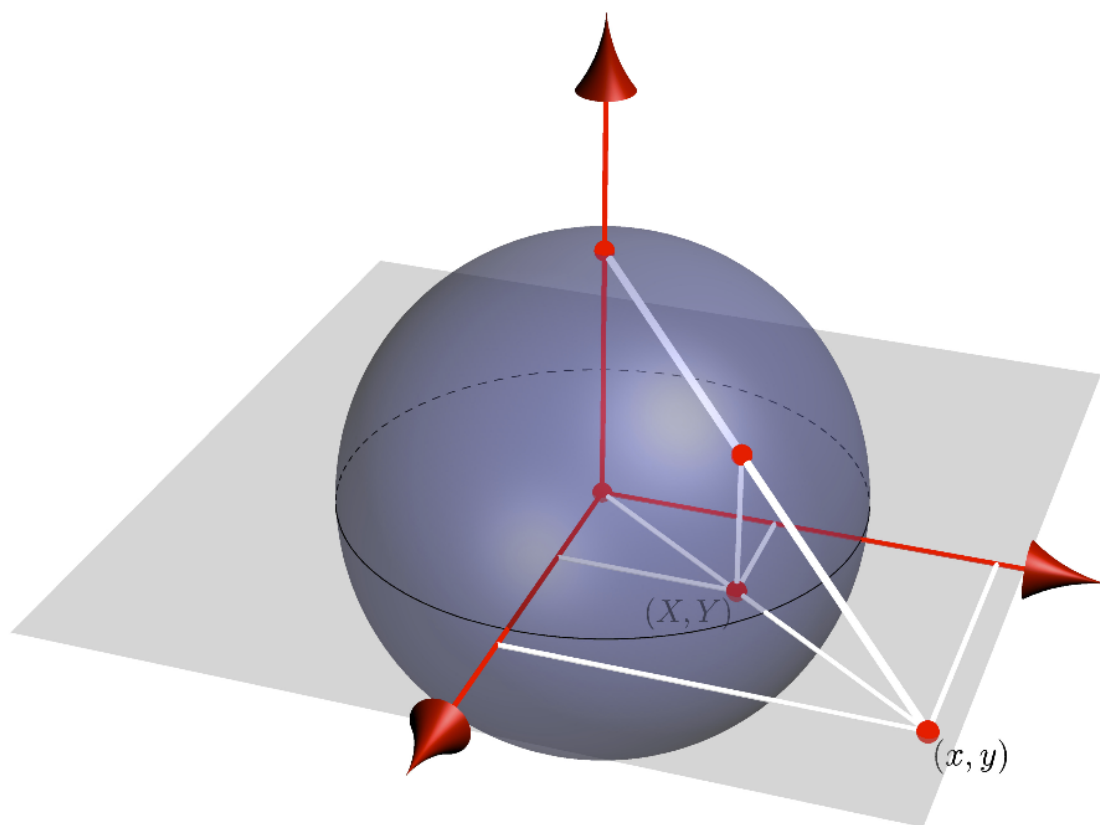


NINO ZANGHÌ

# INTRODUZIONE AI METODI MATEMATICI DELLA FISICA



UNIVERSITÀ DI GENOVA



# Indice

<b>1</b>	<b>Geometria e aritmetica complessa</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione storica . . . . .	1
1.2	Terminologia, notazioni e pratica . . . . .	2
1.3	Traslazioni e rotazioni . . . . .	4
1.4	La formula di Eulero . . . . .	4
1.5	Operazioni vettoriali . . . . .	6
1.6	Funzioni complesse come trasformazioni . . . . .	7
1.7	Polinomi . . . . .	8
1.8	Visualizzazione delle funzioni complesse . . . . .	9
1.9	PROBLEMI . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Successioni e serie</b>	<b>13</b>
2.1	Successioni e serie infinite . . . . .	13
2.2	Condizioni fondamentali per le serie convergenti . . . . .	15
2.3	Il mistero delle serie di potenze reali . . . . .	18
2.4	Successioni e serie in spazi vettoriali metrici* . . . . .	20
2.5	Successioni e serie nel piano complesso . . . . .	23
2.6	La nozione di serie assolutamente convergente . . . . .	23
2.7	Serie di potenze nel piano complesso . . . . .	24
2.8	Che cosa succede sul cerchio di convergenza* . . . . .	27
2.9	PROBLEMI . . . . .	29
2.10	COMPLEMENTI . . . . .	30
2.10.1	<i>Geometria delle serie di potenze</i> . . . . .	30
2.10.2	<i>Regolarizzazione di Abel</i> . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Convergenza uniforme e serie di potenze</b>	<b>35</b>
3.1	Convergenza uniforme . . . . .	35
3.2	Criterio di convergenza uniforme . . . . .	37
3.3	Approssimare una serie di potenze con un polinomio . . . . .	37
3.4	Unicità delle serie di potenze . . . . .	38
3.5	Manipolazione delle serie di potenze . . . . .	39
3.6	Come trovare il raggio di convergenza . . . . .	40
3.7	La funzione esponenziale . . . . .	41
3.8	Funzioni trigonometriche e iperboliche . . . . .	43

3.9	PROBLEMI . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Punti di diramazione e punto all'infinito</b>	<b>45</b>
4.1	Multifunzioni, punti di diramazione e rami . . . . .	45
4.2	Qualche esempio . . . . .	50
4.3	Rilevanza per le serie di potenze . . . . .	52
4.4	La funzione logaritmo . . . . .	53
4.5	La sfera di Riemann . . . . .	54
4.6	Singolarità e punti di diramazione all'infinito . . . . .	56
4.7	PROBLEMI . . . . .	57
4.8	COMPLEMENTI . . . . .	58
4.8.1	<i>La serie del logaritmo</i> . . . . .	58
4.8.2	<i>Serie di potenze e serie di Fourier</i> . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Funzioni analitiche</b>	<b>61</b>
5.1	Descrizione locale di trasformazioni del piano . . . . .	61
5.2	Geometria delle trasformazioni analitiche . . . . .	63
5.3	Le equazioni di Cauchy-Riemann . . . . .	64
5.4	Questioni di analisi . . . . .	65
5.5	Conforme = analitico . . . . .	66
5.6	Funzioni armoniche . . . . .	67
5.7	PROBLEMI . . . . .	69
5.8	COMPLEMENTI . . . . .	70
5.8.1	<i>Proprietà generali delle funzioni armoniche</i> . . . . .	70
5.8.2	<i>Inversione geometrica</i> . . . . .	72
5.8.3	<i>Il gruppo delle trasformazioni di Möbius</i> . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Teorema di Cauchy</b>	<b>77</b>
6.1	Integrazione . . . . .	77
6.2	Campo vettoriale associato ad una funzione complessa . . . . .	78
6.3	Circuitazione e Flusso . . . . .	79
6.4	Significato fisico delle funzioni analitiche . . . . .	81
6.5	Teorema di Cauchy . . . . .	82
6.6	Formula di Cauchy . . . . .	82
6.7	PROBLEMI . . . . .	85
6.8	COMPLEMENTI . . . . .	86
6.8.1	<i>Dipoli e quadrupoli</i> . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Teorema dei residui</b>	<b>87</b>
7.1	Antiderivata di una funzione analitica . . . . .	87
7.2	Qualche esempio . . . . .	88
7.3	Calcolo di integrali . . . . .	90
7.4	Teorema dei residui . . . . .	91
7.5	Funzioni meromorfe . . . . .	92
7.6	Singolarità essenziali . . . . .	93

7.7	Ci sono modi “veloci” per calcolare i residui? . . . . .	94
7.8	Residuo all’infinito . . . . .	96
7.9	Tabella riassuntiva delle singolarità di una funzione . . . . .	97
7.10	PROBLEMI . . . . .	98
7.11	COMPLEMENTI . . . . .	100
7.11.1	<i>Campi all’infinito</i> . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Calcolo di integrali</b> . . . . .	<b>103</b>
8.1	Il metodo dei residui . . . . .	103
8.2	Qualche esempio . . . . .	104
8.3	Qualche morale . . . . .	107
8.4	Integrali di Fourier . . . . .	108
8.5	Intermezzo: l’equazione del calore . . . . .	111
8.6	Integrale di una funzione con punti di diramazione . . . . .	113
8.7	Trasformate di Laplace . . . . .	114
8.8	Il metodo che piaceva a Feynman . . . . .	116
8.9	PROBLEMI . . . . .	119
<b>9</b>	<b>Altre conseguenze del teorema di Cauchy</b> . . . . .	<b>121</b>
9.1	Miscellanea di teoremi . . . . .	121
9.2	Infinita differenziabilità e serie di Taylor . . . . .	126
9.3	Serie di Laurent . . . . .	128
9.4	Espansione in multipoli . . . . .	131
9.5	Prolungamento analitico . . . . .	131
9.6	PROBLEMI . . . . .	134
9.7	COMPLEMENTI . . . . .	135
9.7.1	<i>Espansione in multipoli</i> . . . . .	135
9.7.2	<i>Nota sul prolungamento analitico</i> . . . . .	136
9.7.3	<i>La funzione gamma</i> . . . . .	137
9.7.4	<i>La funzione zeta di Riemann</i> . . . . .	137
9.7.5	<i>Il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana</i> . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Funzioni generalizzate</b> . . . . .	<b>143</b>
10.1	La delta di Dirac . . . . .	143
10.2	Manipolazioni della delta . . . . .	145
10.3	Funzioni generalizzate . . . . .	148
<b>11</b>	<b>Il paradiso dell’integrale di Fourier</b> . . . . .	<b>153</b>
11.1	Trasformate di Fourier di funzioni buone . . . . .	153
11.2	Lemma di Riemann-Lebesgue . . . . .	154
11.3	Identità di Parseval-Plancherel . . . . .	155
11.4	Teorema di convoluzione . . . . .	156
11.5	Il nucleo del calore . . . . .	158
11.6	Osservazioni, notazioni e convenzioni . . . . .	159
11.7	Proprietà delle trasformate di Fourier . . . . .	160

11.8	Trasformate di Fourier di funzioni non buone . . . . .	163
11.9	Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate . . . . .	163
11.10	PROBLEMI . . . . .	165
11.11	COMPLEMENTI . . . . .	167
11.11.1	<i>Analisi dimensionale e nucleo del calore</i> . . . . .	167
11.11.2	<i>Legge dei grandi numeri e limite centrale</i> . . . . .	168
<b>12</b>	<b>L'equazione delle onde in una dimensione</b>	<b>171</b>
12.1	L'equazione omogenea delle onde . . . . .	171
12.2	Soluzione generale di d'Alembert . . . . .	171
12.3	Soluzione del problema di Cauchy . . . . .	172
12.4	Conservazione dell'energia . . . . .	174
12.5	L'equazione non omogenea delle onde . . . . .	175
12.6	Risoluzione mediante analisi di Fourier . . . . .	176
<b>13</b>	<b>Poli lungo il cammino e funzioni causali</b>	<b>181</b>
13.1	Parte principale di Cauchy . . . . .	181
13.2	Teorema e formula di Cauchy generalizzate . . . . .	183
13.3	Formule integrali di Poisson per il semipiano . . . . .	184
13.4	Formule integrali di Poisson per il cerchio . . . . .	186
13.5	Integrale di Fourier di funzioni causali . . . . .	186
13.6	Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig . . . . .	187
<b>14</b>	<b>Trasformate di Laplace</b>	<b>191</b>
14.1	Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier . . . . .	191
14.2	Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	192
14.3	Nozione usuale di trasformata di Laplace . . . . .	194
14.4	Formula di inversione . . . . .	197
14.5	PROBLEMI . . . . .	198
<b>15</b>	<b>Problema di Dirichlet nel piano</b>	<b>199</b>
15.1	Complementi sulle rappresentazioni conformi . . . . .	199
15.2	Distribuzione di temperatura in una piastra circolare . . . . .	201
15.3	Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace . . . . .	203
15.4	Il nucleo di Poisson . . . . .	204
15.5	Teorema di convergenza uniforme . . . . .	206
15.6	COMPLEMENTI . . . . .	208
15.6.1	<i>Complementi sulla trasformazione "swap" di Möbius</i> . . . . .	208
15.6.2	<i>Dimostrazione del teorema di convergenza uniforme</i> . . . . .	209
<b>16</b>	<b>Analisi di Fourier</b>	<b>211</b>
16.1	Il problema fondamentale dell'analisi di Fourier . . . . .	211
16.2	Esempi di serie di Fourier di funzioni periodiche . . . . .	215
16.3	Il teorema di Dirichlet . . . . .	218
16.4	Il fenomeno di Gibbs . . . . .	219

16.5	Risultati classici sulle serie di Fourier . . . . .	221
16.6	Dal problema di Dirichlet nel piano all'analisi di Fourier . . . . .	225
16.7	Teorema di approssimazione di Weierstrass . . . . .	227
16.8	Approssimazione nel senso dei minimi quadrati . . . . .	228
16.9	PROBLEMI . . . . .	230
16.10	COMPLEMENTI . . . . .	231
16.10.1	<i>La memoria originale di Fourier</i> . . . . .	231
16.10.2	<i>L'oscillatore armonico smorzato</i> . . . . .	232
<b>17</b>	<b>Spazi di Hilbert</b> . . . . .	<b>235</b>
17.1	Spazi normati . . . . .	235
17.2	Spazi con prodotto scalare . . . . .	236
17.3	Lo spazio $\ell^2$ . . . . .	238
17.4	La notazione di Dirac . . . . .	238
17.5	Basi ortonormali . . . . .	239
17.6	Teorema di Riesz-Fisher . . . . .	242
17.7	Universalità dello spazio $\ell^2$ . . . . .	243
17.8	Proiezioni ortogonali . . . . .	244
17.9	Approssimazione in media quadratica . . . . .	245
17.10	PROBLEMI . . . . .	247
17.11	COMPLEMENTI . . . . .	248
17.11.1	<i>Schema riassuntivo</i> . . . . .	248
17.11.2	<i>Dimostrazioni di alcuni teoremi</i> . . . . .	250
<b>18</b>	<b>Analisi di Fourier di funzioni <math>L^2</math> in un intervallo limitato</b> . . . . .	<b>255</b>
18.1	Lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile . . . . .	255
18.2	Uno sguardo a problemi più avanzati . . . . .	258
18.3	Ortogonalità del sistema trigonometrico . . . . .	260
18.4	Significato geometrico delle somme parziali . . . . .	261
18.5	Completezza del sistema trigonometrico . . . . .	261
18.6	Analisi di Fourier in $L^2(\mathbb{T})$ . . . . .	263
18.7	Funzioni assolutamente integrabili . . . . .	263
18.8	Teorema di convoluzione . . . . .	264
18.9	Analisi di Fourier in un intervallo limitato . . . . .	265
18.10	Serie di Fourier ad intervallo dimezzato . . . . .	267
18.11	PROBLEMI . . . . .	269
18.12	COMPLEMENTI . . . . .	270
18.12.1	<i>Calcolo grafico del prodotto di convoluzione</i> . . . . .	270
18.12.2	<i>Struttura fondamentale dell'analisi di Fourier</i> . . . . .	270
18.12.3	<i>Analisi armonica nel discreto</i> . . . . .	272
18.12.4	<i>Analisi armonica in un intervallo infinito</i> . . . . .	275
<b>19</b>	<b>Problemi al contorno</b> . . . . .	<b>277</b>
19.1	Equazioni alle derivate parziali . . . . .	277
19.2	Problemi al contorno sulla retta reale . . . . .	278

19.3	Problemi al contorno sulla semi-retta reale . . . . .	281
19.4	Oscillazioni di temperatura nel suolo . . . . .	285
19.5	Problemi al contorno in un intervallo limitato . . . . .	287
19.6	Metodo delle separazioni delle variabili . . . . .	288
19.7	Da Fourier a Schrödinger . . . . .	291
19.8	PROBLEMI . . . . .	295
<b>20</b>	<b>Unitarietà della trasformata di Fourier</b>	<b>297</b>
20.1	La trasformata di Fourier di funzioni buone . . . . .	297
20.2	Operatori su funzioni buone . . . . .	299
20.3	Le funzioni di Hermite . . . . .	302
20.4	Completezza del sistema delle funzioni di Hermite . . . . .	304
20.5	Trasformata di Fourier di funzioni a quadrato integrabile . . . . .	305
20.6	L'oscillatore armonico quantistico . . . . .	306
20.7	La trasformata di Fourier frazionaria . . . . .	307
<b>21</b>	<b>Complementi sulla trasformata di Fourier*</b>	<b>309</b>
21.1	Proprietà di analiticità della trasformata di Fourier . . . . .	309
21.2	Teoremi di Paley-Wiener . . . . .	311
21.3	Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon . . . . .	312
<b>22</b>	<b>Analisi asintotica*</b>	<b>315</b>
22.1	Notazioni standard dell'analisi asintotica . . . . .	315
22.2	Integrali di Fourier e lemma di Riemann-Lebesgue . . . . .	316
22.3	Metodo della fase stazionaria . . . . .	316
22.4	Asintotica a onde corte in meccanica quantistica . . . . .	320
22.5	Diffrazione in ottica . . . . .	321
22.6	Asintotica a grandi tempi in meccanica quantistica . . . . .	324
22.7	Integrali di Laplace . . . . .	326
22.8	Metodo di Laplace . . . . .	327
22.9	Transizioni di fase magnetiche . . . . .	330
22.10	Serie asintotiche e serie convergenti . . . . .	334
22.11	Sviluppi asintotici . . . . .	337
	<b>Appendici</b>	<b>341</b>
<b>A</b>	<b>Soluzioni dei problemi</b>	<b>343</b>
S.1	. . . . .	344
S.2	. . . . .	351
S.3	. . . . .	356
S.4	. . . . .	361
S.5	. . . . .	366
S.6	. . . . .	370
S.7	. . . . .	373
S.8	. . . . .	377



S.9	.....	392
S.11	.....	395
S.14	.....	405
S.16	.....	409
S.17	.....	410
S.18	.....	411
S.19	.....	412



# 1

## Geometria e aritmetica complessa

### 1.1 Introduzione storica

Non sono state le equazioni quadratiche  $ax^2 + bx + c = 0$ , la cui formula risolutiva è nota sin dall'antichità,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a portare ai numeri complessi. Il valore negativo del discriminante  $b^2 - 4ac$  non fu mai considerato come il segnale dell'esistenza di un nuovo tipo di numeri, per i quali  $\sqrt{-1}$  ha senso. Fu invece sempre interpretato come un'indicazione che la parabola  $y = ax^2$  e la retta  $y = -bx - c$  non hanno punti di intersezione. Occorre tenere presente che fino all'800, si son sempre cercate le soluzioni reali o positive delle equazioni algebriche.

In effetti, furono le equazioni cubiche a portare ai numeri complessi. In breve, la storia è la seguente. Girolamo Cardano, basandosi sui lavori di Niccolò Tartaglia e Scipione Del Ferro, pubblica nel suo *Ars Magna* (1545) la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (1.1)$$

per l'equazione di terzo grado<sup>1</sup>

$$x^3 = 3px + 2q$$

La formula (1.1) non era nota nell'antichità.<sup>2</sup> Pochi decenni dopo, Raffaele Bombelli si rese conto che c'era qualcosa di strano e paradossale riguardo a questa formula.

Bombelli considerò l'equazione  $x^3 = 15x + 4$ , per cui la formula di Cardano fornisce

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i},$$

(con la notazione moderna  $i \equiv \sqrt{-1}$  introdotta da Leonard Euler circa duecento anni dopo Bombelli). Ma Bombelli sapeva che  $x = 4$



Girolamo Cardano (1501–1576?) è stato un matematico italiano. Parte della soluzione dell'equazione cubica, che pubblicò nella sua opera *Ars Magna* gli era stata comunicata da Tartaglia. Cardano sostenne di averne pubblicato il testo solo quando era venuto a sapere che Tartaglia avrebbe appreso la soluzione da Scipione Del Ferro.

<sup>1</sup> Esercizio: Mostrare che ogni equazione cubica può essere sempre ridotta a questa forma.

<sup>2</sup> A questo proposito, citiamo un passo di Richard Feynman: "... lo sviluppo di più grande importanza per la matematica in Europa fu la scoperta di Tartaglia che si può risolvere un'equazione cubica: sebbene di poco uso in sé stessa, questa scoperta deve essere stata meravigliosa da un punto di vista psicologico. Aiutò molto nel Rinascimento a liberarsi dall'intimidazione da parte degli antichi. [What Do you Care What Other People Think?]"

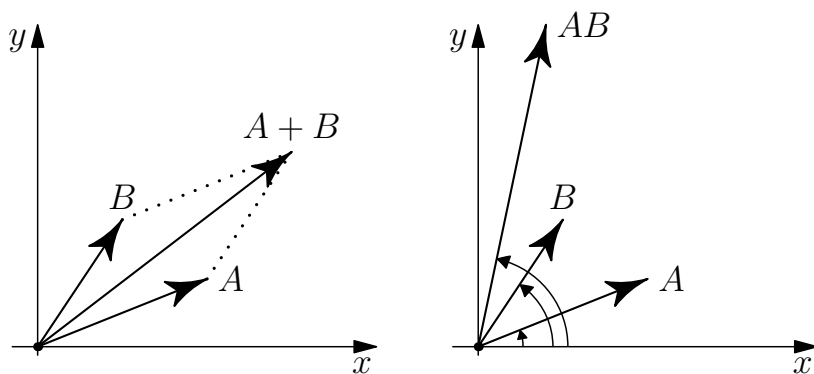
è soluzione dell'equazione. Come metter d'accordo questo con la formula di Cardano?

La congettura arida di Bombelli fu che  $\sqrt[3]{2+11i} = 2+ni$  e  $\sqrt[3]{2-11i} = 2-ni$ , dove  $n$  è un numero da determinarsi. Se fosse così,  $x=4$  sarebbe conseguenza della formula di Cardano. Ma quali devono essere le regole algebriche di manipolazione per "numeri" del tipo  $A = a + i\tilde{a}$ , in modo che sia davvero così? Queste:

- (1)  $A + B = (a + i\tilde{a}) + (b + i\tilde{b}) = (a + b) + i(\tilde{a} + \tilde{b})$ .
- (2)  $AB = (a + i\tilde{a})(b + i\tilde{b}) = ab + i(a\tilde{b} + \tilde{a}b) + i^2\tilde{a}\tilde{b} = (ab - \tilde{a}\tilde{b}) + i(a\tilde{b} + \tilde{a}b)$ .  
(avendo usato  $i^2 = -1$ ). Se si utilizzano queste regole si può mostrare facilmente che  $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$  (esercizio).

L'importanza del lavoro di Bombelli fu questa: fece maturare la consapevolezza che problemi, formulati completamente nell'ambito dei numeri reali e di cui si cercavano soluzioni reali, per essere risolti richiedevano comunque un'aritmetica complessa come strumento di calcolo, un'aritmetica basata sulle regole algebriche (1) e (2). Ciò nonostante, questa nuova aritmetica rimase abbastanza misteriosa fino a che, con Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, non si diede una rappresentazione geometrica nei numeri complessi come punti del piano  $\mathbb{R}^2$  per i quali le operazioni di somma e prodotto hanno un chiaro significato geometrico. Si vedano le figure 1.1 e 1.2.

La figura 1.2 mostra che la somma di due numeri complessi  $A$  e  $B$  è data dall'usuale regola del parallelogramma per la somma dei vettori corrispondenti. Dalla regola algebrica (2), si dimostra facilmente (esercizio) che il prodotto  $AB$  è il numero complesso che forma un angolo con l'asse reale pari alla somma degli angoli di  $A$  e  $B$  e la cui lunghezza è il prodotto delle lunghezze di  $A$  e  $B$ .



## 1.2 Terminologia, notazioni e pratica

Con riferimento alla figura 1.1, terminologia e notazioni per i numeri complessi sono riassunte dalla seguente tavola:

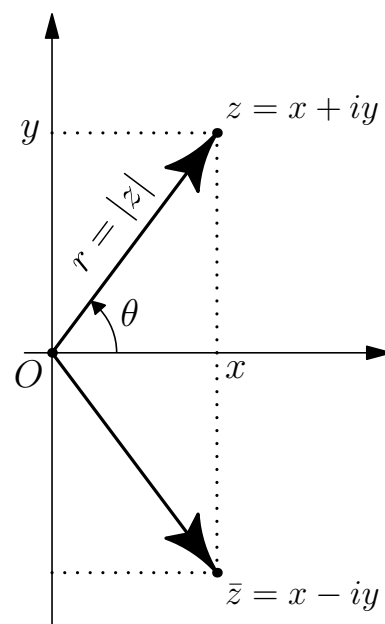


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Figura 1.2: Somma e prodotto di numeri complessi, visti come vettori nel piano  $\mathbb{R}^2$ .

Nome	Significato	Notazione
modulo di $z$	lunghezza $r$ di $z$	$ z $
argomento (o fase) di $z$	angolo $\theta$ di $z$	$\arg(z)$
parte reale di $z$	coordinata $x$ di $z$	$\operatorname{Re}(z)$
parte immaginaria di $z$	coordinata $y$ di $z$	$\operatorname{Im}(z)$
numero immaginario	multiplo reale di $i$	
asse reale	insieme dei numeri reali	
asse immaginario	insieme dei numeri immaginari	
piano complesso	insieme dei numeri complessi	$\mathbb{C}$
complesso coniugato di $z$	riflessione di $z$ rispetto all'asse reale	$\bar{z}$

Si osservi dalla figura 1.1 che il numero complesso  $z = x + iy$  può essere anche rappresentato in termini delle sue coordinate polari  $r$  e  $\theta$ . Per esprimere questo simbolicamente, scriviamo

$$z = r\angle\theta,$$

dove il simbolo  $\angle$  serve a ricordare che  $\theta$  è l'angolo di  $z$  (con l'asse reale). Nella rappresentazione polare, la regola del prodotto risulta particolarmente semplice:

$$(r\angle\theta)(R\angle\phi) = rR\angle(\theta + \phi).$$

Prima di continuare, si raccomanda vivamente una certa pratica con le nozioni elementari sui numeri complessi. Ci si convinca, ad esempio, della validità dei seguenti fatti, con ragionamenti sia algebrici sia geometrici:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad r\angle\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Definito  $(1/z)$  come quel numero complesso tale che  $(1/z)z = 1$ , ne segue che

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\angle\theta} = \frac{1}{r}\angle(-\theta).$$

Ecco altre formule su cui fare pratica:

$$\frac{R\angle\phi}{r\angle\theta} = \frac{R}{r}\angle(\phi - \theta) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + i)^4 = -4 \quad (1 + i)^{13} = -2^6(1 + i) \quad (1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^2} = -4i \quad \frac{(1 + i)^5}{(\sqrt{3} + i)^2} = -\sqrt{2}\angle(-\pi/12) \quad \overline{r\angle\theta} = r\angle(-\theta)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

Infine, la disuguaglianza triangolare generalizzata:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

Esercizio: quando si ha uguaglianza?



Raffaele Bombelli (1526–1572) è stato un matematico e ingegnere italiano. La sua opera fondamentale, *L'algebra*, fu pubblicata nel 1572.

### 1.3 Traslazioni e rotazioni

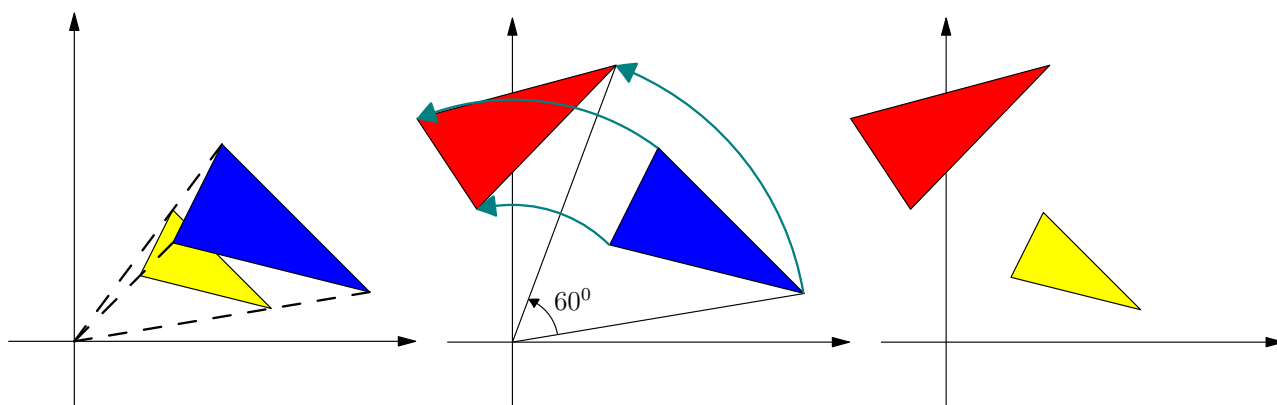
Una traslazione del piano complesso è data dalla trasformazione

$$z \mapsto z + b, \quad (1.2)$$

dove  $b$  è un numero complesso. Per ogni complesso  $a$ , la trasformazione

$$z \mapsto az \quad (1.3)$$

rappresenta uno "stiramento" del piano complesso di un fattore  $|a|$  (compressione o espansione a seconda se  $|a| < 1$  o  $|a| > 1$ ), combinata con una rotazione del piano di un angolo pari ad  $\arg(a)$  (si osservi che sia la dilazione sia la rotazione sono centrate nell'origine). Potremmo chiamare la (1.3) una *stiro-rotazione*. Una stiro-rotazione può essere raffigurata nel modo seguente:



Abbiamo scelto  $a = 1.5\angle(60^\circ)$ . Consideriamo l'azione della (1.3) su un triangolo. La prima figura a sinistra rappresenta la dilatazione (con fattore di scala 1.5), rispetto all'origine, che trasforma il triangolo di partenza giallo nel triangolo blu. La figura nel centro rappresenta la rotazione di  $60^\circ$  di quest'ultimo, sempre rispetto all'origine. Il triangolo rosso è l'effetto finale della trasformazione, come mostrato nell'ultima figura a destra. Si osservi che dilatazioni e rotazioni commutano: avremmo potuto prima ruotare e poi dilatare e saremmo comunque arrivati allo stesso risultato. E la ragione è chiara: il prodotto tra numeri complessi ha l'usuale proprietà commutativa del prodotto tra numeri.

### 1.4 La formula di Eulero

Una delle formule più importanti dell'algebra complessa è la formula

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta} \quad (1.4)$$

scoperta da Eulero intorno al 1740. Con questa formula la moltiplicazione dei numeri complessi diventa ovvia. Da essa si ha infatti  $z = r\angle\theta = re^{i\theta}$ , da cui, usando le proprietà dell'esponenziale

$$(re^{i\theta})(Re^{i\phi}) = rRe^{i(\theta+\phi)}$$

Per spiegare la formula di Eulero, occorre in primo luogo domandarsi: *che cosa il simbolo "e<sup>iθ</sup>" significa?* Per capire questa domanda, occorre aver chiaro che le regole dell'algebra (somma e prodotto di numeri complessi) non ci dicono nulla su che cosa si debba intendere con il simbolo "e<sup>iθ</sup>". In conseguenza di ciò, l'approccio moderno è di considerare la (1.4) una *definizione* di "e<sup>iθ</sup>". Da un punto di vista logico, questo modo di procedere è ineccepibile. Ma, da un punto di vista concettuale, ne risulta una carenza nella *comprensione* della formula. Comprendere la formula, significa capirne il senso e in che modo può essere *giustificata* (non dimostrata!). Dopo tutto, la (1.4) fu per Eulero una *scoperta* e non semplicemente una definizione!

Una prima giustificazione si basa sul noto sviluppo di Taylor dell'esponenziale reale,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se congetturiamo che questa formula continui a valere per immaginari puri e sostituiamo  $x = i\theta$ , otteniamo

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

Se adesso usiamo le proprietà algebriche dell'elevazione a potenza dell'unità immaginaria  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i \times i^2 = -i$ ,  $i^4 = i \times i^3 = 1$ ,  $i^5 = i \times i^4 = i$ , ... e raggruppiamo i termini nello sviluppo di Taylor, otteniamo

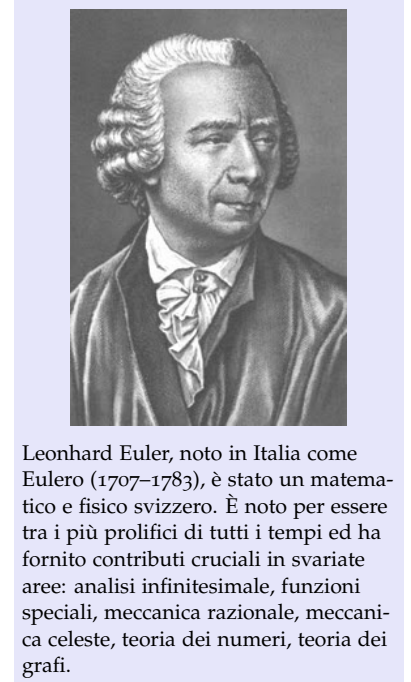
$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right).$$

Riconosciamo la prima parentesi come lo sviluppo in serie del coseno e la seconda come quella del seno. Quindi,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

C'è un'altra giustificazione della formula, che è particolarmente interessante perché basata su un ragionamento cinematico: si assuma che  $Z = Z(t) = e^{it}$  descriva l'orbita di un punto nel piano, con condizione iniziale  $Z_0 = Z(0) = 1$ . Allora la velocità del punto è  $V = ie^{it} = iZ$ . Questo significa che  $Z$  soddisfa l'equazione

$$\frac{dZ}{dt} = iZ. \tag{1.5}$$



Per quanto visto nella sezione precedente, la moltiplicazione per  $i$  equivale ad una rotazione antioraria di  $90^\circ$ , il che vuol dire che la velocità del punto è pari al raggio vettore del punto ruotato di  $90^\circ$ . Tenuto conto della posizione iniziale, la velocità iniziale è allora  $V_0 = i$ . C'è un solo movimento che ha queste caratteristiche: *il moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria*. Questo fatto è illustrato dalla figura 1.3. La legge oraria dell'orbita è dunque

$$Z(t) = \cos t + i \sin t$$

e la formula di Eulero risulta così giustificata.

**ESERCIZIO 1.1.** *Convincerli di quanto riprodotto in figura 1.3, risolvendo numericamente la (1.5) con l'algoritmo di Eulero che, in linguaggio moderno, è espresso dal seguente pseudo-codice:*

```
define V(Z)= I*Z
input t0=0 and Z0=1
input step size, h and the number of steps, n
for j from 1 to n do
V0 = I
Z1 = Z0 + h*V0
t1 = t0 + h
Print t1 and Z1
t0 = t1
Z0 = Z1
end
```

### 1.5 Operazioni vettoriali

La seguente definizione

$$a \bullet b = \bar{a}b. \quad (1.6)$$

fornisce una buona nozione di prodotto scalare tra numeri complessi che si riduce all'usuale quadrato del modulo quando  $a = b$  (e quindi alla norma usuale per i numeri complessi). Si osservi l'invarianza del prodotto scalare (1.6) per rotazioni:  $u = e^{i\theta}$  produce una rotazione di un angolo  $\theta$  attorno all'origine, e quindi

$$(ua) \bullet (ub) = \overline{ua}(ub) = \bar{u}\bar{a}ub = \bar{u}\bar{a}ub = (\bar{u}u)\bar{a}b = \bar{a}b = a \bullet b.$$

È interessante osservare che il prodotto scalare complesso contiene informazione sia sul prodotto scalare reale sia sul prodotto vettore dei vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  associati ai numeri complessi  $a$  e  $b$ . Si ha infatti

$$a \bullet b = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.7)$$

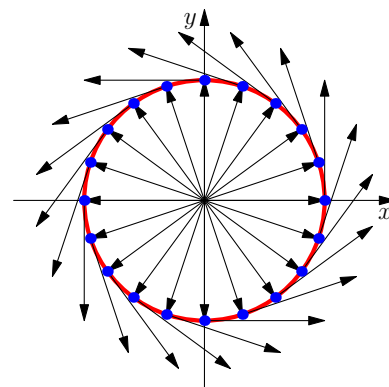


Figura 1.3: Formula di Eulero e moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria.

Notare che a differenza dell'usuale prodotto scalare reale,  $a \bullet b \neq b \bullet a$ . Si ha infatti,  $b \bullet a = \bar{b}a = \overline{a \bullet b}$ . Il prodotto scalare complesso è l'esempio più semplice di forma hermitiana o sesquilineare. Si veda la sezione 2.4.



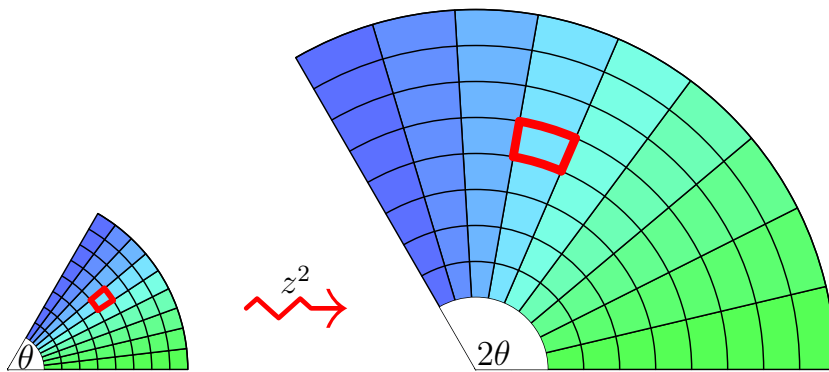
dove  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  qui denota il numero reale che rappresenta l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori (la sua direzione è ortogonale al piano, si veda la figura 1.4).

ESERCIZIO 1.2. Dimostrare la (1.7).

### 1.6 Funzioni complesse come trasformazioni

Nella sezione 1.3 abbiamo incontrato le funzioni lineari  $z \mapsto az + b$ . Come abbiamo visto, possono essere interpretate come trasformazioni del piano complesso (traslazioni, rotazioni e stiramenti). Subito dopo, in ordine di difficoltà, c'è la funzione quadratica  $z \mapsto z^2$ , illustrata nella figura 1.5 e poi l'elevazione ad una potenza intera e positiva,

$$z \mapsto w = z^n. \tag{1.8}$$



Scrivendo  $z = re^{i\theta}$ , la (1.8) diventa  $w = r^n e^{in\theta}$ , per cui l'effetto della trasformazione è di elevare all' $n$ -esima potenza la distanza e di moltiplicare per  $n$  l'angolo. La figura 1.5 intende rendere vivido questo fatto, mostrando l'effetto della trasformazione su alcuni raggi e archi centrati nell'origine (per  $n = 2$ ).

Passiamo adesso ad un fatto elementare di algebra complessa che può essere compreso in maniera semplice dal punto di vista delle funzioni complesse come trasformazioni del piano in sé stesso. Il fatto è il seguente:

Le soluzioni dell'equazione  $z^n = 1$  sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1.

(1.9)

Preliminarmente, osserviamo che se  $w = f(z) = z^n$ , allora le soluzioni di  $z^n = 1$  sono i punti del piano- $z$  che sono trasformati

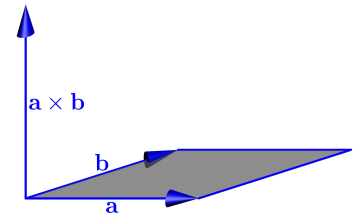


Figura 1.4: Il prodotto vettore è l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori ed è nella direzione ortogonale al piano.

Figura 1.5: Illustrazione del tipo di trasformazione operato dalla funzione  $z \mapsto w = z^n$ , nel caso particolare di  $n = 2$ . Il fatto che un quadratino piccolo mantenga la forma di un quadratino, come mostrato in figura, appare, al momento solo una curiosità. In verità, è un fatto molto importante che, come vedremo nel seguito, è la caratteristica saliente delle funzioni analitiche.

da  $f$  nel punto  $w = 1$  del piano- $w$ . Se consideriamo una particella che si muove lungo il cerchio unitario nel piano- $z$ , poiché  $1^n = 1$  anche la particella immagine nel piano- $w$  si muoverà lungo il cerchio unitario  $|w| = 1$ , ma con una velocità angolare che è  $n$  volte quella della particella nel piano- $z$  (in quanto, sul cerchio unitario,  $w = e^{in\theta}$ ). La (1.9) segue da questa semplice osservazione, come illustrato in figura 1.6 per  $n = 3$ .

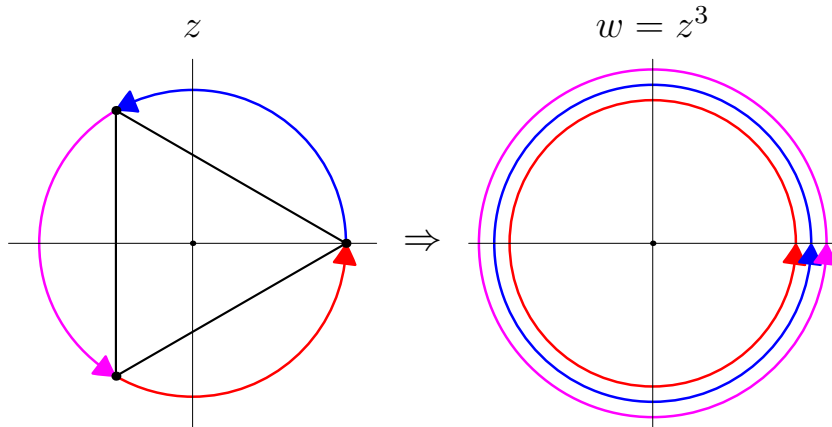


Figura 1.6: Poiché la particella nel piano- $w$  ha una velocità 3 volte maggiore, quando essa compie un angolo giro, la particella  $z$  ha solo percorso  $1/3$  della circonferenza (arco blu); quando la particella nel piano- $z$  percorre il successivo  $1/3$  di circonferenza (arco magenta), la particella nel piano- $w$  ha fatto un altro giro completo, e lo stesso accade nell'ultimo tratto (arco rosso). I tre punti terminali dei tre archi formano un triangolo equilatero. Il ragionamento si estende ad un  $n$  qualunque. Risulta così dimostrato che le soluzioni di  $z^n = 1$  sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1.

### 1.7 Polinomi

Concludiamo con qualche osservazione sui polinomi. Sia

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n,$$

dove  $c_k, k = 0, 1, \dots, n$  sono costanti complesse. Il teorema fondamentale dell'algebra stabilisce che:

Ogni equazione algebrica  $P_n(z) \equiv c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n = 0,$   
 $c_n \neq 0,$  possiede almeno una radice.

(1.10)

Si osservi che dalla (1.10) segue che  $P_n(z)$  ha  $n$  radici (magari alcune coincidenti). Infatti, se  $z_1$  è la radice di  $P_n(z)$  la cui esistenza è garantita dal teorema, allora  $P_n(z)$  fattorizza nel prodotto di  $(z - z_1)$  per un polinomio  $P_{n-1}(z)$  di grado  $n - 1$ . Applicando il teorema a  $P_{n-1}(z)$  e iterando la procedura, si conclude che esistono numeri complessi  $z_1, \dots, z_n,$  eventualmente coincidenti,<sup>3</sup> che (posto  $c_n = 1,$  senza perdita di generalità) forniscono la fattorizzazione completa del polinomio,

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \tag{1.11}$$



Évariste Galois (1811–1832) è stato un matematico francese. Giovanissimo, determinò un metodo generale per scoprire se un'equazione è risolvibile o meno con operazioni quali somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione di potenza ed estrazione di radice.

<sup>3</sup> Ma non esiste un algoritmo generale per determinarli, quando  $n > 4,$  come dimostrò Galois.

1.8 Visualizzazione delle funzioni complesse

È difficile visualizzare una funzione da un piano ad un piano. Un modo è quello che abbiamo già usato: data la funzione  $w = f(z)$ , fare un disegno di come certe figure nel piano- $z$  si trasformano nel piano- $w$ , come, ad esempio, i triangoli che nella sezione 1.3 abbiamo usato per visualizzare  $z \mapsto az$ , o i raggi e archi centrati nell'origine che abbiamo usato in figura 1.5 per mostrare l'effetto della trasformazione  $z \mapsto z^2$ .

Un secondo modo, è quello di fare un grafico del modulo della funzione  $f(z)$ , come nella figura sotto per  $f(z) = z^2$ . La superficie così ottenuta è detta *superficie modulare* di  $f(z)$ . Naturalmente, rappresentando una funzione con la sua superficie modulare si perde informazione sulla sua fase.

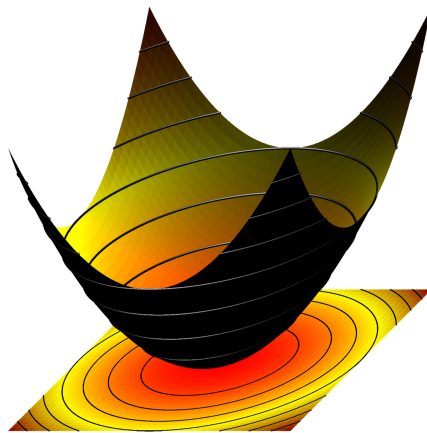


Figura 1.7: Superficie modulare di  $w = z^2$ . In figura sono mostrate le curve di livello e la loro proiezione sul piano complesso. Colori uguali nel piano, caratterizzano numeri  $z$  che hanno la stessa distanza dal centro.

Un terzo modo, consiste nel disegnare le curve di livello della parte reale  $u = \text{Re}(w)$  e della parte immaginaria  $v = \text{Im}(w)$  di  $w = f(z) = u + iv$ . Posto  $z = x + iy$ ,  $u$  e  $v$  sono funzioni reali delle variabili  $x$  e  $y$ ,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Ad esempio, per  $w = z^2$  si ha

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

e quindi

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Le curve di livello di queste due funzioni sono mostrate in figura 1.8. Questo modo di visualizzare una funzione complessa è molto utile perché ci mostra quali regioni del piano- $z$  si trasformano nei rettangoli della "griglia cartesiana" del piano- $w$ , come mostrato in figura 1.9.

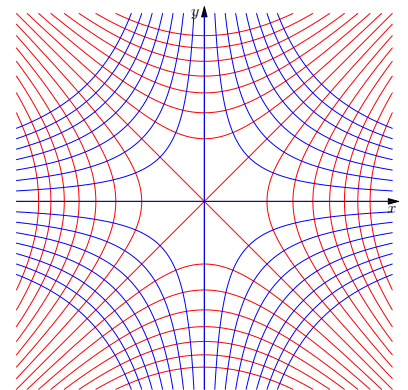


Figura 1.8: Curve di livello  $u(x, y) = \text{cost.}$  (in rosso) e  $v(x, y) = \text{cost.}$  (in blu) di  $w = u + iv = (x + iy)^2$ .

