche se è nota la forma esplicita di queste forze, e quindi le equazioni differenziali del movimento degli atomi, nessun filosofo geometra sarebbe mai in grado di calcolarne le conseguenze, anche se disponesse di un calcolatore elettronico: un calcolatore che stampa una coordinata per microsecondo impiegherebbe 1000 miliardi di anni, cioè 100 volte l'età dell'universo, solo per fare una lista delle condizioni iniziali delle molecole che compongono un litro d'acqua. Il numero di N di atomi o molecole di un qualunque oggetto macroscopico è dell'ordine del numero di Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$, un numero spaventosamente grande!

Fortunatamente, in qualche modo, questi due problemi si elidono, nel senso che l'impossibilità di risolvere le equazioni del movimento ci costringe ad utilizzare altri metodi di analisi matematica per studiare il comportamento degli atomi. Nel seguito vedremo che l'utilizzo di *metodi statistici* fa sì che il filosofo geometra possa davvero ottenere informazioni significative sul comportamento dettagliato della materia, anche se non dispone nè dell'informazione precisa delle leggi di forza di interazione tra gli atomi, nè della conoscenza delle leggi orarie degli atomi. Il comportamento della materia su scala macroscopica dipende da caratteristiche molto generali della sua struttura microscopica, e la comprensione qualitativa delle leggi della termodinamica non richiede il *calcolo*, ma principalmente la dimostrazione di *teoremi*. In particolare, la prima legge della termodinamica risulta essere un teorema elementare della meccanica newtoniana.

6 Spiegazione della prima legge della termodinamica

In prima approssimazione possiamo immaginare gli atomi come palle da biliardo e le leggi di forza analoghe alle leggi che governano l'urto elastico tra le palle da biliardo. Più precisamente, per N atomi, la legge del movimento ha la stessa forma della legge $m\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ per N corpi, di uguale massa m , in mutua interazione gravitazionale. Ovviamente, adesso le forze \mathbf{F}_i non sono più di origine gravitazionale: la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza tra i corpi, è sostituita da espressioni matematiche più complicate che descrivono l'interazione tra gli atomi.

Se non la forma delle forze, la struttura matematica è esattamente la stessa del caso di N corpi in interazione gravitazionale. Tuttavia, mentre nel caso del sistema solare N è dell'ordine della decina, nel caso di un gas N è dell'ordine del numero di Avogadro N_A , un numero molto più grande! Tuttavia, qualunque sia la loro espressione matematica esplicita, quello che davvero conta è che queste forze, analogamente alle forze gravitazionali, sono *conservative*, cioè derivabili da una energia potenziale U .

Se il gas è *isolato dal resto dell'universo*, cioè se le pareti del recipiente sono tali che il gas al suo interno risulta perfettamente schermato da qualunque tipo di influenza esterna, allora anche le forze tra gli atomi e le pareti del recipiente sono conservative, e il loro contributo all'energia potenziale può essere assorbito in U . Sia K la somma di tutte le energie cinetiche degli atomi; in formule: $K = \frac{1}{2} \sum_1^N m\mathbf{v}_i^2$. Allora le leggi di Newton (Teorema 1 di conservazione dell'energia per forze conservative), implicano che la quantità $E = K + U$ non varia nel corso del tempo, cioè

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Questa quantità è l'energia totale del gas e la prima legge della termodinamica risulta quindi completamente spiegata dalle leggi della meccanica che governano il movimento degli atomi. La quantità E può essere identificata con l'energia totale del gas di cui la prima legge della termodinamica stabilisce la conservazione per un sistema isolato.

7 Lo spazio delle fasi

Ancora una citazione di Laplace:

*Dobbiamo pertanto considerare il presente stato dell'universo come effetto del suo stato precedente e come causa del suo stato futuro. Un'Intelligenza che conoscesse, ad un istante dato, tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono, e fosse inoltre talmente profonda da assoggettare questi dati all'analisi, sarebbe capace di abbracciare in una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe di fronte ai suoi occhi.*⁴

Non c'è nessuna ragione per restringere la teoria atomica ad un gas contenuto in un recipiente. Immaginiamoci *tutto* il mondo fatto di atomi — punti materiali che si muovono incessantemente nel vuoto e che aggregandosi tra loro formano i vari oggetti dell'esperienza sensibile, come la mela, l'acqua di un ruscello, o il gas monoatomico che abbiamo appena considerato.