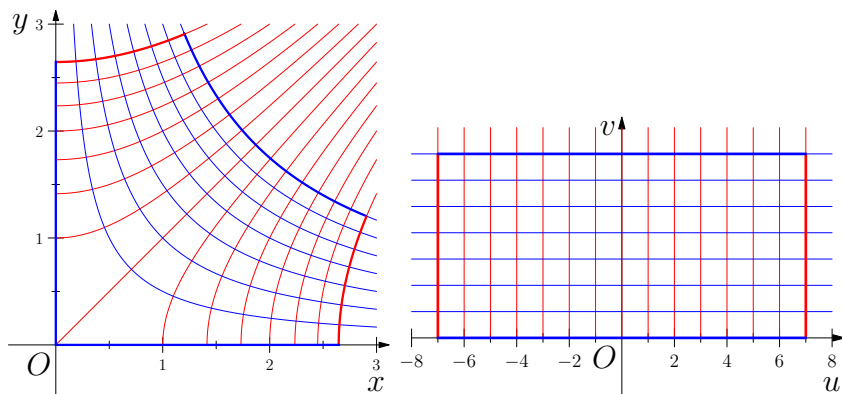


Figura 1.9: La regione del piano  $(xy)$ , racchiusa dalle linee rosse e blu in grassetto (a sinistra) è trasformata da  $w = z^2$  nel rettangolo col bordo rosso e blu in grassetto (a destra).

Le figure che si ottengono sono esteticamente piacevoli, come, ad esempio, in figura 1.10. Ma ciò che è rilevante da un punto di vista matematico è che sia in figura 1.8 sia in figura 1.10 le curve di livello delle  $u$  e delle  $v$  sono ortogonali. Questo ha fatto implicazioni molto importanti, che approfondiremo nel seguito.

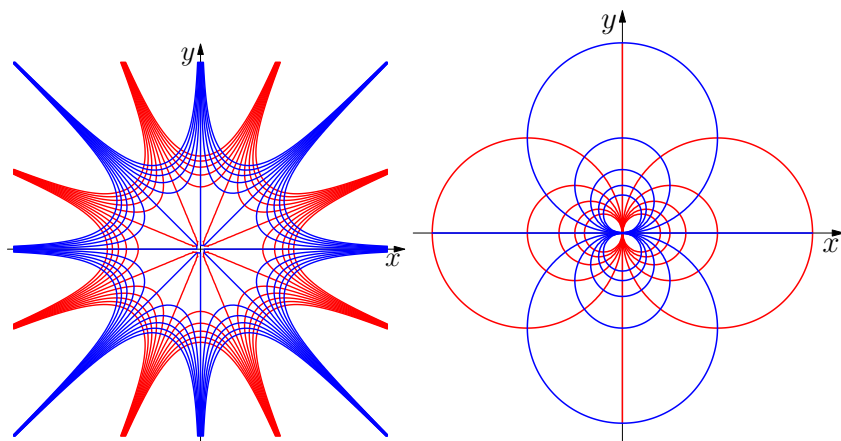


Figura 1.10: A sinistra: curve di livello per  $w = z^4$  A destra: curve di livello per  $1/z$ . (In entrambe le figure,  $u = \text{cost.}$ , in rosso e  $v = \text{cost.}$ , in blu).

Infine, c'è un quarto modo per visualizzare le funzione complesse, in termini di opportuni campi vettoriali ad esse associati. Questo è il modo più efficace e più interessante. E anche di questo ci occuperemo, e molto in dettaglio, nel seguito.

1.9 PROBLEMI

PROBLEMA 1.1. □ Utilizzando l'algebra complessa e la formula di Eulero, dimostrare le seguenti identità trigonometriche:

- (a)  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$
- (b)  $\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$
- (c)  $\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3)$
- (d)  $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$

PROBLEMA 1.2. □ Per determinare la formula risolutiva dell'equazione cubica  $x^3 = 3px + 2q$ , procedere nel modo seguente:

- (i) Fare la sostituzione  $x = s + t$ , e dedurre che  $x$  risolve la cubica se  $st = p$  e  $s^3 + t^3 = 2q$ .
- (ii) Eliminare  $t$  in queste due equazioni e ottenere un'equazione quadratica in  $s^3$ .
- (iii) Risolvere la quadratica per ottenere i due possibili valori di  $s^3$ . Per simmetria, quali sono i possibili valori di  $t^3$ ?
- (iv) Dato che  $s^3 + t^3 = 2q$ , dedurre la formula (1.1).

PROBLEMA 1.3. □ Un fatto di base nella teoria dei numeri è questo: *se due interi possono essere espressi come somma di due quadrati, allora lo stesso vale per il loro prodotto*. Sottinteso che ogni simbolo seguente denoti un intero, questo significa che se  $M = a^2 + b^2$  e  $N = c^2 + d^2$ , allora  $MN = p^2 + q^2$ . Dimostrare questo fatto considerando  $|(a + ib)(c + id)|^2$ .

PROBLEMA 1.4. □ Siano  $A, B, C, D$  quattro punti sul cerchio unitario. Se  $A + B + C + D = 0$ , mostrare che i punti devono formare un rettangolo.

PROBLEMA 1.5. □ Se  $z = e^{i\theta} \neq -1$ , allora

$$z - 1 = \left( i \tan \frac{\theta}{2} \right) (z + 1).$$

Dimostrare questo sia con il calcolo sia geometricamente facendo un disegno.

PROBLEMA 1.6. □ Poiché se ne farà gran uso, dimostrate che la somma di un progressione geometrica complessa è

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Quindi rispondete alle seguenti domande:

- (a) In quale regione di  $\mathbb{C}$  deve stare  $z$  affinché la serie infinita  $1 + z + z^2 + \dots$  converga?
- (b) Se  $z$  sta in questa regione, a quale punto del piano la serie infinita converge?
- (c) Aiutandovi con un calcolatore, fate un disegno della serie infinita nel caso  $z = (1/2)(1 + i)$  e verificate che converge al punto previsto in (b).

PROBLEMA 1.7. □ Sia

$$S = \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos(2n - 1)\theta.$$

Dimostrare che

$$S = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$$

o, equivalentemente,

$$S = \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta}$$

PROBLEMA 1.8. □ Servirsi di un disegno per mostrare che se  $a$  e  $b$  sono dati numeri complessi, allora  $|z - a| = |z - b|$  è l'equazione di una retta.

PROBLEMA 1.9. □ Si consideri l'equazione

$$(z - 1)^{10} = z^{10}.$$

- (a) Senza tentare di risolvere l'equazione, mostrare geometricamente che tutte e nove le soluzioni (perché non dieci?) devono stare sulla retta verticale  $\operatorname{Re}(z) = 1/2$  (si veda il problema 1.8).
- (b) Dividendo ambo i membri dell'equazione per  $z^{10}$ , l'equazione assume la forma  $w^n = 1$ , dove  $w = (z - 1)/z$ . Risolvere quindi l'equazione iniziale.

PROBLEMA 1.10. □ Disegnare il cerchio  $|z - 1| = 1$ . Trovare l'equazione polare dell'immagine di questo cerchio rispetto alla trasformazione  $z \mapsto z^2$  e darne una rappresentazione grafica (la curva così ottenuta è detta *cardioide*).

PROBLEMA 1.11.  $\rightarrow$

Si consideri la famiglia di trasformazioni complesse

$$Z \mapsto M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

- (i) Dimostrare che  $M_a[M_a(z)] = z$ . In altre parole  $M_a$  è *idempotente*.
- (ii) Dimostrare che  $M_a$  trasforma il cerchio unitario in se stesso.
- (iii) Mostrare che se  $|a| < 1$ , allora  $M_a$  trasforma il disco unitario in se stesso.

*Aiuto:* Usare  $|q|^2 = q\bar{q}$  per verificare che

$$|\bar{a}z - 1|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2).$$

PROBLEMA 1.12.  $\square$  Dimostrare che la famiglia di trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.

*Aiuto:*  $\alpha|z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$  è l'equazione di un cerchio o di una linea in  $\mathbb{C}$ . Investigate  $f(z) = \frac{1}{z}$  e scrivete

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

## 2

### Successioni e serie

#### 2.1 Successioni e serie infinite

Il limite di una successione di numeri reali  $s_1, s_2, s_3, \dots$  è, intuitivamente, quell'unico numero  $s$  (se esiste) a cui i numeri della successione si avvicinano arbitrariamente. Più precisamente, si dice che la successione di numeri reali  $\{s_n\}$  converge al numero reale  $s$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , il che significa, come è ben noto dalle prime lezioni di ANALISI, che per ogni numero reale  $\epsilon > 0$ , piccolo a piacere, esiste un numero intero  $N$  tale che, per tutti gli  $m > N$ , si ha  $|s - s_m| < \epsilon$ . Nel seguito, per brevità di scrittura, scriveremo  $s_n \rightarrow s$  per denotare il limite di  $s_n$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Chiarita la nozione di limite di una successione, passiamo alla nozione di somma infinita o serie infinita di numeri reali o, semplicemente, serie. Supponiamo di voler dare un senso alla somma che compare nell'analisi del paradosso di Achille e la tartaruga

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Si costruisca la successione di somme parziali

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3} \\ &\dots\dots \\ s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

La serie infinita o somma infinita  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  risulta definita come limite della successione  $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$  delle somme parziali<sup>1</sup>. Nel caso

<sup>1</sup> Si osservi che è convenzionale far partire la serie da zero o da uno; nel seguito, per comodità, faremo sempre partire le serie da zero.

considerato, la successione è

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$$

e, come si vede facilmente, il limite di questa successione è il numero 1. Infatti, dato un qualunque  $\epsilon > 0$ , si prenda  $N$  tale che  $1/2^N < \epsilon$ ; in questo modo si avrà che per tutti gli  $m > N$

$$|1 - s_m| = \frac{1}{2^m} < \epsilon.$$

In generale, l'espressione formale

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

è detta serie o somma infinita. Quando la successione delle somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , converge, la serie infinita è detta *convergente*, quando non lo è, è detta *divergente*.

Quanto detto poc'anzi, grosso modo, è tutto quello che c'è da dire sulla nozione di serie infinita in quanto tale. (Quasi) tutto il resto della trattazione dell'argomento riguarda lo sviluppo di criteri che ci permettano di stabilire se una data serie è convergente oppure no. Nel far questo, risulterà utile introdurre alcune distinzioni riguardanti la nozione di serie convergente e, al contempo, estendere la nozione di serie ad ambienti più generali dell'insieme dei numeri reali—ambienti che, al pari dei numeri reali, hanno buone proprietà di completezza metrica.

CONCLUDIAMO questa sezione con una sottolineatura (per il momento del tutto marginale). È importante aver chiaro che, per quanto la definizione di somma infinita data sopra appaia molto naturale, è pur sempre una definizione: non è l'unica possibile, né l'unica rilevante in analisi e in matematica applicata. Ad esempio, la nozione di somma infinita di Cesàro, che è il limite, quando esiste, delle *medie aritmetiche* delle somme parziali,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n + 1}$$

svolge un ruolo altrettanto importante, ad esempio nella teoria delle serie di Fourier e nella fisica matematica dei processi diffusivi. Si osservi che quando si cambia la nozione di sommabilità, una serie che prima era divergente può diventare convergente. Ad esempio,  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  è divergente secondo la definizione usuale, ma è sommabile secondo Cesàro.

**ESERCIZIO 2.1.** Qual è la somma di Cesàro della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ?



Ernesto Cesàro (1859–1906) è stato un matematico italiano. Ha dato importanti contributi alla geometria differenziale e alla teoria delle serie infinite.



## 2.2 Condizioni fondamentali per le serie convergenti

Incominciamo con la definizione ovvia di *errore*

$$E_n = |s - s_n|$$

della serie convergente  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  con somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Si vede facilmente che la convergenza a zero dell'errore,

$$E_n \rightarrow 0,$$

è *condizione necessaria per la convergenza della serie*: infatti, se  $s_n \rightarrow s$  allora

$$E_n = |s - s_n| \rightarrow |s - s| = 0.$$

La sufficienza della condizione è immediata: se esiste un reale  $s$  tale che  $|s - s_n| \rightarrow 0$ , questo significa che per  $n$  sufficientemente grande si ha  $|s - s_n| < \epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$ , che è proprio la condizione di esistenza del limite  $s_n \rightarrow s$ .

2.  $u_n \rightarrow 0$  è *condizione necessaria per la convergenza della serie*. Il che si vede subito considerando che  $u_n = s_n - s_{n-1}$ : se la serie converge ad  $s$ , allora  $s_n$  e  $s_{n-1}$  convergono ad  $s$  per  $n \rightarrow \infty$ , da cui segue che  $u_n$  deve convergere a 0 per  $n \rightarrow \infty$ .

La condizione  $u_n \rightarrow 0$  è necessaria, *ma non sufficiente*, come si vede facilmente con il contro-esempio della serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Il termine  $n$ -esimo di questa serie tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ , ma la serie diverge. Infatti, si raggruppino i termini della serie nel seguente modo

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \dots$$

Ogni parentesi è maggiore di  $1/2$  perché contiene  $2^{n-1}$  termini tutti maggiori di  $1/2^n$ . Quindi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

e poiché la serie a destra ovviamente diverge anche quella sinistra deve divergere.

3. *Criterio generale di convergenza di Cauchy*: Condizione necessaria e sufficiente perché una serie sia convergente è che, dato un qualunque  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere, esista un intero  $N$  tale che per ogni  $n > N$  si abbia

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon.$$

IL VANTAGGIO DEL CRITERIO DI CAUCHY è che in esso non non figura il limite della successione, cioè il criterio di convergenza dipende soltanto dai termini della successione delle somme parziali. Non ci si dovrebbe mai stancare di mettere in risalto l'importanza del criterio di Cauchy, non solo per la sua importanza per successioni convergenti di numeri reali, ma anche perché esso fornisce una robusta nozione di convergenza per successioni di punti appartenenti a spazi più generali della retta reale. Ritorniamo su questa nozione di convergenza più avanti, dopo avere esteso quanto detto finora a spazi più generali e, in particolare, al piano complesso.

Per il momento, vediamo di capire perché il criterio di Cauchy fornisce una condizione necessaria per la convergenza di una serie. Se la successione  $\{s_n\}$  converge a  $s$ , allora esiste un  $N$  tale che  $|s - s_n| < \epsilon$  per  $n > N$  e quindi, a maggior ragione, varrà la disuguaglianza  $|s - s_{n+p}| < \epsilon$ . Sommando membro a membro queste due disuguaglianze si ha

$$|s - s_n| + |s - s_{n+p}| < 2\epsilon.$$

D'altro canto,

$$|s_n - s_{n+p}| = |(s - s_n) + (s_{n+p} - s)| \leq |s - s_n| + |s_{n+p} - s| < 2\epsilon$$

e così la condizione di Cauchy risulta dimostrata. Si osservi che il fattore due è inessenziale: avremmo potuto incominciare il ragionamento scrivendo  $|s - s_n| < \epsilon/2$  oppure si potrebbe mettere un 2 nel criterio di Cauchy e scrivere fin dall'inizio

$$|s_{n+p} - s_n| < 2\epsilon.$$

Per varie ragioni, preferisco questo secondo modo.

Per capire la sufficienza del criterio di Cauchy, dimentichiamoci per un momento delle serie e concentriamoci sulla nozione di successione di Cauchy in quanto tale: una successione  $\{x_n\}$  è detta di Cauchy se  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$  per tutti gli  $n$  dopo un certo  $N$ ,  $p > 0$ , qualunque sia  $\epsilon$  arbitrariamente scelto. Detto in breve, una successione è di Cauchy se i suoi elementi diventano arbitrariamente vicini man mano che la successione progredisce. Si veda la figura 2.1.

Il fatto che una successione di Cauchy converga è al cuore dell'analisi reale, proprio perché i numeri reali possono essere costruiti completando i razionali con successioni di Cauchy di razionali. Se si sceglie questa strada per caratterizzare i reali, la convergenza delle successioni di Cauchy è tautologica e si stabilisce così che i reali formano uno *spazio completo*, il che significa: uno spazio in cui tutte le



Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) è stato un matematico e ingegnere francese che ha avviato il progetto della formulazione rigorosa dei teoremi dell'analisi infinitesimale basato sull'utilizzo delle nozioni di limite e di continuità e ha dato importanti contributi alla teoria delle equazioni differenziali. È il padre della teoria delle funzioni di variabile complessa.

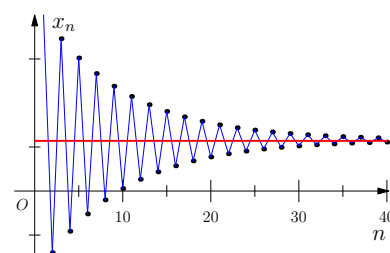


Figura 2.1: Grafico di una successione di Cauchy  $\{x_n\}$ . Se lo spazio che contiene la successione di Cauchy è completo, il punto d'arrivo della successione, cioè il limite della successione, esiste.

successioni di Cauchy convergono. (Questa nozione di completezza, basata sulle successioni di Cauchy, è fondamentale per la caratterizzazione di spazi più generali della retta reale, ad esempio gli spazi di Banach o gli spazi di Hilbert.) Alternativamente, partendo dall'assioma di Dedekind, detto anche assioma di continuità oppure assioma di completezza (che afferma che ogni insieme di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore) e utilizzando il teorema Bolzano-Weierstrass (secondo cui ogni successione di numeri reali limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente) si stabilisce la completezza dei numeri reali — ogni successione di Cauchy di numeri reali converge ad un numero reale.

Ritorniamo adesso alle serie e alla sufficienza del criterio di Cauchy. Se la successione delle somme parziali è di Cauchy allora converge ad un numero  $s$ , che è proprio la somma della serie. Concludiamo questa sezione con un esempio.

**ESEMPIO 2.1** (La serie geometrica). Si dice geometrica la serie il cui termine  $n$ -esimo è  $u_n = x^n$ . Tale serie può essere considerata come la somma di una progressione geometrica illimitata avente come ragione  $x$  e primo termine 1. Essa è convergente per  $|x| < 1$  e divergente altrimenti, come si può constatare facilmente. Infatti, si ha

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

da cui

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} = s_n - 1 + x^{n+1}$$

e quindi

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Il limite di  $s_n$  per  $n \rightarrow \infty$  è evidentemente finito ed uguale ad  $1/(1-x)$  per  $|x| < 1$  in quanto, in tal caso, l'errore

$$E_n = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

tende a zero. Se  $|x| \geq 1$ , i termini della serie non vanno a zero e quindi la serie non converge. Per  $-1 < x < 1$  la somma della serie è (si veda la figura 2.2)

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} . \tag{2.1}$$

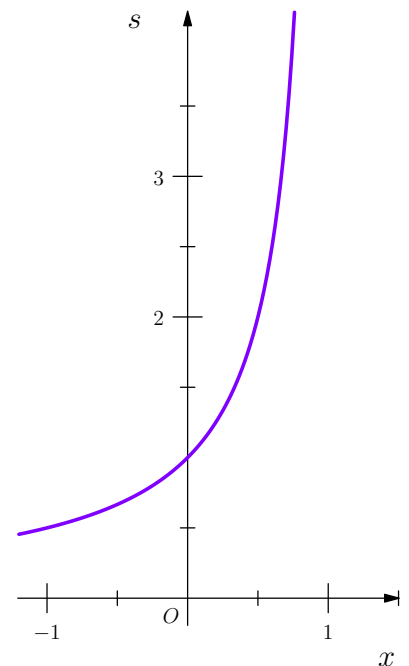


Figura 2.2: Somma della serie geometrica al variare della ragione  $x$  tra  $-1$  e  $1$ .

### 2.3 Il mistero delle serie di potenze reali

Molte funzioni reali si possono esprimere (per esempio, mediante il teorema di Taylor) come *serie di potenze*:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

dove i  $c_k$  sono costanti reali. Usualmente, queste serie infinite convergono a  $F(x)$  solo in qualche intervallo di convergenza centrato nell'origine  $-R < x < R$ . Ma la domanda profonda è:

In che modo il raggio di convergenza  $R$  è determinato da  $F(x)$ ?

(2.2)

Come vedremo nel seguito, questa domanda ha una risposta semplice e bella, *ma solo se ne cerchiamo la risposta nel piano complesso*. Se invece ci limitiamo alla retta reale, la relazione tra  $R$  e  $F(x)$  è completamente misteriosa. Storicamente, è stato proprio questo mistero che ha portato Cauchy a far progredire l'analisi complessa.

Per vedere che c'è un mistero, consideriamo le serie di potenze delle due funzioni

$$G(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{e} \quad H(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La serie geometrica equazione (2.1) fornisce immediatamente la risposta

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad \text{e} \quad H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

dove entrambe le serie hanno lo stesso intervallo di convergenza  $-1 < x < 1$ .

È facile comprendere questo intervallo di convergenza della serie per  $G(x)$  se guardiamo la figura 2.3. La serie diventa divergente nei punti  $x = \pm 1$  perché questi punti sono delle *singolarità* della funzione stessa, cioè sono luoghi in cui  $|G(x)|$  diventa infinito. Ma se guardiamo al grafico di  $H(x)$  in figura 2.4, sembra che non ci sia ragione perché qualcosa vada storto per  $x = \pm 1$ . Però qualcosa in effetti va storto.

Per incominciare a capire perché, espandiamo queste funzioni in serie di potenze centrate in  $x = u$ , cioè in serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ , dove  $X = (x - u)$  misura lo spostamento di  $x$  dal centro  $u$ . Otteniamo questo sviluppo con i seguenti passaggi:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-x} - \frac{1}{-1-x} \right],$$

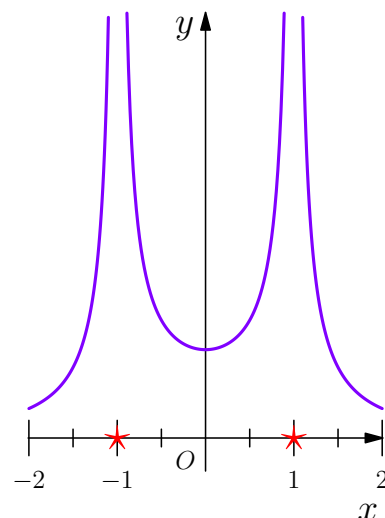


Figura 2.3: Grafico del modulo della funzione  $G(x)$ .

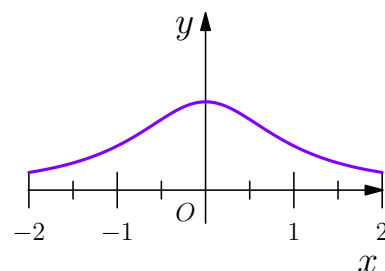


Figura 2.4: Grafico del modulo della funzione  $H(x)$ .

ma

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-(X+u)} = \frac{1}{(a-u)} \frac{1}{\left[1 - \frac{X}{a-u}\right]}$$

da cui

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(a-u)^{k+1}}, \quad \text{se e solo se } |X| < |a-u|.$$

Quindi

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1-u)^{k+1}} - \frac{1}{(-1-u)^{k+1}} \right] X^k,$$

dove  $|X| < |1-u|$  e  $|X| < |1+u|$ . Perciò l'intervallo di convergenza  $|X| < R$  è dato da

$$R = \min\{|1-u|, |1+u|\} = \text{DISTANZA DI } u \text{ DALLA SINGOLARITÀ PIÙ VICINA DI } G$$

Questo risultato è illustrato dalla figura 2.5 (si ignori il disco per il momento). L'analogo compito per  $H(x)$  è lasciato come esercizio:

**ESERCIZIO 2.2.** Dimostrare che il raggio di convergenza  $R$  dell'espansione in serie di potenze della funzione

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

intorno al punto  $u$  è

$$R = \sqrt{1+u^2} \tag{2.3}$$

(L'esercizio è difficile se si usano solo metodi reali, facile se si usano metodi complessi.)

La formula  $R = \sqrt{1+u^2}$  è la chiave di volta per capire in che modo il piano complesso entra in gioco: se immaginiamo la retta reale immersa nel piano, il teorema di Pitagora ci dice che  $R = \sqrt{1+u^2}$  deve essere interpretato come la distanza dal centro  $u$  dell'espansione ad uno dei due punti, fuori dalla retta reale, che stanno a distanza 1 dalla retta stessa in una direzione ad essa ortogonale. Si veda la figura 2.6. Se si pensa al piano come a  $\mathbb{C}$ , allora questi punti sono a  $\pm i$  e

$$R = \text{distanza di } u \text{ da } \pm i$$

Il mistero incomincia a svelarsi quando passiamo alla funzione complessa

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

che è identica a  $H(x)$  quando  $z$  è ristretto all'asse reale del piano complesso. In effetti — in un senso che non possiamo ancora rendere

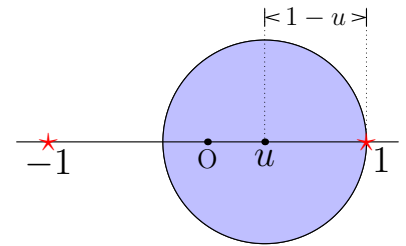


Figura 2.5: Raggio di convergenza della serie di  $G(x)$  centrata nel punto  $u$ .

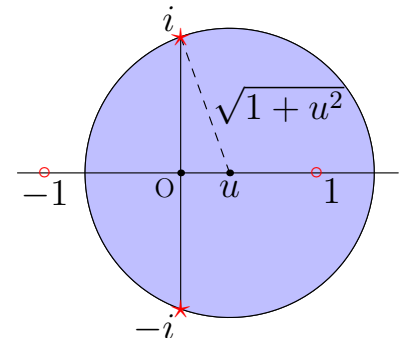


Figura 2.6: Raggio di convergenza della serie di  $H(x)$  centrata nel punto  $u$ .

esplicito —  $h(z)$  è la *sola* funzione complessa che concorda con  $H(x)$  sull'asse reale.:

Mentre la figura 2.4 mostra che  $h(z)$  si comporta bene per valori reali di  $z$ , è chiaro che  $h(z)$  ha due singolarità nel piano complesso, una a  $z = i$  e l'altra a  $z = -i$ . Queste sono illustrate come delle piccole esplosioni in figura 2.7.

Il mistero incomincia a svelarsi: quanto visto finora suggerisce la seguente risposta alla domanda (2.2):

*Il raggio di convergenza è la distanza dalla singolarità più vicina.*

(2.4)

Nelle lezioni seguenti chiariremo il senso matematico preciso di questa risposta. Per il momento ha solo lo statuto di una "buona congettura".

Concludiamo questo argomento con un esercizio:

**ESERCIZIO 2.3.** Dimostrare che  $g(z) = 1/(1 - z^2)$  e  $h(z) = 1/(1 + z^2)$  sono "essenzialmente" la stessa funzione, cioè sono ottenute l'una dall'altra mediante una rotazione del piano complesso.

### 2.4 Successioni e serie in spazi vettoriali metrici\*

Uno spazio vettoriale metrico è uno spazio vettoriale  $\mathcal{X}$ , che assumeremo sul corpo  $\mathbb{C}$  dei complessi, tra i cui elementi è ben definita una nozione metrica di distanza.

La natura vettoriale dello spazio fa sì che risulti ben definita la somma finita di vettori

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{u}_k$$

Per poter parlare di somma infinita o serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k$$

occorre una nozione di convergenza della successione di vettori  $\{\mathbf{s}_n\}$ .

A sua volta, la nozione di convergenza risulta definita se tra due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di  $\mathcal{X}$  è ben definita una nozione di distanza  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Astrattamente, la distanza  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è una funzione reale su  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  che soddisfa le seguenti proprietà ("sse" = "se e solo se"):

- (i)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  (positività)
- (ii)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  sse  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- (iii)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (simmetria)
- (iv)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (disuguaglianza triangolare)

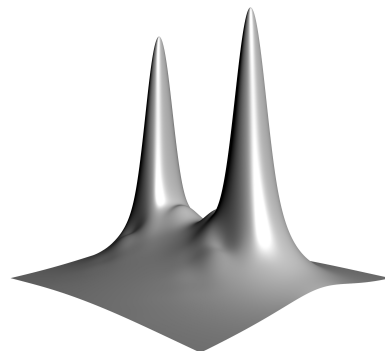


Figura 2.7: Grafico del modulo della funzione complessa  $h(z)$ .

\*Questa sezione può essere omessa senza pregiudicare la comprensione delle sezioni successive di questo capitolo e dei capitoli prima del capitolo 16.

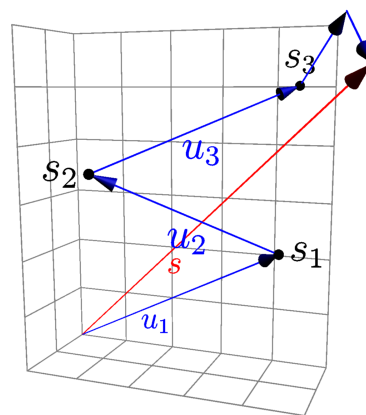


Figura 2.8: Una serie è una somma infinita di vettori. Vale comunque la regola del parallelogramma per la somma, come mostrato in figura. La figura illustra anche che  $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_{n-1} + \mathbf{u}_n$ . Il vettore in rosso  $\mathbf{s}$  è la somma di tutti i vettori  $\mathbf{u}$ , in blu (se la serie converge! Naturalmente, nella figura mancano molti vettori!).

Queste proprietà vanno intese come ottenute per processo di astrazione dall'usuale nozione di distanza tra punti dello spazio euclideo tridimensionale. Sono quanto basta—niente di più, niente di meno—per caratterizzare la nozione di distanza in spazi vettoriali generali.

Con una nozione di distanza ben definita, la nozione di convergenza è quella ovvia: diciamo che la successione  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , e scriviamo  $x_n \rightarrow x$ , se  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .<sup>2</sup> Analogamente per Cauchy:  $\{x_n\}$  è una successione di Cauchy se  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  per tutti gli  $n$  e  $m$  dopo un certo  $N$ , qualunque sia il valore di  $\epsilon$ .

Quando tutte le successioni di Cauchy convergono in  $\mathcal{X}$ , lo spazio  $\mathcal{X}$  è detto *spazio metrico completo*.

Se  $\mathcal{X}$  è  $\mathbb{R}$ , si ritrova la nozione di convergenza vista all'inizio della sezione 2.1, in quanto i numeri reali formano uno spazio vettoriale con metrica data dal modulo della differenza tra numeri. Un altro esempio è dato da  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ , con distanza indotta dal prodotto scalare naturale di  $\mathbb{R}^d$ . Qualche chiarimento sul senso di quest'ultima frase è d'obbligo.

UNO. Dati due vettori  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$  di  $\mathbb{R}^d$ , il loro prodotto scalare naturale è

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_d v_d.$$

Se  $d = 3$ , si ha l'usuale prodotto scalare tra vettori della FISICA. Nel seguito useremo anche un'altra notazione per denotare il prodotto scalare a cui è bene abituarsi fin d'ora:

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_d v_d$$

Astrattamente, uno *spazio vettoriale con prodotto scalare* è uno spazio vettoriale equipaggiato con una funzione  $\langle \bullet | \bullet \rangle$  da  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  a valori in  $\mathbb{C}$  e avente le seguenti proprietà:

- (i)  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$  (simmetria coniugata)
- (ii)  $\langle \mathbf{u} | \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{u} | \mathbf{y} \rangle$  (linearità nel secondo argomento<sup>3</sup>)
- (iii)  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$  ( $= 0$  sse  $\mathbf{x} = 0$ ) (positività)

DUE. Per distanza indotta dal prodotto scalare si intende la funzione distanza così definita:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} \tag{2.5}$$

(Si lascia come esercizio mostrare che le quattro proprietà della distanza sopra indicate risultano verificate.) A questo proposito è utile

<sup>2</sup> Più pedantemente:  $x$  è il limite della successione  $\{x_n\}$  per  $n \rightarrow \infty$  se per ogni numero reale  $\epsilon > 0$ , piccolo a piacere, esiste un numero intero  $N$  tale che, per tutti gli  $m > N$ , si ha  $d(x_n, x) < \epsilon$ .

Una funzione su  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  a valori in  $\mathbb{C}$  che soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii) del prodotto scalare è detta **forma sesquilineare** o **forma hermitiana**.

<sup>3</sup> È convenzionale richiedere la linearità rispetto al primo o al secondo argomento. Nella letteratura matematica, la linearità è rispetto al primo argomento. I fisici tendono a seguire la convenzione opposta e qui non faremo eccezione.

osservare che il secondo membro della precedente equazione non è altro che la lunghezza o norma o modulo del vettore  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Per denotare quest'ultima, si usano di solito una o due sbarrette da entrambi i lati del simbolo del vettore. Usiamone due. Allora l'equazione

$$\sqrt{\langle \mathbf{w} | \mathbf{w} \rangle} = \|\mathbf{w}\| \quad (2.6)$$

stabilisce che il prodotto scalare induce una nozione di norma (o lunghezza o modulo). Si può dimostrare (ma non lo faremo) che gli spazi  $\mathbb{R}^d$  e  $\mathbb{C}^d$  sono spazi metrici completi rispetto alla distanza definita dall'equazione (2.5) (cioè le successioni di Cauchy hanno limiti che stanno in questi spazi). Come esempio di spazio metrico non completo, si consideri l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali con metrica usuale (modulo della differenza tra numeri): successioni di Cauchy di razionali non necessariamente convergono ad un razionale.

SI OSSERVI CHE BASTA UNA NORMA per definire una distanza: se sullo spazio fosse definita una norma, ma non un prodotto scalare, risulterebbe lo stesso definita una distanza (la distanza indotta dalla norma) e quindi risulterebbero ben definite le nozioni di successione convergente e di successione di Cauchy. Uno spazio vettoriale munito di una norma è detto *spazio normato*. Come esempio di norma non indotta da un prodotto scalare, si consideri in  $\mathbb{C}^d$  la norma

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_d)\| = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_d|\}$$

Astrattamente, uno *spazio vettoriale normato* è uno spazio vettoriale su cui è definita una funzione a valori in  $\mathbb{R}$  avente le seguenti proprietà:

- (i)  $\|\mathbf{x}\| > 0$  se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- (ii)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha|$  denota il suo modulo)
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (disuguaglianza triangolare<sup>4</sup>)

A questo punto, per far pratica con le nozioni introdotte, è utile fare il seguente esercizio:

- ESERCIZIO 2.4.** (a) Dimostrare che la norma indotta dal prodotto scalare soddisfa tutte le proprietà della norma.<sup>5</sup>
- (b) Dimostrare che la distanza indotta dalla norma soddisfa tutte le proprietà della distanza.
- (c) Dimostrare che la funzione su  $\mathbb{C}^d$  a valori reali

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_d)\| = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_d|\}$$

soddisfa tutte le proprietà della norma.

<sup>4</sup> La somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato.

<sup>5</sup> A partire dalle proprietà (i) (ii) e (iii) del prodotto scalare e dalla (2.6), si dimostri preliminarmente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$



(d) Inventatevi un'altra norma su  $\mathbb{C}^d$  (diversa dalla precedente e da quella indotta dal prodotto scalare); naturalmente, dovete dimostrare che le proprietà della norma sono soddisfatte..

### 2.5 Successioni e serie nel piano complesso

Il punto di partenza è completamente analogo a quello della sezione 2.1: la successione di numeri complessi  $s_1, s_2, s_3, \dots$  converge al numero  $s$  se per ogni dato  $\epsilon$  positivo, comunque piccolo, esiste un intero  $N$  tale che  $|s - s_n| < \epsilon$ ; la sola differenza con il caso reale è che adesso il modulo<sup>6</sup> va inteso nel senso del modulo dei numeri complessi. Come nel caso reale, siamo interessati ad una serie di numeri complessi  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  e quindi alla convergenza della successione delle somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Poiché i numeri complessi sono rappresentati da punti del piano, visualizziamo la successione come in figura 2.9. La figura mostra che è tutto molto più semplice di quel che sembra: tutto quel che si intende con la nozione di convergenza di una successione è che una volta che si raggiunge un certo punto  $s_N$  della successione, tutti i punti successivi stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio  $\epsilon$  con centro in  $s$ .

Il criterio di Cauchy si estende al piano complesso e anch'esso ha un semplice giustificazione geometrica. Si veda la figura 2.10: se  $n > m > N$ , allora entrambi  $s_n$  e  $s_m$  stanno dentro al disco e conseguentemente la distanza tra loro deve essere inferiore al diametro del disco:

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n| = |s_n - s_m| < 2\epsilon \tag{2.7}$$

Viceversa, si può dimostrare (esercizio) che se vale l'equazione equazione (2.7), allora  $\{s_n\}$  converge. Abbiamo così ritrovato il criterio di Cauchy che può essere così riformulato: *la serie complessa  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge se e solo se esiste un  $N$  tale che vale la disuguaglianza (2.7) (per  $\epsilon$  arbitrariamente piccolo) ogni qual volta  $m$  e  $n$  sono maggiori di  $N$ .*

### 2.6 La nozione di serie assolutamente convergente

La serie complessa

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

è detta *assolutamente convergente* se la serie reale

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

<sup>6</sup> Nel linguaggio della sezione 2.4, il modulo coincide con la norma di  $\mathbb{R}^2$ :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$  e questa induce nel piano l'usuale distanza tra punti.

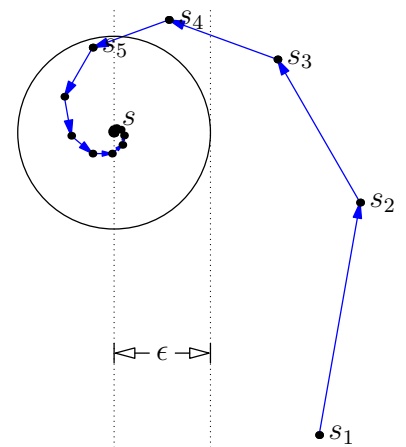


Figura 2.9: Significato geometrico della convergenza di una successione di numeri complessi.

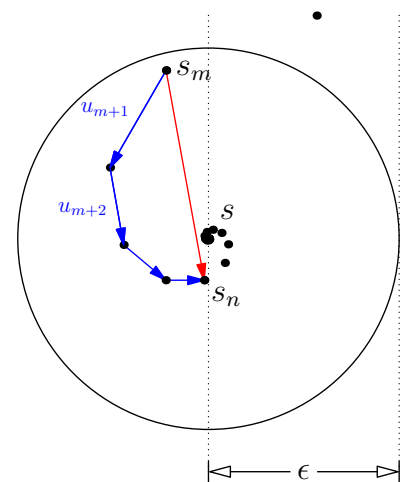


Figura 2.10: Significato geometrico del criterio di Cauchy.

è convergente. La convergenza assoluta è certamente differente dalla convergenza ordinaria. Per esempio, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

è convergente, ma non è assolutamente convergente (perché?). In effetti il requisito di assoluta convergenza è più forte della semplice convergenza. Si ha infatti:

Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente.	(2.8)
--	-------

Per stabilire la proposizione (2.8), supponiamo che

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sia assolutamente convergente, il che significa che

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

è convergente. Denotiamo con  $\tilde{s}_n$  le somme parziali di  $\tilde{s}$ . Se  $\tilde{s}$  è convergente, allora, per il criterio di Cauchy, vuol dire che per valori sufficientemente grandi di  $m$  e  $n$ , possiamo rendere  $|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$  piccolo quanto vogliamo. Ma, riferendoci alla figura 2.10, vediamo che

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_n|$$

è la lunghezza totale del viaggio da  $s_m$  a  $s_n$  che passa per i punti  $s_{m+1}$ ,  $s_{m+2}$  e così via. Poiché  $|s_n - s_m|$  è la lunghezza del viaggio più breve da  $s_m$  a  $s_n$ ,

$$|s_n - s_m| \leq |\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$$

Quindi  $|s_n - s_m|$  deve diventare arbitrariamente piccolo per  $m$  e  $n$  sufficientemente grandi. Fine della dimostrazione.

## 2.7 Serie di potenze nel piano complesso

Dalle nozioni di successione e serie si passa a quelle di *successione di funzioni* e di *serie di funzioni* semplicemente permettendo che i termini delle successioni e delle serie dipendano da una variabile che varia in un certo dominio. Per esempio, se facciamo dipendere i termini  $u_k$  da una variabile reale, cioè se abbiamo  $u_k = u_k(x)$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$  potrà convergere per alcuni valori di  $x$  e non per altri. Il problema interessante è dunque quello di determinare per quali valori di  $x$  la serie converge.

Abbiamo già incontrato questo problema nell'ESEMPIO 2.1 e nella sezione 2.3. In generale, si avrà che sull'insieme dei valori  $x$  in cui la serie converge risulta associata una funzione  $f(x)$  che è la somma della serie.

Adesso ci vogliamo occupare del caso in cui i termini  $u_k$  dipendono da una variabile complessa  $z$  e siano pure a valori complessi. In particolare, ci vogliamo occupare del caso più semplice di dipendenza:  $u_k(z) = c_k z^k$ , dove  $c_k$  sono costanti complesse. In questo modo, si arriva alla nozione di serie complessa di potenze  $P(z)$  (centrata nell'origine):

$$s \equiv P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

dove  $c_k$  sono costanti complesse e  $z$  è una variabile complessa. Le somme parziali di questa serie sono polinomi ordinari,

$$s_n \equiv P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n,$$

Fissato il punto  $z$ , ad esempio  $z = a$ , per la convergenza della serie in  $a$  (convergenza puntuale) vale ovviamente quanto visto in precedenza per successioni e serie nel piano complesso.

Vogliamo stabilire l'importante risultato:

Se  $P(z)$  converge in  $z = a$ , allora converge dappertutto dentro al disco  $|z| < |a|$ .

(2.9)

Per stabilire questo, dimostreremo che  $P(z)$  è assolutamente convergente dentro al disco  $|z| < |a|$ , cioè che la serie reale

$$\tilde{P}(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| = |c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + |c_3 z^3| + \dots$$

è convergente. Se mostreremo questo, la proposizione (2.9) risulterà dimostrata in virtù della (2.8).

Per la dimostrazione della proposizione (2.9), faremo riferimento alla figura 2.11 e denoteremo con  $\tilde{P}_n(z)$  l' $n$ -esima somma parziale di  $\tilde{P}(z)$ .

Per dimostrare la convergenza di  $\tilde{P}(z)$  per  $|z| < |a|$ , in primo luogo si osservi che se  $P(a)$  converge, allora la lunghezza  $|c_n a^n|$  di ciascun termine della serie deve andare a zero quando  $n$  va all'infinito (perché? si riveda quanto visto per il caso reale). In particolare, deve esistere un numero  $M$  tale che  $|c_n a^n| < M$  per tutti gli  $n$ . Se  $|z| < |a|$ , allora  $\rho \equiv |z|/|a| < 1$  e di conseguenza  $|c_n z^n| < M \rho^n$ . Perciò, per  $n > m > N$ ,

$$\tilde{P}_n(z) - \tilde{P}_m(z) \leq \frac{M}{1 - \rho} [\rho^{m+1} - \rho^{n+1}], \tag{2.10}$$

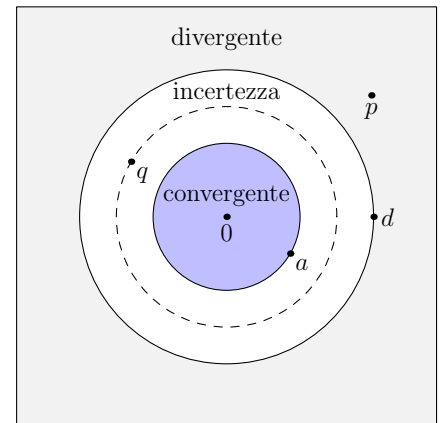


Figura 2.11: Convergenza e divergenza di una serie di potenze.

<sup>7</sup> Infatti,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(z) - \tilde{P}_m(z) &\leq M(\rho^{m+1} + \rho^{m+2} + \dots + \rho^n) \\ &= M\rho^{m+1} (1 + \rho + \dots + \rho^{n-(m+1)}) \\ &= M\rho^{m+1} \left( \frac{1}{1 - \rho} - \frac{\rho^{n-m}}{1 - \rho} \right) \\ &= \frac{M}{1 - \rho} [\rho^{m+1} - \rho^{n+1}]. \end{aligned}$$

dove l'ultimo membro può essere reso piccolo quanto si vuole per  $n$  e  $m$  sufficientemente grandi. Fine della dimostrazione della (2.9).

Se  $P(z)$  non converge ovunque nel piano, ci deve essere almeno un punto  $d$  dove diverge. Si supponga che  $P(z)$  converga in un punto  $p$  più lontano dall'origine di  $d$ . Si veda la figura 2.11. Allora, per l'equazione (2.9),  $P(z)$  convergerebbe dappertutto dentro al disco  $|z| < |p|$  e, in particolare, convergerebbe in  $d$ , contraddicendo l'ipotesi. Risulta così stabilita la proposizione:

*Se  $P(z)$  diverge in  $z = d$ , allora diverge dappertutto fuori dal cerchio  $|z| = |d|$ .*

(2.11)

A questo punto abbiamo risposto alla domanda sulla convergenza, eccetto nell'anello bianco tra i due cerchi centrati nell'origine, il cerchio passante per  $a$  e quello passante per  $d$ . Si veda la figura 2.11. Supponiamo adesso di prendere un punto  $q$  a metà strada in questo anello, cioè il cerchio  $|z| = (|a| + |d|)/2$ , e di verificare se in questo punto la serie converge. Qualunque sia la risposta, le (2.9) e (2.11) ci permettono di ridurre l'anello di "incertezza". Per esempio, se  $P(q)$  è convergente, allora  $P(z)$  è convergente per  $|z| < |q|$  e il nuovo anello di incertezza diventa  $|q| \leq |z| \leq |d|$ . Ripetendo questa procedura nel nuovo anello, dimezzeremo nuovamente lo spessore dell'anello di incertezza. Continuando in questo modo, l'anello di incertezza si restringerà ad un cerchio definito di raggio  $R$  (chiamato il *cerchio di convergenza*) tale che  $P(z)$  converge dappertutto dentro a questo cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio. Si veda la figura 2.12. Il raggio  $R$  è chiamato *raggio di convergenza* e l'interno del cerchio è chiamato *disco di convergenza*.

Si osservi che questo argomento non ci dice nulla riguardo alla convergenza di  $P(z)$  sul cerchio di convergenza. In linea di principio, tutto può accadere: divergenza, convergenza oppure convergenza in alcuni punti del cerchio di convergenza e divergenza negli altri. Al riguardo, si veda il problema 2.2.

TUTTI I RISULTATI PRECEDENTI si generalizzano banalmente a serie di potenze centrate in un arbitrario punto  $u$  del piano complesso, vale a dire a serie della forma  $P(z) = \sum c_k(z - u)^k$ . Dunque:

*Data una serie complessa di potenze  $P(z)$  centrata in  $u$ , esiste un cerchio  $|z - u| = R$ , con centro in  $u$ , tale che  $P(z)$  converge (assolutamente) dappertutto dentro al cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio.*

(2.12)

Questo teorema è dovuto a Niels Abel.

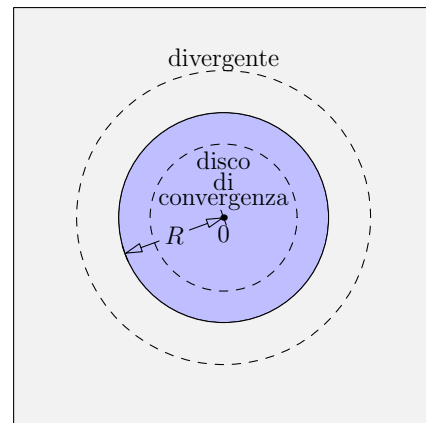


Figura 2.12: Disco e raggio di convergenza di una serie di potenze.



Niels Abel (1802–1829) è stato un matematico norvegese. Indipendentemente da Galois, sviluppò la teoria di gruppi e dimostrò l'impossibilità di risolvere una generica equazione di quinto grado con un algoritmo algebrico. (In un capitolo successivo ci occuperemo del metodo di Abel per regolarizzare somme e integrali divergenti.)

2.8 Che cosa succede sul cerchio di convergenza\*

Mediante cambiamento di scala globale  $z \mapsto z/R$ , senza perdita di generalità, possiamo assumere che il disco di convergenza sia il disco unitario  $\mathbb{D}$  e il cerchio di convergenza sia il cerchio unitario  $\mathbb{T}$ . Posto  $z = e^{i\theta}$ , quest'ultimo è identificato in modo naturale con l'intervallo  $(-\pi, \pi]$ . Per  $z = e^{i\theta}$ , una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

diventa una serie a valori complessi nella variabile reale  $\theta \in (-\pi, \pi]$ ,

$$w(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} = u(\theta) + iv(\theta).$$

Si osservi che (qui e in generale) la convergenza della serie complessa è equivalente alla convergenza delle sue parti reale e immaginari  $u$  e  $v$ .

Ora,

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n e^{in\theta} + \bar{c}_n e^{-in\theta}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \bar{c}_n (\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{c_n + \bar{c}_n}{2} \right) \cos n\theta + \left( \frac{\bar{c}_n - c_n}{2i} \right) \sin n\theta \right] \end{aligned}$$

quindi

$$u(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \tag{2.13}$$

dove

$$a_n = \frac{c_n + \bar{c}_n}{2}, \dots, \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{c_n - \bar{c}_n}{2i}, \dots \tag{2.14}$$

Analogamente, si trova

$$v(\theta) = -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta]. \tag{2.15}$$

La serie a secondo membro della (2.13) è detta *serie di Fourier*.<sup>8</sup> Lo studio delle serie di potenze su  $\mathbb{T}$  diventa dunque lo studio delle serie di Fourier nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$ , di cui ci occuperemo nel capitolo 16.

LA CONVERGENZA delle serie di potenze sul cerchio di convergenza è un problema di grande interesse, specialmente in vista dello studio

\*Questa sezione può essere omessa senza pregiudicare la comprensione dei capitoli successivi.



Joseph Fourier (1768–1830) è stato un matematico e fisico francese noto per aver introdotto nel 1807 le serie e gli integrali che prendono il suo nome ed averli applicati a problemi di conduzione del calore e ai sistemi vibranti. Da grandi matematici del tempo, il suo lavoro fu inizialmente giudicato poco rigoroso e carente di giustificazioni.

<sup>8</sup> Naturalmente, anche la (2.15) è una serie di Fourier.

delle serie di Fourier. Alla fine della sezione 2.7 abbiamo detto che sul cerchio di convergenza la serie può convergere o divergere dappertutto o in alcuni punti convergere e in altri divergere. Una domanda legittima (!) è chiedersi se esistano dei criteri che permettano di valutare la convergenza di  $P(z)$  per  $|z| = 1$ .<sup>9</sup> In S.2.2 è stato dimostrato che la serie

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots \quad (2.16)$$

converge ovunque sul cerchio  $|z| = 1$ , fatta eccezione per il punto  $z = 1$ . Dalla dimostrazione in S.2.2, ci si può rendere conto facilmente che la forma esplicita dei coefficienti  $c_n = 1/n$  non gioca alcun ruolo in quella dimostrazione, conta soltanto il fatto che  $c_n \rightarrow 0$  (per potere applicare il criterio di Cauchy). Risulta così dimostrato il teorema generale:<sup>10</sup>

<p><i>Sia <math>\sum c_n z^n</math> una serie di potenze che converge nel disco unitario <math>\mathbb{D}</math>. Se <math>c_n \rightarrow 0</math> per <math>n \rightarrow \infty</math>, allora la serie converge per <math> z  = 1</math>, <math>z \neq 1</math>.</i></p>	(2.17)
--	--------

Anche questo teorema, come il teorema 2.12, è dovuto a Abel.

<sup>9</sup> Si raccomanda caldamente di svolgere il problema 2.2 [domanda (ii)], e leggere la soluzione completa in S.2.2.

<sup>10</sup> Si osservi che il teorema NON afferma che la serie diverge in  $z = 1$ . Per  $z = 1$  il criterio semplicemente non si applica (questo è chiaro dalla dimostrazione in S.2.2). La convergenza per  $z = 1$  va dunque stabilita con altri metodi.

2.9 PROBLEMI

PROBLEMA 2.1. □ Utilizzando i metodi dell'analisi complessa trovare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie della funzione

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

nell'intorno del numero reale  $u$ , dove  $-1 < u < 1$ .

PROBLEMA 2.2. □ Mostrare che ciascuna delle seguenti serie ha il cerchio unitario come disco di convergenza,

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Investigare quindi la convergenza delle serie sul disco  $|z| = 1$ .

PROBLEMA 2.3. □ Si consideri la serie geometrica

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

che converge a

$$\frac{1}{1-z}$$

dentro il disco unitario. I polinomi approssimanti in questo caso sono

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^m z^j$$

(a) Mostrare che l'errore  $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$  è dato da

$$E_m(z) = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(b) Se  $z$  è un punto qualunque dentro il disco di convergenza, che cosa accade all'errore quando  $m \rightarrow \infty$ ?

(c) Se fissiamo  $m$ , che cosa succede all'errore quando  $z$  si avvicina al bordo  $|z| = 1$ ?

(d) Supponiamo di volere approssimare questa serie nel disco  $|z| \leq 0.9$  e supponiamo inoltre che l'errore massimo che vogliamo tollerare è  $\epsilon = 0.01$ . Trovare il polinomio  $P_m(z)$  di grado più basso che approssima  $P(z)$  in tutto il disco con la precisione desiderata.

PROBLEMA 2.4. □ Data una funzione reale  $f(\theta)$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ , la regola di calcolo esplicita per determinare i coefficienti della sua serie di Fourier

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \quad (2.18)$$

è

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Ottenere questa regola (formalmente, cioè senza preoccuparsi di questioni di scambio di integrali con serie).

*Aiuto:* Per prima cosa verificate che  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta$  si annulla, e che anche  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta$  e  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta$  e si annullano, a meno che non sia  $m = n$ .

## 2.10 COMPLEMENTI

### 2.10.1 Geometria delle serie di potenze

Una serie di numeri complessi, per quanto infinita, è pur sempre una somma di vettori nel piano. È dunque utile farsene una rappresentazione geometrica, nello stesso spirito con cui Feynman, nel capitolo 30 del volume 1 delle sue ‘Lectures on Physics’, determina la diffrazione di una grata sommando geometricamente  $n$  sorgenti con stessa differenza di fase tra termini successivi, e stessa intensità.

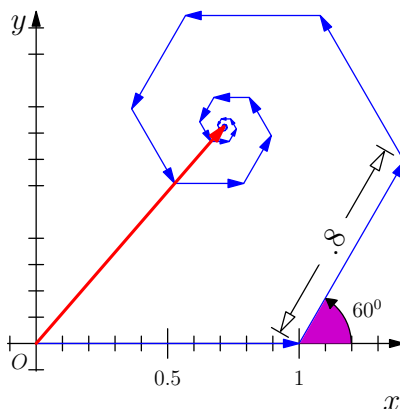
Siamo interessati al caso in cui  $n$  diventa infinitamente grande, e quindi al caso in cui la lunghezza dei vettori (= modulo = norma) varia, in particolare, diventa sempre più piccola man mano che  $n$  aumenta. Come nel caso della diffrazione di una grata, consideriamo il caso più semplice di serie con stessa differenza di fase tra termini successivi, cioè la serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

La studieremo graficamente con un programma di grafica vettoriale (Asymptote), usando il seguente codice elementare:

```
pair O= (0,0); //origine nel piano complesso
pair z = r* dir(theta); // r e theta sono rispettivamente modulo e angolo di z
int m ; // numero di iterazioni (m-esima somma parziale della serie)
pair [ ] s= new pair[m];
s[0] = (1,0);
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
s[n] = s[n-1] + z^n ;
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
draw(s[n-1]--s[n], Arrow);
```

Incominciamo con un vettore dentro il disco unitario. Abbiamo scelto  $r = 0.8$  e  $\theta = 60^\circ$ . Ecco la figura che si ottiene

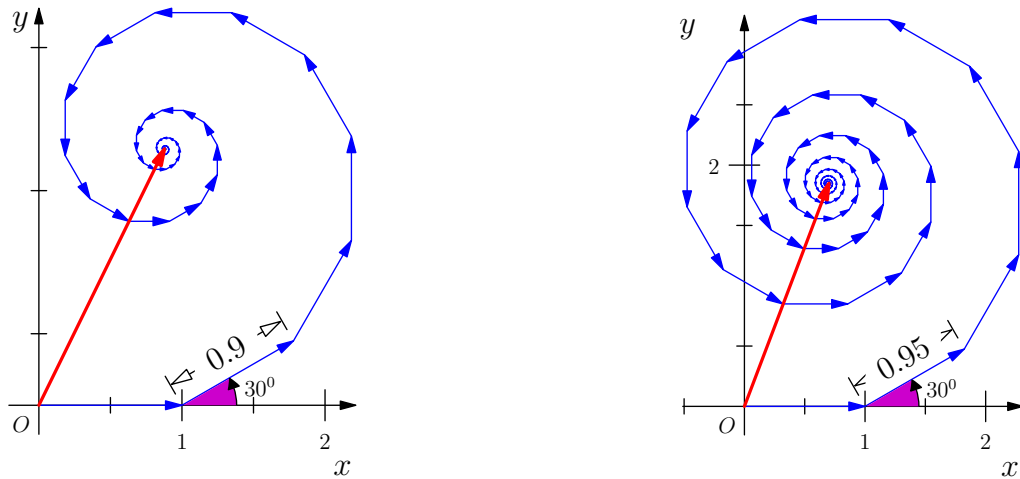


Il primo vettore della serie è  $1$ , il secondo è  $z$ . In figura ne abbiamo indicato la lunghezza. Il vettore in rosso denota la somma dei vettori (solita regola del parallelogramma). Facendo variare  $m$  si vede che il risultato numerico si stabilizza attorno alla somma

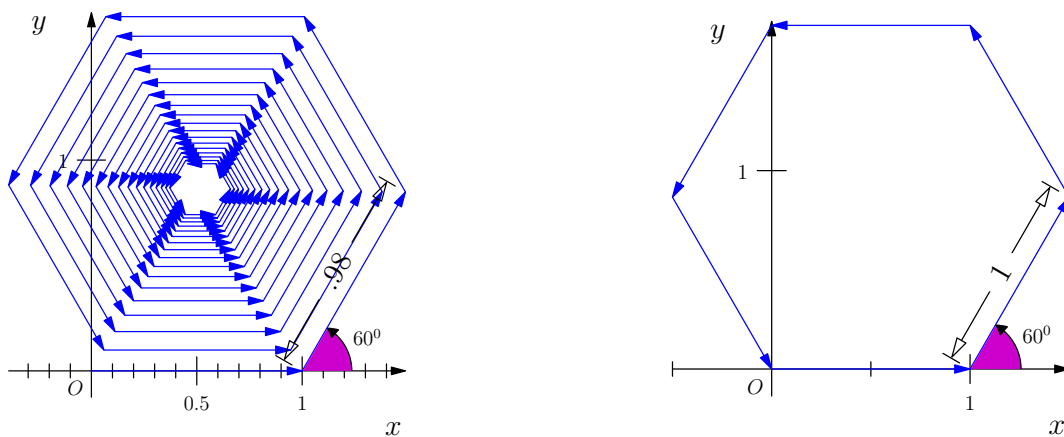
$$\frac{1}{1 - 0.8\angle(60^\circ)}$$



Adesso facciamo avvicinare  $z$  al bordo del disco. Ecco i risultati per  $r = 0.9$  (figura a sinistra) e  $r = 0.95$  (e  $\theta = 30^\circ$ ):

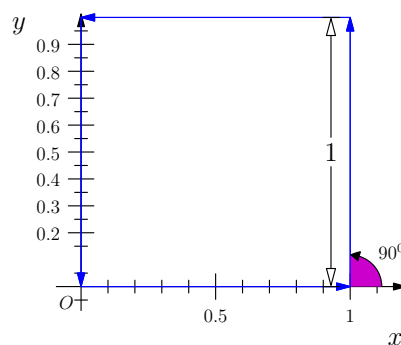
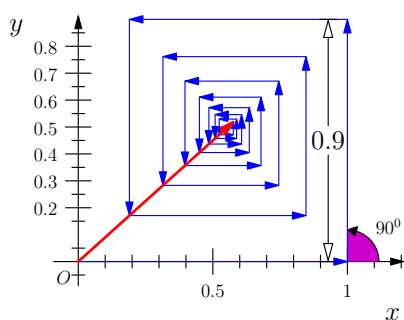


Com'era da aspettarsi, la convergenza per  $r = 0.95$  è molto più lenta. Adesso mettiamo a confronto  $z$  vicinissimo al cerchio unitario e  $z$  sul cerchio per  $\theta = 60^\circ$ :

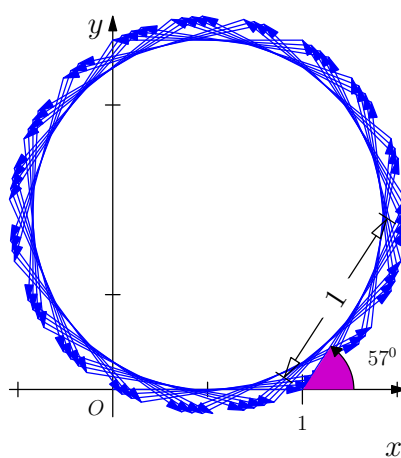
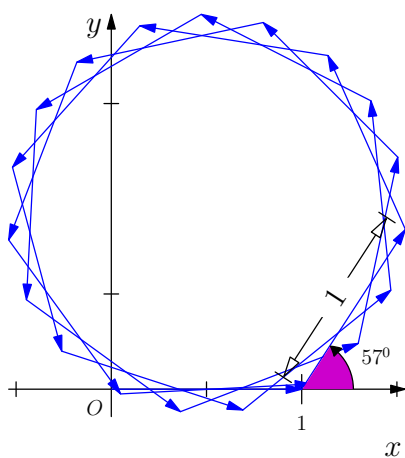


Nel primo caso ( $r = 0.98$ , a sinistra) la convergenza è lentissima:  $m = 100$ , ma la serie non si è ancora stabilizzata (potete indovinare dove finirà?). La figura a destra mostra che per  $z = 1$  non ci potrà mai essere convergenza: l'“orbita” della serie è periodica e l'esagono regolare è percorso indefinitamente all'aumentare di  $m$ , senza che mai ci sia stabilizzazione della somma. Ecco un altro esempio dello stesso

tipo, per  $\theta = 90^\circ$ :

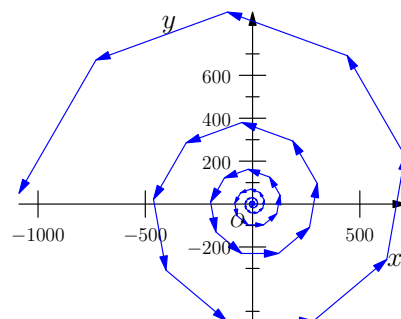
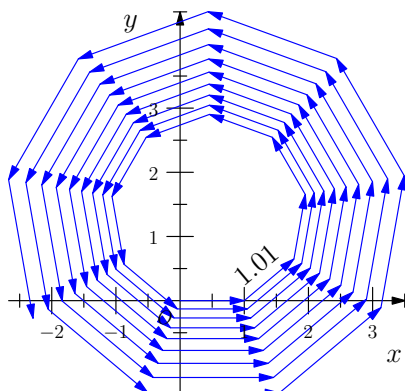


Il fatto che quando  $z$  è sul cerchio, compaia un poligono regolare non è generico: è solo dovuto al fatto che 60 e 90 sono divisori interi di 360. Per una diversa scelta dell'angolo, l'orbita cessa d'essere periodica. Ecco i risultati per  $\theta = 57^\circ$ : nella figura a sinistra,  $m = 20$ , in quella a destra,  $m = 80$ :



La figura a destra mostra che al crescere di  $m$  l'orbita copre uniformemente un anello circolare (si potrebbe dimostrare che lo copre densamente, ma questo esula dai nostri scopi). Quindi non ci può essere convergenza.

Infine, appena  $z$  esce dal disco, la serie tende all'infinito. Ecco due casi: per  $r = 1.01$  e  $r = 1.1$  ( $\theta = 40^\circ$  in entrambi i casi):



### 2.10.2 Regolarizzazione di Abel

Abel inventò anche un metodo per regolarizzare serie divergenti sul cerchio  $\mathbb{T}$ . Introdusse quella che oggi è nota come sommabilità o regolarizzazione di Abel,

$$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} \equiv \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

In altre parole, il valore di Abel della serie sul cerchio unitario nel punto  $\theta$  è quello ottenuto come limite  $r \rightarrow 1$ , lungo la direzione  $\theta$ , della serie dentro al disco. La sommabilità secondo Abel è molto liberale e rende finite somme che sarebbero altrimenti infinite come limite delle somme parziali. Ad esempio, per la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  si ha

$$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Valgono i seguenti teoremi:

- Se una serie è sommabile nel senso usuale, allora è sommabile secondo Abel.
- Se una serie è sommabile secondo Abel, allora è sommabile secondo Cesaro (ma non necessariamente viceversa).

Il metodo di Abel si applica non solo alle serie, ma anche agli integrali divergenti. La regolarizzazione di Abel per gli integrali è

$$A\text{-}\int f(x) dx \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \int e^{\lambda x} f(x) dx$$

In fisica, il metodo di Abel per regolarizzare serie e integrali è più usato di quello di Cesaro — forse perché la sommabilità secondo Abel è ancora più liberale di quella secondo Cesaro.



## 3

# Convergenza uniforme e serie di potenze

### 3.1 Convergenza uniforme

Nella lezione precedente abbiamo visto che quando il termini  $u_k$  di una serie non è costante, ma è funzione di una variabile  $z$  (reale o complessa), si ha una *serie di funzioni*  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ . Ci siamo poi occupati delle serie di potenze e abbiamo stabilito l'importante risultato di Abel.

Per studiare la natura delle funzioni  $s(z)$  definite mediante serie di altre funzioni  $u_k(z)$  va precisata e approfondita la nozione di *convergenza uniforme*. Scopo del problema 2.3 era proprio quello di rendere familiare questa nozione in un caso molto semplice. Se lo avete svolto, sapete già (quasi) tutto quello che c'è da sapere al riguardo.

Ripartiamo comunque (quasi) da zero. Abbiamo visto che per una serie a termini costanti la condizione di convergenza è espressa dall'annullarsi, nel limite, dell'errore,

$$E_n = |s - s_n| \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

il che equivale a dire che, dopo un certo  $s_n$ , tutti i punti successivi della successione stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio  $\epsilon$  con centro in  $s$ , cioè

$$|s - s_n| < \epsilon$$

(si veda la figura 2.9). Quando i termini della serie sono funzioni di  $z$ , per ciascun valore di  $z$  deve essere ancora valida la (3.1). In altre parole, fissato un punto  $z = z_0$ , la serie converge al valore  $s_0 = s(z_0)$  quando, fissato  $\epsilon > 0$ , esiste un intero  $N_0$  tale che

$$E_n(z_0) = |s(z_0) - s_n(z_0)| < \epsilon$$

Per un altro valore  $z_1$  di  $z$ , per cui la serie converga al valore  $s_1 = s(z_1)$ , varrà ancora la stessa proposizione, ma, in generale, restando  $\epsilon$  lo stesso di prima, essa sarà valida a partire da un altro valore  $N_1 \neq N_0$ . In questo caso, si parla di *convergenza puntuale* della serie.

Considerando ora tutti i possibili valori di  $z$  per cui la serie converge, ci si può domandare se ve ne è uno tra essi in cui il numero  $N$  ha un valore massimo  $N^*$ ? Se così fosse  $N^*$  potrebbe essere sostituito a tutti gli altri numeri  $N_0, N_1, N_2, \dots$ , trovati per gli altri valori di  $z$ , e affermare che, per qualunque valore di  $z$  per cui la serie converge, dato  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere, la disuguaglianza  $E_n(z) < \epsilon$  è soddisfatta a partire da un valore  $N^*$ , *indipendentemente dal valore di  $z$* .

Quando questa situazione si verifica, si parla di *convergenza uniforme* della serie e la serie è detta *uniformemente convergente*. Intuitivamente, la convergenza uniforme corrisponde ad una velocità di convergenza uniforme in tutti i punti in cui la serie converge (passato un certo  $N^*$ , la velocità ha lo stesso valore costante per tutti i punti). La nozione di convergenza uniforme è più forte della convergenza puntuale, come illustrato dal seguente esempio.

**ESEMPIO 3.1** (Serie convergente puntualmente ma non uniformemente). Consideriamo la serie reale (non di potenze!)

$$f(x) = x + x(x-1) + x^2(x-1) + \dots + x^n(x-1) + \dots$$

nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ . La sua somma parziale  $n$ -esima è

$$s_n = x + x(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1}) = x + x(x-1)\frac{1-x^n}{1-x} = x^n$$

(Si veda l'esempio 2.1.) Pertanto, la serie converge a 0, per  $0 \leq x < 1$ , mentre per  $x = 1$  la serie si riduce al primo termine e vale 1, cioè, nell'intervallo  $[0, 1]$  la serie converge alla funzione (discontinua)

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Consideriamo adesso le prime 5 somme parziali  $s_n$  della serie; si veda la figura 3.1. Le curve rappresentano anche i primi cinque errori, in quanto  $E_n = |s - s_n| = x^n$ . Fissiamo a piacere un numero  $\epsilon$ , diciamo 0.3. Allora, come mostrato in figura, per  $x = 0.5$ , tutti gli errori, dal secondo in poi, sono minori di 0.3, quindi  $N = 2$ . Ma per  $x = 0.75$ , soltanto gli errori successivi al quinto sono minori di 0.3 e quindi  $N = 5$ . Quanto più  $x$  si avvicina a 1, tanto più grande diventa  $N$ . Si vede che non esiste alcun  $N^*$  massimo: infatti, se vi fosse, dovrebbe essere  $E_{N^*} = x^{N^*} < \epsilon$  per qualunque valore di  $x$  compreso tra 0 e 1, cioè  $x < \epsilon^{1/N^*}$ . Ma, per quanto grande si prenda  $N^*$ , esisteranno sempre dei valori di  $x$  compresi tra  $\epsilon^{1/N^*}$  e 1.

Conclusione: la serie *non è uniformemente convergente* in  $[0, 1]$  (pur essendo ivi convergente puntualmente alla funzione  $s(x)$ ).

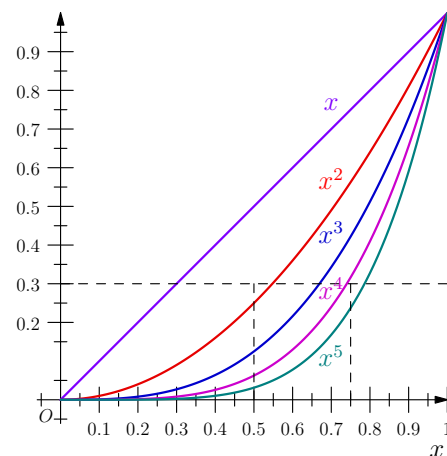


Figura 3.1: Le prime 5 somme parziali della serie che coincidono con i primi cinque errori.

### 3.2 Criterio di convergenza uniforme

Una serie di funzioni è uniformemente convergente in una regione del piano complesso se la serie formata con i moduli dei suoi termini è, in qualunque punto della regione, maggiorata da una serie convergente a termini costanti.

Se infatti la serie maggiorante è  $\sum M_n$  con errore  $E_n^0$  dalla somma  $M = \sum M_n$ , e la serie di funzioni è  $\sum u_k(z)$  con errore  $E_n(z)$  dalla sua somma  $s(z)$ , si ha

$$E_n(z) < E_n^0.$$

Ma, prefissato un  $\epsilon$  piccolo a piacere, esiste un  $N^*$  a partire dal quale  $E_n^0 < \epsilon$ , e quindi a partire da tale  $N^*$  (costante), si ha anche

$$E_n(z) < \epsilon.$$

Dunque, la serie è uniformemente convergente.

La condizione è sufficiente, ma non necessaria, ed è nota come *Criterio M* di Weierstrass.

### 3.3 Approssimare una serie di potenze con un polinomio

Implicito nella nozione di convergenza è un fatto semplice ma importante che val la pena di ripetere: se la serie converge in un punto, allora in quel punto può essere approssimata dalla somma parziale  $m$ -esima e, scegliendo un valore grande di  $m$ , possiamo rendere l'approssimazione tanto accurata quanto vogliamo. Restringiamo adesso la nostra attenzione alle serie di potenze e utilizziamo le notazioni introdotte nella sezione 2.7. Combinando l'osservazione precedente con il teorema (2.12), si perviene alla morale del problema 2.3 per una generica serie di potenze:

*In ogni punto  $z$  nel disco di convergenza, la serie di potenze  $P(z)$  può essere approssimata con una precisione arbitrariamente elevata da un polinomio  $P_m(z)$  di grado sufficientemente elevato.* (3.2)

Per semplicità, consideriamo il caso in cui

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

è centrata nell'origine. L'errore

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)|$$

è la distanza tra la risposta esatta e l'approssimazione. Per un valore fissato di  $m$ , l'errore varierà quando  $z$  si muove nel disco di convergenza. Chiaramente, poiché  $E_m(0) = 0$ , l'errore sarà estremamente

piccolo quando  $z$  è vicino all'origine, ma che cosa accade quando  $z$  si avvicina al cerchio di convergenza? La risposta dipende dalla particolare serie di potenze considerata, ma può accadere che l'errore diventi enorme; si veda il problema 2.3. Questo non contraddice quanto detto poc'anzi. Infatti, per ogni  $z$  fissato nel disco di convergenza, non importa quanto vicino al cerchio di convergenza, l'errore  $E_m(z)$  diventa sempre arbitrariamente piccolo quando  $m$  tende all'infinito.

Supponiamo adesso di restringere  $z$  al disco  $|z| \leq r$ , dove  $r < R$ . In questo disco, risulta che l'errore può essere controllato in modo uniforme per tutti i punti. (Per apprezzare quanto segue, è utile aver svolto e digerito il problema 2.2.) Infatti,

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |c_{m+1}z^{m+1} + c_{m+2}z^{m+2} + \dots| \leq |c_{m+1}z^{m+1}| + |c_{m+2}z^{m+2}| + \dots$$

Da cui

$$E_m(z) \leq |c_{m+1}|r^{m+1} + |c_{m+2}|r^{m+2} + \dots \equiv e(m, r)$$

Ma, per ogni  $\epsilon$ , si può trovare un  $m$ , tale che  $e(m, r) < \epsilon$ . Perciò, a partire da tale  $m$ , si avrà  $E_n(z) < \epsilon$ , per tutti gli  $n \geq m$ . Il che significa che nel disco  $|z| \leq r$  la serie è uniformemente convergente. Risulta quindi stabilito il seguente teorema:

Se la serie di potenze  $P(z)$  (centrata nell'origine) ha disco di convergenza  $|z| < R$ , allora  $P(z)$  è uniformemente convergente nel disco chiuso  $|z| \leq r$ , dove  $r < R$ . (3.3)

### 3.4 Unicità delle serie di potenze

Se una funzione complessa può essere espressa come serie di potenze, allora la serie è unica: non possono esserci due serie distinte che esprimano la stessa funzione. Vale infatti il seguente teorema:

Se due serie di potenze, centrate in zero, concordano (a) in un intorno (comunque piccolo) dello zero, oppure (b) su un segmento di curva che passa per lo zero (non importa quanto piccolo) o, infine, (c) su una successione di punti che converge a zero, allora sono identiche. (3.4)

Per convincerci della (3.4), incominciamo con (a). Se

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots = d_0 + d_1z + d_2z^2 + \dots \tag{3.5}$$

in un piccolo intorno dello zero, allora ponendo  $z = 0$ , otteniamo  $c_0 = d_0$ , che quindi possiamo cancellare da entrambe le parti. Adesso

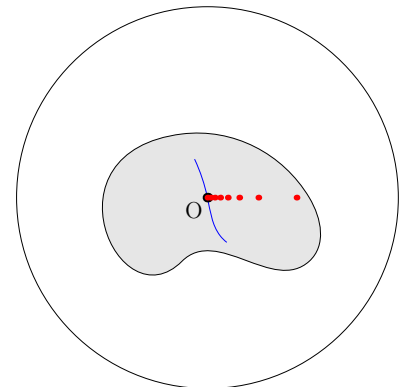


Figura 3.2: Due serie che coincidono in un intorno dello zero (regione grigia), o lungo un piccolo tratto di curva passante per lo zero (in blu) o nei punti di una successione di punti che si accumula nello zero (in rosso), coincidono ovunque.



dividiamo ambo i membri di (3.5) per  $z$  e ripetiamo la procedura, otterremo  $c_1 = c_2$ , e così via. Fine della dimostrazione della (a).<sup>1</sup>

Per quel che riguarda la (b) e la (c), il ragionamento è essenzialmente lo stesso, soltanto che invece di porre a zero entrambi i membri della (3.5), adesso occorre prendere il limite  $z \rightarrow 0$  lungo la curva o la successione di punti.

Siamo adesso in grado di rendere esplicito il senso dell'affermazione fatta a pagina 20 che  $h(z) = 1/(1+z^2)$  è la sola funzione complessa che concorda con  $H(x) = 1/(1+x^2)$  quando  $z$  è ristretto all'asse reale del piano complesso. Il senso è il seguente:  $h(z)$  è la sola funzione complessa che (i) concorda con  $H(x)$  sull'asse reale e (ii) può essere espressa come serie di potenze in  $z$ . Senza questa qualificazione, la nostra affermazione di pagina 20 sarebbe falsa (esercizio: trovare un contro-esempio).

<sup>1</sup> Contrariamente a quanto possa sembrare, la dimostrazione è rigorosa, e non utilizza alcun passaggio al limite. Per chiarire questo punto, rivediamo il ragionamento. Se le funzioni  $g(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$  e  $h(z) = d_0 + d_1z + d_2z^2 + \dots$  sono uguali in un piccolo intorno  $U$  dello zero (che include lo zero), allora sono uguali nello zero, da cui si deduce  $c_0 = d_0$  e quindi che le funzioni  $g_1(z) \equiv g(z) - c_0$  e  $h_1(z) \equiv h(z) - d_0$  sono uguali in  $U$ . Ma se queste funzioni sono uguali in  $U$ , lo sono anche le funzioni  $g_2(z) \equiv g_1(z)/z$  e  $h_2(z) \equiv h_1(z)/z$ , in particolare, essendo regolari, sono uguali nello zero, da cui segue che  $c_1 = d_1$ . E così via. Nessun passaggio al limite  $z \rightarrow 0$ .

### 3.5 Manipolazione delle serie di potenze

Il fatto che le serie di potenze possono essere approssimate con precisione arbitraria da polinomi implica che:

<p><i>Due serie di potenze con lo stesso centro possono essere sommate, moltiplicate e divise, come se fossero polinomi.</i></p>	(3.6)
--	-------

A scopo di illustrazione ecco alcuni esempi.

ESEMPIO 3.2.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

Sommando le serie dei due termini a destra, possiamo verificare la formula che

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 \dots,$$

ESEMPIO 3.3.

$$\frac{1}{1-z^2} = \left[ \frac{1}{1-z} \right] \left[ \frac{1}{1+z} \right]$$

$$\begin{aligned} & [1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots][1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots] = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots \\ & = 1 + [1 - 1]z + [1 - 1 + 1]z^2 + [1 - 1 + 1 - 1]z^3 + [1 - 1 + 1 - 1 + 1]z^4 + \dots \\ & = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots \end{aligned}$$

### 3.6 Come trovare il raggio di convergenza

Ci sono diversi modi per trovare il raggio di convergenza  $R$  di una data serie di potenze  $P(z) = \sum c_k z^k$ . Sono formalmente identici a quelli usati per le serie reali e anche le loro dimostrazioni sono molto simili, quindi non le faremo. Ecco i criteri standard:

(a) Criterio del rapporto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (\text{se il limite esiste})$$

(b) Criterio della radice

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (\text{se il limite esiste})$$

(c) Criterio di Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Se (a) fallisce, si usi (b). Se anche (b) fa cilecca, non ci resta che (c), che è per palati (matematici) fini. Tuttavia, (c) non verrà mai usato in questo corso.

CONCETTUALMENTE BEN PIÙ SODDISFACENTE è il seguente fatto:

*Se  $f(z)$  può essere espressa come una serie di potenze centrata in  $u$ , allora il raggio di convergenza  $R$  è la distanza tra  $u$  e la singolarità di  $f(z)$  più vicina a  $u$ .* (3.7)

Un caso particolare di funzioni che possono essere espresse come serie di potenze sono le *funzioni razionali*, cioè funzioni del tipo

$$f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}, \quad (3.8)$$

dove  $Q_m$  e  $P_n$  sono polinomi di grado  $m$  e  $n$  rispettivamente. Per queste funzioni, si può dimostrare la (3.7), sulla base delle risorse che entrano in gioco nella soluzione del problema 2.1.

La soluzione di questo problema parte dall'osservazione che quanto visto nella sezione 2.3 si estende a  $1/(a-z)$ , per  $z$  complesso, cioè

$$\frac{1}{a-z} = \sum_k \frac{Z^k}{(a-u)^{k+1}} \quad \text{sse } |Z| < |a-u| \quad \text{e } Z \equiv z-u \quad (3.9)$$

Poichè

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right]$$

applicando (3.9) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] Z^k \quad (3.10)$$

Ciascuna delle due serie a secondo membro deve convergere, cioè devono essere soddisfatte entrambe le condizioni

$$|z-u| < |z_1-u| \quad (3.11)$$

$$|z-u| < |z_2-u| \quad (3.12)$$

dove  $z_1 = -i$  e  $z_2 = i$  (ci teniamo generali perché vogliamo capire qual è la lezione per un polinomio quadratico qualunque).

Si osservi che  $|z-u| = r$  (reale positivo) è l'equazione di un cerchio di raggio  $r$  centrato nel punto  $u$  (nel senso della geometria analitica: il luogo dei punti  $z$  la cui distanza  $|z-u|$  da  $u$  è pari a  $r$ ).

Quindi (3.11) e (3.12) sono le equazioni dei dischi concentrici, centrati nel punto  $u$ , di raggi  $r_1 = |z_1-u|$  e  $r_2 = |z_2-u|$  rispettivamente.

Ne segue che (3.11) e (3.12) sono entrambe soddisfatte nel disco più piccolo, cioè il disco il cui raggio  $R$  è la distanza tra  $u$  e la singolarità più vicina a  $u$ . Si veda la figura 3.3. (Nel caso in cui  $u$  è sull'asse reale,  $z_1 = -i$  e  $z_2 = i$ ,  $R = \sqrt{1+u^2}$ .)

Per un polinomio quadratico  $P_2(z) = z^2 + bz + c$ , con radici  $z_1$  e  $z_2$ , si ha

$$\frac{1}{P_2(z)} = \frac{A}{z_1-z} + \frac{B}{z_2-z}.$$

Le serie geometriche dei due fratti semplici a secondo membro, devono entrambe convergere. Si perviene pertanto alle stesse conclusioni di prima, illustrate dalla figura 3.3.

Analogamente, per il teorema fondamentale dell'algebra,  $1/P_n(z)$  si riconduce alla somma di  $n$  serie geometriche, per cui converge laddove tutte le condizioni di convergenza di queste serie sono soddisfatte. Dunque, come prima, converge nei punti  $z$  che sono comuni agli  $n$  cerchi concentrici centrati in  $u$  e il suo raggio di convergenza è, come prima, la distanza tra  $u$  e la singolarità più vicina a  $u$ .

Chiaramente, la moltiplicazione di  $1/P_n(z)$  per un polinomio  $Q_m(z)$  non modifica questo fatto. Eventualmente, può cambiare  $R$ . Questo accade se  $Q_m$  è divisibile per uno o più dei fattori  $(z_i - z)$  di  $P_n$ . Fine della dimostrazione di (3.7) per funzioni del tipo (3.8).

### 3.7 La funzione esponenziale

Facciamo il punto della situazione. È banale dire che una funzione complessa associa ad un numero complesso un numero complesso. Ma un conto è parlare di funzioni in generale, altro conto è considerare casi particolari, avere cioè regole per associare ad un numero

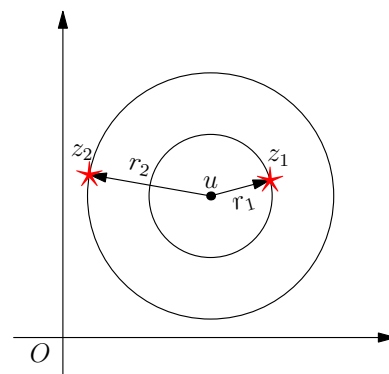


Figura 3.3:  $z_1$  e  $z_2$  sono le radici del polinomio  $P_2(z) = z^2 + bz + c$ , e quindi le singolarità (esplosioni!) della funzione  $f(z) = 1/P_2(z)$ . Il punto  $u$  è il centro di espansione.

complesso un numero complesso. Sia chiaro, stiamo parlando di regole esplicite, ad esempio istruzioni che possono essere scritte in un linguaggio di programmazione e fornite ad un calcolatore.

La cassetta degli attrezzi per costruire funzioni è quella fornita dalle regole algebriche di somma e prodotto. I materiali da costruzione con cui incominciare sono i polinomi, che sono somme di potenze intere, cioè somme di prodotti tra numeri. E questo è quello che abbiamo fatto. A partire dai polinomi, ci siamo mossi in due direzioni: (a) abbiamo considerato i rapporti tra polinomi, cioè le funzioni razionali (e per questo basta l'algebra); (b) abbiamo esteso i polinomi a serie di potenze, che sono limiti di polinomi (approssimabili con precisione arbitraria da polinomi dentro il loro disco di convergenza)<sup>2</sup> (e per questo occorre l'analisi, la cui essenza è distillata nel criterio di convergenza di Cauchy). Nella sezione precedente abbiamo poi visto il legame tra serie di potenze e funzioni razionali.

<sup>2</sup> Quindi, in un senso che non intendo qui approfondire, anche le serie di potenze si possono insegnare ad un calcolatore

Adesso vogliamo sapere se nel mondo dei complessi esiste qualcosa analogo alla funzione esponenziale del campo reale. Nel capitolo 1 abbiamo fornito due giustificazioni per la formula di Eulero, cioè per l'esponenziale di un immaginario puro. Possiamo procedere in modo analogo per un generico complesso  $z$ ? Chiaramente, la giustificazione cinematica non può funzionare, ma, come vedremo tra breve, funziona molto bene la caratterizzazione di  $e^z$  mediante serie di potenze.<sup>3</sup>

SI DEFINISCA  $e^z$  come serie:

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad (3.13)$$

allora, per la (3.4),  $e^z$  è la *sola* funzione nel piano complesso che generalizza la funzione reale  $e^x$  ai numeri complessi (è la sola funzione che coincide con l'esponenziale reale sull'asse reale). Questa è una proprietà molto importante!

Due esercizi:

**ESERCIZIO 3.1.** Dimostrare che il raggio di convergenza di  $e^z$  è infinito.

**ESERCIZIO 3.2.** Usando la 3.6, dimostrare che

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad (3.14)$$

per numeri complessi  $a$  e  $b$ .

Si osservi che dalla (3.14) segue che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

<sup>3</sup> Consideriamo il seguente ragionamento: usando le regole dell'esponenziale, so che  $e^z = e^x e^{iy}$ , ma  $e^x$  è noto dall'analisi reale e per  $e^{iy}$  uso la formula di Eulero. Quindi so che cosa è  $e^z$  e lo posso insegnare ad un calcolatore. Qual è il difetto del ragionamento? È questo:  $e^z = e^x e^{iy}$  è al più una DEFINIZIONE del primo membro in termini del secondo. Non posso dire che l'uguaglianza è conseguenza delle usuali regole dell'esponenziale, perché ancora non so che cosa si debba intendere con il simbolo  $e^z$ . Si pensi alla prima volta che ci è stato spiegato che  $\sqrt{a} = a^{1/2}$ .

LE PROPRIETÀ dell'esponenziale complesso sono rese vivide dalla figura 3.4. Si consiglia caldamente di capire la figura e le relazioni che esprime (il modo migliore per ottenere questo è di ricostruirsela da soli).

Altre due figure sono particolarmente utili per comprendere che tipo di funzione è l'esponenziale complesso, la 3.5 e la 3.6: la prima rappresenta un rettangolo nel piano  $z$ , la seconda mostra come questo rettangolo è trasformato nel piano  $w = e^z$ . I colori aiutano a capire dove finisce chi: il rosso va nel rosso, il verde nel verde e così via. Anche capire come si trasforma un movimento aiuta:

- (1) Con riferimento alle due figure a lato, immaginiamo che  $z$  parta da 1 e viaggi a velocità costante  $v$  verso l'alto con legge oraria  $z(t) = 1 + ivt$ . Allora la legge oraria di  $w$  è  $w(t) \sim e^{ivt}$ , il che vuol dire che  $w$  ruota con velocità costante  $v$  attorno all'origine. Dopo che  $z$  ha percorso una distanza di  $2\pi$ ,  $w$  ritorna alla sua posizione iniziale.
- (2) Adesso immaginiamo che  $z$  viaggi verso sinistra con velocità costante  $v$ : se parte da  $1 + ai$  ( $a$  reale), ha legge oraria  $z = 1 - vt + ia$ . Allora si avrà  $w(t) \sim e^{-vt}e^{ia}$ , vale a dire,  $w$  viaggia verso l'origine con velocità che diminuisce costantemente. Viceversa, se  $z$  viaggia verso destra con velocità costante  $s$ ,  $w$  si allontana dall'origine con una velocità in costante aumento.

Combinando (1) e (2), si vede che l'intero piano- $w$  (con l'eccezione di  $w = 0$ ) è riempito dall'immagine di una striscia orizzontale, nel piano- $z$ , di altezza  $2\pi$ . È lasciato come esercizio dimostrare che linee rette nel piano  $z$  si trasformano in spirali nel piano  $w$ .

### 3.8 Funzioni trigonometriche e iperboliche

Ci limitiamo alle definizioni (per maggiori dettagli, si vedano i problemi dedicati a queste funzioni).

SENI E COSENI:

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

equivalentemente

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{e} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

SENI E COSENI IPERBOLICI

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

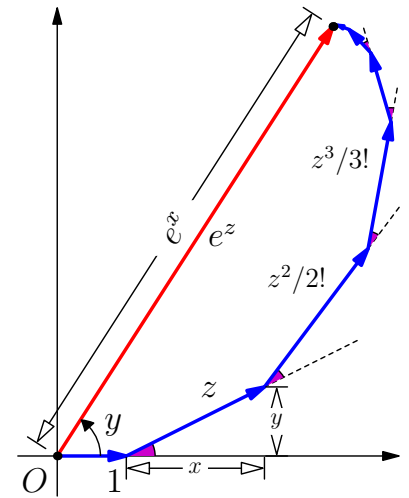


Figura 3.4: La funzione esponenziale.

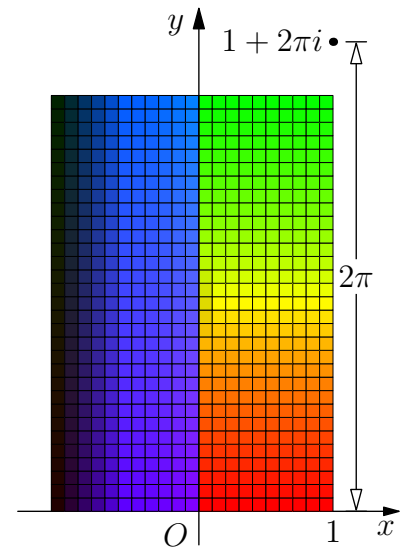


Figura 3.5: Piano  $z$ .

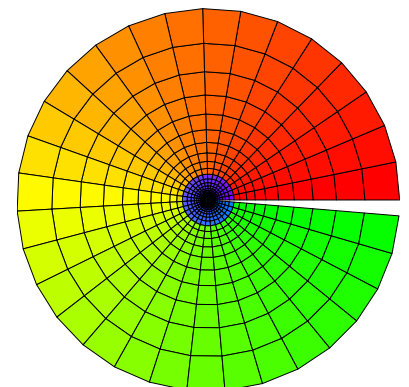


Figura 3.6: Piano  $w = e^z$ .

## 3.9 PROBLEMI

PROBLEMA 3.1. □ Dimostrare che la serie

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

converge per  $|z| < 1$  e trovarne la somma.

PROBLEMA 3.2. □ Trovare la regione di convergenza della serie (non di potenze!)

$$1 + \frac{z}{1+z} + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \dots$$

PROBLEMA 3.3. □ Si consideri la serie del problema 3.1.

- Dimostrare che la serie converge uniformemente alla somma  $z$  per  $|z| \leq 1/2$ .
- La serie converge uniformemente nel disco chiuso  $|z| \leq r$ ,  $r < 1$ ? Spiegare. Che cosa si può dire per  $r = 1$ ?

PROBLEMA 3.4. □ Si consideri la successione

$$\frac{1}{1+nz}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Dimostrare che la successione è uniformemente convergente a 0 per ogni  $z$  tale  $|z| \geq 2$ .
- Si può estendere la regione di uniforme convergenza data in (a)? Spiegare.

PROBLEMA 3.5. □ Dimostrare che la funzione somma del problema 3.1 è discontinua per  $z = 1$  e che il limite del problema 3.4 è discontinuo in  $z = 0$ .

PROBLEMA 3.6. □ Dimostrare che la funzione somma del problema 3.1 è assolutamente convergente per  $|z| < 1$ .

PROBLEMA 3.7. □ Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

converge assolutamente per  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.8. □ Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

nella regione  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.9. □ Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

nella regione  $1 < |z| < 2$ .

PROBLEMA 3.10. □ Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}$$

nella regione  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.11. □ Trovare la regione di convergenza della serie

$$\frac{1}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^2} + \frac{4z^2}{(1-z)^3} + \dots$$

PROBLEMA 3.12. □ Dare un esempio di una coppia di serie di potenze centrate nell'origine, diciamo  $P(z)$  e  $Q(z)$ , tali che il disco di convergenza del prodotto  $P(z)Q(z)$  è maggiore di ciascuno dei due dischi di convergenza di  $P(z)$  e  $Q(z)$ .

*Aiuto:* Pensare in termini di funzioni razionali (ad es.,  $z^2/(5-z^3)$ ) che, come è noto, possono essere espresse come serie di potenze.