Immaginiamo di fare una fotografia esatta del mondo ad un dato istante, diciamo il tempo s . La fotografia mostrerà le posizioni $\mathbf{r}_1(s), \dots, \mathbf{r}_N(s)$ degli atomi a questo istante di tempo, cioè la *configurazione*

$$Q(s) = (\mathbf{r}_1(s), \dots, \mathbf{r}_N(s))$$

⁴P.- S Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, introduzione alla *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris, 1814.

del mondo a questo istante di tempo. Adesso consideriamo un'altra fotografia che raffigura la configurazione

$$Q(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$$

del mondo ad un altro istante t (sia esso nel passato o nel futuro di s). Quale relazione esiste tra queste due configurazioni?

Per rispondere a questa domanda facciamo un passo indietro e riconsideriamo la legge oraria di caduta della mela: la posizione della mela ad un qualunque istante di tempo è determinata univocamente dalla sua posizione e velocità ad un altro istante di tempo, quello che convenzionalmente chiamiamo il “tempo iniziale” (quando facciamo partire il cronometro). Si tratta questo di un fatto del tutto generale: le leggi del movimento di sistema formato da N punti materiali,

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \dots, m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N,$$

sono $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine le cui soluzioni $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$ sono univocamente fissate dai valori iniziali delle posizioni e delle loro derivate rispetto al tempo — le velocità iniziali.

Quindi $Q(t)$, la configurazione del mondo all'istante t , è una *funzione* delle posizioni $\mathbf{r}_1(s), \dots, \mathbf{r}_N(s)$ e delle velocità $\mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_N(s)$ degli atomi all'istante s . E questa funzione non è altro che la funzione che *risolve* le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali — e che può essere esplicitamente calcolata in casi particolari semplici. Poiché le leggi di Newton (per forze conservative) sono invarianti per una traslazione della scala dei tempi, cioè le leggi del movimento degli atomi sono le stesse oggi che miliardi di anni fa, questa funzione può solo dipendere dalla differenza $t - s$. Per questa ragione si può porre convenzionalmente a zero uno dei due tempi, diciamo il tempo s , e assumerlo come “tempo iniziale”.

Questo significa che

$$X = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$$

fornisce una *descrizione dinamica completa* del mondo ad un qualunque istante di tempo assunto convenzionalmente come istante iniziale — come si suole dire, ne rappresenta lo “*stato*” a quell'istante di tempo — che chiameremo anche “*microstato*” ogni qual volta sia utile mettere in evidenza in carattere microscopico fondamentale di questa nozione, in contrasto con il carattere non fondamentale della nozione di “*macrostato*”.

Come nel corso del tempo evolve la configurazione del mondo, così ne evolve lo stato: X_t , il microstato al tempo t , è una funzione φ_t del microstato X_0 al tempo 0, cioè,

$$X_t = \varphi_t(X_0).$$

La funzione φ_t è usualmente detta “*flusso*”, nel senso che fa “fluire” nel tempo gli stati del sistema, e le curve che si ottengono al variare di X_0 tra tutti i possibili stati iniziali, sono analoghe alle linee di flusso di un fluido: non si intersecano mai — e questo perché fissato lo stato ad un qualunque tempo iniziale la funzione φ_t determina univocamente lo stato ad un qualunque altro tempo, e non può darsi il caso che lo stesso stato possa evolvere in stati diversi, come accadrebbe ad esempio in un teoria intrinsecamente stocastica.

Una proprietà notevole del flusso di fase è:

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

(dove il prodotto “ \circ ” tra φ_t e φ_s va inteso come “composizione” di funzioni). Questo significa che lo stato al tempo $t + s$ è ottenuto dallo stato al tempo 0, prima evolvendo per un tempo s , e raggiungendo lo stato X_s , e poi evolvendo questo stato per un altro tempo t . Un'altra proprietà è che φ_t^{-1} la trasformazione inversa di φ_t esiste ed è data da φ_{-t} . In altre parole, se $X_t = \varphi_t(X)$

allora $X = \varphi_{-t}(X_t)$. Nella terminologia della matematica, φ_t , definisce un *gruppo ad un parametro* (il tempo t) di trasformazioni dello spazio delle fasi in sé stesso.

L'insieme di tutti i possibili microstati forma uno spazio $6N$ -dimensionale. Questo perché le posizioni degli N punti materiali sono nell'usuale spazio tridimensionale, e ciascuna delle N velocità ha 3 componenti. Questo spazio è chiamato *spazio delle fasi*, e sarà denotato con la lettera greca Ω .

Poiché pochi grammi di un gas quale l'elio contengono un numero di atomi N dell'ordine di 10^{23} , lo spazio delle fasi del gas in particolare, e a maggior ragione del mondo nel suo complesso, ha una dimensione molto grande, spaventosamente grande, inimmaginabilmente grande! Al variare del tempo, il microstato disegna una curva nello spazio delle fasi che rappresenta l'evoluzione dinamica del sistema. Poiché l'energia del mondo resta costante nel corso del tempo, questa curva è vincolata a muoversi nel sottoinsieme Ω_E di Ω costituito dai punti che hanno lo stesso valore di energia E . Lo stesso vale per una qualunque porzione del mondo sufficientemente isolata dall'ambiente esterno: come abbiamo visto precedentemente, il valore dell'energia di un gas contenuto in un recipiente isolato dal resto dell'universo non cambia nel corso del tempo.

Da un punto di vista geometrico, Ω_E è una iper-superficie in Ω , che è sovente chiamata *strato (o guscio) di energia costante*. Nel caso di gas ideale monoatomico, contenuto in un recipiente di volume V l'energia E , come funzione del microstato $X = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ è semplicemente l'energia cinetica traslazionale degli atomi (in questo caso, essendo nulla l'energia potenziale di interazione)

$$E = K = \frac{1}{2} \sum_1^N m \mathbf{v}_i^2.$$

In questo caso quindi Ω_E è il prodotto di un'iper-sfera, nello spazio $3N$ -dimensionale delle velocità, per un iper-cubo, nello spazio $3N$ -dimensionale delle posizioni.

8 Meccanica hamiltoniana

In trattazioni più avanzate della meccanica si considera, una rappresentazione equivalente di X in termini di configurazione $Q \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ed impulso $P \equiv (m_1 \mathbf{v}_1, \dots, m_N \mathbf{v}_N)$. Per potere apprezzare i vantaggi di questa formulazione sarebbe richiesta una trattazione matematica più approfondita. Questa formulazione della meccanica è principalmente dovuta a William R. Hamilton che tra il 1824 e il 1832 riformulò la meccanica newtoniana per forze conservative, utilizzando un formalismo che egli stesso aveva sviluppato per l'ottica geometrica. La teoria di Hamilton (in seguito ulteriormente sviluppata da Jacobi tra il 1837 e il 1866) è il punto di arrivo di un passato glorioso di meccanica teorica associato a fisici-matematici quali Eulero, D'Alembert, Lagrange e Laplace. Secondo la teoria di Hamilton, ciò che definisce le leggi del movimento di un sistema isolato è una funzione $H(Q, P)$ che rappresenta l'energia, in termini della quale le leggi del movimento dello stato $X = (Q, P)$ diventano

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$$

Queste equazioni sono dette *equazioni di Hamilton*, e la formulazione della meccanica che ne deriva è detta *meccanica hamiltoniana*.

La rappresentazione della dinamica in termini di traiettorie nello spazio delle fasi chiarifica e semplifica la struttura matematica della meccanica. Il formalismo hamiltoniano è uno strumento teorico molto potente che si basa su una struttura matematica flessibile per descrivere la dinamica di un sistema. In tale struttura la distinzione tra posizione e velocità (o più precisamente tra configurazione e impulso coniugato) cessa di essere fondamentale e diventa principalmente una questione di convenienza matematica. Sebbene questa estrema flessibilità del formalismo sembri offuscare la

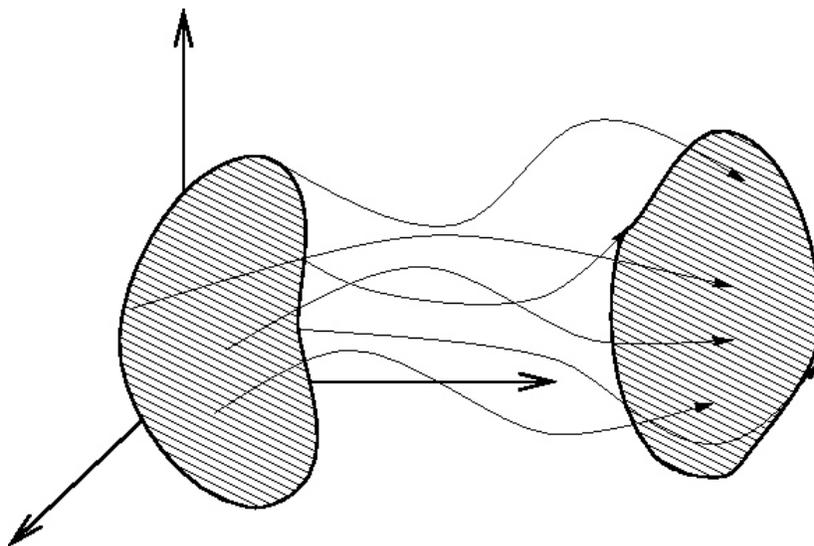


Figura 2: Evoluzione temporale nello spazio delle fasi. La mappa φ_t conserva il volume.