PROBLEMA 3.13. □ Determinare il raggio di convergenza della serie binomiale complessa

$$\begin{aligned} (1+z)^n &= 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}z^4 + \dots \end{aligned}$$

dove  $n$  è un numero reale arbitrario.

## 4

# Punti di diramazione e punto all'infinito

### 4.1 Multifunzioni, punti di diramazione e rami

Una multifunzione<sup>1</sup>  $f$  (o funzione polidroma o funzione a più valori o funzione a valori negli insiemi) è una funzione che associa ad ogni elemento del suo dominio un insieme che contiene uno o più elementi. Di solito, le multifunzioni emergono come “funzioni”<sup>2</sup> inverse di funzioni che non sono iniettive. Ad esempio, nel campo reale la relazione inversa dell'elevazione al quadrato è la multifunzione “radice quadrata”,

$$f(x) \equiv x^{1/2} = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\},$$

dove, come sempre,  $\sqrt{x}$  denota l'usuale radice quadrata positiva di  $x$ . Le due determinazioni di  $f$ ,  $w_1 = \sqrt{x}$  e  $w_2 = -\sqrt{x}$ , sono dette *rami* (o *branche*) di  $f$ . Naturalmente, nel campo reale,  $f(x)$  è solo definita per valori positivi di  $x$ .

Le multifunzioni di variabile complessa presentano un carattere di continuità sconosciuto alle multifunzioni di variabile reale. L'esempio molto semplice della radice quadrata può chiarire la differenza essenziale esistente tra di esse e mostrare come solo dal punto di vista complesso, una multifunzione possa essere considerata come un tutto, anche quando, dal punto di vista reale può apparire come composta di varie parti distinti tra loro.

Nel campo reale, i due rami  $w_1 = \sqrt{x}$  e  $w_2 = -\sqrt{x}$  possono a ragione essere considerati due funzioni completamente distinte in quanto, variando con continuità  $x$  tra  $0$  e  $+\infty$ , ognuna delle due varia separatamente dall'altra e quando ci si restringe ad una di esse, per esempio  $w_1$ , l'altra non entra mai in considerazione. La funzione  $w_1 = \sqrt{x}$  è usualmente detta *ramo principale* di  $f(x)$ . Analogo discorso vale per altre multifunzioni reali, quali le potenze frazionarie  $f(x) = x^{n/m}$ , per  $n, m$  interi o l'arcotangente (figura 4.2.) In effetti, proprio perché nel campo reale è impossibile passare con continuità da un ramo all'altro di una multifunzione, la nozione stessa

<sup>1</sup> Finché il concetto non sarà chiaro, useremo il carattere speciale “ $f$ ” per denotare una multifunzione, in modo da non confonderla con una funzione. Quando tutto sarà chiaro, ritorneremo ai soliti simboli.

<sup>2</sup> Tra virgolette, perché, per definizione, una funzione associa ad un “ingresso” una e una sola “uscita”.

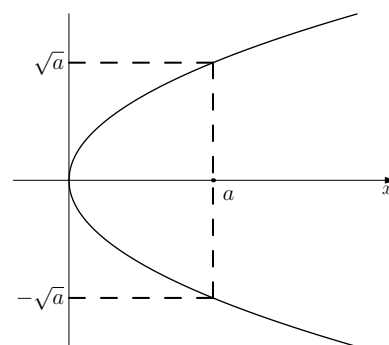


Figura 4.1: Multifunzione “radice quadrata”.

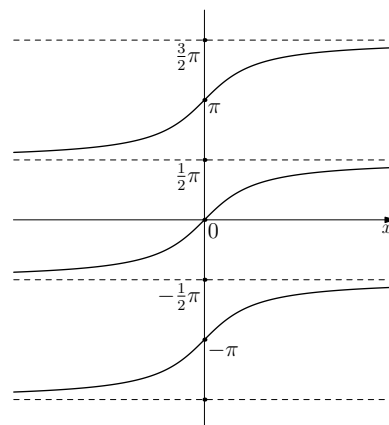


Figura 4.2: La multifunzione  $\text{arctg}(x)$  con infiniti rami. L'usuale funzione arcotangente ( $\text{arctg}(x)$ ) è il *ramo principale*, quello tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ .

di multifunzione risulta di scarsa utilità e di solito non è neanche menzionata.

Le differenze che emergono quando si passa al campo complesso sono notevoli. Innanzi tutto, nel campo reale la radice è solo definita per valori positivi di  $x$ , mentre nel campo complesso è definita ovunque (l'estensione della radice ai negativi è il marchio di fabbrica dell'algebra complessa!). Ancora più rilevante è il fatto che nel campo complesso i rami di una multifunzione "comunicano" tra loro. Spieghiamo come.

Consideriamo nel piano complesso un punto  $p$  arbitrario, ma fissato, di angolo  $\phi$  e lunghezza  $\rho$ . Le due radici di  $p$  sono

$$\sqrt{\rho}e^{i\phi/2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\rho}e^{i(\phi/2)+i\pi} = -\sqrt{\rho}e^{i\phi/2}.$$

Variando adesso  $z = re^{i\theta}$  tra tutti i complessi, si ha la multifunzione

$$f(z) \equiv z^{1/2} = \{\sqrt{r}e^{i\theta/2}, -\sqrt{r}e^{i\theta/2}\},$$

A prima vista, la situazione sembrerebbe del tutto analoga a quella reale e, come nel caso reale, sembrerebbe naturale associare a  $f(z)$  i due rami

$$w_1 = f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \text{e} \quad w_2 = f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

e poi restringersi, come nel caso reale, ad un ramo solo, il *ramo principale*  $w_1$ . Ma le cose non sono così semplici.

Scelto inizialmente il ramo  $f_1$  per il punto  $p$ , cosicché la sua immagine è  $w_1 = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2}$ , consideriamo un punto  $z = z(t)$  che si muove lungo una qualunque curva chiusa  $C$  che circonda l'origine e che parta da  $p$ . Durante il suo movimento, l'angolo del punto varia dal valore iniziale  $\phi$  al valore finale  $\phi + 2\pi$ . In conseguenza di questa variazione di fase  $\Delta\phi = 2\pi$ , quando  $z(t)$  ritorna al punto iniziale, si ha

$$w_{1 \text{ finale}} = \sqrt{\rho}e^{i[\phi+2\pi]/2} = -\sqrt{\rho}e^{i\phi/2} = w_{2 \text{ iniziale}}.$$

Il che vuol dire che un movimento continuo di punto del piano, lungo una curva chiusa che circonda l'origine, fa passare *con continuità* (!) la sua immagine da un ramo all'altro della multifunzione. Si tratta di un fenomeno che non ha nulla di analogo nel campo reale! Un po' come quando alla fine dell'800 si spiegavano le apparizioni e sparizioni improvvise dei fantasmi come salti nella quarta dimensione, qui abbiamo che ciò che appare come un salto discreto nel mondo dei reali è in realtà il frutto di un movimento continuo nel mondo più vasto dei complessi. Questo fatto è schematizzato dalla figura 4.3.

Sia chiaro, la scelta iniziale del ramo è arbitraria (come è arbitrario scegliere nel caso reale  $\sqrt{x}$  anziché  $-\sqrt{x}$  per la funzione radice): se avessimo scelto inizialmente  $w_2$ , alla fine del viaggio il punto  $z$  si

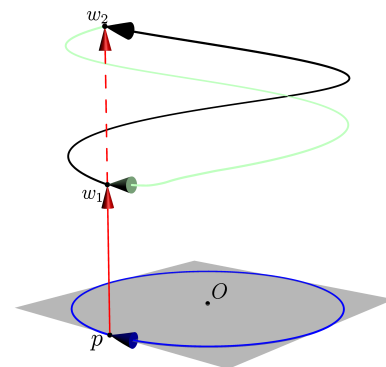


Figura 4.3: Ad un punto  $p$  del piano, una multifunzione  $\mathfrak{F}(z)$  associa due (per la radice quadrata) o più (per una multifunzione generica) punti nel piano  $w$ . In figura, quest'ultimo piano è stato rappresentato come una linea rossa (chiaramente, non è possibile disegnare un piano).  $w_1 = f_1(p)$  e  $w_2 = f_2(p)$  sono le due immagini di  $p$ . In particolare, se  $p$  è sulla retta reale positiva,  $w_1$  e  $w_2$  sono le sue due radici. Scelto inizialmente il ramo  $f_1$ , man mano che  $z$  si muove lungo una curva chiusa (in blu) che circonda l'origine, la sua immagine  $w$  si muove con continuità fino a portarsi in  $w_2 = f_2(p)$  alla fine del viaggio. Se adesso si fa compiere al punto  $z$  un altro giro, l'immagine  $w$  ritorna al suo valore iniziale  $w_1$  (linea verde).

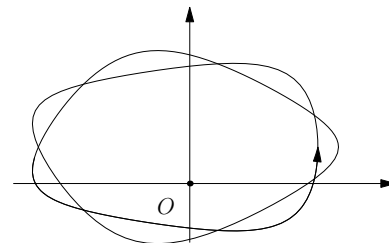


Figura 4.4: Per un doppio avvolgimento attorno all'origine  $w$  ritorna al suo valore di partenza,  $\Delta\phi = 0$ .



sarebbe ritrovato in  $w_1$ . Questo fatto è illustrato in figura 4.3: se alla fine del viaggio si fa fare al punto un altro giro intorno all'origine, l'immagine ritorna al valore di partenza (linea verde). Naturalmente non è necessario che il punto ripercorra esattamente i suoi passi: un movimento lungo una curva arbitraria che si avvolge due volte attorno all'origine fa ritornare  $w$  al suo valore iniziale (figura 4.4).

Si osservi che se la curva chiusa  $C$  non racchiude l'origine il fenomeno non si manifesta: in questo caso la variazione di fase  $\Delta\varphi$  dell'immagine è zero. Si veda la figura 4.5. Si osservi inoltre che la variazione di fase è la stessa per tutti i punti sulla curva: è quindi più informativo scrivere  $\Delta\varphi(C, O)$ , per mettere in evidenza la sua dipendenza dalla curva chiusa  $C$  e dall'origine  $O$ . Si osservi infine che se la curva racchiude anche solo di un pelino l'origine, allora  $\Delta\varphi(C, O) = 2\pi$  (cfr. figura 4.6). È dunque spontaneo chiamare l'origine *punto di diramazione* (o di ramificazione) per la multifunzione  $f(z) = z^{1/2}$ , in quanto in esso vengono a coincidere i due valori di  $w$ , distinti per ogni altro valore  $z$ , come se dall'origine si diramassero i due rami della multifunzione.

Per farla breve, una multifunzione complessa, a differenza di una reale, è un tutt'uno che poco si presta ad essere tagliato in rami in un modo che non sia arbitrario.<sup>3</sup> Ciò nonostante, ci si può porre la domanda se ci sia comunque un modo ottenere due funzioni ordinarie (cioè ad un sol valore) dalla multifunzione a due valori  $f(z) \equiv z^{1/2}$ .

Per rispondere, si proceda così. Si scelga un punto  $z = p \neq 0$  e, arbitrariamente, uno dei due valori di  $f(p)$ , diciamo  $w_1$ ; quindi si lasci  $z$  libero di muoversi. In questo modo si ottiene un unico valore  $f_1(Z)$  associato con ogni cammino che parte da  $p$  e finisce in  $Z$ , a patto che il cammino non giri intorno al punto di diramazione  $z = 0$  (il dettaglio della forma del cammino è irrilevante). Così si può ottenere una funzione  $f_1$  ad un sol valore restringendo  $z$  ad un INSIEME CONNESSO  $S$  che contiene  $p$ , ma non contiene il punto di diramazione (figura 4.7). Se inizialmente avessimo scelto l'altro valore  $w_2$ , mediante una costruzione analoga, avremmo ottenuto una differente funzione ad un sol valore,  $f_2$ .

Stabilito questo, la domanda successiva è: come estendere il dominio  $S$  dei rami in modo da ottenere le radici quadrate di qualunque punto del piano? Uno sguardo alla figura 4.7 suggerisce immediatamente la risposta: si avvicinino i due archi fino a toccarsi, quindi si faccia tendere a zero il raggio piccolo e all'infinito quello grande. Quello che resta è il piano senza una semiretta dall'origine all'infinito; quest'ultima è usualmente chiamata *taglio* o *linea di diramazione*. Si ha così un'estensione di  $S$  al piano senza la curva  $C$ . Questo evita che ci siano in  $S$  cammini chiusi intorno al punto di diramazione. In conclusione, risultano ben definiti in  $S$  due rami  $f_1$  e  $f_2$ .

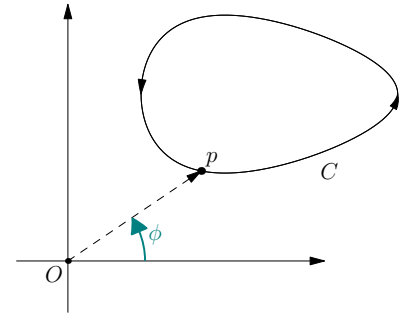


Figura 4.5: Se la curva chiusa non racchiude l'origine, la variazione di fase  $\Delta\varphi$  del movimento che parte da  $p$  e ritorna in  $p$  è zero.

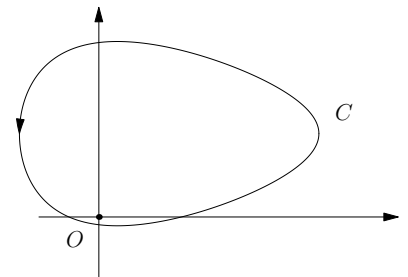


Figura 4.6: Basta che la curva  $C$  racchiuda anche di poco l'origine perché si abbia  $\Delta\varphi = 2\pi$ .

<sup>3</sup> Non ci sono le "giunture naturali" dove il macellaio può tagliare, come direbbe Platone.

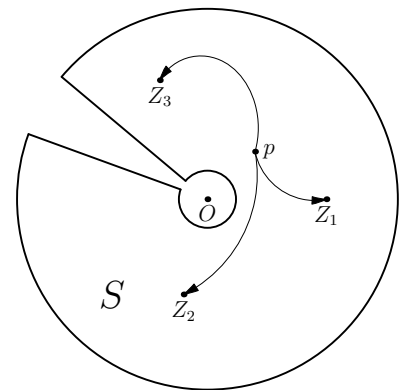


Figura 4.7: A partire da un punto arbitrario  $p$  (ma non l'origine) si costruisce una funzione ordinaria nell'insieme connesso  $S$ , propagando la scelta di ramo in  $p$  a tutti i punti  $Z$  di  $S$  che si possono raggiungere mediante cammini che partono da  $p$  (e rimangono in  $S$ ).

Ma  $S$  può anche essere esteso a tutto il piano. Per giungere a questo risultato, si consideri un punto  $e$  sul taglio. Immaginiamo che  $z$  viaggi lungo un cerchio centrato nell'origine che passa per  $e$ . La figura 4.8 mostra che  $f_1(z)$  si avvicina a due valori differenti a seconda che il movimento di  $z$  sia orario o anti-orario: per un avvicinamento antiorario a  $e$ ,

$$f_1(z) \rightarrow \rho e^{i\theta/2},$$

mentre per uno orario,

$$f_1(z) \rightarrow \rho e^{i(-2\pi+\theta)/2} = -\rho e^{i\theta/2}.$$

A questo punto, se *arbitrariamente* stipuliamo che  $f_1(e)$  sia il valore ottenuto per un avvicinamento antiorario,  $f_1$  risulta definita univocamente su  $C$  e quindi su tutto il piano complesso. Similmente, possiamo estendere a tutto il piano il dominio di  $f_2$ . Il prezzo che si paga per questa estensione è che  $f_1$  e  $f_2$  risultano funzioni *discontinue* sul taglio  $C$ .

Seguono alcune osservazioni.

LA SORGENTE PRIMARIA DI POLIDROMIA<sup>4</sup> è la funzione  $\theta = \arg(z)$ , l'angolo di un numero  $z$ . Questa funzione è in effetti la quintessenza della polidromia, in quanto i valori  $\theta + 2\pi n$ , al variare di  $n$  fra gli interi positivi e negativi, forniscono tutti una misura equivalente dell'angolo di un numero complesso. È prassi comune in analisi complessa restringere l'angolo al dominio  $-\pi < \theta \leq \pi$ , che definisce ciò che usualmente è detta la *parte principale dell'angolo* (o dell'argomento), usualmente denotata  $\text{Arg}(z)$ .

LA SCELTA DEL TAGLIO È ARBITRARIA. Il solo requisito è che sia una curva semplice che parte dal punto di diramazione e va all'infinito (non è richiesto che sia una semiretta!). Come dice Needham, la multifunzione è inconsapevole del nostro desiderio di tagliarla in rami. Se  $z$  si muove lungo un cammino,  $f$  varia in modo continuo: se  $z$  attraversa il taglio, il valore di  $f$  salta da un ramo ad un altro. Se si incomincia con  $f_1(z)$ , e  $z$  si muove in senso anti-orario, quando attraversa il taglio,  $f_1(z)$  salta in  $f_2(z)$  e quindi, dopo un giro completo,  $f_2(z)$  salterà in  $f_1(z)$ .

Di solito, come taglio si sceglie l'asse reale negativo, il che risulta nella restrizione  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Questa scelta definisce il *ramo principale della funzione  $f$* , a volte denotato con  $[f]$ .<sup>5</sup>

TUTTE LE NOZIONI introdotte per la radice si estendono al caso generale. Naturalmente il punto di diramazione può essere in un punto diverso dall'origine; per esempio,  $f(z) = \sqrt{z-i}$  ha un punto di

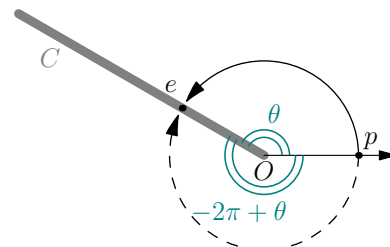


Figura 4.8: Avvicinamento orario e antiorario di  $z$  (che parte da  $p$ ) ad un punto  $e$  sul taglio  $C$ .

<sup>4</sup> Terminologia colta per caratterizzare la proprietà di una funzione di assumere più valori per uno stesso valore della variabile indipendente.

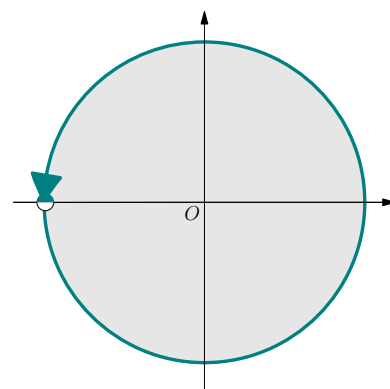


Figura 4.9: Parte principale dell'angolo:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

<sup>5</sup> Da adesso in poi non useremo più il carattere speciale  $f$  per denotare le multifunzioni. Se sarà chiaro dal contesto, eviteremo anche l'uso della parola "multifunzione" (decisamente bruttino) e diremo semplicemente "funzione".

diramazione in  $i$ . Inoltre, una funzione può avere più punti di diramazione, per esempio  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{z - i}\sqrt{z + i}$ . Nel caso generale si ha la seguente definizione:

*Il punto  $q$  è un punto di diramazione di una multifunzione  $f$  se, fissato  $w = f(p)$  in qualche punto  $p$ , esiste un cammino chiuso attorno a  $q$  che inizia e finisce in  $p$  tale che  $f(z)$  non ritorna al suo valore iniziale  $w$  dopo una rivoluzione lungo il cammino.*

(4.1)

In particolare, se  $f(z)$  ritorna per la prima volta al suo valore iniziale dopo  $N$  rivoluzioni attorno a  $q$ , si dice che  $q$  è un punto di diramazione algebrico di ordine  $N - 1$ ; per esempio, per  $f(z) = \sqrt{z}$ , l'origine  $z = 0$  è di ordine 1. I punti di diramazione algebrici di ordine 1 sono detti *punti di diramazione semplici*. Se  $f(z)$  non ritorna mai al suo valore iniziale, si dice che  $q$  è un punto di diramazione logaritmico.

IL RUOLO DEI TAGLI è di estrarre dalla multifunzione delle funzioni ordinarie (cioè ad un solo valore) definite ovunque nel piano complesso (fatta eccezione per eventuali singolarità della funzione). Come sottolineato sopra, la loro scelta è arbitraria. A questo riguardo, si osservi che l'esclusione di piccoli intorno dei punti di diramazione non genera un dominio in cui la funzione ha un sol valore; infatti la polidromia non è legata al punto di diramazione, ma alla possibilità di girare attorno ad esso. L'arte del "fare i tagli giusti" si basa in effetti solo su questo: eliminare la polidromia, cioè bloccare con degli ostacoli (linee di diramazione) la possibilità che ci siano cammini chiusi che producano polidromia.

Per esempio, se la funzione ha due punti di diramazione, introducendo due tagli come in figura 4.10, si elimina la polidromia. In questo modo si impediscono cammini chiusi attorno ai punti di diramazione. Si osservi che in questo modo si impediscono anche cammini attorno ai due punti. Ora, buon senso vuole che si proibisca quanto serve allo scopo, niente di meno, ma neanche niente di più. Sembrerebbe quindi che una scelta di taglio più economica, come quella mostrata in figura 4.11, sia sufficiente. Si noti che tale scelta impedisce i cammini chiusi attorno a ciascun punto di diramazione, ma non ad entrambi. Il fatto è che anche girando attorno ad entrambi si può produrre polidromia e la cautela è d'obbligo. Per un caso in cui la ricetta della figura 4.11 è adeguata, si veda l'esempio 4.3 più avanti; si veda il problema 4.1 per un caso in cui questa ricetta non è adeguata.

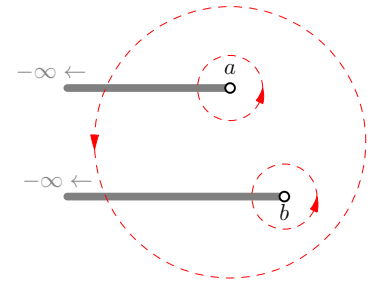


Figura 4.10:  $a$  e  $b$ : punti di diramazione di una funzione. Se si scelgono come tagli le semirette parallele all'asse reale con estremi  $a$  e  $b$ , tutti i cammini attorno a  $a$  o  $b$  o a entrambi sono proibiti (che siano rette e che siano parallele è convenzionale, l'importante è che vadano all'infinito).

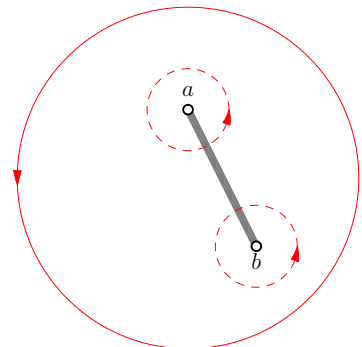


Figura 4.11:  $a$  e  $b$ : punti di diramazione di una funzione. Si sceglie come taglio il segmento tra  $a$  e  $b$ . Con questa scelta, solo i cammini attorno a ciascun punto di diramazione sono proibiti, mentre il cammino attorno ai due punti di diramazione è permesso.

### 4.2 Qualche esempio

ESEMPIO 4.1. Le potenze frazionarie,  $w = z^{p/q}$  (con  $p$  e  $q$  primi tra loro) sono multifunzioni. Perché?

□ Per la stessa ragione per cui la radice quadrata è una multifunzione: l'origine è un punto di diramazione. In fatti, la specificazione dell'angolo di  $z$  a meno di multipli interi di  $2\pi$  diventa rilevante quando la eleviamo alla potenza  $p/q$ :

$$w = r^{p/q} e^{i(p/q)(\theta+2n\pi)} = r^{p/q} e^{i(p/q)\theta} e^{i(2np\pi)/q} \quad n = 0, 1, 2,$$

Essendo  $p$  e  $q$  primi tra loro, si hanno  $q$  possibili valori distinti di  $w$ ,

$$w_n = r^{p/q} e^{i(p/q)\theta} e^{i(2np\pi)/q} \quad n = 0, 1, 2, \dots, q$$

(passato  $q$  non si trovano nuovi valori). Quindi, per questa funzione, l'origine è un punto di diramazione algebrico di ordine  $q - 1$ .

ESEMPIO 4.2. Sia  $w = f(z) = \sqrt[3]{z}$ . Introdurre i tagli e caratterizzare il suo ramo principale  $[\sqrt[3]{z}]$ . Trovate nulla di strano?

□ Per quanto visto sopra,  $z = 0$  è un punto di diramazione algebrico di ordine 2. Per il taglio, seguiamo la consuetudine di scegliere l'asse reale negativo, per cui il ramo principale è caratterizzato dalla condizione  $-\pi < \theta \leq \pi$ . La stranezza è questa:  $[\sqrt[3]{z}]$  concorda con la radice cubica reale sull'asse positivo, ma non su quello negativo, dove si ha  $[\sqrt[3]{-1}] = e^{i\pi/3}$ .

Si osservi che gli altri due rami possono essere espressi in termini del ramo principale come  $e^{i2\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$  e  $e^{i4\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$ .

ESEMPIO 4.3. Sia  $w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .

- (a) Dimostrare che  $z = \pm i$  sono punti di diramazione per  $f(z)$ .
- (b) Dimostrare che un giro completo attorno ad ambedue i punti di diramazione non produce alcun cambiamento di ramo per  $f(z)$ .
- (c) Quali tagli si possono fare per definire i rami di  $f(z)$  su tutto il piano?

□ (a) Per prima cosa osserviamo che

$$w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + i)(z - i)}.$$

È quindi abbastanza naturale aspettarsi che  $i$  e  $-i$  siano punti di diramazione. Per mostrare che  $i$  è un punto di diramazione dobbiamo trovare un cammino chiuso  $C$  attorno a  $i$ , che parte da un punto  $z$

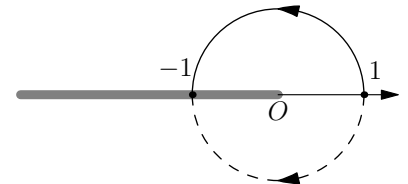


Figura 4.12: Nel ramo in cui si ha  $\sqrt[3]{1} = 1$  (ramo principale,  $-\pi < \theta \leq \pi$ ) si ha  $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$ .

dove è stato scelto  $w = f(z)$  e che ha la seguente proprietà: muovendo la funzione lungo  $C$ , al ritorno in  $z$  la funzione cambia valore. Lo stesso va fatto per  $-i$ .

La situazione è descritta nella figura 4.13 dove è disegnata (in blu) una curva  $C$  che avvolge  $i$  e passa per un generico punto  $z$ . La figura mostra che  $z$  può essere espresso come (solita regola della somma di vettori)

$$z = -i + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{oppure} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2},$$

Naturalmente, sia  $\theta_1$  sia  $\theta_2$  sono a meno di multipli interi di  $2\pi$ , un fatto che diventa rilevante quando del numero si prendano potenze frazionarie (come è stato sottolineato sopra)<sup>6</sup>. Per cui se scriviamo

$$w = \sqrt{(z+i)(z-i)} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}, \quad (4.2)$$

il numero a secondo membro è solo uno dei possibili valori nella funzione in  $z$ . Ma quel che conta, per dimostrare che  $i$  è un punto di diramazione, è fissare un valore della multifunzione e poi muovere il punto lungo la curva.

I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio verde della figura). Dopo un giro completo si ha

$$e^{i\theta_2/2} \rightsquigarrow e^{i(\theta_2+2\pi)/2} = -e^{i\theta_2/2}$$

Per poter concludere che questo cambiamento di segno di  $e^{i\theta_2/2}$  comporta un cambiamento di  $w$ , dobbiamo vedere che cosa succede agli altri fattori a secondo membro della (4.2):  $\sqrt{r_1 r_2}$  è la radice usuale di un numero positivo e ovviamente non cambia e che cosa accade a  $e^{i\theta_1/2}$  ce lo mostra la figura: mentre  $z$  si muove lungo  $C$ , l'angolo  $\theta_1$  va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando  $z$  ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale; dunque,  $e^{i\theta_1/2}$  non cambia.

In definitiva,  $w$  cambia di segno. Poichè mutatis mutandis lo stesso ragionamento si applica a  $-i$ , concludiamo che  $+i$  e  $-i$  sono punti di diramazione della funzione (4.2).

(b) Deformiamo il cammino della figura 4.13 in un cammino che giri attorno anche al punto  $-i$  come in figura 4.14. Per quel che riguarda  $\theta_2$ , valgono gli stessi ragionamenti di prima e la stessa conclusione:

$$e^{i\theta_2/2} \rightsquigarrow e^{i(\theta_2+2\pi)/2} = -e^{i\theta_2/2}$$

Ma non per  $\theta_1$ . Adesso, quando il punto si muove lungo  $C$  e completa il giro ritornando al punto di partenza, anche  $\theta_1$  ha una variazione angolare di  $2\pi$ . Perciò,

$$e^{i\theta_1/2} \rightsquigarrow e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = -e^{i\theta_1/2},$$

<sup>6</sup> Per il momento non ci restringiamo alla parte principale dell'angolo, questo lo faremo più avanti.

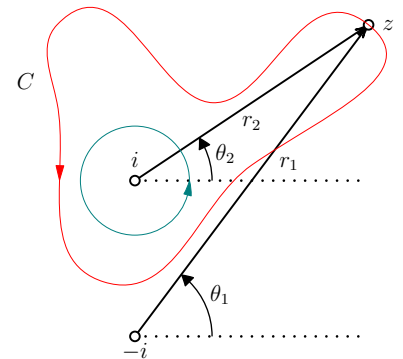


Figura 4.13: Cammino  $C$  (in blu) lungo cui la funzione cambia ramo.

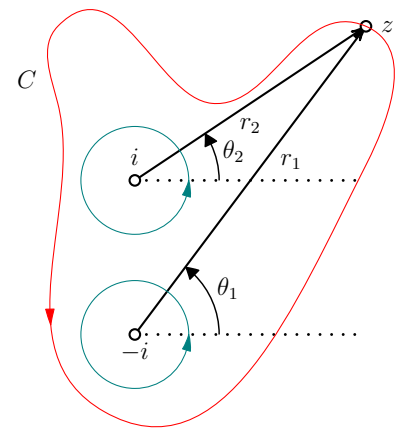


Figura 4.14: Cammino  $C$  (in blu) che avvolge  $i$  e  $-i$ .

di conseguenza,

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} \rightsquigarrow \sqrt{r_1 r_2} \left[ -e^{i\theta_1/2} \right] \left[ -e^{i\theta_2/2} \right] = w$$

In conclusione, il movimento lungo una curva che racchiude entrambi i punti di diramazione della funzione  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$  non comporta un cambiamento di ramo della funzione stessa.

(c) La scelta più semplice per i tagli è quella di prendere un taglio da  $i$  all'infinito (che impedisce di girare attorno al punto  $i$ ) e un altro taglio da  $-i$  all'infinito, per la stessa ragione. La figura 4.15 mostra una scelta particolarmente importante e comune: linee che vanno a Ovest. Se non permettiamo a  $z$  di attraversare i tagli, possiamo restringere l'angolo  $\theta_1 = \arg(z + i)$  al suo valore principale, nell'intervallo  $-\pi < \theta_1 \leq \pi$ . Se  $\theta_2 = \arg(z - i)$  è similmente ristretto al suo valore principale nell'intervallo  $-\pi < \theta_2 \leq \pi$ , allora la (4.2) diventa il ramo principale di  $f(z)$ , di solito denotato  $[f](z)$ . L'altro ramo è semplicemente  $-[f](z)$ .

Sulla base della conclusione di (b) è possibile fare una scelta di tagli più economica: quella mostrata nella figura 4.16. In questo caso la ricetta illustrata dalla figura 4.11 funziona proprio perchè per una curva che gira intorno a entrambi i punti di diramazione, come la  $C$  in figura, non fa cambiare ramo alla funzione.

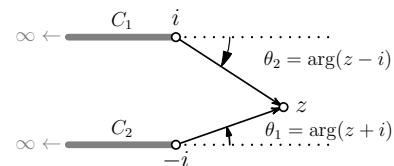


Figura 4.15:  $C_1$  e  $C_2$ : tagli standard per la funzione  $w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .

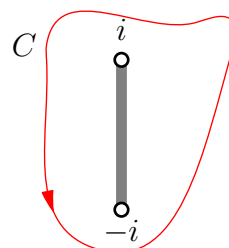


Figura 4.16: Un solo taglio per la funzione  $w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .

### 4.3 Rilevanza per le serie di potenze

Già Newton conosceva la serie binomiale per  $n$  numero reale arbitrario

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots$$

L'intervallo di convergenza della serie è  $-1 < x < 1$  (cfr. problema 3.13).

Come spiegare questo intervallo di convergenza, per esempio per  $n = 1/3$ ? Il criterio 3.7 sembra non funzionare in quanto la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  non ha singolarità. A differenza della funzione  $1/(1+x^2)$ , il mistero non scompare quando si passa alla funzione complessa

$$f(z) = (1+z)^{1/3}$$

perchè  $f(z)$  non ha singolarità. Però non è una funzione ordinaria, è una multifunzione con punto di diramazione di secondo ordine in  $z = -1$ : per esempio, i suoi tre valori in 0 sono:  $f(0) = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}\}$ .



Isaac Newton (1642–1727) è stato uno dei più grandi e più influenti scienziati di tutti i tempi. Di lui si sa tutto (o quasi). Meno noto, forse, è che la serie binomiale fu una delle sue armi segrete nello sviluppo del Calcolo (serie che giocò un ruolo altrettanto importante nel lavoro di Eulero).

La multifunzione  $f(z)$  è definita ovunque nel piano complesso e i suoi tre rami, dopo aver introdotto un taglio, ad esempio quello standard  $-\infty < x < -1$ , sono anch'essi definiti ovunque. Al contrario, la serie

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^2 + \frac{5}{81}z^3 + \dots$$

è centrata nello zero e ha raggio di convergenza  $R = 1$ . Poiché la serie vale 1 nello 0, essa rappresenta *solamente* il ramo di  $f(z)$  in cui si ha  $f(0) = 1$ .

Quest'ultima osservazione è la chiave per risolvere il mistero. Poiché una serie di potenze non può essere polidroma, un punto di diramazione è un ostacolo reale<sup>7</sup> per la convergenza di una serie tanto quanto lo è una singolarità<sup>8</sup>. Se ne conclude che se il ramo di una multifunzione può essere espresso come una serie di potenze, il disco di convergenza della serie non può essere tanto grande da contenere i punti di diramazione della multifunzione.

Alla luce di questo, il criterio (3.7) va così modificato:

*Se una funzione complessa  $f(z)$  o un ramo di una multifunzione  $f(z)$  possono essere espressi come una serie di potenze centrata in  $u$ , allora il raggio di convergenza è la distanza tra  $u$  e la singolarità o il punto di diramazione più vicino.*

(4.3)

<sup>7</sup> Nel senso di "un pericolo reale"

<sup>8</sup> Intesa come un punto in cui la funzione esplode

#### 4.4 La funzione logaritmo

Il logaritmo può essere introdotto come l'inverso di  $e^z$ ,

$$e^{\log(z)} = z$$

Quindi (esercizio)

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg(z)$$

Dunque il logaritmo è una multifunzione che assume infiniti valori, p.es.,

$$\log(2+2i) = \ln 2\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi i, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

La ragione di questa polidromia è abbastanza ovvia, se si riconsiderano le figure 3.5 e 3.6, che rappresentano la trasformazione  $z \mapsto e^z$ : nel mondo complesso l'esponenziale non è più iniettivo e tutte le volte che  $z$  viaggia verticalmente di  $2\pi$ ,  $e^z$  compie una rivoluzione e ritorna al suo valore originario.

Chiaramente,  $z = 0$  è un punto di diramazione. Si osservi che, differenza di quelli algebrici, girandoci intorno non si ritorna mai al punto di partenza. È un punto di diramazione logaritmico (questo spiega la terminologia). Il ramo principale della multifunzione

logaritmo è di solito denotato con  $\text{Log}$ ,

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z), \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

Senza usare il teorema di Taylor, si può mostrare che (complementi 4.8.1):

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots$$

Usando il criterio del rapporto, si può vedere che questa serie converge nel disco unitario. In effetti, si può anche mostrare che questa serie converge *sul* cerchio unitario, eccetto  $z = -1$ .<sup>9</sup> Ponendo  $z = 1$  si trova

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Ci sono altri casi speciali interessanti. Ponendo  $z = i$  e uguagliando le parti reale e immaginaria, si ottiene

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \end{aligned}$$

Per verificare la prima serie, si osservi che se  $z = 1$ , allora  $\ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln(1+z)$ .

#### 4.5 La sfera di Riemann

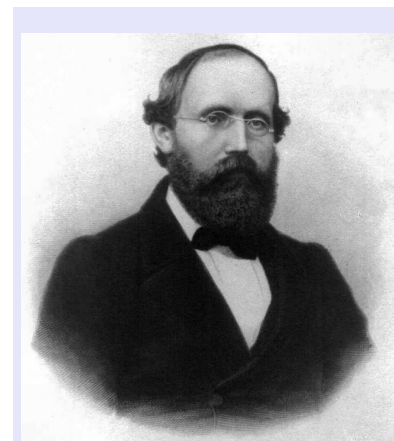
Adesso cambiamo registro e ci occupiamo di un'idea semplice ma profonda che ebbe Riemann.

Il punto di partenza è una banale osservazione: man mano che  $z$  si allontana dall'origine (in qualunque direzione) il punto  $1/z$  si avvicina sempre più all'origine. È come se  $z$  si avvicinasse ad un *singolo* punto all'infinito, scritto  $\infty$ , la cui immagine rispetto alla funzione  $1/z$  è lo zero (l'osservazione sembra banale, ma merita un attimo di riflessione: stiamo dicendo che non c'è un infinito di un tipo quando il movimento di  $z$  è lungo l'asse reale, un altro lungo l'asse immaginario e infiniti altri quando si sceglie una qualunque altra direzione, come accade quando si considera lo spazio  $\mathbb{R}^2$  e si passa allo spazio proiettivo *reale*). Perciò, per definizione, questo punto  $\infty$  soddisfa le seguenti equazioni

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty. \quad (4.4)$$

L'aggiunta di questo singolo punto all'infinito trasforma il piano complesso nel cosiddetto *piano complesso esteso*  $\bar{\mathbb{C}}$ . Alcuni vantaggi sono immediati, per esempio, possiamo dire che la funzione  $z \mapsto$

<sup>9</sup> Questo perché la serie di  $-\text{Log}(1-z)$  è proprio la serie di cui si è stabilita la convergenza sul cerchio unitario in S.2.2



Bernhard Riemann (1826–1866) è stato un matematico tedesco la cui opera ha avuto un'influenza profonda sullo sviluppo della matematica e della fisica. Ha dato contributi duraturi all'analisi e alla geometria. Trasformò la teoria delle superfici di Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nella moderna geometria differenziale che è alla base della teoria della relatività generale. Matematico con un profondo senso della fisica, fu il primo a pensare che la gravità avrebbe potuto essere spiegata in termini delle proprietà geometriche dello spazio.



$1/z$  è un'applicazione uno-a-uno del piano complesso esteso su sé stesso. Se una curva passa per  $z = 0$ , allora (per definizione) la curva immagine rispetto alla trasformazione  $z \mapsto 1/z$  passa per il punto all'infinito. Viceversa, se la curva passa per  $0$ , allora la curva originale passa per  $\infty$ .

Tutto ciò è molto pulito, ma lascia un po' perplessi. Siamo abituati a pensare il simbolo  $\infty$  associato ad un processo di limite, non come un punto un ben definito. In effetti, le equazioni (4.4) sembrano in conflitto con quanto ci è stato insegnato e con tutte le raccomandazioni su come trattare il simbolo  $\infty$ . La risposta bella e profonda di Riemann a queste perplessità fu di interpretare i numeri complessi non come punti sul piano, ma come punti su una sfera  $\Sigma$ , la *sfera di Riemann* appunto. Per vedere come questo sia possibile si posizioni il piano complesso orizzontalmente, diciamo passante per l'equatore della sfera si orienti il piano complesso in modo tale che una rotazione di  $90^\circ$  dello spazio ruoti  $1$  in  $i$ . La sfera sia centrata nell'origine e abbia raggio unitario. Dette  $X, Y, Z$  le coordinate spaziali e  $z = x + iy$  un punto del piano complesso, la corrispondenza tra punti della sfera e punti del piano è data dalla *proiezione stereografica* illustrata nella figura 4.17.

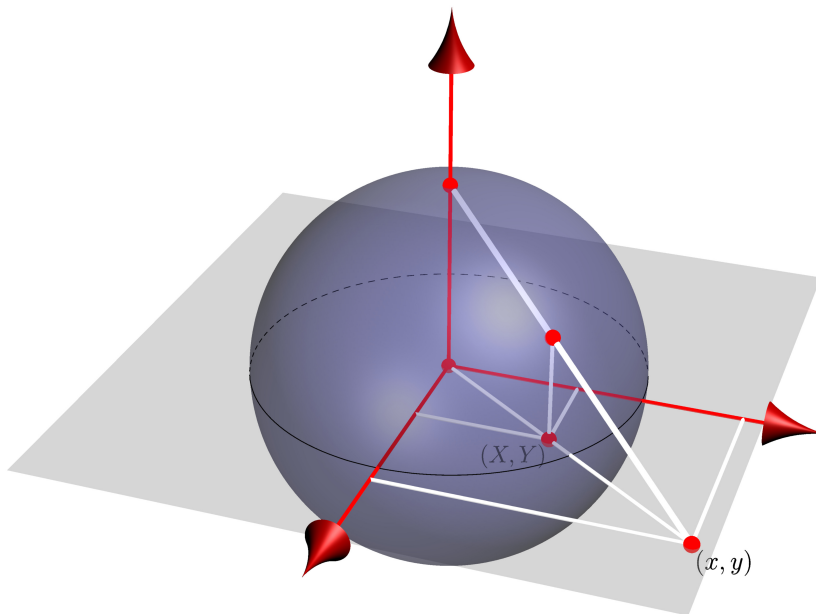


Figura 4.17: Proiezione stereografica:  $(X, Y, Z)$ , con il vincolo  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , sono le coordinate di un punto sulla sfera unitaria;  $z = x + iy$  è un generico punto nel piano complesso. La figura mostra la corrispondenza tra queste coordinate.

Le equazioni di trasformazione possono essere lette dalla figura 4.18, come semplice proporzionalità tra lati di triangoli simili,  $1 : 1 - Z = z : X + iY$ , da cui

$$z = \frac{X + iY}{1 - Z}. \quad (4.5)$$

Usando le coordinate sferiche  $X = \sin \theta \cos \phi$ ,  $Y = \sin \theta \sin \phi$ ,  $Z = \cos \theta$ , si ottiene (esercizio)  $z = e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}$ . Si perviene alla stessa conclusione dopo avere ragionato sui triangoli della figura 4.19 (dopo aver mostrato che l'angolo al polo Sud è  $\theta/2$ ).

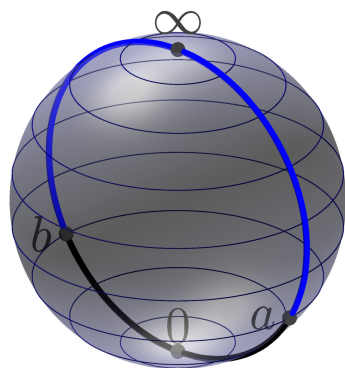
La morale è che in questo modo  $\infty$  è diventato un punto come gli altri: è il polo NORD della sfera!

#### 4.6 Singolarità e punti di diramazione all'infinito

Poiché grazie a Riemann l'infinito è un punto come gli altri, è utile conoscere le proprietà di una funzione nell'intorno di questo punto.

Per studiare una funzione nell'intorno di  $\infty$ , si considera il cambiamento di variabile  $\zeta = \frac{1}{z}$  e si studia la funzione  $g(\zeta) = f(1/\zeta)$  nell'intorno di  $\zeta = 0$ . Ad esempio,  $f(z) = z$  è singolare all'infinito, mentre  $f(z) = \sqrt{z}$  ha un punto di diramazione semplice in 0, ma anche all'infinito (dove è anche singolare).

La rappresentazione dei numeri complessi come punti della sfera di Riemann rende ancora più manifesto che una funzione complessa ha un carattere di continuità sconosciuto nel campo reale. Consideriamo, ad esempio, una funzione che, come  $w = \sqrt{z^2 + 1}$ , ha due punti di diramazione, diciamo  $a$  e  $b$ . Sulla sfera complessa, il taglio è sempre una curva tra  $a$  e  $b$ . La differenza tra le due possibilità considerate sopra, diventa la possibilità che il taglio passi o no per  $\infty$ . Si veda la figura 4.20.



Per far pratica, prima si risponda alla domanda se  $w = \sqrt{z^2 + 1}$  ha un punto di diramazione all'infinito, ragionando sulla figura 4.20, poi si passi ai problemi assegnati.

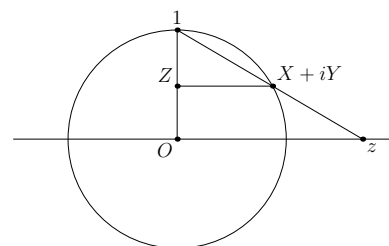


Figura 4.18: Sezione verticale della proiezione stereografica.

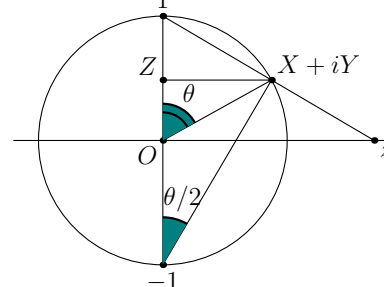


Figura 4.19: Sezione verticale della proiezione stereografica.

Figura 4.20: Il taglio (in blu) passante per  $\infty$  corrisponde al taglio della figura 4.15; quello passante per 0 a quello della figura 4.16.

## 4.7 PROBLEMI

PROBLEMA 4.1.  $\square$  Si consideri la multifunzione  $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt[3]{z-i}$ . Dove sono i punti di diramazione e qual è il loro ordine? Perché non è possibile usare un solo taglio per definire i rami della multifunzione?

PROBLEMA 4.2.  $\square$  Si consideri la multifunzione  $f(z) = \sqrt{z^2-1}$ . Trovare i punti di diramazione e il loro ordine. L'infinito è un punto di diramazione? Quali tagli si possono fare per definire i rami della multifunzione su tutto il piano?

PROBLEMA 4.3.  $\square$  Si considerino le multifunzioni

- (a)  $\sin \sqrt{z}$
- (b)  $\sqrt{\sin z}$
- (c)  $\sqrt{z} \sin \sqrt{z}$
- (d)  $\sqrt{\sin z^2}$ .

Trovare i punti di diramazione e il loro ordine.

PROBLEMA 4.4.  $\square$  Trovare i punti di diramazione di  $f(z) = \sqrt[3]{z^3-z}$ . Introdurre i tagli.

PROBLEMA 4.5.  $\square$  Costruire un ramo di  $f(z) = \sqrt[3]{z^2+1}$  tale che  $f(0) = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$

PROBLEMA 4.6.  $\square$  Trovare i punti di diramazione sul piano complesso esteso ( $\mathbb{C} \cup \infty$ ) delle multifunzioni

$$(a) \log(z^2-1), \quad (b) \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

e introdurre tagli per rendere le funzioni ad un solo valore.