ragione d'essere della meccanica — la determinazione delle leggi orarie dei corpi nello spazio fisico tri-dimensionale — non c'è nulla di cui preoccuparsi a patto che il formalismo sia correttamente interpretato. Infatti nel passaggio dalla formulazione newtoniana a quella hamiltoniana non cambia la struttura ontologica della teoria: non è l'evoluzione del punto nello spazio delle fasi a fornirci direttamente un'immagine del mondo, ma l'evoluzione della sua configurazione concreta costituita dalle posizioni che gli atomi occupano nello spazio fisico tridimensionale.

9 Proprietà fisiche

Le proprietà del mondo, le osservabili fisiche, sono determinate dalle caratteristiche delle traiettorie degli atomi, cioè da qualunque funzione che alle loro traiettorie associ un valore numerico (o una lista di valori numerici); ad esempio, i valori delle posizioni degli atomi e delle loro derivate rispetto al tempo (quali la velocità o l'accelerazione), oppure caratteristiche globali delle traiettorie come la durata del soggiorno di una particella in una data regione dello spazio fisico, o più in generale la durata di un dato processo (ad esempio, il periodo di rivoluzione di un pianeta intorno al sole). Tuttavia, poiché lo il punto X nello spazio delle fasi fornisce una rappresentazione dinamica completa ad un qualunque istante di tempo, risulta, come fatto di matematica, che qualunque caratteristica delle traiettorie degli atomi si possa esprimere mediante un'opportuna funzione sullo spazio delle fasi. È questa relazione tra la rappresentazione matematica in termini di spazio delle fasi e le attuali proprietà del mondo a fornire un'interpretazione al formalismo hamiltoniano. Secondo questa interpretazione una qualunque osservabile o proprietà fisica è rappresentata da un'opportuna funzione

$$Y = f(X)$$

sullo spazio delle fasi.

Esempi immediati di proprietà fisiche sono i valori delle posizioni ad un dato istante di tempo e le loro derivate rispetto al tempo (quali sono la velocità o l'accelerazione). Ma la nozione è molto generale ed include proprietà che non sono riferite ad un istante di tempo particolare, ma sono associate “globalmente” alla traiettoria, ad esempio, la proprietà che riguarda il tempo totale in cui una particella soggiorna in una data regione dello spazio fisico, o la durata di un dato processo.

A prima vista può apparire strano che qualunque proprietà sia rappresentabile da una funzione sullo spazio delle fasi. Come può, ad esempio, l'accelerazione di un punto materiale essere funzione di posizione e velocità? La risposta sta nel fatto che la funzione più rilevante nel caratterizzare le proprietà di un sistema è proprio la funzione che risolve le equazioni del moto. Per un punto materiale, la sua posizione ad un istante generico t è la funzione sullo spazio delle fasi $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, dove \mathbf{r} e \mathbf{v} sono la posizione e la velocità iniziale del punto. Ma l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

(dove i “due punti” denotano la derivata seconda rispetto al tempo). Il secondo membro di questa equazione, calcolato per $t = 0$ definisce la funzione $\ddot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ sullo spazio delle fasi che rappresenta l'accelerazione del punto all'istante iniziale.

10 Determinismo, caso, predicibilità

La dinamica della configurazione degli atomi è deterministica, eppure permette di descrivere fenomeni estremamente casuali come il moto di un grano di polline in sospensione in un liquido — il moto browniano di cui Einstein diede nel 1905 una spiegazione meccanica nel solco tracciato da Boltzmann. Come è possibile tutto questo? Come può il caso emergere dal completo determinismo?

Malgrado la fisica classica fornisca risposte chiare a queste domande e spieghi come in effetti il caso sia completamente compatibile con leggi microscopiche deterministiche, nel corso del XX secolo, con lo sviluppo della meccanica quantistica, ha acquistato forza e consenso l'idea che esista una contraddizione insanabile tra la casualità dei processi naturali e il carattere deterministico delle leggi fisiche. Anzi, l'abbandono del determinismo ottocentesco è sovente considerato come uno dei tratti salienti della rivoluzione scientifica del XX secolo.

Non è raro che nell'insegnamento di base e in quello universitario si insista spesso sul fatto che la visione classica della fisica sia completamente obsoleta. Come esempio paradigmatico della visione ormai tramontata si fa spesso riferimento al già citato passo di Laplace:

*Dobbiamo pertanto considerare il presente stato dell'universo come effetto del suo stato precedente e come causa del suo stato futuro. Un'Intelligenza che conoscesse, ad un istante dato, tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono, e fosse inoltre talmente profonda da assoggettare questi dati all'analisi, sarebbe capace di abbracciare in una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe di fronte ai suoi occhi.*⁵

Tuttavia, la moderna critica alla visione di Laplace nasce sovente da una grossolana ingenuità: la confusione tra le nozioni di *predicibilità* e di *determinismo*. Come dice Jean Bricmont⁶: “il determinismo ha a che fare con come la natura si comporta e la predicibilità con quello che noi esseri umani siamo in grado di osservare, analizzare e calcolare.” L'esempio fatto da Bricmont per illustrare questa distinzione è quello di un orologio, un meccanismo completamente regolare, deterministico e predicibile. Ma supponete di mettere l'orologio sulla cima di una montagna o dentro un cassetto chiuso, in modo tale che il suo stato — le sue condizioni iniziali — ci diventino inaccessibili. Questo

⁵P.- S Laplace, *Essai philosophique sur le probabilités*, introduzione alla *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris, 1814.

⁶J. Bricmont: *Science of Chaos or Chaos in Science?*. In: *The Flight from Science and Reason*, Annals of the New York Academy of Sciences **775**, ed. by P.R. Gross, N. Levitt, M.W. Lewis (The New York Academy of Sciences, New York 1996) pp. 131–175

renderebbe l'orologio banalmente non predicibile, ma sembrerebbe difficile sostenere che diventerebbe non-deterministico!

Ai fini del nostro discorso due osservazioni ci particolarmente sembrano rilevanti.

1. È un fatto che la casualità quantistica sia completamente spiegata, perlomeno nell'ambito dei fenomeni non relativistici, da una teoria rigorosamente deterministica — la meccanica bohiana.
2. Il “caos” moderno, lungi dal rappresentare la sconfitta della visione di Laplace ne rappresenta il trionfo. Nel dire questo ci riferiamo non alla caricatura di Laplace che una lettura affrettata del brano citato può suggerire, ma alla visione profonda e attuale che Laplace aveva della scienza.

Non è un caso che il brano citato sia nell'introduzione del primo lavoro monumentale sul calcolo delle probabilità moderno. Si tratta dell'*Essai philosophique sur le probabilités*, l'introduzione che Laplace scrive alla sua *Théorie analytique des probabilités*. Secondo Laplace noi esseri umani **non** siamo come l'intelligenza che può conoscere “tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono”, né siamo in grado di “assoggettare questi dati all'analisi”. Noi **non** possiamo “abbracciare in una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero”, ma siamo destinati a vivere nell'incertezza — a non conoscere mai lo stato reale del mondo in tutti sui dettagli microscopici.

Tuttavia — ed è questo il nocciolo della visione di Laplace, la grande eredità del secolo della *Ragione* in cui Laplace maturò la sua visione profonda e attuale della scienza — possiamo afferrare le leggi della natura, e, sulla base di queste, pervenire ad inferenze razionalmente motivate sulla struttura del mondo — *malgrado la nostra ineliminabile incertezza sullo stato reale del mondo*. Secondo Laplace le nostre inferenze su ciò che accadrà o che è accaduto nel mondo, essendo la nostra informazione sullo stato reale del mondo scarsa e limitata, dovranno necessariamente essere di tipo probabilistico — in altre parole, Laplace ha ben chiara la distinzione tra determinismo e predicibilità. In questa intuizione fondamentale Laplace non è dissimile da Boltzmann — e la nozione moderna di “tipicità che discuteremo più avanti non fa che affinare la visione di Laplace sull'uso della probabilità in fisica.

Caos significa dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali di un sistema dinamico deterministico — in questo modo fu riscoperto all'inizio degli anni 60 dal meteorologo matematico Lorenz che modellizzò l'atmosfera con un sistema di 3 equazioni differenziali non lineari accoppiate. La sorpresa fu proprio questa: che un “semplice” sistema dinamico a pochissimi gradi di libertà avesse una così ricca struttura di soluzioni e che fosse, sebbene deterministico, “impredicibile”. Con quest'ultima osservazione si intende il seguente fatto: qualunque descrizione approssimata della condizione iniziale (inevitabile in pratica a causa della troncatura delle cifre decimali in una simulazione al calcolatore) comporta dopo un certo tempo impredicibilità dell'evoluzione temporale dello stato del sistema (la soglia temporale di impredicibilità è determinata dalla precisione con cui è nota la condizione iniziale e da parametri intrinseci del sistema).