N. B. Nella risoluzione di alcuni esercizi è utile utilizzare la regola dell'Hospital (punto "uno" di 7.7) e tenere presente che la nozione di limite in  $\mathbb{C}$  è la stessa di  $\mathbb{R}^2$ .

## 4.8 COMPLEMENTI

### 4.8.1 La serie del logaritmo

Vogliamo ricavare la serie per la parte principale del logaritmo. Preliminarmente, osserviamo che usando il binomio di Newton (la serie binomiale per  $n$  intero è un polinomio di grado  $n$ ), mediante una diversa definizione di esponenziale, si arriva alla stessa funzione esponenziale: si definisca

$$e^z \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

ma

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= 1 + n \left[\frac{z}{n}\right] + \frac{n(n-1)}{2!} \left[\frac{z}{n}\right]^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left[\frac{z}{n}\right]^3 + \dots \\ &= 1 + z + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} z^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

per cui, passando al limite  $n \rightarrow \infty$  si ritrova la funzione esponenziale definita dalla serie

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Adesso, sia

$$L(z) \equiv (\text{Log})(1+z),$$

allora, essendo il logaritmo definito come funzione inversa dell'esponenziale,

$$\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n = e^L = (1+z) \Rightarrow 1 + \frac{L}{n} \approx (1+z)^{\frac{1}{n}}$$

Ci sono  $n$  rami di  $(1+z)^{\frac{1}{n}}$  nel disco unitario, ma poichè  $L(0) = 0$ , ci serve il ramo di  $(1+z)^{\frac{1}{n}}$  che vale 1 quando  $z = 0$ . Usando la serie binomiale,

$$1 + \frac{L}{n} \approx 1 + \frac{1}{n}z + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!} z^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{3!} z^3 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{4!} z^4 \dots,$$

da cui

$$L = z + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2} z^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{2n}-1\right)}{3} z^3 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{2n}-1\right)\left(\frac{1}{3n}-1\right)}{4} z^4 + \dots$$

Infine, passando al limite di  $n$  che tende all'infinito,

$$(\text{Log})(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots$$

### 4.8.2 Serie di potenze e serie di Fourier

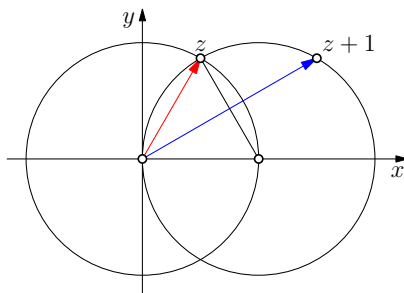
Vogliamo mostrare che, solo sulla base di quanto è stato fatto finora, senza neanche aver incominciato lo studio delle serie di Fourier, siamo in grado di mostrare (rigorosamente!) come alcune funzioni possano essere analizzate (e sintetizzate) mediante serie di Fourier. Propedeutica alla discussione seguente è la sezione 2.8.

Consideriamo la serie della parte principale del logaritmo appena ricavata, cioè la serie per  $L(z) = (\text{Log})(1+z)$ . Per quanto visto nella sezione 2.8 tale serie è convergente per  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \neq -\pi$ . Ora,

$$\text{Log}(1+z) = \ln|1+z| + i\text{Arg}(1+z)$$

dove  $\Theta = \text{Arg}(1+z)$  è la parte principale dell'angolo di  $1+z$ , dove, per definizione,  $\theta = \text{Arg}(z)$ , varia nell'intervallo  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

Ragionando sulla figura



si vede che l'angolo di  $z+1$  è la metà dell'angolo di  $z$ ,

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

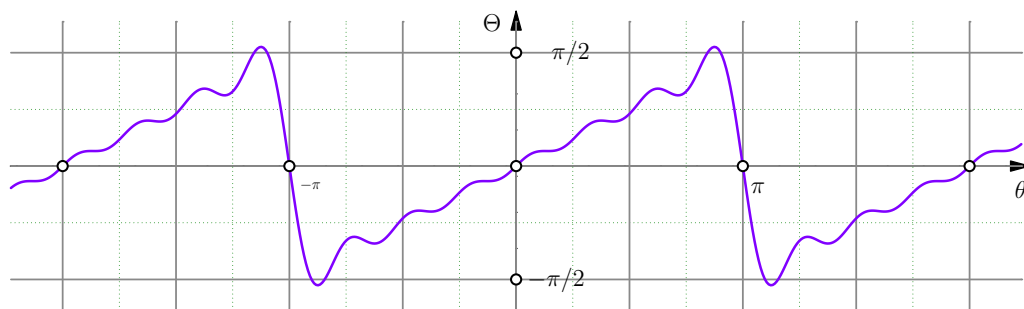
da cui

$$\text{Im Log}(1+z) = \frac{1}{2}\theta,$$

Quindi, per confronto con lo sviluppo in serie di  $\text{Log}(1+z)$  per  $z = e^{i\theta}$ , si ottiene lo sviluppo di Fourier

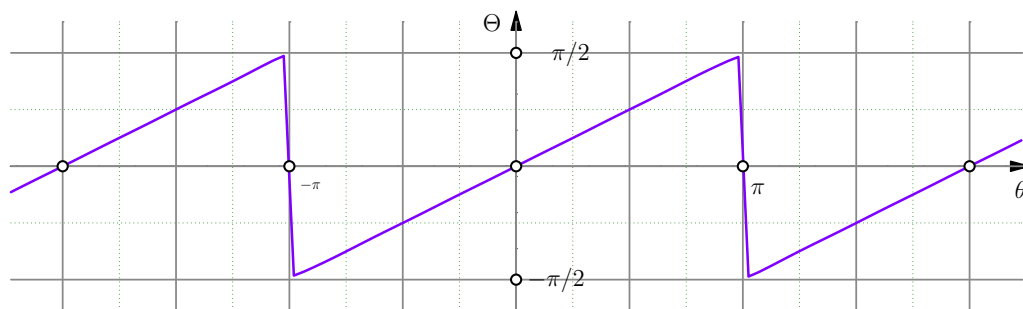
$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots$$

Adesso, usando un semplice programmino, si può fare un grafico delle somme parziali della serie di Fourier. Sommando i primi 8 termini, si ottiene



Aumentando il numero dei termini, si può vedere l'effetto magico della convergenza di una somma di onde sinusoidali completamente lisce all'onda discontinua a dente di sega. A Fourier era completamente chiara la potenza di calcolo offerta dal suo metodo. Tuttavia, i primi sommatori efficienti furono costruiti nella seconda metà dell'800. Uno dei primi sommatori meccanici di serie di Fourier fu costruito dal Michelson (il fisico che eseguì con Morley gli esperimenti per rivelare il movimento della terra rispetto all'etere).

Il dispositivo di Michelson sommava circa 100 termini. Oggi, con un piccolo portatile, e in una frazione di secondo, se ne possono sommare molti di più. Nel nostro caso, sommandone 500, si ottiene



Si osservi che nei punti di discontinuità le somme parziali tendono a fare la media dei limiti destro e sinistro (questo è un fatto che riceverà la dovuta attenzione a tempo debito).

Due commenti. Primo: non è necessario usare una serie di potenze sul cerchio di convergenza per ottenere una serie di Fourier. Si consideri, per esempio, la serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

e si ponga  $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ . Sostituendo questo valore e prendendo la parte immaginaria di ambo i membri dell'equazione, si ottiene la serie di Fourier

$$\frac{2 \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2^2} \sin 2\theta + \frac{1}{2^3} \sin 3\theta + \dots$$

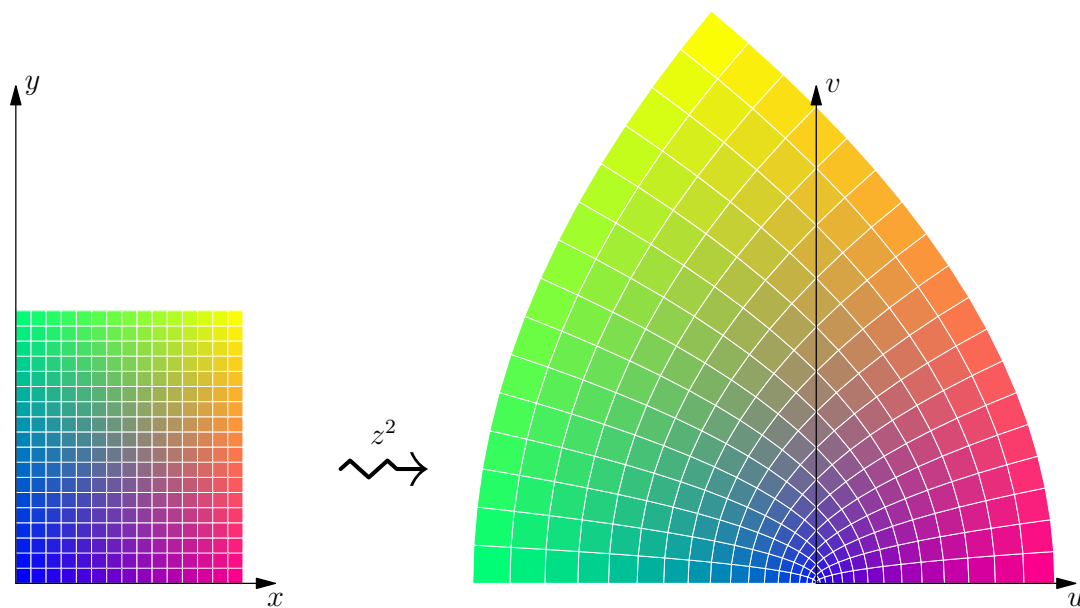
Secondo: data una funzione  $f(\theta)$ , la regola di calcolo esplicita per determinare i coefficienti della sua serie di Fourier è data nel testo del problema 2.4. Ma che ci sia una regola non vuol dire che sia sempre facile da usare (il calcolo degli integrali potrebbe essere complicato). È dunque importante (non solo concettualmente, ma anche ai fini del calcolo) non sottovalutare il metodo sopra descritto (che funziona quando si riesce a riportare  $f(\theta)$  alle parti reale o immaginaria di una serie di potenze di cui si conosce la somma).

## 5

### Funzioni analitiche

#### 5.1 Descrizione locale di trasformazioni del piano

È interessante osservare che le rappresentazioni grafiche delle trasformazioni indotte da funzioni complesse, come  $z^2$ ,  $z^n$ , o l'esponenziale complesso  $e^z$ , hanno tutte la proprietà che "quadratin" si trasformano in "quadratin". Questo vale, per esempio, per le figure 1.5, 1.9, 1.10, 3.5 e 3.6. Si potrebbe pensare che questa proprietà sia dovuta alla particolare scelta della regione nel piano  $z$ , ad esempio, per la funzione  $w = z^2$ , alla particolare scelta della regione angolare nel piano  $z$  nella figura 1.5. Ma non è così: per una diversa scelta, come per esempio nella figura sotto, si osserva lo stesso fenomeno.



Come chiariremo tra breve, ogni coppia di curve ortogonali è in effetti trasformata in una coppia di curve ortogonali.

Spiegare la figura 1.8 (che riportiamo a lato) è banale: sia  $w = u + iv$  e  $z = x + iy$ , allora

$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

Possiamo interpretare questa trasformazione come un *cambiamento di coordinate* nel piano reale

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

In effetti,  $u$  e  $v$  sono coordinate ortogonali, come si verifica facilmente mostrando che le curve  $u = \text{cost}$  e  $v = \text{cost}$  sono ortogonali: mediante differenziazione implicita si vede immediatamente che hanno il prodotto delle pendenze pari a  $-1$ ,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = \text{cost} &\Rightarrow x - yy' = 0 \Rightarrow y' = +y/x \\ 2xy = \text{cost} &\Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x \end{aligned}$$

Vogliamo adesso mostrare gli angoli tra curve arbitrarie passanti per un generico punto  $z$  sono lasciati invariati dalla trasformazione. Preliminarmente, ricordiamo che per la funzione vettoriale

$$\mathbf{f} : \mathbf{r} = (x, y) \mapsto \mathbf{w} = (u, v).$$

da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ , il significato geometrico della matrice Jacobiana  $J$ , è di trasformare vettori infinitesimi in  $\mathbf{r}$  in vettori infinitesimi in  $\mathbf{w}$ ,

$$d\mathbf{w} = J d\mathbf{r}.$$

In componenti,

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

Per  $w = f(z) = z^2$  si ha

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

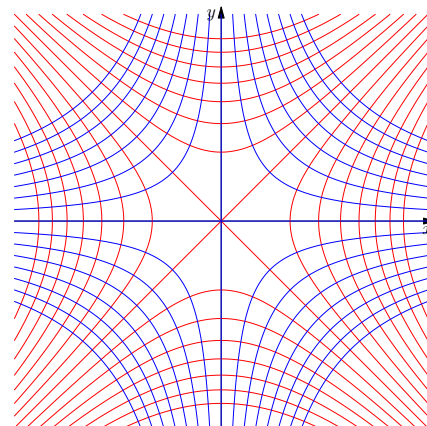
L'effetto locale della trasformazione è dunque di "stirare" i vettori infinitesimi e di ruotarli: è una *stiro-rotazione* (sezione 1.3). Quindi, necessariamente, preserva gli angoli.<sup>1</sup> Una trasformazione che, come  $z^2$ , preserva localmente gli angoli, è detta *conforme* (cfr. sezione 5.5).

Se usiamo la notazione complessa per i vettori infinitesimi nei punti  $z$  e  $w$ ,

$$dz = dx + idy, \quad dw = du + idv$$

vediamo che l'effetto dello Jacobiano su  $(dx, dy)$  è semplicemente la moltiplicazione per il numero complesso  $2z$ , cioè

$$dw = (2z)dz$$



<sup>1</sup> Fatta eccezione per  $z = 0$ , dove  $J = 0$  e dove, in effetti, l'angolo risulta raddoppiato.



Se, invece di  $z^2$ , avessimo considerato la funzione  $w = z^n$ , avremmo trovato

$$dw = nz^{n-1}dz,$$

che è quello che si ottiene applicando formalmente le regole della derivazione, cioè

$$dw = f'(z)dz.$$

Semberebbe che analisi, algebra e geometria si stiano fondendo in un'unica struttura!

### 5.2 Geometria delle trasformazioni analitiche

L'effetto locale delle trasformazioni appena considerate, cioè l'effetto sui vettori infinitesimi nel punto  $z$  è quello illustrato in figura 5.1: una rotazione combinata con uno stiramento.

In generale, l'amplificazione e la rotazione sono diverse per diversi vettori infinitesimi nel punto  $z$ , quando sono le stesse come in figura 5.2, la trasformazione  $f$  è detta *analitica* (o olomorfa).

*Le trasformazioni analitiche sono precisamente quelle il cui effetto locale è uno stiro-rotazione: tutti i vettori infinitesimi che emanano da un singolo punto sono amplificati e ruotati nello stesso modo.*

(5.1)

Se una trasformazione è analitica, cerchi e quadrati infinitesimi si trasformano rispettivamente in cerchi e quadrati infinitesimi, ma, in generale, questo non vale per cerchi e quadrati finiti, che risultano deformati. Una stiro-rotazione locale in  $z$  è la moltiplicazione per un numero complesso che dipende da  $z$  e che denoteremo  $f'(z)$ ,

$$dw = f'(z)dz.$$

La funzione  $f'(z)$  è detta la *derivata* della funzione  $f$  nel punto  $z$  ( $dz$  è espanso di  $|f'(z)|$  e ruotato di  $\arg[f'(z)]$ ).

Ecco alcuni esempi.

- $f(z) = z^2$  è analitica e  $f'(z) = 2z$  (incluso  $z = 0$ , dove però l'angolo viene raddoppiato).
- $f(z) = \bar{z}$  non è analitica: lo stiramento è uguale per tutti (e vale 1), ma la rotazione no: la figura 5.3 mostra che  $\phi$  deve essere ruotato di  $-2\phi$  per ottenere un vettore immagine con angolo  $-\phi$ . Quindi differenti vettori devono essere ruotati di quantità differenti, e quindi  $f(z) = \bar{z}$  non è una stiro-rotazione.

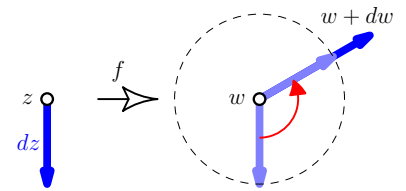


Figura 5.1: Significato geometrico di  $dw = f'(z)dz$ .

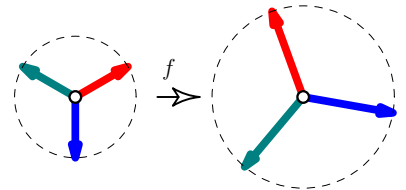


Figura 5.2: Azione locale di una funzione analitica: i tre vettori a sinistra sono tutti e tre ruotati dello stesso angolo e allungati della stessa quantità.

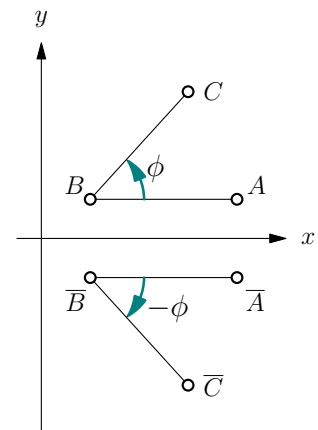


Figura 5.3: La coniugazione complessa è una riflessione rispetto all'asse reale che preserva il valore assoluto dell'angolo, ma non il suo segno; non è analitica.

Si osservi che il presupposto implicito della definizione (5.1) è ovviamente che l'azione locale della funzione sia ben definita. Questo significa che, per  $f(z) = u + iv$ ,  $z = x + iy$ , la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

è differenziabile, il che, a sua volta, significa che esistono i differenziali

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

A questo proposito ricordiamo che la continuità delle derivate prime di  $u$  e  $v$  è condizione SUFFICIENTE ma non necessaria per l'esistenza dei differenziali.

### 5.3 Le equazioni di Cauchy-Riemann

Alla moltiplicazione per un numero complesso

$$(x + iy) \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

è associata la trasformazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quindi, affinché la trasformazione  $z = x + iy \mapsto w = u + iv$  sia analitica, la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

deve essere della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} \partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

Queste sono le famose *equazioni di Cauchy-Riemann*. Forniscono un criterio per riconoscere una funzione analitica.

La derivata è, localmente, la moltiplicazione per il numero complesso  $a + ib$  che rappresenta lo stiro-giro, quindi

$$f'(z) = a + ib = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x(u + iv) = \partial_x f$$

Per Cauchy-Riemann abbiamo anche

$$f'(z) = \partial_y v - i\partial_y u = -i\partial_y(u + iv) = -i\partial_y f$$

In altre parole (per  $\delta x$  e  $\delta y$  infinitesimi reali),

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta x) - f(z)}{\delta x} = \frac{f(z + i\delta y) - f(z)}{i\delta y}$$

il che non è sorprendente, visto che LO STIRO-GIRO DEI VETTORI INFINITESIMI IN  $z$  È LO STESSO PER TUTTI, se la funzione è analitica.

Quindi, anche per un arbitrario  $\delta z$  in  $z$ , si avrà

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

Questo giustifica il fatto che le usuali regole di calcolo delle derivate reali si estendono pari-pari alle derivate delle funzioni analitiche (notazione di Leibniz inclusa):

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \dots$$

#### 5.4 Questioni di analisi

Usualmente, la nozione di funzione analitica è introdotta definendo prima la differenziabilità complessa in un punto:

Sia  $U$  un sottoinsieme aperto del piano complesso  $\mathbb{C}$ . Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è differenziabile in senso complesso in un punto  $z$  se esiste il limite

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

(5.2)

Segue la definizione di funzione analitica:

Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è detta analitica (o olomorfa) su  $U$  se è differenziabile in senso complesso in ogni punto di  $U$ .

(5.3)

Questa definizione è del tutto equivalente alla caratterizzazione geometrica (5.1).

Dalla (5.1) o dalla (5.3) si deducono le regole di calcolo della derivata complessa e le proprietà della derivata, che sono del tutto analoghe a quelle della derivata reale, per esempio,

la regola di Leibniz  $(fg)' = f'g + fg'$  e

la regola della funzione composta  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$

Per una funzione complessa  $f = u + iv$  in un dominio  $U$ , le relazioni tra differenziabilità reale (l'esistenza dei differenziali di  $u$  e  $v$ ), analiticità, equazioni di Cauchy-Riemann e continuità delle derivate prime di  $u$  e  $v$  sono espresse dai seguenti teoremi:

- (1) Le equazioni di Cauchy-Riemann in  $U$  e la continuità delle derivate prime di  $u$  e  $v$  in  $U$  sono condizioni necessarie e sufficienti per l'analiticità di  $f$  in  $U$ .
- (2) Sia  $f$  differenziabile reale. Allora  $f$  è analitica se e solo se le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte in tutto  $U$ .

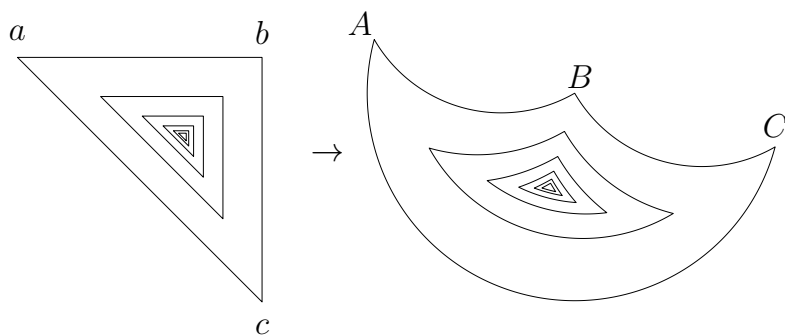
Mentre (1) è facile da dimostrare, (2) non lo è (teorema di Goursat). Un teorema sorprendente che dimostreremo nel seguito è il seguente:

- (3) Se  $f$  è analitica, allora ha derivate complesse di ogni ordine (cioè, se  $f$  è derivabile una volta lo è infinite volte).

### 5.5 Conforme = analitico

Se una trasformazione  $F$  preserva l'angolo, incluso il suo segno, tra qualunque coppia di curve che passano per il punto  $p$ , si dice che la trasformazione è *conforme nel punto  $p$* . Se la trasformazione è conforme in tutti i punti della regione in cui è definita, si dice che la trasformazione è *conforme*. Se il valore numerico dell'angolo è preservato, ma il segno è invertito, la trasformazione è detta *anti-conforme*. Ad esempio,  $z \mapsto \bar{z}$  è anticonforme. Stiro-rotazioni e traslazioni sono conformi (perché sono proprio le trasformazioni di similitudine del piano euclideo, cfr. sezione 1.3, che come è noto dalla geometria elementare, lasciano intatti gli angoli).

Dalla (5.1) segue immediatamente che se una trasformazione è analitica, è anche conforme. Cerchiamo di capire in che senso vale il viceversa. Guardiamo la figura sotto.



Il triangolo finito (non infinitesimo)  $abc$  è trasformato conformemente nel triangolo  $ABC$ : i lati si distorcono, ma gli angoli restano invariati.



Édouard Goursat (1858-1936) è stato un matematico francese. Fu il primo a notare che il teorema generalizzato di Stokes poteva essere scritto nella forma semplice

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega,$$

dove  $\omega$  è una  $p$ -forma e  $\mathcal{R}$  è una regione  $(p+1)$ -dimensionale. Contribuì a rendere esplicite le ipotesi minime per la validità del teorema di Cauchy in analisi complessa.

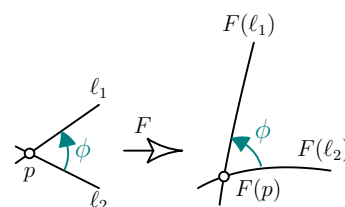


Figura 5.4: Trasformazione conforme.

Si immagini adesso, mediante trasformazione di scala, di comprimere il triangolo  $abc$  verso un punto arbitrario dentro la regione. Mentre facciamo questo, i lati delle immagini dei triangoli diventano sempre più linee rette, mentre gli angoli, ovviamente, non cambiano. Perciò un triangolo infinitesimo a sinistra è trasformato in un triangolo infinitesimo *simile* a destra. Quindi è ottenuto mediante stiro-rotazione dall'originale. Quindi la trasformazione è analitica. Perciò, *se una trasformazione è conforme in un intorno comunque piccolo del punto  $p$ , allora è analitica in  $p$ .* In particolare,

- L'inversione complessa  $z \mapsto 1/z$  è analitica (essendo conforme, cfr. problema 5.2).
- Le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

sono analitiche (essendo conformi, cfr. problema 5.3).

- L'inversione  $z \mapsto 1/\bar{z}$  non è analitica.

Si osservi che una funzione può non essere conforme in un punto, pur avendo derivata complessa in quel punto ed essendo analitica in qualunque intorno di quel punto; per esempio,  $w = f(z) = z^2$  è conforme dappertutto eccetto che nei due punti critici  $z = 0$  e  $z = \infty$ , dove gli angoli sono raddoppiati, ma è derivabile nello 0 ed è analitica in qualunque dominio che contenga lo zero (per  $z = \infty$  non è analitica). In generale:

<p>Una funzione analitica <math>f</math> può non essere conforme nei punti critici della trasformazione, cioè nei punti <math>c</math> in cui <math>f'(c) = 0</math>.</p>	(5.4)
---	-------

### 5.6 Funzioni armoniche

Per essere analitica, la funzione  $f = u + iv$  deve soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

E se queste sono soddisfatte le funzioni  $u$  e  $v$  devono essere *funzioni armoniche*, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x u &= \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \\ \partial_x \partial_x v &= -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v \end{aligned}$$



Quindi

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \Delta v \equiv \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

Le proprietà generali delle funzioni armoniche, sono richiamate nei complementi a questo capitolo (sezione 5.8.1).

È molto istruttivo dedicare un po' di spazio a raccontare la storia di come il legame tra funzioni armoniche e funzioni analitiche fu compreso. Sorprendentemente, questo legame fu intuito quando l'analisi complessa muoveva i suoi primissimi passi e fu scoperto con ragionamenti di fisica-matematica.

Nei suoi saggi sull'idrodinamica del 1757, d'Alembert studia il moto di un corpo che si muove attraverso un fluido ideale incomprimibile e non viscoso. In linguaggio moderno, le equazioni del campo di velocità  $\mathbf{V}$  di tale fluido in condizioni stazionarie sono

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{incomprimibilità})$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (\text{irrotazionalità})$$

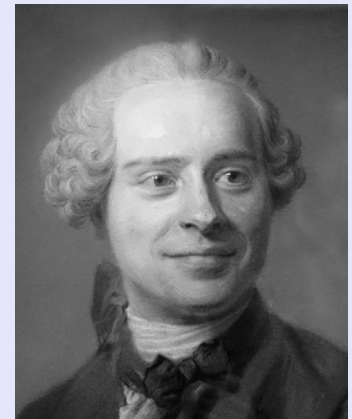
La seconda equazione stabilisce che deve esistere un campo scalare  $u$  (potenziale) tale che  $\mathbf{V} = \nabla u$ , per cui, tenuto conto della prima, essendo

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \equiv \Delta,$$

si conclude che  $u$  deve essere una funzione armonica, cioè deve soddisfare l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Studiando il problema in due dimensioni, d'Alembert si rese conto che per determinare una funzione armonica bastava partire da una "funzione complessa" e prenderne la parte reale. Per capire la scoperta di d'Alembert, occorre tenere presente che per "funzione complessa" d'Alembert e i suoi contemporanei intendevano (senza neanche renderlo esplicito tanto era ovvio per loro) ciò che si ottiene da  $z = x + iy$  applicando una *regola ben definita*; per esempio,  $z^2$  o  $z + 1/z$ , cioè funzioni che oggi sappiamo essere analitiche. (In effetti, come vedremo nel seguito, è proprio  $z + 1/z$  la funzione analitica che fornisce il moto del fluido attorno ad un corpo (di forma circolare) immerso nel fluido, che era il problema fisico che d'Alembert voleva risolvere.)



Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) è stato un fisico e matematico francese. Editore con Diderot dell'Enciclopedia, diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica analitica, della fisica dei fluidi e dei sistemi vibranti. Noto per aver detto "Allez en avant, et la foi vous viendra" a chi riteneva le regole del calcolo differenziale oscure e non rigorose.

## 5.7 PROBLEMI

PROBLEMA 5.1. □ Dimostrare (eventualmente con metodi puramente geometrici) che l'inversione geometrica  $z \mapsto 1/\bar{z}$  è anti-conforme.

PROBLEMA 5.2. □ Dimostrare che l'inversione complessa  $z \mapsto 1/z$  è conforme.

PROBLEMA 5.3. □ Dimostrare che le trasformazioni di Möbius sono conformi. (Si veda il problema 1.12 e i complementi alla fine di questo capitolo).

PROBLEMA 5.4. □ Mostrare che nessuna scelta della funzione reale  $v = v(x, y)$  può rendere la funzione  $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$  analitica.

PROBLEMA 5.5. □ Per  $z \neq 0$ , sia  $f(z) \equiv f(x + iy) = xy/\bar{z}$ .

- (a) Mostrare che  $f(z)$  tende a 0 quando  $z$  tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.
- (b) Avendo stabilito che  $f = 0$  su entrambi gli assi, dedurre che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte nell'origine.

- (c) Malgrado questo, mostrare che  $f$  non è analitica in 0 (lo si mostri in termini di caratterizzazione geometrica: localmente, su vettori infinitesimi nello 0,  $f$  non agisce come una stiro-rotazione)

PROBLEMA 5.6. □ Mostrare che  $f(z) = e^z$  soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e trovare  $(e^z)'$ .

PROBLEMA 5.7. □ Si consideri l'inversione complessa  $I(z) = 1/z$ .

- (a) Se  $z = x + iy$  e  $I = u + iv$ , esprimere  $u$  e  $v$  in termini di  $x$  e  $y$ .
- (b) Mostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte dappertutto eccetto che nell'origine, cosicché  $I$  è analitica ovunque eccetto che nell'origine (è analitica all'infinito?).
- (c) Determinare la matrice Jacobiana e, usando coordinate polari, determinare l'effetto geometrico locale di  $I$ .
- (d) Usare  $f'(z) = \partial_x f$  per mostrare che la derivata è  $-1/z^2$ , come nell'usuale calcolo. Utilizzare questo per confermare il risultato di (c).

## 5.8 COMPLEMENTI

### 5.8.1 Proprietà generali delle funzioni armoniche

L'EQUAZIONE DI LAPLACE nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale

$$\Delta\varphi = 0,$$

dove

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{in coordinate cartesiane})$$

si presenta in questioni di svariata natura. Ogni sua soluzione *regolare* (cioè finita e continua con le sue derivate prime e che ha derivate seconde) in una regione  $\mathcal{R}$  si chiama *funzione armonica* in  $\mathcal{R}$ . Particolarmente rilevanti per la fisica sono i casi  $n = 2$  e  $n = 3$ . Come abbiamo visto, il caso  $n = 2$  è associato con le funzioni analitiche, nel senso che le parti reale e immaginaria di una funzione analitica sono funzioni armoniche. Richiamiamo qui alcuni aspetti del caso  $n = 3$ , cioè dell'equazione di Laplace nello spazio fisico tri-dimensionale.

**TEOREMA DELLA MEDIA.** Una prima ed importante proprietà dell'equazione di Laplace è la seguente: *la media,  $\bar{\varphi}_S$ , dei valori che una funzione armonica  $\varphi$  in  $\mathcal{R}$  assume su di una sfera qualsiasi interna a  $\mathcal{R}$ , è uguale al valore che  $\varphi$  assume al centro di tale sfera.* Vale a dire, se  $P$ ,  $r$  e  $S$  sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e  $\varphi(P)$  è il valore di  $\varphi$  al centro di  $P$ , e se si pone

$$\bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi dS, \quad (5.5)$$

il teorema (della media di Gauss) afferma che  $\bar{\varphi}_S$  è indipendente da  $r$  e precisamente si ha

$$\varphi(P) = \bar{\varphi}_S$$

Per dimostrarlo, assumiamo coordinate sferiche  $r, \theta, \phi$  (con l'usuale convenzione della fisica che  $\theta$  è la co-latitudine e  $\phi$  la longitudine). Allora

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

da cui

$$\bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \varphi(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta$$

Questa quantità, fissato il punto  $P$ , risulterà funzione, al più, di  $r$ . Studiamo come varia questa funzione nella direzione radiale  $\mathbf{n}$ , il versore normale alla sfera, cioè studiamo la derivata direzionale  $\nabla_{\mathbf{n}}$  di  $\bar{\varphi}_S$ ,

$$\nabla_{\mathbf{n}} \bar{\varphi}_S \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{\varphi}_S = \int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS$$

Detta  $V$  la sfera piena,  $\partial V = S$ , usando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi dV = \int_V \Delta \varphi dV = 0$$

perché  $\varphi$  è armonica in  $P$ . Allora  $\bar{\varphi}_S$  è una costante che non dipende dal raggio. Per determinare la costante, passiamo al limite  $r \rightarrow 0$  nella (5.5) ottenendo così

$$\bar{\varphi}_S = \varphi(P),$$



che è quanto si voleva dimostrare.

Un corollario notevole è che:  $\varphi(P)$  è pure la media dei valori che  $\varphi$  assume nei punti interni della sfera  $S$ . Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera  $S$ .

**TEOREMI DEL VALORE MASSIMO E MINIMO.** Un altro corollario molto importante è che: *una funzione armonica  $\varphi$  in una regione  $\mathcal{R}$ , non può avere dentro  $\mathcal{R}$  punti di massimo e di minimo.* Infatti, se nel punto  $P$  interno a  $\mathcal{R}$  vi fosse, per esempio, un massimo, esisterebbe un intorno di  $P$  tale che in tutti i suoi punti sarebbe  $\varphi < \varphi(P)$  e quindi per una sferetta di centro  $P$  interna ad esso si avrebbe  $\bar{\varphi}_S < \varphi(P)$ , contrariamente a quanto è stato appena dimostrato. Il massimo e minimo dei valori di  $\varphi$  dovranno dunque necessariamente trovarsi sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ .

Da questo corollario e dalla continuità di  $\varphi$  segue che: *se  $\varphi$  ha un valore costante su tutta una superficie chiusa  $S = \partial\mathcal{R}$ , allora ha quello stesso valore in tutto lo spazio  $\mathcal{R}$  interno ad  $S$ .* In particolare, se  $\varphi$  è zero sul bordo di  $\mathcal{R}$ , allora è zero in tutto  $\mathcal{R}$ .

**UNICITÀ DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE.** Vista la grande importanza di quest'ultimo teorema, ne diamo un'altra dimostrazione che si presta meglio a generalizzazioni. Applichiamo il teorema della divergenza al campo  $\mathbf{F} = \varphi\nabla\varphi$ , ottenendo

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS,$$

e ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) = \varphi \nabla \cdot \nabla\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = \varphi \Delta\varphi + (\nabla\varphi)^2$$

e che  $\Delta\varphi = 0$  in  $\mathcal{R}$ , se ne deduce che

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla\varphi)^2 dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se, ora,  $\varphi = 0$  su tutto il bordo  $\partial\mathcal{R}$ , il secondo integrale si annullerà e si avrà

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla\varphi)^2 dV = 0 \quad (5.6)$$

e quindi, poiché la funzione integranda non può mai essere negativa,

$$\nabla\varphi = 0 \quad \text{ossia} \quad \varphi = \text{cost.} \quad (\text{in } \mathcal{R})$$

Si può ora dimostrare il teorema di unicità: *se di una funzione  $\varphi$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è univocamente determinata in tutto  $\mathcal{R}$ .* Infatti, supponiamo che esistano due funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , regolari, armoniche dentro  $\mathcal{R}$  e con lo stesso valore assegnato  $g$  sul bordo,

$$\varphi_1|_{\partial\mathcal{R}} = \varphi_2|_{\partial\mathcal{R}} = g.$$

Allora, poiché  $\Delta\varphi_1 = 0$  e  $\Delta\varphi_2 = 0$ , anche la loro differenza  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  sarà armonica: sarà  $\Delta\psi = 0$  dentro  $\mathcal{R}$  e  $\psi$  si annullerà sul bordo. Per il teorema precedente  $\psi = 0$ , cioè  $\varphi_1 = \varphi_2$ , la soluzione è unica, che è quanto si voleva dimostrare.

PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN. Il problema di determinare una funzione  $\varphi$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori che assume sul contorno di  $\mathcal{R}$ , va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. In altre parole il problema è risolvere il problema al contorno

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ \varphi &= g & \text{in } \partial\mathcal{R}\end{aligned}$$

Il teorema precedente ci dice che il problema non può ammettere più di una soluzione. Ben più difficile è dimostrare che esista una soluzione. Al riguardo, in fisica si tende ad utilizzare il metodo costruttivo di Green. Questo metodo verrà studiato nel corso di MMF 2. In una lezione seguente si risolverà in maniera completa e rigorosa il problema di Dirichlet nel piano.

Servendosi della (5.6) è pure possibile dare un altro teorema di unicità [esercizio]: *se di una funzione  $\varphi$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori della sua derivata normale  $\nabla_{\mathbf{n}}\varphi$  sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è determinata in tutto  $\mathcal{R}$  a meno di una costante additiva arbitraria.*

Il problema di determinare una funzione  $\varphi$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori della sua derivata normale sul contorno, va sotto il nome di *problema di Neumann*.

Il senso dei due problemi risulta chiaro se si fa riferimento all'elettrostatica: il problema di Dirichlet equivale a determinare il potenziale elettrostatico in una regione di spazio priva di cariche quando è assegnato il potenziale sul bordo della regione: chiaramente la soluzione è unicamente determinata dai valori del potenziale sul bordo. Il problema di Neumann corrisponde a determinare il potenziale in una situazione analoga, quando però sul bordo (immaginiamo una superficie conduttrice) è assegnato il campo elettrico (che è normale alla superficie conduttrice). In questo caso, è chiaro che il potenziale è determinato a meno di una costante additiva arbitraria.

### 5.8.2 Inversione geometrica

La funzione complessa

$$\mathcal{I} : z \mapsto \tilde{z} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (5.7)$$

trasforma un generico punto del piano  $P$  con coordinata complessa  $z = re^{i\theta}$  nel punto  $\tilde{P}$  individuato da

$$\tilde{z} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$$

Si ha così che *punti  $P$  e  $\tilde{P}$  corrispondenti sono allineati con l'origine  $O$  e tali che si abbia*

$$|\overrightarrow{O\tilde{P}}| |\overrightarrow{OP}| = 1,$$

il che permette di definire la corrispondenza in questione indipendentemente dalle funzioni di variabili complesse. È chiaro che tutti i punti del cerchio  $\mathbb{T}$  di raggio 1 sono trasformati in se stessi, che tutti i punti interni a  $\mathbb{T}$  sono trasformati in punti esterni (e viceversa) e che all'origine  $O$  corrisponde il punto all'infinito.

Questa trasformazione è nota in geometria come *inversione geometrica rispetto al cerchio  $\mathbb{T}$*  o anche *trasformazione per raggi vettori reciproci*. Il punto  $O$  è detto *centro di inversione* e il punto  $\tilde{P}$  si dice *immagine di  $P$  rispetto a  $\mathbb{T}$* . Questa trasformazione è anche utilizzata in elettrostatica per risolvere problemi mediante il metodo delle immagini.

La proprietà più notevole di questa corrispondenza è che essa trasforma cerchi in cerchi, purché anche le rette si considerino come dei cerchi di raggio infinito e passanti per il punto all'infinito. Lo si può vedere in maniera analoga al caso  $z \mapsto 1/z$  trattato in S.1.12: nella generica equazione di un cerchio,

$$\alpha|z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0, \tag{5.8}$$

sostituiamo  $\tilde{z} = 1/\bar{z}$ ,

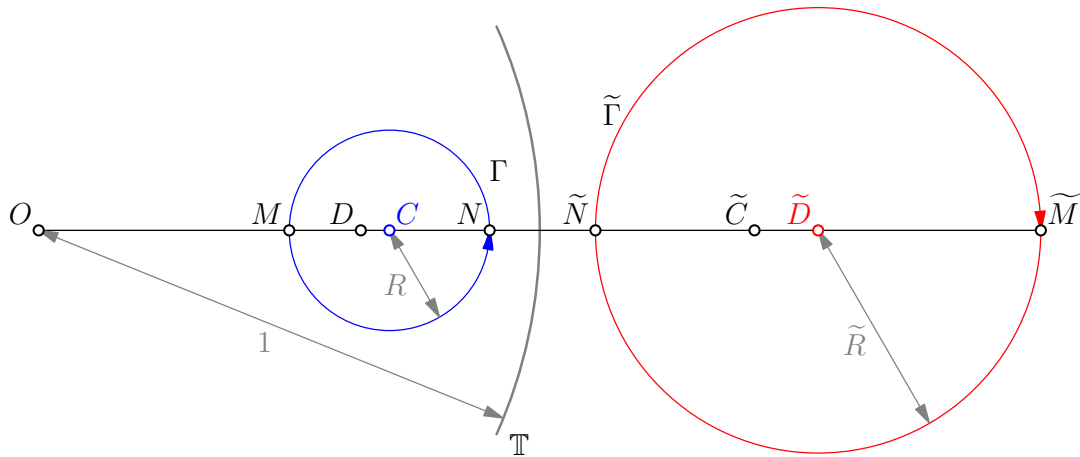
$$\alpha \frac{1}{|\tilde{z}|^2} + \beta\left(\frac{1}{\tilde{z}} + \frac{1}{\bar{\tilde{z}}}\right) + i\gamma\left(\frac{1}{\tilde{z}} - \frac{1}{\bar{\tilde{z}}}\right) + \delta = 0,$$

quindi moltiplichiamo per  $|\tilde{z}|^2 = \tilde{z}\bar{\tilde{z}}$ ,

$$\alpha + \beta(\tilde{z} + \bar{\tilde{z}}) + i\gamma(\tilde{z} - \bar{\tilde{z}}) + \delta|\tilde{z}|^2 = 0,$$

che è ancora ancora un'equazione della forma (5.8).

**INVERSIONE DI UN CERCHIO.** Nell'inversione  $\mathcal{I}$ , un cerchio  $\Gamma$  di raggio  $R$  si trasforma in un cerchio  $\tilde{\Gamma}$ , ma il centro  $C$  del primo non si trasforma nel centro  $\tilde{D}$  del secondo. Possiamo vedere quale punto  $D$  interno a  $\Gamma$  si trasforma nel centro  $\tilde{D}$  di  $\tilde{\Gamma}$ . Si consideri la figura:



Sia  $O$  il punto di inversione e  $\tilde{C}$  il trasformato di  $C$ : i punti  $C, \tilde{C}, D$  e  $\tilde{D}$  saranno allineati con  $O$  e la  $OC$  taglierà  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  in punti, pure corrispondenti,  $M$  e  $\tilde{M}$ ,  $N$  e  $\tilde{N}$ . Se indichiamo con  $a$  la distanza  $OC$  del centro di  $\Gamma$  da  $O$ , possiamo scrivere

$$O\tilde{M} = \frac{1}{OM} = \frac{1}{a - R}, \quad O\tilde{N} = \frac{1}{a + R}$$

e quindi

$$\tilde{R} = \frac{O\tilde{M} - O\tilde{N}}{2} = \frac{R}{a^2 - R^2}, \quad O\tilde{D} = O\tilde{N} + \tilde{R} = \frac{a}{a^2 - R^2}, \quad OD = \frac{1}{O\tilde{D}} = a - \frac{R^2}{a}$$

Si avrà così per la distanza dal centro  $C$  di  $\Gamma$  del punto  $D$

$$DC = a - OD = \frac{R^2}{a}$$

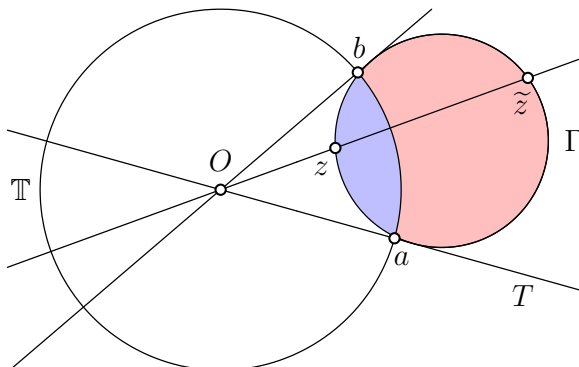
Il punto  $D$  è dunque l'immagine di  $O$  rispetto a  $\Gamma$ .

COSTRUIRE PUNTI INVERSI USANDO CERCHI ORTOGONALI. Vale la proposizione seguente:

Nell'inversione  $\mathcal{I}$ , ogni cerchio ortogonale a  $\mathbb{T}$  è trasformato in se stesso.

(5.9)

Per capire perchè, si consideri la figura sotto.



Il cerchio  $\Gamma$  taglia il cerchio di inversione  $\mathbb{T}$  ad angolo retto nei punti  $a$  e  $b$ . In altre parole, la tangente  $T$  (per esempio) in  $a$  passa per  $O$ . Nell'inversione  $a$  e  $b$  non cambiano e la tangente  $T$  è trasformata in se stessa. Perciò l'immagine di  $\Gamma$  deve essere ancora un cerchio che passa per  $a$  e  $b$  e che è anch'esso ortogonale a  $\mathbb{T}$ . Ma chiaramente c'è solo un cerchio con queste proprietà, cioè  $\Gamma$  stesso. Fine della dimostrazione della (5.9).

La figura sopra illustra due importanti conseguenze della (5.9). Primo, il disco limitato da  $\Gamma$  è anch'esso trasformato in se stesso e le regioni in blu e rosso sono scambiate dall'inversione. Secondo, una retta da  $O$  ad un punto  $z$  su  $\Gamma$  interseca  $\Gamma$  per la seconda volta nel punto inverso  $\tilde{z} = \mathcal{I}(z)$ .

### 5.8.3 Il gruppo delle trasformazioni di Möbius

La trasformazione

$$z \mapsto w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

è iniettiva e surgettiva: dato  $w$ , esiste (uno e uno solo)  $z$  che è trasformato in  $w$ . Questo si mostra esplicitamente calcolando la trasformazione inversa:

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

$M$  è detta normalizzata se  $ad - bc = 1$ . Si osservi che se  $M$  è normalizzata, anche  $M^{-1}$  lo è.

Si consideri  $M = M_2 \circ M_1$ , dove

$$M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad \text{e} \quad M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

Si verifica facilmente che anche  $M$  è una trasformazione di Möbius, cioè della forma

$$M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

(non è algebricamente ovvio che se  $M_1$  e  $M_2$  sono non-singolari anche  $M$  è non singolare, cioè  $AD - BC \neq 0$ . Tra poco vedremo un approccio algebrico che rende questo ovvio.)

Morale: *Le trasformazioni di Möbius non singolari formano un gruppo.* Questo perché:

1. La trasformazione identica  $E(z) = z$  appartiene all'insieme.
2. La composizione di due elementi dell'insieme fornisce un elemento dell'insieme.
3. Ogni membro dell'insieme ha un inverso che è anch'esso nell'insieme.