Il caos risulta quindi spiegato dal determinismo delle equazioni differenziali — e non occorre che le equazioni siano speciali, al contrario: per più di 3 gradi di libertà, il caos, cioè la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali è la norma. A questo riguardo è interessante notare che la storia della scienza è più articolata e ricca di sorprese di quanto gli apologeti delle rivoluzioni scientifiche ci vogliano far credere: come risulta dai suoi scritti, la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali era completamente nota a Maxwell, così come lo era, in tempi un po' più recenti, ad Hadamard, Duhem e Poincaré.

Per capire più a fondo che cosa significhi dinamica caotica concludiamo con l'esempio di un “modello-giocattolo”. Ecco l'esempio: si consideri come “spazio delle fasi” l'intervallo di numeri reali

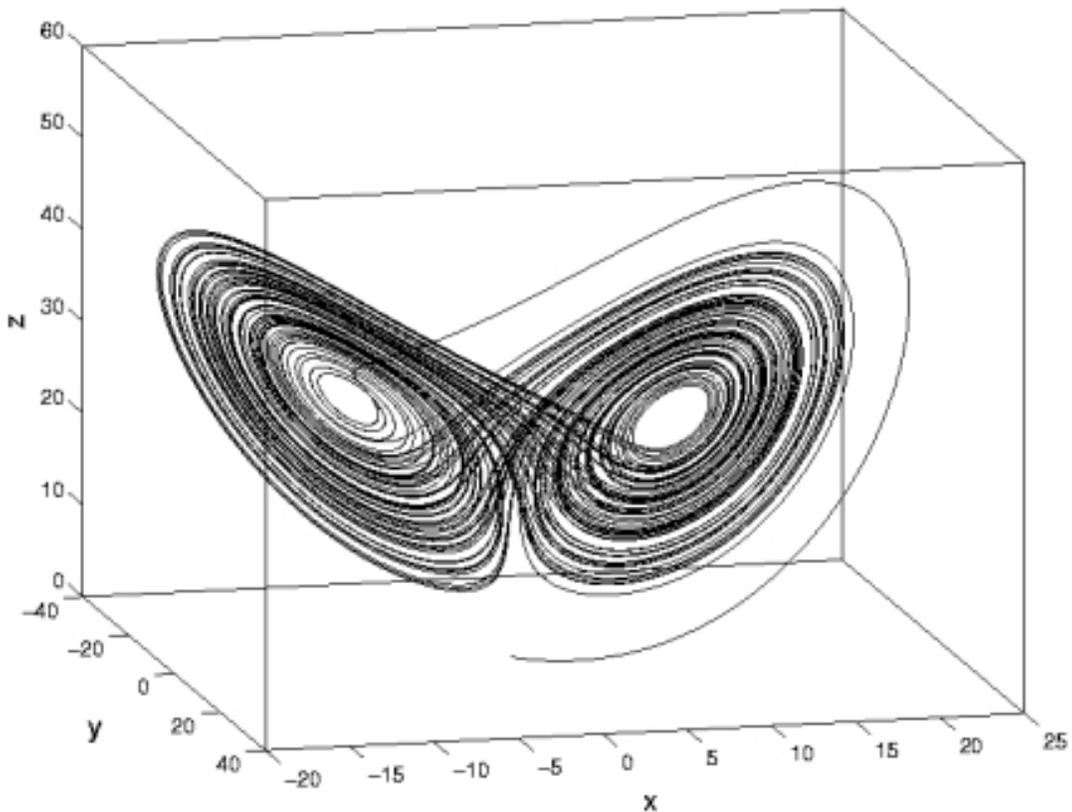


Figura 3: Sistema di Lorenz. Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