□

Si osservi che i coefficienti  $a, b, c$  e  $d$  di una trasformazione di Möbius non sono unici. Se  $k$  è una costante non nulla,  $ka, kb, kc$  e  $kd$  definiscono la stessa trasformazione.

LE TRASFORMAZIONI DI MÖBIUS COME GRUPPO DI MATRICI. Consideriamo la corrispondenza

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si osservi che da destra a sinistra c'è unicità, ma non viceversa:  $k[M]$  e  $[M]$  corrispondono alla stessa trasformazione  $M$ . Se  $M$  è normalizzata,  $ad - bc = 1$ , allora  $[M]$  è unica a meno di un segno:  $[M]$  e  $-[M]$  danno la stessa trasformazione di Möbius. Questo ha un profondo significato fisico su cui torneremo più avanti nel corso. Si hanno le corrispondenze seguenti:

$$(i) [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$(iii) [M^{-1}] = [M]^{-1}$$

$$(iv) [M_2 \circ M_1] = [M_2][M_1]$$

La (ii) mostra che  $[M]$  ha inverso sse  $\det([M]) = ad - bc$  è non nullo. Dalla (iii) segue immediatamente che se  $[M_2]$  e  $[M_1]$  sono non singolari (determinante non nullo), allora anche  $[M_2 \circ M_1]$  è non singolare (perché  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ).

Questo gruppo di matrici è di solito chiamato  $GL(2, \mathbb{C})$ . Le trasformazioni di Möbius normalizzate formano un sottogruppo (perché?) e il gruppo di matrici corrispondente è un sottogruppo di  $GL(2, \mathbb{C})$ , di solito chiamato  $SL(2, \mathbb{C})$ .



## 6

# Teorema di Cauchy

### 6.1 Integrazione

Sull'integrazione complessa in quanto tale c'è poco da dire. Anche se non sembra, è già nota: dato un cammino regolare  $C$  nel piano complesso dal punto  $z_1$  al punto  $z_2$ , e una funzione complessa  $f(z) = u + iv$ , l'integrale di linea si  $f$  lungo  $C$ ,

$$\int_C f(z) dz,$$

è

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx. \quad (6.1)$$

La nozione di integrale di una funzione complessa è dunque ricondotta a quella di integrale di linea nel piano, che si assume noto dall'analisi reale. Le nozioni di continuità della curva e di regolarità sono le stesse sia che si guardi il piano come  $\mathbb{C}$  sia come  $\mathbb{R}^2$ .

C'è invece molto da dire sulla (6.1). Innanzi tutto, la riscriviamo in modo che il suo significato geometrico sia manifesto. Si introduca il campo vettoriale

$$\bar{\mathbf{f}} = (u, -v). \quad (6.2)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_C u dx - v dy &= \int_C u dx + (-v) dy = \int_C \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} \equiv \mathbf{t} ds = (dx, dy) \\ \int_C u dy + v dx &= \int_C u dy + (-v)(-dx) = \int_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{n} ds = (dy, -dx) \end{aligned}$$

In queste formule,  $ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  è la lunghezza di un arco di curva infinitesimo;  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  sono rispettivamente il versore tangente e il versore normale alla curva.

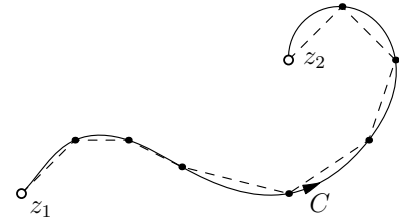


Figura 6.1: Più precisamente, la (6.1) è definita come limite di somme di Riemann:

$$I_N = \sum_i^N f(z_i) \Delta z_i = \text{Re } I_N + i \text{Im } I_N,$$

dove le parti reale e immaginaria di  $I_N$  convergono agli integrali di linea reali a secondo membro della (6.1).

In coordinate polari il significato geometrico di  $fdz$  è ancora più trasparente. Siano  $\beta$  e  $\alpha$  gli angoli di  $f$  e  $dz$  rispettivamente, allora

$$fdz = fe^{i\beta}e^{i\alpha}ds.$$

Detto  $\theta$  è l'angolo tra  $\bar{f}$  e  $dz$ , si vede facilmente dalla figura figura 6.2 che

$$fe^{i\beta}e^{i\alpha}ds = |\bar{f}|e^{i\theta}ds,$$

e quindi che

$$\begin{aligned} fdz &= \left[ |\bar{f}| \cos \theta + i|\bar{f}| \sin \theta \right] ds \\ &= \left[ \bar{f} \bullet \mathbf{t} + \bar{f} \bullet \mathbf{n} \right] ds \\ &= \bar{f} \bullet d\mathbf{r} + \bar{f} \bullet \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

Riassumendo,

$$\int_C f(z)dz = \int_C \bar{f} \bullet d\mathbf{r} + i \int_C \bar{f} \bullet \mathbf{n} ds. \quad (6.3)$$

## 6.2 Campo vettoriale associato ad una funzione complessa

La ragione per cui alla  $f$  risulta associato NON il campo  $\mathbf{f} = (u, v)$ , ma il campo *coniugato*  $\bar{f} = (u, -v)$  è l'invarianza per rotazioni del prodotto scalare complesso (1.6). Data una funzione  $f = u + iv$ , la quantità invariante per rotazioni è  $f \bullet dz = \bar{f}dz$  e non  $fdz$ . Ha quindi significato geometrico invariante

$$f \bullet dz = (u - iv)(dx + idy) = udx + vdy + i(udy - vdx) = \mathbf{f} \bullet d\mathbf{r} + i\mathbf{f} \bullet \mathbf{n} ds,$$

da cui

$$\int_C \bar{f}dz = \int_C f \bullet dz = \int_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{r} + i \int_C \mathbf{f} \bullet \mathbf{n} ds,$$

che è esattamente la (6.3) con  $f$  e  $\bar{f}$  scambiati di ruolo.

Sia come sia, entrambe le associazioni  $f \leftrightarrow \mathbf{f}$  e  $f \leftrightarrow \bar{f}$  sono legittime e ammissibili, ma la seconda risulta essere quella *naturale*.<sup>1</sup> Come vedremo nel seguito, le linee di forza (o di flusso) del campo  $\bar{f}$  permettono la visualizzazione più profonda e utile della funzione  $f$ , mettendone in evidenza proprietà altrimenti nascoste (questo risulterà più chiaro nel seguito), soprattutto quando si considera l'integrazione di funzioni complesse lungo curve chiuse. Due esempi di ritratti di fase di campi di funzioni complesse sono dati nelle figure 6.3 e 6.4.

Infine, osserviamo che la rappresentazione di una funzione complessa mediante il ritratto di fase di un campo vettoriale non solo va

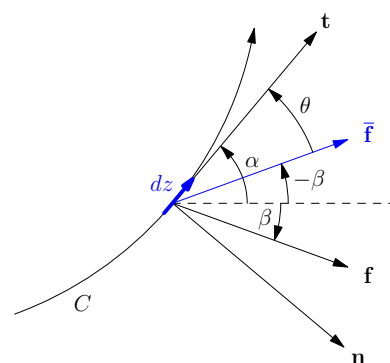


Figura 6.2: Relazioni angolari tra  $\bar{f}, f, t, n$  e  $d\mathbf{r}$ .

<sup>1</sup> Forzando un po' la mano, si potrebbe anche parlare di *campo*  $\bar{f}$  associato alla *funzione*  $f$ , ma col seguente avvertimento: per "campo  $\bar{f}$ " si deve intendere  $\bar{f}$  NON come funzione complessa, ma come funzione vettoriale reale che ha  $u$  come componente  $x$  e  $-v$  come componente  $y$ .



incontro alla concretezza fisica, ma anche a quella matematica: getta un ponte tra la teoria delle funzioni complesse e quella dei sistemi dinamici con spazio delle fasi il piano (cioè sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine).

### 6.3 Circuitazione e Flusso

Consideriamo adesso il caso in cui il cammino d'integrazione sia un circuito, descritto da una curva *regolare* (= la tangente esiste) *semplice* (= non ci sono intersezioni) e *chiusa*  $C$ , come in figura 6.5. In particolare, questo significa che la regione di piano  $\mathcal{R}$  racchiusa da  $C$  è *semplicemente* connessa. Allora

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{t} ds + i \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds \quad (6.4)$$

I due integrali a secondo membro della (6.4) sono noti: il primo è la circuitazione di  $\bar{\mathbf{f}}$  lungo la curva chiusa  $C$ ,

$$\text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{r}. \quad (6.5)$$

Per il il teorema di Green-Stokes,

$$\text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{S}, \quad (6.6)$$

dove  $d\mathbf{S}$  è il vettore "elemento infinitesimo di superficie nel piano che è sempre parallelo alla direzione verticale (immaginando il piano complesso identificato con il piano  $xy$  dello spazio tridimensionale), e quindi sempre nella stessa direzione di  $\nabla \times \bar{\mathbf{f}}$ . Questi due vettori possono avere, al più una discordanza di verso, e quindi

$$\nabla \times \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{S} = \pm |\nabla \times \bar{\mathbf{f}}| dS.$$

Il secondo integrale della (6.4) è il flusso di  $\bar{\mathbf{f}}$  attraverso la curva chiusa  $C$ ,

$$\text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \bar{\mathbf{f}} dS,$$

dove  $dS$  è l'elemento infinitesimo di area (l'analogo in due dimensioni del volume). Per la seconda uguaglianza è stato usato il teorema di Gauss in due dimensioni. (Siamo in due dimensioni e il bordo di una regione è una curva chiusa: si veda la figura 6.9 più avanti, che mostra che si tratta proprio del flusso attraverso la superficie laterale del cilindro con base  $C$ , quando si identifica il piano complesso con il piano  $xy$  dello spazio tri-dimensionale.) In definitiva,

$$\oint_C f(z)dz = \text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C) \quad (6.7)$$

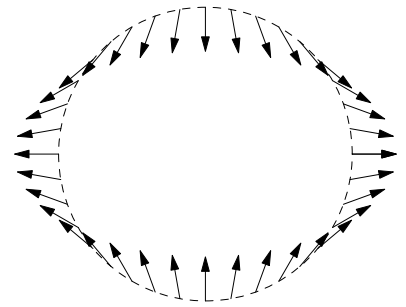


Figura 6.3: Ritratto di fase del campo della funzione  $z \mapsto z$ , cioè del campo vettoriale  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ , equivalentemente, del campo vettoriale  $f(z) = \bar{z}$ . Sono stati disegnati solo i vettori del campo per punti sul cerchio unitario.

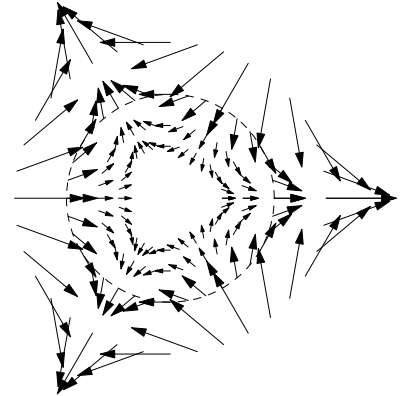


Figura 6.4: Ritratto di fase del campo della funzione  $z \mapsto z^2$  cioè del campo  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, -2xy)$  (cfr. sezione 5.1), equivalentemente, del campo vettoriale  $f(z) = \bar{z}^2$ . Sono stati disegnati i vettori del campo per diverse distanze dall'origine. La proprietà nascosta nelle altre visualizzazioni, ma qui del tutto manifesta, è l'invarianza per rotazioni di  $\pi/3$ .

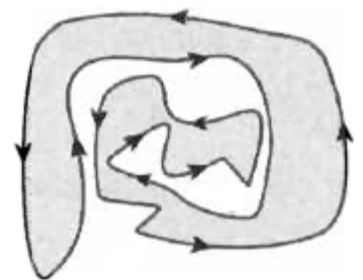


Figura 6.5: Curva regolare semplice che racchiude una regione semplicemente connessa.

Siamo così in grado di calcolare integrali di funzione complesse lungo curve chiuse con metodi noti: basta calcolare circuitazione e flusso del loro campo coniugato.

È inteso che nella (6.7) l'orientamento della curva  $C$  è positivo. Ricordiamo la convenzione sull'orientamento positivo: si dice che il bordo  $C$  di una regione  $\mathcal{R}$  è percorso in *sensu o verso positivo* se camminando lungo quella direzione, la regione risulta sempre a sinistra. Per un cerchio la direzione positiva risulta essere quella anti-oraria. La normale  $\mathbf{n}$  è la *normale diretta verso l'esterno*, e quindi a destra di chi cammina lungo  $C$ .

La (6.7) vale anche per il contorno  $C = \partial\mathcal{R}$  di una regione molteplicemente connessa  $\mathcal{R}$ , cioè quando il contorno (o bordo) della regione è l'unione di più curve semplici,  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$  (figura 6.6). In questo caso, l'orientamento positivo di  $C$  è ancora fissato dalla regola ricordata sopra: questo richiede che le curve "interne", come  $C_2$  e  $C_3$  in figura 6.6, siano percorse in senso orario (per avere la regione a sinistra).

È utile rendere manifesta la natura algebrica dei cammini ed esprimere una curva chiusa che delimita una regione molteplicemente connessa come *somma algebrica* delle curve che la delimitano piuttosto che come unione: se la curva semplice  $C$  è percorsa in senso anti-orario, scriveremo  $+C$  o semplicemente  $C$ , e se è percorsa in senso orario, scriveremo  $-C$ . Per esempio, per la curva  $C$  (non semplice) che delimita la regione  $\mathcal{R}$  in figura 6.6, si ha

$$C = C_1 - C_2 - C_3.$$

Per gli integrali vale allora la seguente regola

$$\oint_{a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots} = a_1 \oint_{C_1} + a_2 \oint_{C_2} + \dots,$$

dove  $a_1, a_2, \dots$  possono assumere i valori  $\pm 1$ .

ESEMPIO. Vediamo la (6.7) in un caso semplice. Calcoliamo

$$\oint_C \bar{z} dz$$

per  $C$  curva chiusa attorno all'origine. Il campo coniugato associato a  $f(z) = \bar{z}$  è  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ . La circuitazione è chiaramente zero, ma il flusso è positivo (escono più linee di forza, di quante ne entrino). In effetti, si ha

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$\nabla \bullet \mathbf{r} = 2$$

Quindi

$$\oint_C \bar{z} dz = 2 \iint_{\mathcal{R}} dS = 2iA(C)$$

dove  $A(C)$  è l'area della regione di piano racchiusa da  $C$ .

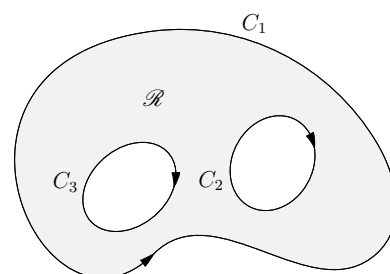


Figura 6.6:  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . L'orientamento di  $C$  è positivo se  $C_1$  è percorso in senso antiorario, e  $C_2, C_3$  in senso orario.

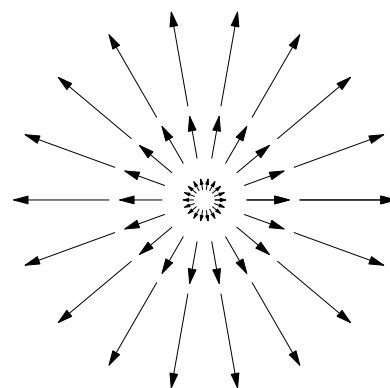


Figura 6.7: Linee di forza del campo vettoriale  $z \leftrightarrow \mathbf{r}$  associato alla funzione complessa  $z \mapsto \bar{z}$ . dal disegno è ovvio che la sua circuitazione è nulla. Il suo flusso attraverso un cerchio di raggio  $R$  è pari alla sua divergenza costante, uguale a 2,  $\times$  l'area della regione racchiusa dal cerchio. Quindi  $\text{FLUSSO} = 2\pi R^2$ .

#### 6.4 Significato fisico delle funzioni analitiche

Sorprendentemente, come aveva già intravisto d'Alembert, si ha:

FUNZIONI ANALITICHE = CAMPI SOLENOIDALI E IRROTAZIONALI NEL PIANO, vale a dire:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il campo vettoriale coniugato della funzione complessa } H \text{ è} \\ \text{solenoidale (divergenza nulla) e irrotazionale (rotore nullo) sse} \\ H \text{ è analitica.} \end{array}} \quad (6.8)$$

Questa proposizione è molto importante e la sua verifica è un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{f}} &= \partial_x(-v) - \partial_y u = -(\partial_x v + \partial_y u) \\ \nabla \bullet \bar{\mathbf{f}} &= \partial_x u + \partial_y(-v) = \partial_x u - \partial_y v \end{aligned}$$

Quindi, divergenza e rotore si annullano se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann.

Questo significa che possiamo attribuire alle funzioni analitiche un significato fisico diretto e trasferire ad esse le conoscenze fisiche al riguardo.

**ELETTROSTATICA.** Consideriamo il campo elettrico  $\mathbf{E}$  nel piano in condizioni stazionarie, e quindi governato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{ovunque} \\ \nabla \bullet \mathbf{E} &= 0 \quad \text{dove non ci sono cariche} \end{aligned}$$

Al campo elettrico  $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$  è quindi associata la funzione analitica  $f(z) = E_x - iE_y$ . Per la legge di Gauss si ha

$$\text{FLUSSO}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} \, ds = 2\pi \sum_i q_i$$

La scelta di  $2\pi$  a secondo membro è per avere

$$\frac{q}{r} \mathbf{e}_r = \frac{q}{r} (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \quad (6.9)$$

come campo prodotto da una carica puntiforme  $q$  posta nell'origine.

La funzione complessa associata al campo elettrico prodotto da una carica  $q$  posta nell'origine è dunque

$$\frac{q}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{q e^{-i\theta}}{r} = \frac{q}{z}$$

**MAGNETOSTATICA.** Equazioni per il campo magnetico in condizioni stazionarie:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \quad \text{dove non ci sono correnti} \\ \nabla \bullet \mathbf{B} &= 0 \quad \text{ovunque (non ci sono cariche magnetiche)} \end{aligned}$$

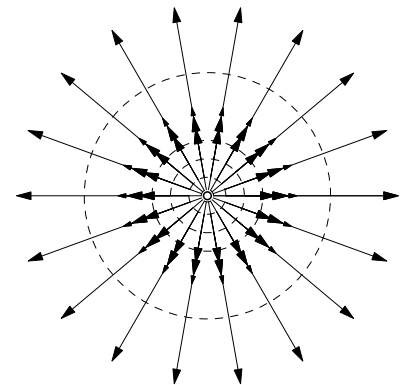


Figura 6.8: Linee di forza del campo elettrico generato da una carica nel piano. L'origine è una SORGENTE.

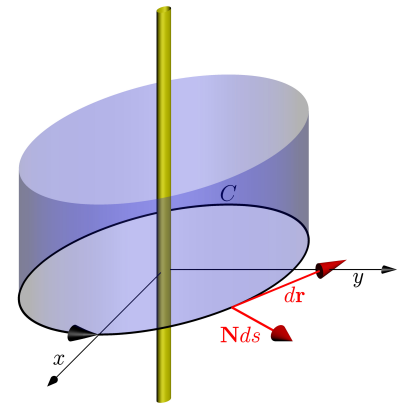


Figura 6.9: Le cariche elettriche nel piano vanno pensate come le sezioni di fili indefiniti, perpendicolari al piano, con densità lineare di carica costante, come mostrato in figura. Il campo elettrico generato da una carica nel piano va dunque come  $1/r$  e non come  $1/r^2$ .

Possiamo procedere come prima, ma adesso i ruoli di circuitazione e flusso si scambiano: abbiamo cariche di "circuitazione", cioè correnti  $I$ , e linee di flusso prive di pozzi e sorgenti.

Il campo generato da una corrente  $I$  lungo un filo infinitamente sottile passante per l'origine e perpendicolare al piano (cfr. figura 6.10) è

$$\frac{I}{r} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y)$$

per cui la sua funzione complessa (coniugata) associata è

$$-i \frac{I}{z} = I \frac{e^{-i(\theta+\pi/2)}}{r}$$

FLUIDO PERFETTO STAZIONARIO. Equazioni per il campo di velocità del fluido:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= 0 \quad \text{dove non ci sono vortici} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \quad \text{dove non ci sono pozzi o sorgenti} \end{aligned}$$

Per "cariche" (pozzi o sorgenti e vortici) puntiformi, oltre alle linee di flusso già viste per campi elettrici e magnetici, adesso sono anche possibili configurazioni tipo quella in figura 6.11, per cui l'origine è sia una sorgente sia un vortice.

### 6.5 Teorema di Cauchy

Questo teorema stabilisce quanto segue:

Sia  $f(z)$  analitica in una regione  $\mathcal{R}$  e sul suo bordo  $C$ . Allora

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

(6.10)

È il teorema più importante dell'analisi complessa, ma, sorprendentemente, risulta automaticamente dimostrato sulla base di quanto è stato esposto finora. Grazie alla (6.8), e ai teoremi di Gauss e Ampère (e di Green e Stokes) noti dalla fisica e dall'analisi reale, non è richiesto alcun sforzo ulteriore per dimostrarlo.

### 6.6 Formula di Cauchy

Ritorniamo alla (6.9). Se nel piano ci sono altre cariche, per il campo elettrico totale si ha

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{E}_{ext}$$

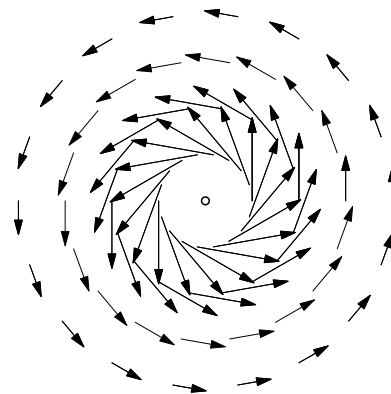


Figura 6.10: Linee di forza del campo magnetico generato da una corrente elettrica che scorre lungo un filo indefinito perpendicolare al piano. L'origine è un vortice.

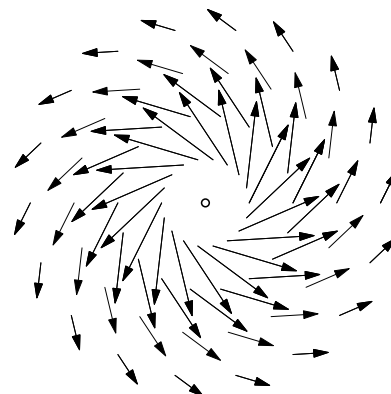


Figura 6.11: Linee di forza di un fluido in moto vorticoso attorno all'origine. L'origine è sia sorgente sia vortice.

dove  $\mathbf{E}_{ext}$  è il campo generato dalle cariche esterne. Detta  $g(z)$  la funzione associata a  $\mathbf{E}_{ext}$ , la funzione complessa associata a  $\mathbf{E}$  è

$$\frac{q}{z} + g(z) = \frac{q + zg(z)}{z}$$

Se prendiamo una curva  $C$  che racchiude solo l'origine, per la legge di Gauss abbiamo

$$\text{FLUSSO}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi q$$

In generale

$$\oint_C f(z) dz = \text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C)$$

ma nel nostro caso la circuitazione CIRCUITAZIONE è zero, quindi

$$\oint_C \frac{q + zg(z)}{z} dz = 2\pi i q \quad (6.11)$$

Osserviamo che  $g(z)$  è analitica (perché è il campo elettrico generato da cariche fuori da  $C$ ), ma per il resto è arbitraria. Quindi quello che abbiamo a numeratore della funzione integranda è una funzione analitica  $f(z)$  nella regione racchiusa da  $C$  tale che  $f(0) = q$ , che è la quantità che compare a secondo membro moltiplicata per  $2\pi i$ . Quindi, facendo astrazione dal significato fisico, quello che abbiamo è

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z} = 2\pi i f(0)$$

Aver posto la carica nell'origine era del tutto arbitrario, l'avessimo posta in un generico punto  $p$  avremmo ottenuto

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p)} \quad (6.12)$$

Questa formula è nota come *formula di Cauchy* e vale sotto l'ipotesi che  $f(z)$  sia analitica all'interno e lungo una curva semplice chiusa  $C$ ;  $p$  è un punto qualsiasi all'interno di  $C$ . Anche questa è una pietra miliare dell'analisi complessa e nel seguito vedremo come molte proprietà delle funzioni analitiche sono conseguenza di questa formula.

Il fatto che nel caso considerato  $q$  sia reale non è essenziale: la formula vale anche per  $q$  complesso. Vista la sua importanza, diamo della (6.12) anche una dimostrazione diretta. Sia

$$H(z) = \frac{f(z)}{z-p}$$

dove  $f(z)$  è analitica. Poiché  $H(z)$  è analitica eccetto che in  $p$ , rotore e divergenza del campo  $\bar{H}$  saranno nulli ovunque eccetto che in  $p$ . Perciò se  $C$  è un un circuito attorno a  $p$ , tutto il flusso e circolazione emanano da un piccolo intorno di  $p$ . Se  $f(p) = A + iB$ , in questo piccolo intorno (piccolo a piacere) avremo

$$\bar{H} = \frac{A - iB}{\bar{z} - \bar{p}} = A \frac{1}{\bar{z} - \bar{p}} - B \frac{i}{\bar{z} - \bar{p}},$$

da cui

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz &= \text{CIRCUITAZIONE } (\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{ FLUSSO } (\bar{\mathbf{f}}, C) \\ &= -2\pi B + i2\pi A = 2\pi i f(p). \end{aligned}$$

Se questa dimostrazione sembra troppo veloce, si veda la figura 6.12 e si proceda come segue.

Sia  $C_\epsilon$  un piccolo cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda il punto  $p$ . Nella regione del piano tra la curva  $C$  e la curva  $\Gamma$  la funzione

$$\frac{f(z)}{z-p}$$

è analitica. Il bordo di questa regione è  $C - C_\epsilon$ . Allora, per teorema di Cauchy, si ha

$$\oint_{C-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz + \oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = 0$$

Quindi

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = - \oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = \oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz.$$

Ma il cerchio  $C_\epsilon$  può essere preso con raggio arbitrariamente piccolo. Allora

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz \approx f(p) \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p},$$

con “ $\approx$ ” che diventa “ $=$ ”, nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Calcoliamo l’integrale a secondo membro, tenuto conto che  $z-p = \epsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p} = \int_0^{2\pi} \frac{d(p + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Conclusione (nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p)$$

che era proprio quello che si voleva dimostrare.

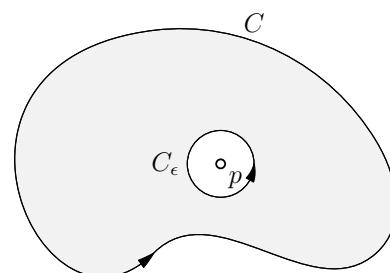


Figura 6.12:  $C_\epsilon$  è un piccolo cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda un qualunque punto  $p$  nella regione delimitata da  $C$ .

## 6.7 PROBLEMI

PROBLEMA 6.1. □ Usando il teorema di Cauchy (e non la formula), dimostrare direttamente che

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

dove  $C$  è una qualunque curva chiusa che circonda l'origine.

*Aiuto:* si proceda come nell'ultima dimostrazione della formula di Cauchy data nella sezione 6.6.

PROBLEMA 6.2. □ Dimostrare che

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = 0$$

dove  $C$  è una qualunque curva chiusa che contenga i punti  $i$  e  $-i$ .

*Aiuto:* Dopo aver decomposto la funzione integranda in somma di fratti semplici, la si interpreti fisicamente in termini dei campi vettoriali coniugati ad essa associati. Quindi si proceda ad una verifica analitica usando la formula di Cauchy.

PROBLEMA 6.3. □ Sia  $J_R$  l'arco di raggio  $R$  centrato nell'origine e che va dal punto  $R$  al punto  $-R$ . Calcolare al prim'ordine in  $1/R$  l'integrale

$$\int_{J_R} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

(N.B.  $C$  non è una curva chiusa.)

PROBLEMA 6.4. □ Sia  $L_R$  il cammino da  $-R$  a  $R$  sull'asse reale. Calcolare al prim'ordine in  $1/R$  l'integrale

$$\int_{L_R} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

PROBLEMA 6.5. □ Mostrare che dai due problemi precedenti risulta verificata l'uguaglianza (perlomeno al prim'ordine  $1/R$ )

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi.$$

dove  $C_R = J_R + L_R$ .

PROBLEMA 6.6. □ Si consideri

$$I_n = \oint_C \frac{dz}{z^n},$$

dove  $C$  è una qualunque curva chiusa che racchiude l'origine.

- Mostrare che per  $n \geq 2$  si ha  $I_n = 0$ .
- Fornire una spiegazione fisica dell'annullarsi di  $I_2$ , associando a  $1/z^2$  il campo di un dipolo (si avvicinino l'una all'altra due cariche di segno opposto tenendo costante il momento di dipolo  $p = qd$ , dove  $d$  è il raggio vettore da una carica all'altra).
- Estendere la spiegazione fisica ad ogni  $n > 2$ .

*Morale.* Se  $C$  è una qualunque curva chiusa che racchiude il punto  $p$  (poiché l'origine non è speciale e quel che vale per cammini intorno ad essa vale per cammini intorno a qualunque altro punto), allora

- $\oint_C (z - p)^n dz = 0$  per  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
- $\oint_C (z - p)^n dz = 2\pi i$  per  $n = -1$
- $\oint_C (z - p)^n dz = 0$  per  $n = -2, -3, -4 \dots$

Queste equazioni sono tutte conseguenza del teorema di Cauchy: la (1) vale perché per  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ,  $(z - p)^n$  è analitica ovunque nella regione delimitata da  $C$ ; la (2) perché in  $p$  c'è una carica unitaria (caso particolare della formula di Cauchy); la (3) perché la carica totale nell'origine è zero.

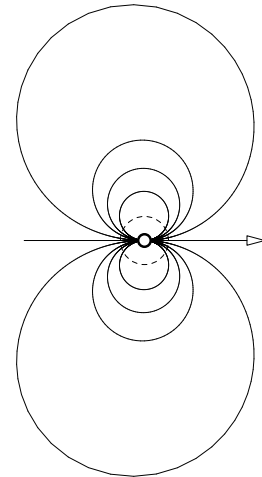
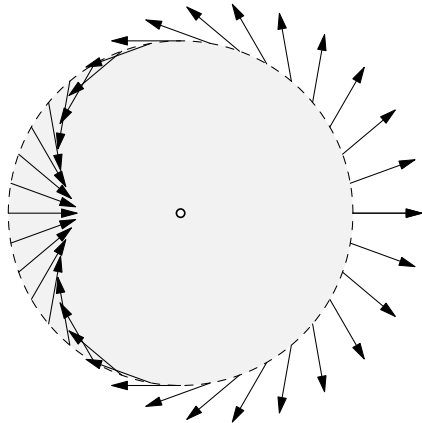
## 6.8 COMPLEMENTI

## 6.8.1 Dipoli e quadrupoli

Il dipolo con momento sull'asse delle  $x$  e centrato nell'origine è dato dalla funzione  $f(z) = 1/z^2$  a cui è associato il campo

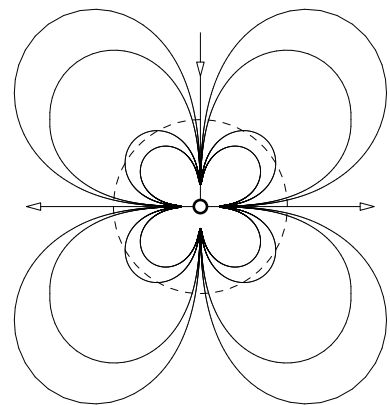
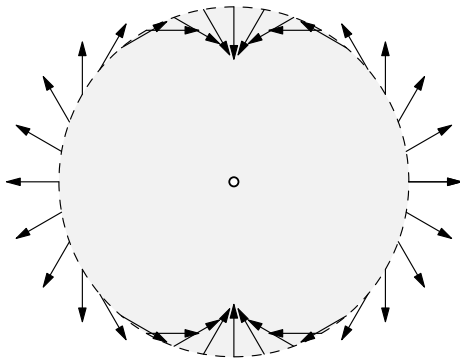
$$\bar{f} = \frac{1}{z^2},$$

Sotto sono riportati il suo ritratto di fase sul disco unitario (tratteggiato) e l'andamento delle sue linee di forza



Analogamente per il quadrupolo  $f(z) = 1/z^3$ , a cui è associato il campo

$$\bar{f} = \frac{1}{z^3},$$





## 7

### Teorema dei residui

Nella lezione precedente abbiamo visto che la legge di Gauss nel piano è l'impalcatura su cui si basa il teorema di Cauchy e da cui discende immediatamente la formula di Cauchy. In questa lezione mostriamo che vale anche il viceversa. L'analogo della legge di Gauss per le funzioni analitiche è noto come *teorema dei residui*.

#### 7.1 Antiderivata di una funzione analitica

Sia  $f(z)$  una funzione analitica in una regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$ . Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_C f(z) dz$$

dal punto  $A$  al punto  $B$ , lungo la curva  $C$ , come mostrato in figura 7.1.

Poiché la funzione è analitica, per il teorema di Cauchy si ha

$$\oint_L f(z) dz = 0$$

dove  $L$  è il circuito  $L = C' - C$  e  $C'$  è un altro cammino da  $A$  a  $B$ . Ne segue che

$$I = \int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz$$

e quindi che l'integrale da  $A$  a  $B$  non dipende dal cammino. Scriviamo dunque

$$I = \int_A^B f(z) dz$$

omettendo il riferimento alla curva  $C$ .

Se l'integrale di linea non dipende dal cammino tra  $A$  e  $B$ , deve esistere una funzione  $V = V(z)$  tale che

$$\int_A^B f(z) dz = V(B) - V(A)$$

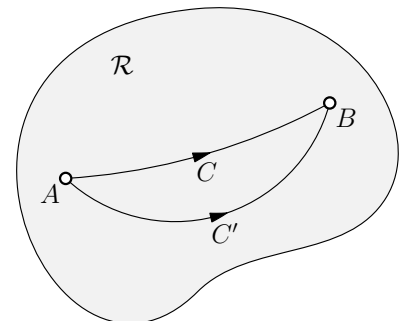


Figura 7.1: L'integrale di linea da  $A$  a  $B$  di una funzione analitica non dipende dal cammino.

La funzione  $V$  è chiamata *anti-derivata* o *primitiva* in matematica e *potenziale* in fisica (a meno di un segno irrilevante in questa sede); in entrambi i casi, è data a meno di una costante additiva.

Come di consueto, il potenziale  $V(z)$  è costruito scegliendo arbitrariamente un punto  $P$  e il valore  $V(P)$  (la "terra"), quindi  $V$  è definito in ogni punto  $Z$  di  $\mathcal{R}$  nel seguente modo:

$$V(Z) = V(P) + \int_C f(z) dz,$$

dove  $C$  è un qualunque cammino da  $P$  a  $Z$ . Si verifica facilmente che  $V$  è una funzione analitica, che vale il *teorema fondamentale del calcolo*

$$V'(z) = f(z)$$

(la convenzione usata in fisica è che la derivata del potenziale cambiata di segno sia pari al campo) e che

$$\int_A^B f(z) dz = (V(P) - V(A)) + (V(B) - V(P)) = V(B) - V(A)$$

Per l'antiderivata possiamo usare il simbolo di integrale indefinito, e scrivere

$$V(z) = \int f(z) dz$$

Dovrebbe essere abbastanza chiaro che le regole note dall'analisi reale si estendono pari pari all'integrale delle funzioni analitiche, ad esempio (a meno di una costante additiva),

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1), \quad \int \cos z dz = \sin z, \quad \int e^z dz = e^z, \quad \int \frac{dz}{z} = \ln z, \dots$$

Concludiamo questa parte del discorso sugli integrali con un'utile disuguaglianza che vale sia per integrali di funzioni analitiche sia per integrali di funzioni non analitiche

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq [\text{valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{lunghezza di } C]. \quad (7.1)$$

Questa disuguaglianza è intuitivamente ovvia (discende immediatamente dal significato di integrale complesso come integrale di linea).

## 7.2 Qualche esempio

ESEMPIO 7.1. Si vuole calcolare

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2}.$$

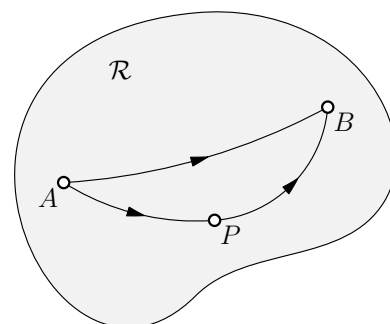


Figura 7.2: L'antiderivata è definita a meno di una costante arbitraria, ad esempio il suo valore in un punto arbitrario  $P$ .

Se  $A$  e  $B$  sono in una regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$  che non include l'origine, la risposta è immediata: in  $\mathcal{R}$  la funzione integranda è analitica, la primitiva è  $-1/z$  e quindi

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

Ci si rende facilmente conto che la restrizione a  $\mathcal{R}$  come in figura 7.3 non è necessaria: possiamo farci passare l'ansia della singolarità  $z = 0$  perché, essendo la primitiva  $-1/z$  una funzione ad un solo valore, tutti i cammini nel piano complesso da  $A$  a  $B$  danno lo stesso valore per l'integrale (ovviamente vanno esclusi i cammini che passano attraverso  $z = 0$ ). Dunque

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

è un'identità del tutto generale.

In particolare,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

qualunque sia il circuito  $C$  (sia che la singolarità  $z = 0$  sia dentro il circuito o fuori). Analogo discorso vale per potenze negative di  $z$ , eccetto la potenza  $-1$ , e per singolarità arbitraria  $z = a$ ,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0, \quad n \geq 2$$

Per la funzione  $1/(z-a)$  il discorso è diverso: la primitiva è il logaritmo, e il logaritmo è una multifunzione, quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0,$$

se  $C$  è una curva semplice chiusa che non include il punto  $a$ , ma se  $C$  lo racchiude, dopo un giro completo si guadagna un fattore  $2\pi i$  e quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \text{se } a \text{ è dentro } C$$

Si osservi che avremmo potuto ottenere questo risultato applicando direttamente la formula di Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

alla funzione  $f(z) = 1$ . Passiamo adesso a due esempi un po' più complicati.

**ESEMPIO 7.2.** Si vuole calcolare  $\oint_C f(z) dz$  per

$$f(z) = \frac{z^5}{(z+1)^2}$$

dove  $C$  è la curva mostrata in figura 7.4.

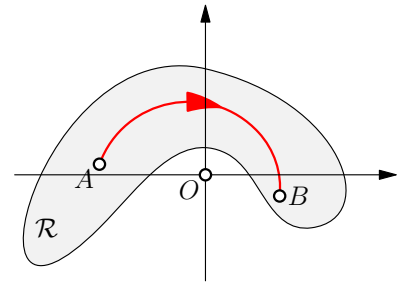


Figura 7.3: Il cammino da  $A$  a  $B$  è in una regione che non include lo zero.

Scrivendo il numeratore come  $[(z + 1) - 1]^5$ , otteniamo

$$f(z) = (z + 1)^3 - 5(z + 1)^2 + 10(z + 1) - 10 + 5 \left[ \frac{1}{z + 1} \right] - \frac{1}{(z + 1)^2}$$

Sulla base di quanto abbiamo discusso sopra (tutte le potenze positive e negative eccetto la potenza  $-1$  danno contributo nullo all'integrale), e poiché la curva racchiude il punto  $a = -1$ , l'unico contributo proviene dall'inversione complessa  $5/(z + 1) = 5/[z - (-1)]$ . Si ottiene

$$\oint_C f(z) dz = 5 \oint_C \frac{dz}{z + 1} = 5 \times 2\pi i = 10\pi i$$

ESEMPPIO 7.3. Si vuole calcolare  $\oint_C f(z) dz$  per  $f(z) = \sin z/z^6$  e per la curva mostrata in figura 7.5.

Ricordiamo lo sviluppo in serie del seno:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$$

Allora

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!} \left[ \frac{1}{z} \right] - \frac{1}{7!}z + \frac{1}{9!}z^3 - \dots$$

Per le stesse ragioni di prima, essendo il punto  $a = 0$  dentro la curva, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa:

$$\oint_C f(z) dz = \frac{1}{5!} \oint_C \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{5!}$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che la curva è percorsa in senso negativo (orario).

### 7.3 Calcolo di integrali

Dagli esempi precedenti traiamo la seguente morale: se nell'intorno del punto  $a$  la funzione  $f(z)$  ha la forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - a)} + c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots \tag{7.2}$$

allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

per ogni curva semplice chiusa  $C$  percorsa in senso positivo, che racchiude il punto  $a$ , e al cui interno  $f(z)$  è analitica (fatta eccezione, ovviamente, per il punto  $a$ ). Naturalmente, se  $C$  è percorsa in senso negativo, il valore dell'integrale è  $-2\pi i c_{-1}$ .

Questa è una regola potente per calcolare integrali lungo linee chiuse di funzioni della forma (7.2). Poiché  $c_{-1}$  è la sola parte della

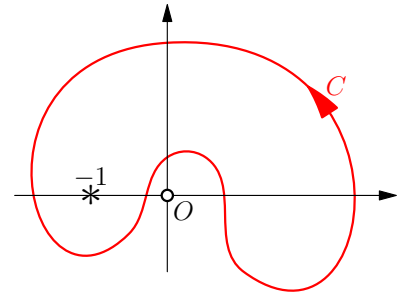


Figura 7.4: In  $-1$  la funzione è singolare (ha un polo, come vedremo tra poco).

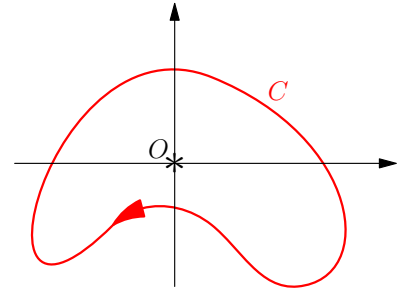


Figura 7.5: Il cammino  $C$  racchiude l'origine, dove la funzione integranda è singolare (ha un polo).

funzione che rimane dopo che integriamo, è chiamato il *residuo* della funzione nella singolarità  $z = a$  ed è denotato  $\text{Res}(f, a)$ . Nell'interpretazione fisica della lezione precedente, il residuo è una *carica*: la sua parte reale è la sorgente (o pozzo) del campo  $\vec{f}$  e la sua parte immaginaria è la corrente (o vortice).

Il trucco per estrarre  $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$  da una funzione che *potrebbe* essere della forma (7.2), ma non è data in tale forma, è presto trovato. Si moltiplichi per  $(z - a)^m$  ambo i membri dell'equazione, in modo da ottenere una serie di potenze

$$g(z) = (z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots + c_{-2}(z - a)^{m-2} + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0(z - a)^m + c_1(z - a)^{m+1} + c_2(z - a)^{m+2} + \dots$$

In una serie di potenze, il coefficiente di  $(z - a)^n$  è ottenuto con la regola di Taylor: si deriva  $n$  volte la serie, si divide per  $n!$  e si calcola la serie così ottenuta nel punto  $z = a$ . Allora, essendo  $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$  è il coefficiente della potenza  $(z - a)^{m-1}$  della serie, si avrà

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z - a)^m f(z)] \Big|_{z=a} \quad (7.3)$$

Riassumendo, se  $f(z)$  è della forma (7.2), allora il suo residuo in  $a$  è dato dalla (7.3), per un  $m$  opportuno, e l'integrale di  $f$  lungo un circuito in un intorno di  $a$  in cui  $f$  è analitica è  $2\pi i \text{Res}(f, a)$ . Resta aperta la domanda riguardo a quali caratteristiche  $f(z)$  debba avere per essere della forma (7.2). Ci occuperemo di questo nella prossima sezione.

#### 7.4 Teorema dei residui

Una singolarità  $a$  è detta isolata se esiste un intorno finito di  $a$  in cui non ci sono altre singolarità. Se  $a$  è una singolarità isolata di  $f(z)$  ed è uno zero di  $F(z) \equiv 1/f(z)$ , allora è chiamata *polo* (si osservi che  $1/f(z)$  esiste poiché  $f$  è analitica). Le singolarità delle funzioni considerate poc'anzi ( $z = -1$  e  $z = 0$  per gli esempi UNO e DUE della sezione 7.2 e  $z = a$  per una funzione della forma (7.2)) sono dei *poli*.

I poli sono le singolarità di gran lunga più comuni nelle applicazioni dell'analisi complessa. Se la funzione  $f(z)$  tende all'infinito quando  $z$  tende ad  $a$  da qualunque direzione, allora  $a$  è un polo di  $f(z)$ . Un polo si vede bene in un grafico della superficie modulare della funzione: in prossimità del polo, la superficie ha un picco che tende all'infinito man mano che ci si avvicina al polo. Per esempio, come abbiamo già visto, la superficie modulare della funzione  $1/(1+z^2)$  mostra nitidamente i due poli  $+i$  e  $-i$ .

Se  $a$  è uno zero di  $F(z) = 1/f(z)$  allora

$$F(z) = (z - a)^m G(z) \quad (7.4)$$

dove  $G$  è analitica e non nulla in  $a$  e  $m$  è la molteplicità dello zero. Ne segue che il comportamento locale di  $f$  vicino ad  $a$  è dato da

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

dove  $g(z) = 1/G(z)$  è analitica e non nulla in  $a$ . Il numero  $m$  è la molteplicità algebrica o *ordine* del polo. Diciamo un polo *semplice*, *doppio*, *triplo*, etc., a seconda che sia  $m = 1, 2, 3$  etc.. Dalla (7.4) segue che  $m$  è l'ordine della prima derivata non nulla di  $F = 1/f$  calcolata in  $z = a$ .

In una delle prossime lezioni dimostreremo che se una funzione è analitica in  $a$ , allora esiste il suo sviluppo di Taylor in  $z = a$ . Quindi  $g(z)$  è sviluppabile in serie di Taylor in  $z = a$ ,

$$g(z) = d_0 + d_1(z-a) + \dots + d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad d_0 \neq 0,$$

dunque, nell'intorno di  $a$ ,  $f(z)$  è della forma (7.2), cioè

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{d_0 + d_1(z-a) + \dots + d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots}{(z-a)^m} \\ &= \frac{d_0}{(z-a)^m} + \dots + d_m + d_{m+1}(z-a) + \dots \end{aligned}$$

Se ne conclude che per una funzione  $f(z)$  essere della forma (7.2) vuol dire avere in  $a$  un polo di ordine  $m$  e si perviene quindi alla conclusione seguente:

Sia  $a$  un polo di ordine  $m$  della funzione  $f(z)$  e  $C$  una curva semplice chiusa che racchiude  $a$ , percorsa nel verso positivo e tale che  $f(z)$  è analitica al suo interno (fatta eccezione per il punto  $a$ ). Allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a)$$

dove il residuo  $\text{Res}(f, a)$  è dato dalla (7.3).

(7.5)

## 7.5 Funzioni meromorfe

Una funzione è detta meromorfa in una regione  $\mathcal{R}$ , se le sue singolarità sono solo dei poli e se, fatta eccezione per i poli, la funzione è analitica nella regione.

Vediamone alcuni esempi. Tutte le funzioni razionali, come

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 10}{z^5 + 3z - 1}$$

sono meromorfe sull'intero piano complesso  $\mathbb{C}$ . Lo stesso vale per le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \quad \text{e} \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}.$$

Anche la funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

(estesa per continuazione analitica<sup>1</sup> a tutto  $\mathbb{C}$ ) è meromorfa sull'intero piano complesso  $\mathbb{C}$ . E così è la funzione zeta di Riemann, ottenuta per continuamento analitico della serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1.$$

La funzione

$$f(z) = e^{1/z}$$

non ha un polo in  $z = 0$ , ma una singolarità essenziale (vedi sotto). È meromorfa (persino analitica) in  $\mathbb{C} - 0$ . La funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

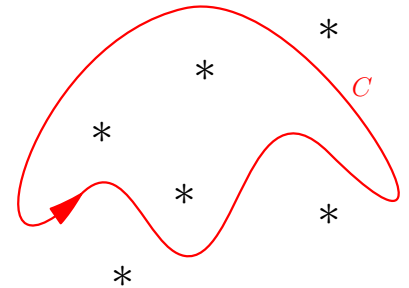
non è meromorfa sull'intero piano complesso  $\mathbb{C}$ , poiché  $z = 0$  è un punto di accumulazione di poli.

Dalla (7.5) segue immediatamente la regola di calcolo per l'integrale di una funzione meromorfa lungo un cammino chiuso:

Sia  $f(z)$  meromorfa e la curva  $C$  (semplice chiusa) orientata positivamente. Allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) \tag{7.6}$$

dove la somma a secondo membro è estesa solo ai poli  $a_i$  dentro  $C$ , come mostrato nella figura a lato.



<sup>1</sup> In una lezione successiva chiariremo che cosa sia la "continuazione analitica".

La (7.5) o la (7.6) sono il teorema dei residui. Interpretate fisicamente non sono altro che il teorema di Gauss (e di Ampère) della fisica: flusso e circolazione del campo  $\vec{f}$  sono pari  $2\pi i \times$  somma delle cariche contenute in  $C$  (le parti reali sono le sorgenti, quelle immaginarie correnti o vortici).

### 7.6 Singolarità essenziali

In aggiunta ai poli, una funzione altrimenti analitica, può avere quelle che sono chiamate *singolarità essenziali*. In prossimità di una singolarità essenziale  $a$  il comportamento di  $f$  è abbastanza selvaggio e strano: infatti, se  $f$  fosse limitata,  $a$  non sarebbe una singolarità, e se  $f$  andasse all'infinito man mano che ci si avvicina da qualunque direzione,  $a$  sarebbe un polo.

Consideriamo l'esempio standard  $g(z) = e^{1/z}$ , che chiaramente ha una singolarità di qualche tipo nell'origine. Se scriviamo  $z = re^{i\theta}$ , allora

$$|g(z)| = e^{\frac{\cos\theta}{r}}$$

La figura 7.6 ne mostra la superficie modulare. Se  $z$  si avvicina a 0 lungo l'asse immaginario, allora  $g(z)$  tende a 1. Ma se l'avvicinamento avviene lungo un cammino a sinistra dell'asse immaginario, dove  $\cos\theta < 0$ , allora  $g(z)$  tende a 0. Infine, se  $z$  si avvicina lungo un cammino a destra dell'asse immaginario,  $g(z)$  tende all'infinito. In effetti, in quest'ultimo caso, non solo  $f(z)$  tende all'infinito, ma la velocità con cui ci va è al di là della comprensione di qualunque polo.

Se  $a$  è una singolarità essenziale, non esiste alcun  $m$  tale la moltiplicazione per  $(z - a)^m$  possa annullare l'esplosione della funzione in  $a$ . In particolare, per mostrare che questo è vero per  $g(z)$ , basta ricordare dall'analisi reale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^m} = \infty$$

qualunque sia il valore di  $m$ .

Se  $a$  è una singolarità essenziale NON significa che

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a)$$

cessa di valere, ma che non abbiamo più una formula semplice per calcolare il residuo in  $a$ . Se  $a$  è una singolarità essenziale, a volte il residuo può essere calcolato usando sviluppi in serie già noti. Ad esempio, possiamo ottenere lo sviluppo in serie di  $g(z) = e^{1/z}$  a partire da quello di  $e^u$  per  $u = 1/z$ , vale a dire, sviluppiamo in serie  $g(z)$  nel punto all'infinito (poiché lo sviluppo in serie di  $e^u$  ha raggio infinito, lo stesso varrà per lo sviluppo di  $g(z)$ ),

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Essendo il residuo il coefficiente dell'inversione complessa, si ha immediatamente

$$\text{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$$

### 7.7 Ci sono modi "veloci" per calcolare i residui?

In un certo senso calcolare i residui è un'arte, ma ci sono delle tecniche che possono velocizzare il calcolo. Eccone alcune.

UNO. Mai sottovalutare la *regola di l'Hospital* per funzioni analitiche, che è la stessa dell'analisi reale: se  $f(z)$  e  $g(z)$  sono analitiche in una

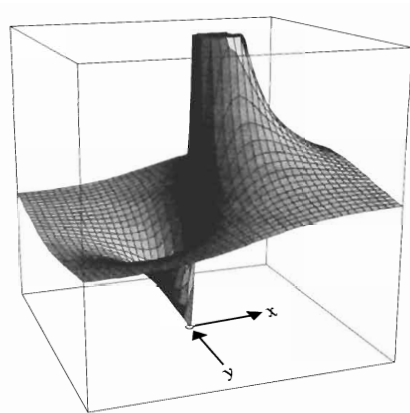


Figura 7.6: Superficie modulare di  $g(z) = e^{1/z}$



regione che contiene  $a$  e  $f(a) = g(a) = 0$ , ma  $g'(a) \neq 0$ , allora

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

DUE. Se  $a$  è un polo di ordine  $m$ , allora

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = b_m \quad \text{dove } b_m \neq 0,$$

ma la difficoltà del gioco è trovare  $m$  per una data  $f$  e un dato punto  $a$ . Possiamo allora procedere per tentativi ed errori: Scegliamo noi  $k$ , per esempio  $k = 1$ , e consideriamo il limite  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$ . Se  $a$  è un polo, ci sono tre possibilità

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \begin{cases} c \neq 0 & \Rightarrow m = k \Rightarrow b_m = c \\ 0 & \Rightarrow m < k \\ \infty & \Rightarrow m > k \end{cases}$$

A meno che non sia chiaro che  $m > 1$ , conviene applicare la regola partendo da  $k = 1$ .

TRE. Se  $f(z)$  è della forma  $f(z) = Q(z)/P(z)$  in  $z = a$  con  $Q(a) \neq 0$  e  $P'(a) \neq 0$ , allora  $z = a$  è un polo semplice e

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} Q(z) \frac{z - a}{P(z)} = \frac{Q(a)}{P'(a)}$$

Avendo applicato la regola dell'Hospital. Situazioni analoghe, ma più complicate, si trattano applicando la regola dell'Hospital più volte.

QUATTRO. Il residuo di una funzione in un punto  $a$  (singolarità isolata) è il coefficiente  $c_{-1}$  del suo sviluppo<sup>2</sup>

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - a)} \quad (7.7) \\ + c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots$$

Talvolta è facile determinare questa serie sia a partire da serie già note (Es.  $e^{1/z}$ ) sia facendo delle sostituzioni.

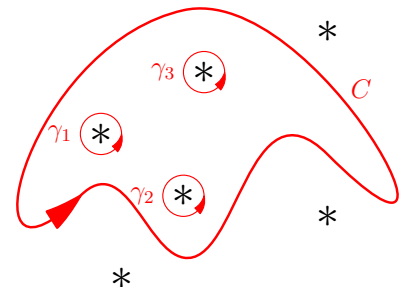
CINQUE. Se  $a$  è una singolarità isolata e  $\gamma$  è un piccolo cerchio attorno a  $a$  che non contiene alcun punto singolare della funzione, allora

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Si ponga  $z = a + \epsilon e^{i\theta}$  e si faccia tendere  $\epsilon$  a zero. A volte questo è un metodo efficiente per calcolare il residuo. Si tenga sempre presente che il gioco è sempre quello del teorema di Cauchy, per cui

$$\oint_C = \sum \oint_{\gamma_i} = 2\pi i \sum \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} \right) = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) = \sum 2\pi i c_{-1}^{(i)}$$

<sup>2</sup> Detto di Laurent, che in una lezione successiva dimostreremo essere unico.



### 7.8 Residuo all'infinito

Sia  $f(z)$  una funzione che è analitica, fatta eventualmente eccezione per  $z = \infty$ , al di fuori del cerchio  $C_R$  di raggio  $R$  (orientato positivamente). Il residuo all'infinito è così definito

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_R} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz \quad (7.8)$$

Si osservi che questa definizione è coerente con l'usuale nozione di residuo in un punto che è rispetto ad un circuito attorno al punto percorso in senso antiorario:  $-C_R$  è *antiorario* attorno all'infinito poiché  $C_R$  è *antiorario* attorno all'origine.

Per una funzione  $f(z)$ , la natura della singolarità all'infinito è la stessa della natura della singolarità di  $f(1/w)$  in  $w = 0$ . In particolare,  $\infty$  è una singolarità isolata di  $f(z)$  se  $0$  è una singolarità isolata di  $f(1/w)$ . Mediante il cambiamento di variabile  $w = 1/z$  l'integrale a secondo membro della (7.8) è trasformato nell'integrale di contorno nel piano  $w$ ,

$$\oint_{C_R} f(z) dz = \oint_{-C_{1/R}} \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

Si osservi che la prima uguaglianza segue dal fatto che l'immagine del cerchio  $|z| = R$  rispetto all'inversione  $w = 1/z$ , è il cerchio dato da  $|w| = 1/R$  percorso nel senso *orario* (e ovviamente da  $dz = [-1/w^2] dw$ ).

Allora,

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} g(w) dw \quad (7.9)$$

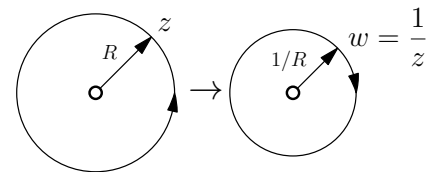
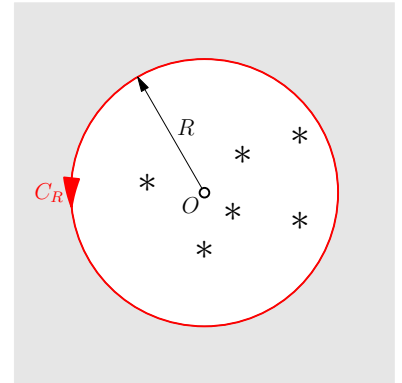
dove

$$g(w) = \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right). \quad (7.10)$$

In conclusione, tenuto conto del segno negativo nella (7.8), la formula per la circuitazione complessa lungo  $C_R$  (orientato positivamente) risulta

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res} \left[ 0, \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right] \quad (7.11)$$

Si osservi che mentre una funzione analitica in un punto nel piano complesso finito ha un residuo zero in quel punto, una funzione che non è singolare all'infinito, può avere in esso un residuo non nullo. Per esempio,  $1/z$  è analitica all'infinito ma ha un residuo pari a  $-1$ . Questo fatto, che può apparire paradossale, è chiarito nei complementi 7.11.1.



### 7.9 Tabella riassuntiva delle singolarità di una funzione

Un punto  $a$  in cui una funzione, altrimenti analitica, non è analitica è detto punto singolare o singolarità.

**SINGOLARITÀ ISOLATA:** se esiste un intorno finito di  $a$  in cui non ci sono altre singolarità.

**POLO:** se nell'intorno di  $a$  si ha  $1/f(z) = (z - a)^m \Omega(z)$ , dove  $\Omega$  è analitica e non nulla in  $a$ . Il numero  $m$  è detto ordine del polo.

**PUNTO DI DIRAMAZIONE:** se un giro completo attorno ad  $a$  fa cambiare il valore di  $f(z)$ . Se ci vogliono non meno di  $N$  giri per tornare al valore di partenza,  $a$  è un PDD algebrico di ordine  $N - 1$ ; se non si torna mai al valore di partenza,  $a$  è un PDD logaritmico.

**SINGOLARITÀ ELIMINABILE:** se  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  esiste.

**SINGOLARITÀ ESSENZIALE:** se  $f(z)$  diverge in  $a$ , ma non è un polo.

## 7.10 PROBLEMI

PROBLEMA 7.1.  $\square$ 

Sia  $C$  la linea  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  che congiunge i punti  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$ . Determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz$$

PROBLEMA 7.2.  $\square$ 

Calcolare

$$\oint_C |z|^2 dz$$

lungo i cerchi (a)  $|z| = 1$  e (b)  $|z - 1| = 1$ .PROBLEMA 7.3.  $\square$ 

Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva  $C$  definita da  $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$  tra il punto  $z = 1$  e  $z = 2 + 2i$ .

PROBLEMA 7.4.  $\square$ 

Determinare e classificare tutte le singolarità di

- (a)  $\frac{z}{(z^2 + 4)^2}$ ,  
 (b)  $\sec \frac{1}{z}$ ,  
 (c)  $\frac{\ln(z - 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ ,  
 (d)  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ .

PROBLEMA 7.5.  $\square$ 

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$$

dove  $C$  è il cerchio  $|z| = 4$ .PROBLEMA 7.6.  $\square$ 

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove  $C$  è il cerchio  $|z| = 2$ .PROBLEMA 7.7.  $\square$ 

Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per  $t > 0$  e  $C$  il cerchio  $|z| = 3$ .PROBLEMA 7.8.  $\square$ 

Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a)  $2 \pm i, -2 \pm i$ ; (b)  $-i, 2 - i, 2 + i, i$ .PROBLEMA 7.9.  $\square$ 

Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di  $P, Q$  e  $R$  e il loro ordine.

*I problemi che seguono sono un training sui fondamentali per poter affrontare esercizi più difficili (inclusi alcuni dei precedenti). Procedere passo passo, l'ordine è grosso modo di difficoltà crescente. Non fare salti, le soluzioni di esercizi precedenti possono essere d'aiuto per esercizi successivi. Per comodità, vengono date le risposte in parentesi quadrate (ma non sono date le soluzioni in appendice).*

PROBLEMA 7.10. Classificare le singolarità di  $f(z)$  nei punti indicati.

(I)  $f(z) = \cot z$  in  $z = 0$ .

[Polo semplice.]

(II)  $f(z) = \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2}$  in  $z = \pi$ .

[Eliminabile.]

(III)  $f(z) = \sin(1/z)$  in  $z = 0$ .

[Singolarità essenziale.]

(IV)  $f(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 1}$  in  $z = -1$ .

[Polo di ordine 2.]

(V)  $f(z) = z^{-3} \sin z$  in  $z = 0$ .

[Polo di ordine 2.]

(VI)  $f(z) = (\csc z)(\cot z)$  in  $z = 0$ .

[Polo di ordine 2.]

PROBLEMA 7.11. Trovare i residui di  $g(z)$  nei punti indicati.

(I)  $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$  in  $z = -i$ .

[Res =  $\frac{i}{2}$ ]

(II)  $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$  in  $z = 0$ .

[Res =  $\frac{1}{2}$ ]

(III)  $g(z) = \tan z$  in  $z = \pi/2$ .

[Res = -1]

(IV)  $g(z) = \frac{z+2}{(z^2-2z+1)^2}$  in  $z = 1$ .

[Res = 0]

(V)  $g(z) = f(z)/h(z)$  in  $z = a$  con  $f(a) \neq 0$  e  $h'(a) \neq 0$ . Dimostrare che  $z = a$  è un polo semplice e trovare il residuo.

[Res =  $f(a)/h'(a)$ ]

PROBLEMA 7.12. Le singularità delle funzioni sotto sono tutte poli semplici. Determinare e usare 7.11(V) per trovare i residui in esse.

(I)  $g(z) = \frac{z^2-1}{z^2-5iz-4}$ .

[ $i$  e  $4i$ . Res<sub>1</sub> =  $(-2/3)i$  e Res<sub>2</sub> =  $(17/3)i$ ]

(II)  $g(z) = \tan z$ .

[ $(n + \frac{1}{2})\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Res<sub>n</sub> = -1]

(III)  $g(z) = \frac{z^2}{z^3-8}$ .

[ $2, 2e^{2i\pi/3}$  e  $2e^{4i\pi/3}$ . Res =  $1/3$ ]

(IV)  $g(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ .

[ $n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Res<sub>n</sub> =  $(-1)^n e^{n\pi}$ ]

(V)  $g(z) = \frac{\sin z}{z^2-3z+2}$ .

[1 e 2. Res<sub>1</sub> = -sin 1 e Res<sub>2</sub> = sin 2]

PROBLEMA 7.13. □

Usare il metodo dei residui per calcolare gli integrali seguenti. Quando possibile, potete usare i risultati degli esercizi precedenti

(I)  $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$ , dove  $C$  (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro  $3/2$ .

[ $2\pi i/3$ ]

(II)  $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$ , dove  $C$  (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 3 e centro 0.

[ $2\pi i$ ]

(III)  $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$ , dove  $C$  (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro 0.

[0]

(IV)  $\oint_C \frac{z^2-1}{z^2-5iz-4} dz$ , dove  $C$  è una qualunque curva semplice chiusa (percorsa in senso antiorario) che include i seguenti punti: (a) solo  $i$ , (b) solo  $4i$ , (c) sia  $i$  sia  $4i$ , (d) né  $i$  né  $4i$ .

[(a)  $4\pi/3$ , (b)  $-34\pi/3$ , (c)  $-10\pi$ , (d) 0]

(V)  $\oint_C \frac{e^z}{\sin z} dz$ , dove  $C$  (percorso in senso antiorario) è il rettangolo con vertici  $-\pi/2 - i$ ,  $5\pi/2 - i$ ,  $-\pi/2 + 2i$  e  $5\pi/2 + 2i$ .

[ $2\pi(1 - e^\pi + e^{2\pi})$ ]

(VI)  $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$ , dove  $C$  (percorso in senso orario) è il semicerchio nel semipiano superiore che ha centro 0, raggio  $R > 2$  e diametro collocato lungo l'asse reale.

[ $-\pi/6$ ]

## 7.11 COMPLEMENTI

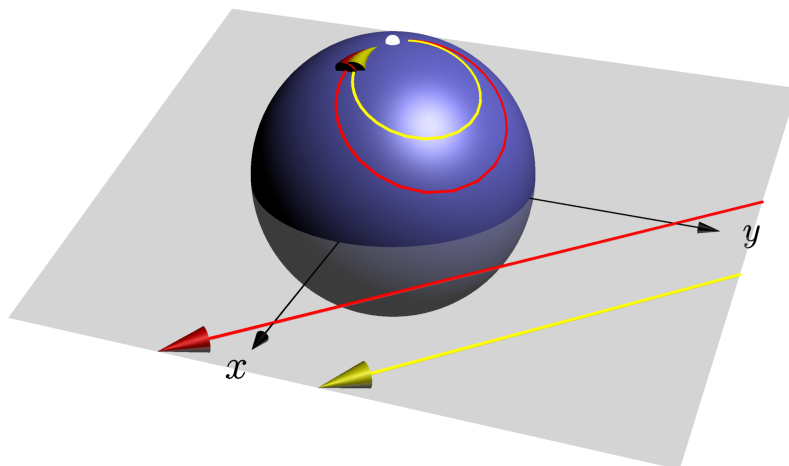
## 7.11.1 Campi all'infinito

Incominciamo con il campo più noioso che ci sia: il campo costante  $\bar{f} = \bar{a}$  associato funzione complessa  $f(z) = a$ , dove  $a$  è un numero complesso. Se pensiamo ad un fluido e ci mettiamo nell'origine, è come se avessimo un fiume di larghezza infinita con un flusso d'acqua costante che arriva dall'orizzonte nella direzione  $-\bar{a}$  per poi andare verso l'orizzonte nella direzione  $+\bar{a}$ , come se all'infinito ci fosse sia una sorgente sia un pozzo. Similmente, se pensiamo in termini di campo elettrico, è come se avessimo un campo generato all'infinito da una carica le cui linee di forza diventano parallele al finito per poi finire in una carica di segno opposto, anch'essa all'infinito.

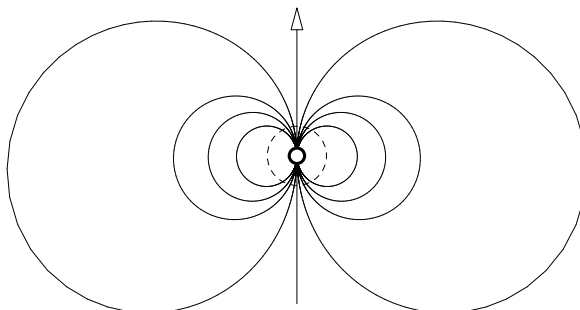
Per capire l'andamento all'infinito del campo costante, proiettiamo stereograficamente le linee di flusso del campo sulla sfera di Riemann. Invertendo la (4.5) si ottiene

$$X + iY = \frac{2x + i2y}{1 + x^2 + y^2} \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad (7.12)$$

Applicando questa trasformazione a due linee di flusso, si ottengono due cerchi passanti per il polo nord della sfera di Riemann (cioè per il punto all'infinito):



(la figura è stata ottenuta con un programmino numerico, ma ci si può convincere di questo studiando come la (7.12) trasforma rette nel piano). Le due rette in figura sono nel I quadrante; passando al quarto, le rette si trasformeranno in cerchi che sono immagine speculare dei primi. In breve, l'andamento del campo all'infinito è quello di un dipolo!



Questo fatto è totalmente nascosto nella funzione stessa (dopo tutto, una costante, diciamo  $7+i5$ , ha lo stesso valore ovunque, incluso l'infinito!), ma è manifesto nella formula (7.10) che fornisce la funzione

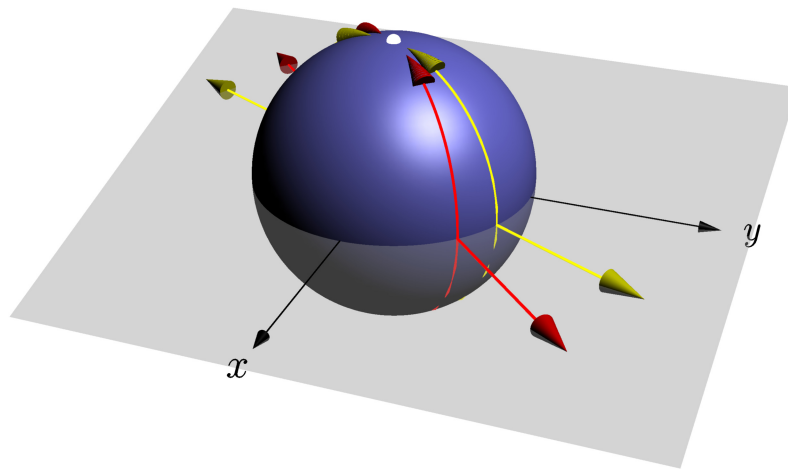
$$g(w) = \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

da utilizzare per descrivere, in un intorno di  $w = 0$ , i flussi e le circuitazioni nell'intorno di  $z = \infty$ . Per una  $f$  costante e uguale a  $a$ , si ha

$$g(w) = \frac{-a}{w^2},$$

e nei complementi 6.8.1 abbiamo visto che il campo associato a questa funzione è proprio quello di un dipolo.

Se adesso consideriamo il campo coulombiano associato alla funzione  $q/z$ , cioè il campo di una carica  $q$  posta nell'origine e lo proiettiamo stereograficamente sulla sfera, vediamo che linee di forza radiali che emanano dall'origine diventano meridiani che convergono al polo nord, come nella figura sotto.



Nuovamente, questo è ciò che segue dalla (7.10), poiché in questo caso si ha

$$g(w) = \frac{-1}{w^2} qw = \frac{-q}{w}.$$

Quindi un campo coulombiano all'infinito è ancora coulombiano, ma con una carica di segno opposto. Questo cambiamento di segno è ciò che garantisce la conservazione del flusso: per una sorgente nell'origine ci deve essere un pozzo all'infinito, che è proprio ciò che mostra la figura sopra.





# 8

## Calcolo di integrali

### 8.1 Il metodo dei residui

Riconsideriamo il problema 6.5, dal punto di vista del teorema dei residui. Adesso sappiamo che

$$\oint_{L_R + C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, i \right] \quad (8.1)$$

dove  $L_R + C_R^+$  è il cammino mostrato in figura 8.1

Poiché

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

la funzione ha un polo in  $i$  e uno in  $-i$ . Dal secondo membro, si vede che il residuo in  $i$  è  $(-1/2)i$  e quindi che l'integrale è  $\pi$ , confermando il risultato del problema 6.5.

L'osservazione semplice ma cruciale è che possiamo trasformare quanto abbiamo appena visto in un metodo generale per calcolare integrali reali. Nel caso in esame, possiamo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (8.2)$$

con la (8.1). Infatti, per  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \rightarrow 0$$

e il primo membro della (8.1) diventa l'integrale reale (8.2) e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, i \right] = 2\pi i \times [(-1/2)i] = \pi$$

Si osservi che avremmo potuto procedere in modo analogo considerando il cammino in figura 8.2. Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno a primo membro,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, -i \right] = 2\pi i \times [(1/2)i] = -\pi$$

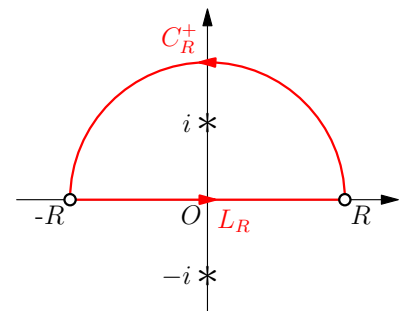


Figura 8.1:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$  nel semipiano superiore.

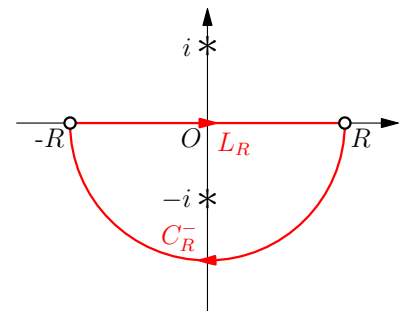
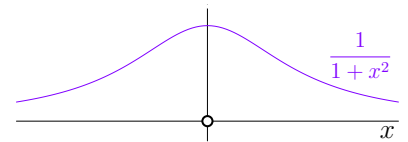


Figura 8.2:  $C_R^-$  è adesso il semiarco di cerchio di raggio  $R$  nel semipiano inferiore.

Non importa, quindi, se decidiamo di chiudere il cammino sull'asse reale nel semi-piano superiore o in quello inferiore. Dobbiamo solo fare attenzione ai segni.

Naturalmente, poiché la primitiva di  $1/(1+x^2)$  è l'arcotangente, l'integrale reale (8.2) si calcola immediatamente con metodi reali. Ci sono tuttavia casi in cui il metodo dei residui permette di calcolare integrali reali altrimenti intrattabili. Storicamente, è stato proprio il successo di Cauchy nel valutare integrali reali intrattabili con i metodi tradizionali uno dei primi segni tangibili della potenza delle sue scoperte. In passato, nell'insegnamento dell'analisi complessa, si dava largo spazio a questo metodo. Oggi, di fronte ad un integrale intrattabile, è più probabile che un matematico, un ingegnere o un fisico usino un programma di calcolo numerico o simbolico per risolverlo, piuttosto che calcolarlo a mano con il metodo dei residui. Ciò nonostante, conoscere questo metodo e saperlo usare è un'ottima palestra di addestramento al calcolo, specialmente per un fisico.

## 8.2 Qualche esempio

ESEMPIO 8.1.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Si consideri

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

che ha due poli, uno in  $+i$  e l'altro in  $-i$ . Si prenda lo stesso cammino della figura 8.1. Allora

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f, i] = 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{2}$$

Ma

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{C_R^+} f(z) dz$$

L'integrale lungo  $C_R^+$  tende a zero quando  $R$  tende all'infinito, infatti

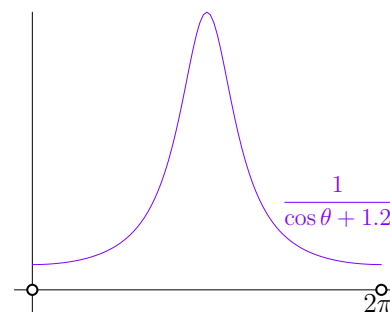
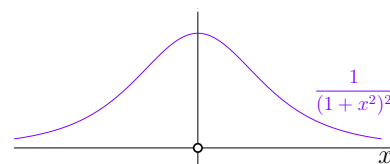
$$I_R = \int_{C_R^+} f(z) dz = \int_{C_R^+} \frac{1}{(R^2 e^{i2\theta} + 1)^2} i R e^{i\theta} d\theta \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty$$

Quindi

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R+C_R^+} f(z) dz = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.2.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + a}, \quad a > 1$$



Si proceda con la sostituzione

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

allora

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [e^{i\theta} + e^{-i\theta}] = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right] \tag{8.3}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{8.4}$$

L'integrale iniziale risulta così trasformato

$$I = \oint_C \frac{(dz/iz)}{\frac{1}{2} [z + (1/z)] + a} = -2i \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1},$$

dove  $C$  è il cerchio unitario. Le radici di  $z^2 + 2az + 1$  sono  $q = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  e  $p = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ . Poiché soddisfano  $pq = 1$ , solo una,  $q$ , sarà dentro  $C$  e quindi

$$I = 4\pi \text{Res} \left[ \frac{1}{(z-p)(z-q)}, q \right] = \frac{4\pi}{q-p} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ESEMPIO 8.3.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

In integrali di questo tipo (integrali estesi all'infinito di funzioni trigonometriche divise per polinomi), il trucco è di passare dalla funzione trigonometrica all'esponenziale e poi ritornare all'integrale iniziale usando le definizioni delle funzioni trigonometriche in termini di esponenziale. Passiamo quindi a  $f(z) = e^{iz}/z$ . Poiché la  $\sin x/x$  è pari, l'integrale richiesto sarà metà del valore dell'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

La prima idea che viene in mente è di considerare, come nell'esempio 1, il cammino della figura 8.1. Nel limite  $R \rightarrow \infty$ , non c'è contributo dal cammino sul semicerchio  $C_R^+$  dove  $z = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ . Infatti, si ha

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{Re^{i\theta}} e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} iR e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{iR \cos \theta} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

e il modulo di quest'integrale va a zero per  $R \rightarrow \infty$ .

Tuttavia, c'è un problema: la singolarità  $z = 0$  è sul cammino. Il trucco (che si applica ad una miriade di altri problemi simili a questo) è quello di aggirare la singolarità con un giretto di raggio  $\epsilon$  attorno ad essa (e preoccuparci alla fine di  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Passiamo quindi al cammino chiuso mostrato in figura 8.4. Poiché non ci sono singolarità dentro il cammino

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

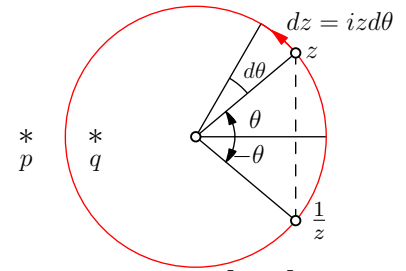


Figura 8.3:  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right]$ .  $p$  e  $q$  radici del denominatore; poiché  $pq = 1$ , una è fuori e l'altra è dentro.

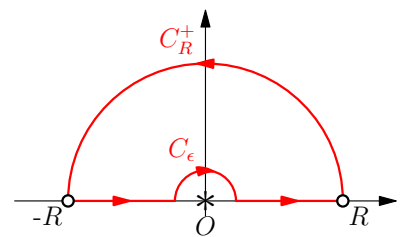
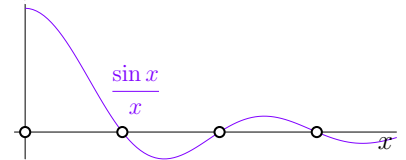


Figura 8.4:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$ .

Poniamo a zero l'ultimo termine, avendo già mostrato che per  $R \rightarrow \infty$  non dà contributo. Facciamo la sostituzione da  $-x$  a  $x$  nel primo integrale a secondo membro e combiniamo con il terzo. Otteniamo così

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{C_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro ponendo  $z = \epsilon e^{i\theta}$

$$- \int_{C_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.4.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx, \quad -\infty < k < +\infty$$

Un integrale di questo tipo, con la funzione integranda =  $g(x) \times e^{ikx}$  (oppure  $\times e^{-ikx}$ ), è detto *integrale di Fourier*. Se impariamo a risolvere questo integrale, impariamo tecniche che sono utili per calcolare altri integrali di questo tipo.

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$$

ha due poli semplici in  $+i$  e  $-i$ . Proviamo lo stesso cammino della figura 8.1. Se l'integrale lungo  $C_R^+$  va a zero per  $R$  che va all'infinito, siamo a posto. Consideriamo questo integrale ponendo  $z = R e^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ ,

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR \cos \theta + kR \sin \theta} iR e^{i\theta} d\theta$$

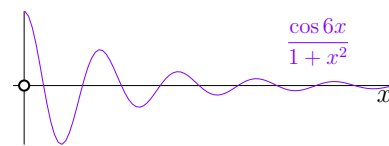
La situazione è analoga a quella incontrata nell'esempio 3, ma c'è un ma: il modulo di questo integrale va a zero per  $R$  che va all'infinito solo se  $k$  è un numero *negativo*, in quanto nell'esponenziale  $e^{kR \sin \theta}$  il seno è positivo, essendo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Il residuo in  $z = i$  vale

$$(z-i) \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-k}}{i+i} = \frac{e^{-k}}{2i}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}, \quad \text{per } k < 0$$

Che fare per  $k > 0$ ? Con un momento di riflessione, ci si può convincere che il contributo dal semicerchio va a zero se chiudiamo il



cammino reale con il semicerchio  $C_R^-$  nel semipiano inferiore, come in figura 8.2. Infatti, per questa scelta si ha

$$\int_{C_R^-} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR\cos\theta + kR\sin\theta} iR e^{i\theta} d\theta$$

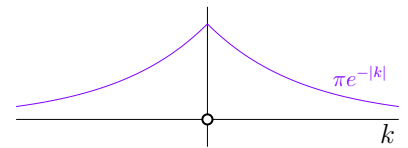
Adesso  $\sin\theta$  è sempre negativo per  $\pi < \theta < 0$  e  $k$  positivo, quindi il modulo dell'integrale va a zero per  $R$  che va all'infinito.

Il cammino  $C_R^-$  racchiude l'altra singolarità della funzione, il polo semplice  $-i$ . Il residuo della funzione in  $z = -i$  vale  $e^{-k}/(-2i)$ . Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno. Quindi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = -2\pi i \left[ \frac{e^{-k}}{-2i} \right] = \pi e^{-k}, \quad \text{per } k > 0$$

In conclusione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}.$$



### 8.3 Qualche morale

L'ESEMPIO 1 è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

per i quali

- (i)  $f(z)$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  eccetto che per un numero finito di poli.
- (ii)  $f(z)$  decade più rapidamente di  $1/z$  per  $|z| \rightarrow \infty, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$ . Equivalentemente,  $f(z) \leq M/R^k$ , per  $z = Re^{i\theta}$ , dove  $k > 1$  e  $M$  sono costanti.

Per questi integrali, utilizzando il cammino della figura 8.5, si ottiene

$$I = 2\pi i \sum \text{Res. nel semipiano superiore } \Pi^+ \tag{8.5}$$

Infatti, il contributo del semicerchio  $C_R^+$ , stimato mediante la (7.1):

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

tende a zero quando  $R$  tende all'infinito.

Si osservi che se  $f(x)$  è una funzione pari, questo metodo può essere usato per calcolare  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

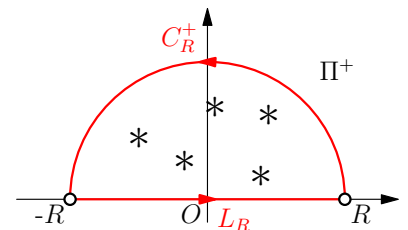


Figura 8.5:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$ .

L'ESEMPIO 2 è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

per i quali

- (i)  $f$  è finita per tutti i valori di  $\theta$ ,
- (ii)  $f$  è una funzione razionale di  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ .

Con le stesse regole del gioco dell'esempio due, riassunte nella figura 8.6, si ottiene

$$I = (-i)2\pi i \sum \text{residui nel cerchio unitario} \tag{8.6}$$

Le morali che si possono trarre dall'ultimo esempio meritano una sezione a se stante.

### 8.4 Integrali di Fourier

L'integrale

$$g(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx \tag{8.7}$$

è un integrale di Fourier e la trasformazione che fa passare da  $f$  a  $g$  è detta *trasformata di Fourier*. Il fatto più importante che lo riguarda è che se  $g(k)$  è nota,  $f(x)$  può essere ricostruita e la sua ricostruzione è attraverso un altro integrale di Fourier. Più precisamente, si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{ikx} dk \tag{8.8}$$

Spiegare perché e sotto quali condizioni valga quest'ultima equazione, detta *teorema di Fourier*, sarà il tema di una futura lezione. Per il momento, la prenderemo per buona e ci occuperemo del calcolo di integrali di Fourier.

L'esempio 4 suggerisce la seguente morale. Sia  $f(z)$

- (i) analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  eccetto che per un numero finito di poli.
- (ii) e tale che  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  per  $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ .

Allora, per  $k < 0$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx = 2\pi i \sum \text{Res. di } f(z)e^{-ikz} \text{ in } \Pi^+ \tag{8.9}$$

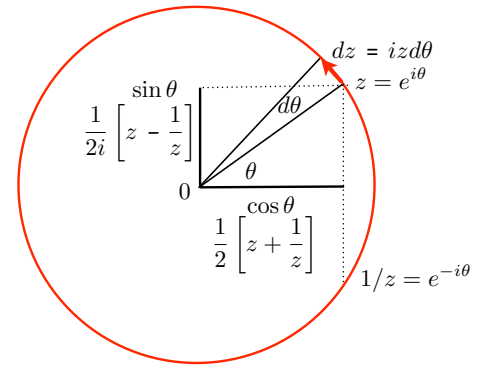


Figura 8.6: Sostituzione  $z = e^{i\theta}$ .

La (8.9) è nota come *Lemma di Jordan* e si dimostra facilmente. Utilizziamo il cammino chiuso della figura 8.5 e valutiamo l'integrale lungo  $C_R^+$ :

$$I_R = \int_{C_R^+} f(z)e^{-ikz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-ikR\cos\theta - |k|R\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Sia  $R$  così grande che  $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \epsilon$ . Allora

$$|I_R| \leq \epsilon R \int_0^\pi e^{-|k|R\sin\theta} d\theta = 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-|k|R\sin\theta} d\theta.$$

Nell'intervallo  $[0, \pi/2]$ , si ha che  $(2/\pi)\theta \leq \sin\theta$ , come mostrato in figura 8.7, da cui

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-|k|R2\theta/\pi} d\theta.$$

Integrando,

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \frac{1 - e^{-|k|R2/\pi}}{|k|R2/\pi} < \frac{\pi}{|k|} \epsilon$$

Risulta così dimostrato che  $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0$  e quindi la (8.9).

Nel caso in cui

- (i)  $f(z)$  è analitica nel semipiano inferiore  $\Pi^-$  eccetto per un numero finito di poli.
- (ii)  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  per  $-\pi \leq \arg(z) \leq 2\pi$ ,

procedendo in modo analogo a prima, si stabilisce che, per  $k > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx = -2\pi i \sum \text{Res. di } f(z)e^{-ikz} \text{ in } \Pi^- \quad (8.10)$$

Le condizioni (8.9) e (8.10) sono verificate per la funzione dell'esempio 4, che è una funzione importante, nota in fisica come *lorentziana* e in probabilità come *distribuzione di Cauchy-Lorentz*. Tuttavia, per un'altra funzione, forse ancora più importante in fisica e probabilità, la *gaussiana*,

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad (8.11)$$

le condizioni (8.9) e (8.10) NON sono verificate. Per calcolare

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \quad (8.12)$$

occorre trovare un altro metodo.

Il metodo di solito usato è il seguente. In primo luogo, si osservi che, completando i quadrati,  $e^{-ax^2} e^{-ikx}$  può essere riscritto come

$$e^{-ax^2} e^{-ikx} = e^{-a(x^2 + i\frac{k}{a}x)} = e^{-a(x + i\frac{k}{2a})^2} e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

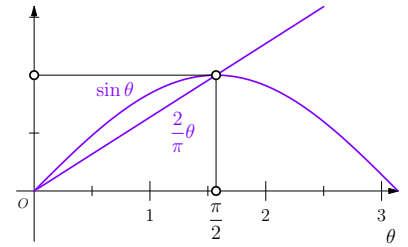


Figura 8.7:  $(2/\pi)\theta \leq \sin\theta$ , in  $[0, \pi/2]$ .

Allora

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{k}{2a})^2} dx. \quad (8.13)$$

Ma qual è il significato dell'integrale a secondo membro? Per sostituzione  $z = x + i\frac{k}{2a}$  si ottiene

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{z=-\infty+i\frac{k}{2a}}^{\infty+i\frac{k}{2a}} e^{-az^2} dz,$$

quindi, come mostrato in figura 8.8, l'integrale a secondo membro della (8.13) è, a meno di un segno, l'integrale di  $e^{-az^2}$  sul lato superiore del rettangolo nel limite  $R \rightarrow \infty$ . Il contributo dei cammini verticali,

$$\int_{y=0}^{k/2a} e^{-a(R+iy)^2} dy + \int_{y=k/2a}^0 e^{-a(-R+iy)^2} dy.$$

tende a zero quando  $R$  tende all'infinito. Quindi, poiché  $e^{-az^2}$  è analitica dentro al rettangolo, l'integrale a secondo membro della (8.13) sarà nel limite uguale all'integrale sull'asse reale<sup>1</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Dunque,

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (8.14)$$

Fine del calcolo.

È istruttivo mostrare che il teorema di Fourier (8.8) risulta verificato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \right] e^{ikx} dk \\ &= \left[ \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{ikx} dk, \quad b \equiv \frac{1}{4a} \\ &= \left[ \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \right] \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \\ &= e^{-ax^2}, \end{aligned}$$

che era proprio quello che si voleva verificare; nel passaggio intermedio si sono usate le uguaglianze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{-ikx} dk = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}},$$

che sono un'immediata conseguenza della (8.14) e della sostituzione  $k' = -k$  nel primo integrale.

**ESERCIZIO 8.1.** Verificare il teorema di Fourier per la lorentziana.

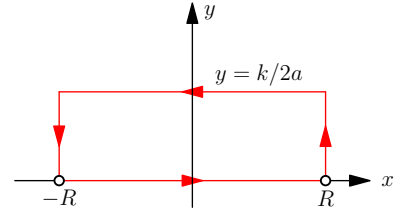


Figura 8.8:  $f(z) = e^{-az^2}$  integrata lungo il rettangolo di base  $[-R, R]$  e altezza  $[0, ik/2a]$ .

<sup>1</sup> L'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$  si calcola facilmente con i metodi dell'analisi reale:

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-a\rho^2} \rho d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} (2a\rho) d\rho \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$



### 8.5 Intermezzo: l'equazione del calore

Anticipando contenuti che verranno approfonditi in capitoli successivi, in questa sezione vogliamo mettere evidenza l'utilità pratica della trasformata di Fourier.

Il problema che prendiamo in esame è il seguente: si vuole sapere come evolve nel corso del tempo la temperatura  $f(x, t)$  in una sbarretta infinita, di spessore trascurabile, modellizzata idealmente come la retta reale  $-\infty < x < \infty$ , sapendo che al tempo iniziale  $t = 0$ , la distribuzione di temperatura nella sbarretta è data dalla funzione nota  $f_0(x) = f(x, 0)$ . Nel corso del tempo,  $f$  evolve secondo l'equazione del calore (o equazione di Fourier),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (8.15)$$

Un metodo di soluzione di questa equazione, per la data condizione iniziale, è di trasformarne, secondo Fourier, ambo i membri. Per il primo membro si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial g(k, t)}{\partial t}$$

dove

$$g(k, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Per la trasformata di Fourier del secondo membro, si utilizzi l'integrazione per parti e sia  $f' \equiv \partial f / \partial x$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx &= D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f'(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= D \left[ f'(x, t) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) f'(x, t) e^{-ikx} dx \right] \\ &= D \left[ f'(x, t) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + ik \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, t) e^{-ikx} dx \right] \end{aligned}$$

Si assuma adesso che la soluzione cercata soddisfi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

che corrisponde alla condizione fisica che non ci sia flusso di calore all'infinito (il gradiente della temperatura è proporzionale alla densità di corrente di calore). Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = ikD \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, t) e^{-ikx} dx$$

Si assuma inoltre che  $f(x, t)$  si annulli all'infinito. Questo corrisponde alla condizione fisica di conservazione dell'energia, in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx \propto \text{energia termica totale nella sbarra.}$$

**N.B.** Maggiori dettagli e giustificazioni di questo metodo verranno dati in un capitolo successivo

essendo  $f$  positiva (energia), questo corrisponde al requisito che  $f$  tenda a zero per  $x$  che tende all'infinito (in effetti, più rapidamente di  $1/x$ ). Allora, integrando nuovamente per parti, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = -Dk^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = -Dk^2 g(k, t).$$

In definitiva, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione del calore, si perviene all'equazione

$$\frac{\partial g(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 g(k, t),$$

che si risolve "a vista":

$$g(k, t) = g(k, 0) e^{-Dk^2 t} = g_0(k) e^{-Dk^2 t},$$

dove  $g_0(k)$  è la trasformata di Fourier della condizione iniziale,

$$g_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-ikx} dx.$$

Applicando la trasformata di Fourier inversa (8.8), si risolve il problema di partenza. Si può quindi concludere che *sotto le condizioni che non ci sia flusso di calore verso l'infinito e che la temperatura vada a zero all'infinito per ogni  $t > 0$ , la temperatura nel corso del tempo evolve secondo la legge:*

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk \quad (8.16)$$

Mostriamo la soluzione esplicita, quando la temperatura iniziale è una gaussiana, normalizzata a 1, centrata nell'origine e di larghezza  $\sigma$ ,

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Applicando la (8.14), si ha

$$g_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\pi 2\sigma^2} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}},$$

che, inserita a secondo membro della (8.16), fornisce

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + 2Dt)k^2} e^{ikx} dk.$$

Applicando nuovamente la (8.14), si perviene alla soluzione esplicita

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + 2Dt)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2Dt)}},$$

che mostra un incremento lineare nel tempo del *quadrato* della larghezza della funzione, che è il marchio di fabbrica dei processi diffusivi.