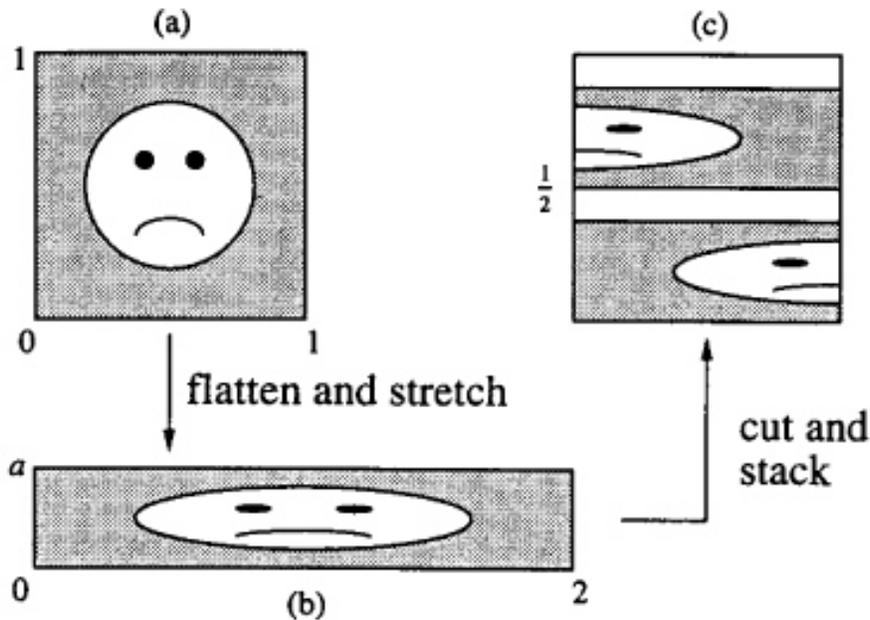
$I = [0, 1)$ e si prenda come dinamica (a tempo discreto) quella ottenuta iterando la funzione

$$\varphi : x \rightarrow 10x \pmod{1}.$$

Questo significa prendere un numero X tra 0 e 1, moltiplicarlo per 10, scrivere il risultato come un intero più un numero compreso tra 0 e 1 e prendere quest'ultimo come risultato, cioè come valore della funzione $\varphi(X)$.

Poiché il risultato ottenuto è un numero tra 0 e 1, possiamo ripetere l'operazione, e ottenere reitmando la procedura per varie volte, l'*orbita* di X . Il numero X è la condizione iniziale di quest'orbita — lo "stato iniziale del sistema". Per descrivere l'orbita conviene considerare l'espansione decimale nei numeri compresi tra 0 e 1: qualunque numero può essere scritto nella forma $X = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$, dove a_i sono una delle 10 cifre decimali $0, 1, 2, \dots, 9$. Quindi lo stato del sistema al "tempo 1" è $X_1 = \varphi(X) = 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$, al "tempo 2" è $X_2 = \varphi(X_1) = 0, a_3 a_4 a_5 a_6 \dots$, e così via per gli istanti successivi.

Questo è un esempio di sistema deterministico imprevedibile. È deterministico perché dato lo stato X del sistema ad un qualche tempo iniziale, c'è una regola che determina univocamente lo stato del sistema a qualunque tempo. L'imprevedibilità del sistema consiste in questo: date due condizioni iniziali vicine, ad esempio ad una distanza dell'ordine di 10^{-n} , dopo n istanti di tempo la distanza tra gli stati al tempo n diventata "macroscopica" cioè dell'ordine della prima cifra decimale. Gli sviluppi recenti della teoria dei sistemi dinamici — a partire dal modello di Lorenz — hanno mostrato che sistemi fisici molto semplici, come un pendolo forzato, si possono comportare più o meno come questo sistema.



(Modified from Strogatz, 1994).

Figura 4: Meccanismo che genera una dinamica caotica.

11 Simmetria per inversione temporale

Una *simmetria* molto importante delle leggi del movimento è l'*invarianza per inversione temporale* — una simmetria che vale per le leggi che governano un qualunque aggregato di atomi, sia esso un gas, una mela, o un treno.

Per comprendere questa simmetria si consideri un film che rappresenta l'evoluzione temporale delle posizioni di un aggregato di atomi, ad esempio l'arrivo del treno dei fratelli Lumière: immaginate che i fotogrammi di questo film rappresentino accuratamente le posizioni $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$ di tutti gli atomi del treno a diversi istanti di tempo. Fate partire il film e godetevi lo spettacolo del treno che arriva alla stazione; ad un certo istante, che per comodità assumiamo sia $t = 0$, bloccate il film e fatelo scorrere all'incontrario: la successione di fotogrammi che vedrete corrisponde ad una successione temporale invertita del movimento degli atomi, cioè, denotando con un asterisco le posizioni degli atomi nel film proiettato all'incontrario, si avrà: $\mathbf{r}_1^*(t) = \mathbf{r}_1(-t) \dots, \mathbf{r}_N^*(t) = \mathbf{r}_N(-t)$. Ma le forze $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ tra gli atomi dipendono solo dalla loro posizione istantanea, e le loro accelerazioni, essendo derivate seconde rispetto al tempo, non cambiano quando si passa al processo invertito temporalmente. Quindi se $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$ è una possibile soluzione delle equazioni del moto $m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \dots, m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N$, anche $\mathbf{r}_1^*(t) \dots, \mathbf{r}_N^*(t)$ è una soluzione delle *stesse* leggi del moto. In altre parole, se la storia di un sistema è conforme alle leggi del movimento, lo è anche la storia temporalmente invertita: *le leggi del movimento sono invarianti per inversione temporale*.

Un'osservazione di carattere tecnico: l'inversione temporale corrisponde all'inversione delle velocità, e nello spazio della fasi è rappresentata dalla trasformazione di $X = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ in $TX \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, -\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_N)$. L'invarianza delle legge di evoluzione rispetto all'inversione temporale T è espressa dalla condizione matematica $\varphi_t T \varphi_t = T$, dove φ_t è il flusso di fase.

Si consideri adesso la situazione schematizzata in Figura 5: il recipiente che contiene il gas è diviso in due parti da una parete provvista di uno sportellino apribile che mette in comunicazione le

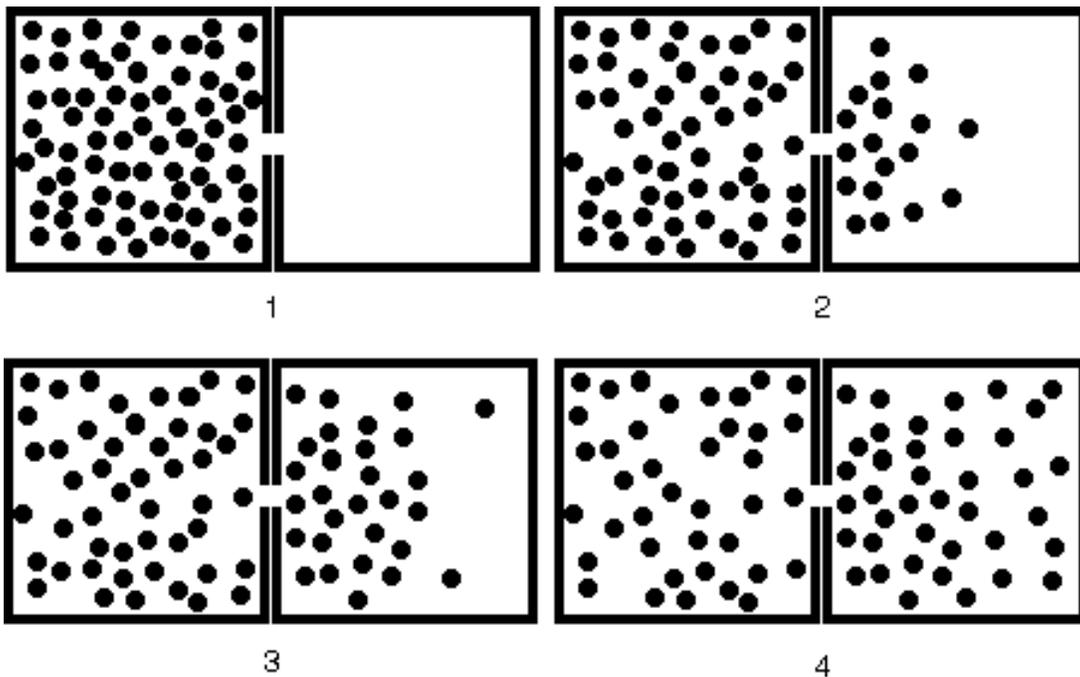


Figura 5: Quattro fotogrammi che mostrano l'espansione libera del gas. Il primo fotogramma rappresenta il gas tutto contenuto nella parte sinistra del recipiente, appena dopo che lo sportellino è stato aperto. Il quarto fotogramma mostra il gas alla fine del processo quando è stata raggiunta una densità uniforme in entrambe le parti del recipiente.

due zone del contenitore. Le pareti del recipiente schermano il gas da qualunque influenza esterna. Il gas inizialmente è concentrato tutto in una delle due parti. Una volta aperto lo sportellino, esso si espande gradualmente nell'altra parte fino a che non è stata raggiunta una distribuzione uniforme del gas nell'intero contenitore.

Il processo ottenuto per inversione temporale, cioè invertendo l'ordine dei fotogrammi, non si realizza in natura. Può questo fatto essere spiegato dalla teoria atomica? Più in generale, possiamo comprendere i fenomeni irreversibili, e il conseguente aumento di entropia dell'universo, in termini di movimento degli atomi? Questo è il problema dell'irreversibilità: *la spiegazione delle leggi macroscopiche irreversibili in termini delle leggi microscopiche reversibili che governano il movimento degli atomi.*