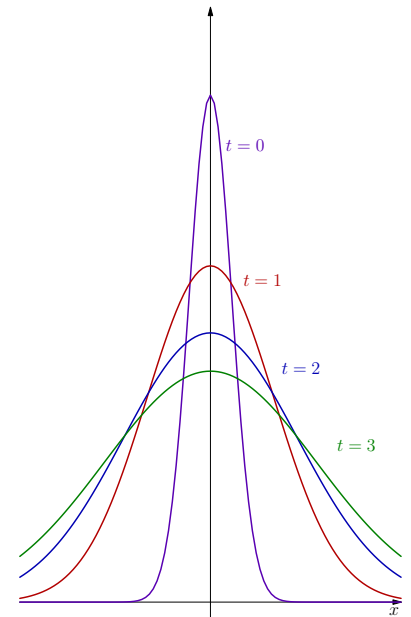


Figura 8.9: Andamento nel corso del tempo della temperatura con distribuzione iniziale a  $t = 0$  gaussiana a media zero e larghezza  $\sigma$ .

### 8.6 Integrale di una funzione con punti di diramazione

Supponiamo di voler calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \tag{8.17}$$

con metodi di analisi complessa. Sarebbe una scelta folle, visto che l'integrale lo si può calcolare agevolmente con i metodi del calcolo reale mediante la sostituzione  $x = \cos \theta$  e ancora più agevolmente con quelli della geometria della scuola elementare:  $I$  è l'area del semicerchio di raggio 1 e quindi  $I = \pi/2$ . Ma c'è del metodo in questa follia: vogliamo usare (8.17) come palestra per integrali più complicati che contengono punti di diramazione.

Consideriamo la multifunzione che abbiamo già incontrato varie volte

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

Ha punti di diramazione semplici per  $z = +1$  e  $z = -1$ . Scegliamo come taglio il segmento che unisce  $z = +1$  e  $z = -1$  e consideriamo il ramo principale della multifunzione corrispondente al ramo  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z = e^{i\theta}$ . Adesso consideriamo il contorno a "cappio" (o a "osso per cani") mostrato in figura 8.6.

Per  $z$  sull'asse reale appena sopra il taglio (diciamo per  $z = x + i\epsilon$ ,  $\epsilon \downarrow 0$ ), abbiamo

$$(z^2 - 1)^{1/2} = i\sqrt{1-x^2}$$

mentre appena sotto

$$(z^2 - 1)^{1/2} = -i\sqrt{1-x^2}$$

Sia  $L$  il contorno chiuso mostrato in figura 8.10, dove intorno a  $+1$  e  $-1$  ci sono due percorsi circolari di raggio  $\delta$  che aggirano i punti di diramazione. Nel limite  $\delta \downarrow 0$  gli integrali lungo questi percorsi circolari danno contributo nullo, quindi

$$\oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz = \int_1^{-1} i\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 (-i\sqrt{1-x^2}) dx = -2iI,$$

da cui

$$I = \frac{i}{2} \oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

Poiché non ci sono singolarità tra  $L$  e  $C_R$ , possiamo deformare il contorno d'integrazione da  $L$  a  $C_R$ , un cerchio di raggio  $R > 1$  (per maggiori dettagli sulla deformazione di cammini si veda la sezione 9.1), come nella figura 8.11, e ottenere

$$I = \frac{i}{2} \oint_{C_R} (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

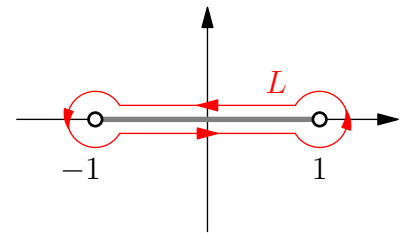


Figura 8.10: Contorno a "cappio".

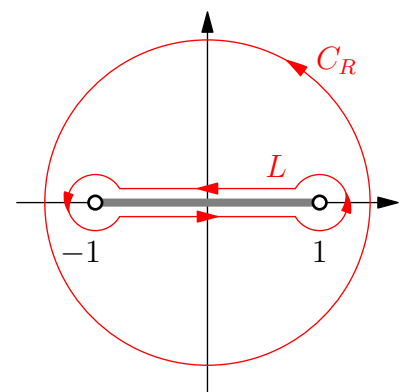


Figura 8.11: Deformazione del contorno.

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla (7.11) otteniamo

$$I = (2\pi i) \frac{i}{2} \text{Res} \left[ 0, \frac{1}{w^2} \sqrt{\frac{1}{w^2} - 1} \right]$$

Ora,

$$\frac{1}{w^2} \left( \frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} = \frac{1}{w^3} (1 - w^2)^{1/2} = \frac{1}{w^3} \left( 1 - \frac{1}{2}w^2 + \dots \right)$$

Quindi  $\text{Res} = -\frac{1}{2}$  e infine

$$I = (2\pi i) \frac{i}{2} \left[ -\frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Probabilmente, questo è il modo più complicato che ci sia per calcolare l'area del semicerchio di raggio 1! Ma, come abbiamo detto, il metodo nella follia era di illustrare come calcolare integrali in cui compaiono punti di diramazione e mettere in evidenza che per questi integrali torna utile la nozione di residuo all'infinito.

### 8.7 Trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace  $\mathcal{L}$  di una funzione  $F(t)$  è

$$f(s) = \mathcal{L}\{F\}(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt$$

Questa trasformazione è un ottimo strumento per studiare i sistemi lineari in quanto permette di trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione algebrica. Consideriamo, per esempio, l'equazione per la differenza di potenziale ai capi del condensatore di un circuito RC

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = 0.$$

e prendiamone la trasformata di Laplace. Osserviamo che, mediante integrazione per parti, se si esclude una crescita esponenziale di  $V(t)$  per  $t$  che tende all'infinito, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dV}{dt} dt &= V(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)e^{-st} V(t) dt \\ &= -V(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} V(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi, detta  $v(s)$  la trasformata di Laplace di  $V(t)$ , l'equazione del circuito RC diventa un'equazione algebrica facilmente risolvibile:

$$sv(s) - V(0) + \frac{v(s)}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(s) = \frac{V(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$



Pierre Simon, marchese di Laplace (1749–1827) è stato un fisico e matematico francese che diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica celeste e della probabilità. Fu il primo a ipotizzare l'esistenza di corpi così massivi da cui neanche la luce può fuggire. Introdusse la trasformata di Laplace come strumento nello studio delle distribuzioni di probabilità. Famoso per aver scritto (1812): "Un'Intelligenza che conoscesse, ad un istante dato, tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono, ... nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe di fronte ai suoi occhi". Meno noto il fatto che quest'idea venne espressa nel suo trattato *Théorie analytique des probabilités* per sottolineare che noi NON siamo come quell'intelligenza e le nostre previsioni e i nostri ragionamenti non possono che essere probabilistici.

Di solito (ma non in questo caso) il difficile è tornare indietro, cioè ricostruire  $F(t)$  a partire da  $f(s)$ .

Si può dimostrare (e lo faremo in una lezione successiva) che la trasformata inversa di Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  è data da

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} f(z) dz, \quad t > 0 \quad (8.18)$$

dove  $L$  è una qualunque retta parallela all'asse immaginario a destra di tutte le singolarità di  $f(z)$ . Per il momento, prendiamo questo risultato per buono e vediamo le conseguenze.

Sia  $L$  la retta di equazione  $z = \gamma$  (reale positivo) e si consideri il contorno della figura a lato. Chiaramente si ha

$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{A_R + L_R} e^{zt} f(z) dz - \int_{A_R} e^{zt} f(z) dz \right] \quad (8.19)$$

Si supponga che  $f(z)$  presenti come singolarità solo poli tutti situati a sinistra della retta  $z = \gamma$ , per  $\gamma$  fissato. Si supponga inoltre che

$$\int_{A_R} e^{zt} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty. \quad (8.20)$$

Allora, poiché  $\oint_{A_R + L_R}$  è pari a  $2\pi i$  volte la somma dei residui di  $e^{zt} f(z)$  nella regione delimitata da  $A_R + L_R$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$  si avrà

$$F(t) = \sum \text{Res. di } e^{zt} f(z) \text{ nei poli di } f(z)$$

(8.21)

Si osservi che la (8.20) è sempre garantita se  $f(z) = P(z)/Q(z)$  con  $P(z)$  e  $Q(z)$  polinomi tali che il grado di  $P$  sia minore del grado di  $Q$ , una situazione che si incontra spesso nello studio dei sistemi lineari.

Applicando la (8.21) al circuito RC, avendo  $v(z)$  un polo in  $-1/(RC)$ , si trova immediatamente la nota soluzione  $V(t) = V(0)e^{-t/RC}$ .

Se  $f(z)$  presenta punti di diramazione, la (8.21) continua a valere, a patto di deformare il contorno come spiegato nella sezione 8.6. Ad esempio, se  $z = 0$  è il solo punto di diramazione, si può usare il contorno della figura a lato.

**ESEMPIO 8.5. (PROPAGAZIONE DEL CALORE IN UNA SBARRA SEMI-INFINITA)** Mediante il metodo della trasformata di Laplace, risolvere l'equazione del calore (8.15) nella condizione in cui inizialmente, al tempo  $t = 0$ , la temperatura è nulla ovunque per  $x > 0$  e l'estremo  $x = 0$  è costantemente tenuto alla temperatura  $\theta_0$  per tutti i tempi  $t \geq 0$ .

Per comodità, cambiamo nome alla funzione temperatura: chiamiamola  $F(x, t)$  e riscriviamo l'equazione del calore come

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (8.22)$$

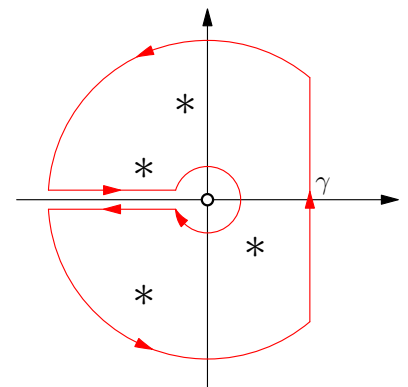
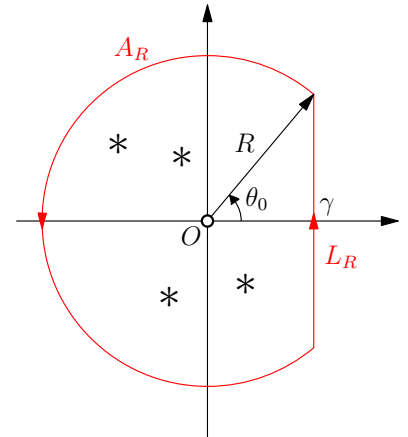


Figura 8.12: Cammino per invertire la trasformata di Laplace quando l'origine è un punto di diramazione.

Prendiamo la trasformata di Laplace rispetto al tempo di ambo i membri della (8.22). Procedendo come nel caso del circuito RC, posto

$$f(x, s) \equiv \int_0^\infty F(x, t)e^{-st} dt,$$

e assumendo che nel corso del tempo la soluzione si mantenga limitata, si ottiene  $sf(x, s) - f(x, 0) = Df''(x, s)$ , dove  $f''$  è la derivata seconda rispetto a  $x$ . Poiché la condizione iniziale  $F(x, 0)$  è nulla, l'equazione per  $f$  diventa

$$f'' - \frac{s}{D}f = 0$$

Questa è un'equazione alle derivate ordinarie rispetto a  $x$  ( $s$  è da considerarsi un parametro). La sua soluzione generale è

$$c_1 e^{\sqrt{s/D}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/D}x},$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti arbitrarie tali che, per essere determinate, sono richieste due condizioni. Una condizione è che per  $x = 0$ ,  $F(0, t)$  è la funzione costante pari a  $\theta_0$ , per  $t \geq 0$ , e nulla per  $t < 0$ .<sup>2</sup> La trasformata di Laplace di questa funzione è

$$f(0, s) = \theta_0 \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{\theta_0}{s}.$$

La seconda condizione è il requisito che la soluzione si mantenga limitata nel tempo, il che si traduce in  $c_1 = 0$ . Sotto queste condizioni, la soluzione cercata è

$$f(x, s) = \frac{\theta_0}{s} e^{-\sqrt{s/D}x}.$$

Per risalire a  $F(x, t)$  occorre la trasformata inversa di questa funzione. Possiamo usare la (8.21), ma poiché l'origine è un punto di diramazione occorre utilizzare un cammino come in figura 8.12. Dal problema ?? (III) si ottiene

$$F(x, t) = \theta_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{Dt}} e^{-u^2} du \right] = \theta_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right).$$

L'andamento di questa funzione è mostrato nella figura a lato.

### 8.8 Il metodo che piaceva a Feynman

Il metodo della *derivazione sotto il segno di integrale* è un metodo per calcolare integrali ingegnoso e semplice: si introduce un parametro nella funzione integranda in modo tale che per derivazione rispetto a tale parametro ci si possa ricondurre a integrali noti o a equazioni differenziali risolvibili. Illustriamo questo metodo con alcuni esempi.

<sup>2</sup> In altre parole,  $F(0, t) = \theta_0 \Theta(t)$ , dove

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

è la funzione funzione di Heaviside (o "funzione scalino"), di cui ci occuperemo in un prossimo capitolo. La sua trasformata di Laplace è  $1/s$ .

La funzione degli errori è

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

e la funzione degli errori complementare è

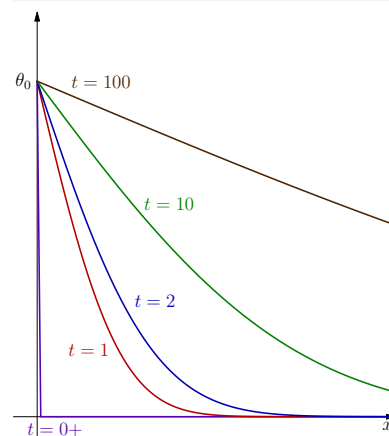
$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du.$$


Figura 8.13: Andamento nel corso del tempo di  $\theta_0 \operatorname{erfc} (x / (2\sqrt{Dt}))$ .

ESEMPIO 8.6.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{d}{da} \frac{\pi}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2adx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{\pi}{a^2} \end{aligned}$$

e per  $a = 1$  si ottiene il risultato desiderato,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.7.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Consideriamo

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

L'integrale che si vuole calcolare è  $I(0)$ . Sappiamo calcolare agevolmente

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = -\text{Im} \int_0^{\infty} e^{ix} e^{-ax} dx \\ &= -\text{Im} \int_0^{\infty} e^{(i-a)x} dx = \text{Im} \frac{1}{i-a} = \frac{-1}{1+a^2} \end{aligned}$$

che, integrata, fornisce

$$I(a) = -\arctan(a) + c$$

Poichè  $I(\infty) = 0 = -\pi/2 + c$ , si ha  $c = \pi/2$  e quindi

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a)$$

per  $a = 0$ ,

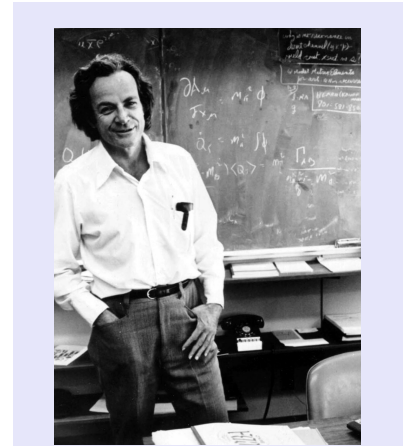
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.8.

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo la derivata di  $g$  rispetto a  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{dg(k)}{dk} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2ax)}_{\text{derivative of } -ax^2} \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{derivative of } e^{-ikx}} dx \\ &= \frac{i}{2a} \left[ e^{-ax^2} e^{-ikx} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (-ik) e^{-ikx} dx \\ &= 0 - \frac{k}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = -\frac{k}{2a} g(k) \end{aligned}$$



Richard Feynman (1918–1988) è stato un fisico americano, noto per il suo lavoro in elettrodinamica quantistica, la rappresentazione delle soluzioni delle equazioni della meccanica quantistica in termini di integrali su cammini, la fisica della superfluidità e il modello a partoni nella fisica delle particelle elementari.

\*\*\*

In *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*, a proposito del calcolo di integrali, Feynman scrisse: "One thing I never did learn was contour integration. I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. . . . That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign—it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals. The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me."

Si ha così l'equazione differenziale

$$\frac{dg(k)}{dk} = -\frac{k}{2a}g(k), \quad g(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

che si risolve a vista

$$\frac{dg}{g} = -\frac{k}{2a}dk \Rightarrow \ln g = -\frac{k^2}{4a} + c \Rightarrow g(k) = g(0)e^{-\frac{k^2}{4a}},$$

da cui,

$$g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$



8.9 PROBLEMI

PROBLEMA 8.1. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

[3π/8]

(II)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}, \quad a, b > 0$$

[π/(16a<sup>3/2</sup>b<sup>5/2</sup>)]

(III)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1$$

[π/[sin(aπ)]]

(IV)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$$

[π]

PROBLEMA 8.2. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

[π/3]

(II)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx$$

[2πe<sup>-a</sup>]

(III)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$$

[π/12]

(IV)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, n \in \mathbb{Z}^+, a > 0$$

(V)

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

$$\left[ \frac{e^{-|\omega|\pi/2}}{1+e^{-|\omega|\pi}} \right]$$

(VI)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx$$

[π/2 tanh(aπ/2)]

(VII)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

[2π/√3]

PROBLEMA 8.3. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$$

[π/2]

(II)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\cos t}$$

[2π/√5]

(III)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{13+12\cos t}$$

[-4π/15]

(IV)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

[π/6]

(V)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

[π]

(VI)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}$$

PROBLEMA 8.4. □ Dimostrare che

(I)

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(II)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

(III)

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$$

(IV)

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \pi \ln 2$$

PROBLEMA 8.5. □ Calcolare

(I)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\}$$

$$\left[ \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \right]$$

(II)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

$$\left[ \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \right]$$

(III)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\}$$

$$\left[ 1 - \operatorname{erf} \left( a/2\sqrt{2} \right) \right]$$

*Il prossimo è un problema fuori programma.*

PROBLEMA 8.6. Il problema di Keplero del moto di un corpo di massa  $m$  in un campo centrale  $-k/r$  può essere risolto in termini di variabili azione-angolo. Risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi in coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ , e separando le variabili, si ottiene una forma integrale delle variabili

d'azione  $J_\phi, J_\theta$  e  $J_r$ . Per la variabile d'azione radiale si trova

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}} dr \quad (*)$$

dove  $E$  è l'energia, assunta negativa (stato legato), l'integrazione è su un'orbita con perielio  $r_1$  e afelio  $r_2$ . L'interesse in questo integrale sta nel fatto che se riusciamo ad esprimere l'energia  $E$  in termini delle variabili d'azione, cioè se determiniamo l'hamiltoniana  $H = E$  in funzione di  $J_\phi, J_\theta$  e  $J_r$ , possiamo determinare le frequenze del moto, sulla base dell'equazione

$$v_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

Sommerfeld, che contribuì molto allo sviluppo della "vecchia" meccanica quantistica *à la* Bohr, basata su condizioni di quantizzazione  $\oint p_i dq_i = n_i h$  per gli integrali d'azione, risolse l'integrale (\*), con i metodi dell'analisi complessa.

1. Siete in grado di fare altrettanto? (Come aiuto, si tenga presente che perielio e afelio sono punti di diramazione e che conviene prendere un taglio tra di loro e ...)
2. Fatto questo, dovrete poter verificare che c'è una sola frequenza del moto e che il periodo è dato da

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}$$

[Si veda il libro di Goldstein di meccanica classica.]

# 9

## Altre conseguenze del teorema di Cauchy

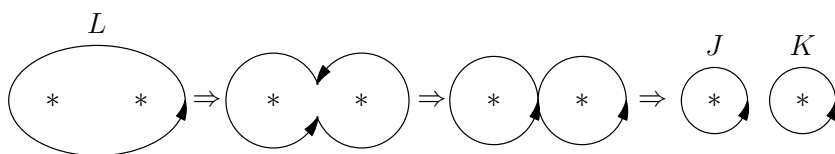
### 9.1 Miscellanea di teoremi

Incominciamo con una conseguenza del teorema di Cauchy che implicitamente abbiamo già usato. Si tratta del seguente fatto: *il valore dell'integrale di contorno*

$$\oint_C f(z) dz$$

non cambia se la curva chiusa  $C$  è deformata a piacere, purché la deformazione avvenga passando sempre per punti analitici della funzione  $f(z)$ .

Chiamiamo questo fatto *teorema di deformazione* (la dimostrazione è ovvia) e illustriamolo con l'esempio mostrato nella figura sotto.



Se  $f(z)$  è ovunque analitica eccetto che nei due poli mostrati in figura, allora la deformazione del cammino mostrata in figura è ammissibile e

$$\oint_L f(z) dz = \oint_J f(z) dz + \oint_K f(z) dz$$

La deformazione mostrata nella figura figura 9.1 permette di comprendere perché teorema e formula di Cauchy sono validi anche per regioni molteplicemente connesse. Nel limite in cui i segmenti  $AB$  e  $EF$  si toccano, gli integrali lungo i segmenti si elidono a vicenda, essendo diretti in senso opposto. Quindi, se la funzione  $f(z)$  è analitica in  $\mathcal{R}$ , si avrà

$$\oint_{K-L} f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0$$

Adesso abbiamo argomento. L'inverso del teorema di Cauchy, noto come *Teorema di Morera*, afferma che se  $f(z)$  è continua in una

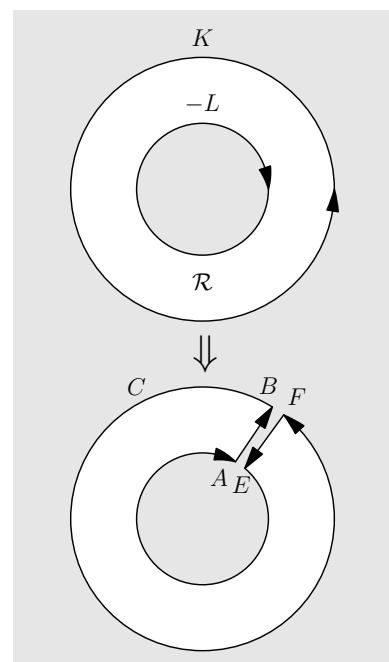


Figura 9.1: In alto la regione molteplicemente connessa  $\mathcal{R}$  con bordo  $K-L$  che, per deformazione del bordo, è trasformata nella regione in basso delimitata dalla curva semplice  $C$ .

regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$  e se

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

lungo ogni curva semplice chiusa contenuta in  $\mathcal{R}$ , allora  $f(z)$  è analitica in  $\mathcal{R}$ . Se si ragiona in termini di cariche e teorema di Gauss nel piano, questo fatto sembra così ovvio da non richiedere neanche una dimostrazione. (La dimostrazione in effetti è semplice e la lasciamo come esercizio.)

Meno ovvio è quale sia la risposta alla domanda se ci siano funzioni, diverse da quelle costanti, analitiche ovunque incluso l'infinito. Un polinomio o l'esponenziale, per esempio, sono funzioni ovunque analitiche, ma, come abbiamo visto, non all'infinito. Il teorema di Liouville afferma che se  $f(z)$  è analitica e limitata in tutto il piano complesso, allora deve essere necessariamente una costante. Non è difficile convincersi di questo fatto. Se  $a$  e  $b$  sono due punti qualunque del piano e  $C_R$  è un cerchio centrato in  $a$  di raggio  $R \geq 2|a - b|$ , dalla formula di Cauchy si ha

$$|f(b) - f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] f(z) dz \right|.$$

Essendo  $f(z)$  per ipotesi limitata, esiste una costante  $M$  tale che  $|f(z)| < M$ . Dunque, per la disuguaglianza (7.1), tenuto conto che  $|z - a| = R$  e che  $|z - b| = |z - a + (a - b)| \geq R - |a - b| \geq R - R/2 = R/2$ , si ha

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|a - b|M}{|z - a||z - b|} dz \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|a - b|M}{(1/2)R^2} R d\theta \\ &= 2 \frac{|a - b|M}{R} \end{aligned}$$

Facendo tendere  $R$  all'infinito, si ha  $|f(b) - f(a)| = 0$ , cioè  $f(z) =$  costante, che è quanto si voleva dimostrare.

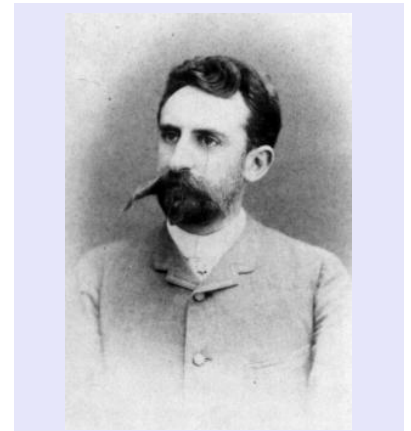
Dunque, una funzione che è analitica ovunque nel piano complesso, e non è una costante, deve necessariamente avere una singolarità all'infinito. Una funzione di questo tipo è detta *intera*. Sono funzioni intere i polinomi, la funzione esponenziale, le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche. Le intere sono un caso particolare delle meromorfe (a cui è consentito avere poli).

Sorprendentemente, il teorema di Liouville ha ripercussioni in un settore della matematica apparentemente molto lontano. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{P(z)},$$

dove  $P(z)$  è un polinomio. Se  $P(z)$  non avesse radici, allora

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$



Giacinto Morera (1856-1909) è stato un matematico e ingegnere italiano noto per il teorema di Morera e il suo lavoro sull'elasticità lineare. Insegnò meccanica razionale all'università di Genova per 15 anni, per poi trasferirsi sulla stessa cattedra al politecnico di Torino.

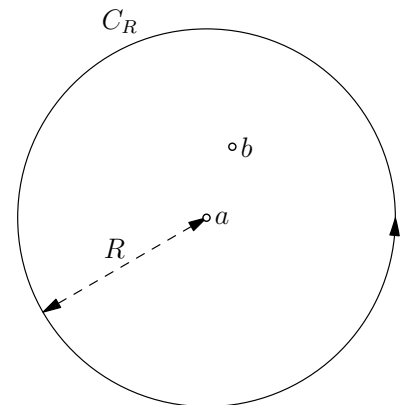


Figura 9.2:  $a$  e  $b$  sono due punti qualunque del piano e  $C_R$  è un cerchio centrato in  $a$  di raggio  $R \geq 2|a - b|$ .

sarebbe analitica in tutto il piano complesso. Chiaramente,  $f(z)$  è limitata su tutto il piano complesso (il suo modulo tende a zero per  $z$  che tende all'infinito). Dunque, per il teorema di Liouville, si avrebbe che  $f(z)$ , e di conseguenza  $P(z)$ , dovrebbero essere costanti. Poiché si è raggiunta una contraddizione, ne segue che  $P(z)$  deve avere almeno una radice. Ma questo è il *teorema fondamentale dell'algebra* (1.10)!

Il teorema fondamentale dell'algebra è dunque un'immediata conseguenza del teorema di Liouville che, a sua volta, è un'immediata conseguenza del teorema di Cauchy (se poi riguardiamo quest'ultimo come il teorema di Gauss per l'elettrostatica nel piano, scopriamo un insospettabile ponte tra elettrostatica e algebra!).

Il *Teorema della media di Gauss* afferma che se  $f(z)$  è analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  di raggio  $R$  e con centro in  $z = a$ , allora  $f(a)$  è la media dei valori di  $f(z)$  su  $C$ . Questo fatto è un'immediata conseguenza della formula di Cauchy. Infatti, se  $C$  è un cerchio di raggio  $R$ , la sua equazione è  $|z - a| = R$ , cioè  $z = a + Re^{i\theta}$ , e

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

diventa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta \tag{9.1}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Il teorema vale separatamente per la parte reale e la parte immaginaria di  $f(z)$ , che sono funzioni armoniche. Si ritrova così, in due dimensioni il teorema della media per funzioni armoniche che vale in un numero qualunque di dimensioni (si veda i complementi 5.8.1). Ricordiamo che in  $d$  dimensioni sono armoniche le funzioni  $u$  tali che

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \dots = 0.$$

Maxwell chiamava il laplaciano di  $u$  nel punto  $P$  la *concentrazione di  $u$*  in quel punto, nel senso che misura la differenza tra la media della funzione su una piccola superficie sferica centrata in  $P$  e il valore della funzione in quel punto. Il nocciolo di questo fatto è particolarmente evidente quando si considera il laplaciano discretizzato su un reticolo. In una dimensione,

$$\begin{aligned} \Delta u = u''(x) &\approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} \approx \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} [u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)], \end{aligned}$$

in due,



Joseph Liouville (1809–1882) è stato un matematico francese che diede importanti contributi alla teoria dei numeri, all'analisi complessa, alla topologia e alla geometria differenziale. Anche i suoi contributi alla fisica furono ragguardevoli: introdusse la nozione di variabili azione-angolo come descrizione dei sistemi completamente integrabili e dimostrò il teorema (che prende il suo nome) che l'evoluzione temporale di un sistema Hamiltoniano preserva il volume nello spazio delle fasi. Questo teorema è alla base della meccanica statistica.



Carl Friedrich Gauss (1777–1855) è stato un matematico e scienziato tedesco che ha contribuito in maniera significativa a molti campi quali la teoria dei numeri, la statistica, la geometria differenziale, la geometria, la geodesia, la geofisica, l'elettrostatica, l'astronomia e l'ottica. È stato tra i matematici più influenti di tutti i tempi.

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

$$\approx \frac{1}{h^2} [u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h) - 4u(x, y)]$$

e in  $d$  dimensioni:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2} [\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P - 2d \times u(P)]$$

Quindi l'annularsi del laplaciano discretizzato in  $P$  implica

$$u(P) = \frac{1}{2d} [\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P]$$

$$= [\text{media di } u \text{ nell'intorno di } P]$$

Strettamente collegato al teorema della media è il seguente fatto: se  $f(z)$  è analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$ , allora il massimo del modulo di  $f(z)$  si trova su  $C$  (a meno che  $f$  non sia costante e quindi uguale dappertutto). Questo fatto, noto come *teorema (o principio) del massimo modulo* si dimostra facilmente facendo riferimento alla figura 9.4: supponiamo che il massimo  $M$  si raggiunga in un punto  $a$  dentro la curva  $C$  (l'ovale in grigio nella figura), sia cioè  $|f(a)| = M$ . Sia  $C_1$  un cerchio con centro in  $a$  tutto contenuto in  $C$ . Allora, se si esclude che  $f$  sia costante dentro  $C_1$ , ci sarà un punto  $b$  dentro  $C_1$  tale che  $|f(b)| < M$ . Ma, per continuità, ci sarà un intorno finito di  $b$  dentro cui  $|f(b)| < M$ . Sia tale intorno il cerchio  $C_2$  centrato in  $b$  mostrato in figura. Sia adesso  $C_3$  un cerchio di raggio  $|a-b|$  centrato in  $a$ ; per il teorema della media, la media dei valori del modulo sul cerchio  $C_3$  dovrà essere maggiore o al più uguale al valore  $M$  che la funzione assume nel centro ma, nella parte di  $C_3$  fuori da  $C_2$  (in rosso in figura), il modulo può al massimo valere  $M$  e nella parte dentro  $C_2$  (in blu) è strettamente minore di  $M$ , quindi la media su  $C_3$  sarà strettamente minore di  $M$ . Essendo giunti ad una contraddizione, il teorema risulta dimostrato.

Si osservi che il teorema poteva essere dimostrato separatamente per le parti reale e immaginaria di  $f$ : il principio del massimo modulo riguarda le funzioni armoniche. Ne segue un'interessante interpretazione fisica. Consideriamo l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = D\Delta T$$

per la temperatura  $T = T(x, y, t)$  e supponiamo che la temperatura venga costantemente mantenuta ad una distribuzione costante sul bordo  $C$  della la regione  $\mathcal{R}$ . Dopo un certo lasso di tempo la temperatura dentro la regione raggiungerà l'equilibrio e, all'equilibrio varrà l'equazione di Laplace

$$\Delta T = 0$$

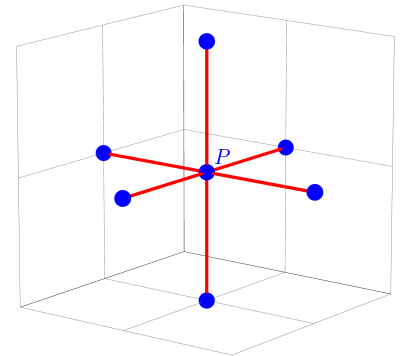


Figura 9.3: Funzioni armoniche su un reticolo tri-dimensionale: se il laplaciano discretizzato di  $u$  si annulla in  $P$ , allora  $u(P)$  è pari ad  $1/6$  della somma dei valori di  $u$  nei primi vicini di  $P$  (che sono 6, e in  $d$  dimensioni sono  $2d$ ).

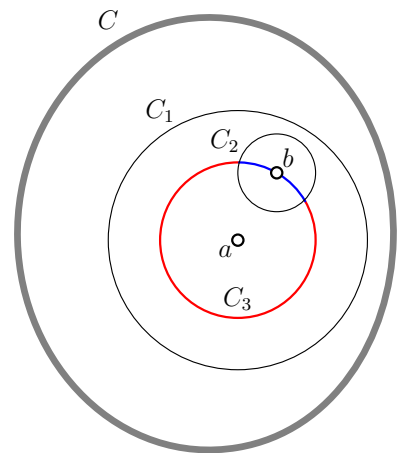


Figura 9.4: Teorema del massimo modulo.

In altre parole, in condizioni di equilibrio, la temperatura dentro alla regione è una funzione armonica. Allora, per il principio del massimo modulo, la temperatura non può assumere il suo valore massimo dentro  $\mathcal{R}$ , ma solo sul suo bordo, che ha una distribuzione di temperatura mantenuta costante nell'esperimento. Analoghe considerazioni valgono per il potenziale elettrostatico e, in generale, per qualunque grandezza fisica che soddisfi l'equazione di Laplace.

A questo riguardo, osserviamo che il problema di determinare una funzione armonica in  $\mathcal{R}$ , quando sono fissati i suoi valori sul bordo  $C = \partial\mathcal{R}$ , va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. È facile dimostrare che se la soluzione di un problema di Dirichlet esiste, allora è unica (si veda i complementi 5.8.1). Quel che è difficile è dimostrarne l'esistenza: quali proprietà deve avere la funzione sul bordo? Quanto irregolare può essere il bordo? Dal punto di vista della fisica, il problema è equivalente a stabilire se esista una distribuzione stazionaria di temperatura nella regione  $\mathcal{R}$ , fissati i valori della temperatura sul bordo. Ovvio che c'è, verrebbe da dire, basta aspettare che il transiente decada e si raggiunga l'equilibrio! In effetti, questo fu quel che pensavano i fisici e i matematici fino a che, agli inizi del Novecento, il matematico francese Henri Lebesgue non trovò un contro-esempio, mostrando una situazione in cui il problema di Dirichlet non ha soluzione. Vale anche un principio di *minimo modulo*: sotto le stesse condizioni di prima, con la condizione aggiuntiva che  $|f(z)| \neq 0$  dentro  $C$ , anche il valor minimo di  $|f(z)|$  è raggiunto sul bordo  $C$  e non dentro a  $C$ . Questo teorema si dimostra in modo analogo ragionando sulla funzione  $1/f(z)$ . Il suo significato fisico è che neanche il minimo della temperatura può essere raggiunto dentro  $C$ , ma solo sul bordo.

Concludiamo questa miscellanea con due teoremi che ci limitiamo ad enunciare, mentre altre due importanti conseguenze del teorema di Cauchy verranno discusse separatamente nelle prossime due sezioni.

*Teorema dell'argomento*: Sia  $f(z)$  analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$ , fatta eccezione per un numero finito di poli giacenti dentro  $C$ , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

dove  $N$  e  $P$  sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di  $f(z)$  dentro  $C$ .

*Teorema di Rouché*: Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$  e sia  $|g(z)| < |f(z)|$  lungo tutta  $C$ , allora  $f(z) + g(z)$  e  $f(z)$  hanno dentro  $C$  lo stesso numero di zeri.

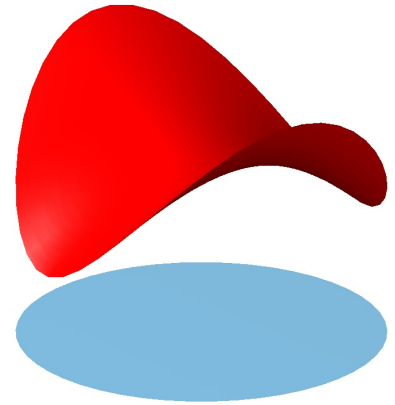
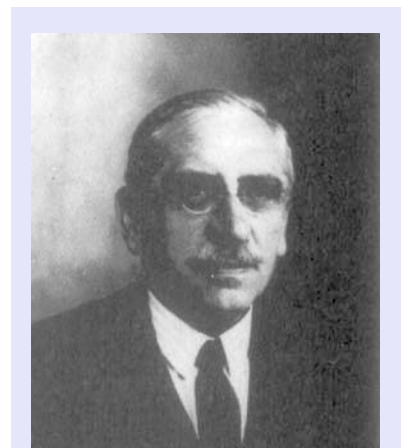


Figura 9.5: Grafico del modulo di  $\cos z$  (in rosso) per  $z$  nel disco unitario centrato nell'origine (in blu). Come predetto dal teorema del massimo modulo, il massimo del modulo non può essere dentro al disco (cosicché il valore più elevato sulla superficie rossa è da qualche parte lungo il suo bordo). Analogo discorso vale per il suo minimo.



Henri Lebesgue (1875–1941) è stato un matematico francese, noto soprattutto per la sue teorie della misura e dell'integrazione, che sono una generalizzazione delle nozione classiche portate a compimento da Riemann. Queste teorie furono esposte nella sua tesi di dottorato *Intégrale, longueur, aire* all'università di Nancy nel 1902.

## 9.2 Infinita differenziabilità e serie di Taylor

Vogliamo adesso mostrare che se  $f(z)$  è analitica all'interno e lungo un cerchio  $C_R$  di raggio  $R$ , per semplicità centrato nell'origine, allora  $f(z)$  può essere espressa come una serie di potenze

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$$

che converge dentro al disco di raggio  $R$ . Per stabilire l'esistenza della serie, ritorniamo alla formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ.$$

Raccogliendo  $Z$  a denominatore, possiamo riscriverla come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ.$$

Poiché  $z$  è dentro al cerchio  $C_R$  su cui è  $Z$ , si ha

$$|z| < |Z| = R \quad \text{e} \quad |z/Z| < 1. \quad (9.2)$$

Perciò  $1/[1-(z/Z)]$  può essere vista come la somma di una serie geometrica infinita, per cui

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[ 1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + (z/Z)^3 + \dots \right] dZ. \quad (9.3)$$

A patto che sia possibile integrare la serie infinita termine per termine, deduciamo che  $f(z)$  può essere espresso come una serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ \quad (9.4)$$

Ma non solo. Poiché

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

deduciamo anche

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ,$$

che è, in effetti, un risultato sorprendente, come commenteremo tra breve.

Ma prima di passare ai commenti, completiamo la dimostrazione. È possibile integrare la serie infinita nel secondo membro della (9.3) termine a termine: basta mostrare che la somma  $f_N(z)$  dei primi  $N$  termini della serie (9.4) converge a  $f(z)$  quando  $N$  tende all'infinito. Il resto della serie geometrica è

$$\frac{1}{1-(z/Z)} - \left[ 1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + \dots + (z/Z)^{N-1} \right] = \frac{(z/Z)^N}{1-(z/Z)}$$

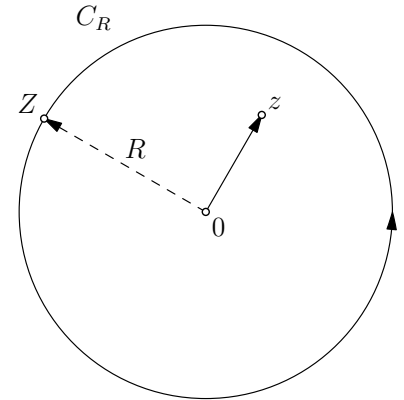


Figura 9.6:  $Z$  è un generico punto sul cerchio di raggio  $R$ ,  $z$  è dentro al cerchio,  $|z| < |Z| = R$ .



(noto da esercizi in capitoli precedenti). Dunque

$$f(z) - f_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{(z/Z)^N}{1 - (z/Z)} \right] dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} dZ,$$

da cui

$$|f(z) - f_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} \right| dZ$$

Detto  $M$  il massimo di  $|f(Z)/(Z - z)|$  (che per la (9.2) esiste ed è finito) e ricordando la (7.1), si ha

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} \right| \leq RM |z/R|^N$$

Perciò  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = f(z)$ , che è quanto si voleva dimostrare.

Qual è il raggio di convergenza della serie che abbiamo ottenuto? Sappiamo che se  $f$  è analitica dentro  $C$ , allora la serie (9.4) converge a  $f(z)$  in quel disco. Perciò, riferendoci alla figura 9.7, vediamo che  $C_R$  può essere espanso fino al cerchio tratteggiato, dove incontra la prima singolarità di  $f$ . Più in generale,  $f(z)$  potrebbe essere un ramo a un sol valore di una multifunzione e, come abbiamo imparato, i punti di diramazione agiscono come un ostacolo tanto quanto i poli. Perciò risulta dimostrato in maniera definitiva il principio (4.3): il raggio di convergenza è la distanza dal centro di espansione alla singolarità più vicina, sia essa un polo, un punto di diramazione o una singolarità essenziale.

Se avessimo scelto un punto  $a$  come centro del cerchio, ben poco sarebbe cambiato: avremmo ottenuto un'espansione in  $a$  anziché nello zero. Risulta così stabilito il *teorema di Taylor* per funzioni analitiche:

Sia  $f(z)$  analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  con centro in  $z = a$ . Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

dove

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz. \tag{9.5}$$

Il raggio massimo di convergenza della serie o, semplicemente, il raggio di convergenza  $R$  della serie, è la distanza tra il punto  $a$  e la singolarità più vicina.

Abbiamo detto che l'espressione per  $f^{(n)}(0)$  è un risultato sorprendente. Chiariamo perché. Innanzitutto osserviamo che dalla (9.5) si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - a)^{n+1}}. \tag{9.6}$$

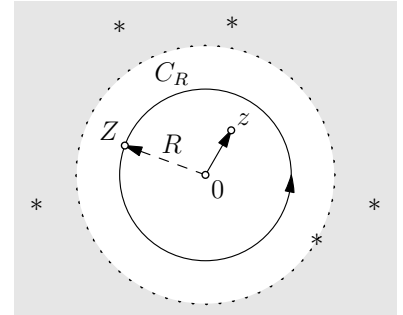


Figura 9.7: La serie diverge nella regione in grigio e converge nel disco bianco.

Dove  $C$ , per deformazione, può essere una qualunque curva chiusa che contiene  $a$ , purché  $f(z)$  sia analitica all'interno di e su  $C$ .

Questa formula è interessante per due ragioni. In primo luogo, mostra che se  $f$  è analitica, cioè derivabile una volta, lo è anche infinite volte, un risultato che non ha alcun analogo nell'analisi reale. In secondo luogo, fornisce il calcolo della derivata in termini di un integrale! Da un punto di vista pratico, è utile che permetta di fare anche il viceversa (visto che in genere calcolare derivate è più semplice che calcolare integrali).

Quest'ultima proprietà è però meno inaspettata di quanto possa sembrare. Prendiamo, ad esempio,  $n = 1$ . Allora

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2}, \quad (9.7)$$

ma questa equivale alla formula

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\},$$

che è un'estensione agli integrali di contorno della regola di Leibniz per la derivazione sotto il segno di integrale. La stessa estensione vale per la (9.6), che è in effetti la derivata  $n$ -esima di

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

rispetto a  $a$ .

### 9.3 Serie di Laurent

Anche se non l'abbiamo chiamata così, abbiamo già incontrato una serie di Laurent nella sezione 7.4, dove abbiamo visto che nell'intorno del polo di ordine  $m$  si ha

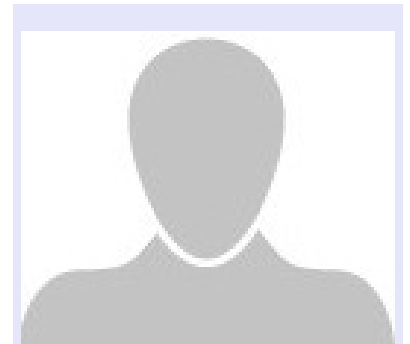
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

per  $g(z)$  analitica e non nulla in  $a$ . Per il teorema di Taylor (9.5), se una funzione è analitica, necessariamente ha uno sviluppo in serie, quindi

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{g^n(a)}{n!}$$

da cui deduciamo che  $f(z)$  ha una serie, detta di Laurent, della forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots \quad (9.8)$$



Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) è stato un matematico francese, noto per la serie che porta il suo nome. Aveva esposto la sua scoperta in una memoria sottoposta per un premio dell'Accademia delle Scienze, ma memoria non arrivò entro i termini prescritti e non fu mai considerata per il premio. Fu pubblicata solo dopo la sua morte.

dove

$$c_{-m} = b_0, c_{-m+1} = b_1, \dots, c_0 = b_m, c_1 = b_{m+1}, \dots,$$

La parte in potenze negative di questa serie è detta *parte principale*.

Il teorema di Laurent, stabilisce che un'espansione di questa forma esiste sempre:

Sia  $f(z)$  analitica dappertutto dentro un anello centrato in  $a$ .  
Allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ dove } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ \quad (9.9)$$

e  $K$  è una qualunque curva semplice chiusa nell'anello (che contiene il disco interno).

Prima di dimostrare questo teorema facciamo alcuni commenti.

Ciò che è davvero notevole, è l'ESISTENZA della serie di Laurent, non il fatto che converga in un anello. Poiché sappiamo che una serie di potenze in  $(z - a)$  converge dentro a un disco centrato in  $a$ , sappiamo anche che una serie di potenze in  $1/(z - a)$  convergerà fuori dal disco centrato in  $a$ . Essendo, per definizione, una serie di Laurent la somma di una serie di potenze in  $(z - a)$  e una serie di potenze in  $1/(z - a)$ , ne segue che la convergenza è in un anello.

Sopra abbiamo dedotto l'esistenza di una serie in prossimità di un polo. Il Teorema di Laurent è molto più potente: non fa alcuna assunzione riguardo a quello che succede alla funzione nel disco interno  $D$  (vedi figura). In pratica, il disco esterno può essere espanso fino a incontrare la singolarità  $s$  di  $f(z)$ , e quello interno contratto fino a che non si raggiunge la singolarità più esterna  $r$  che sta in  $D$ .

Se non ci sono singolarità in  $D$ , il bordo interno può collassare completamente trasformando così l'anello in un disco. In questo caso, la serie non contiene potenze negative. Infatti, se  $n$  è negativo, allora  $f(Z)/(Z - a)^{n+1}$  è analitica dappertutto dentro  $K$  e quindi  $c_n = 0$ . In questo modo si ritrova il teorema di Taylor come caso particolare del teorema di Laurent.

Supponiamo che  $a$  sia una singolarità e che per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo non ci siano altre singolarità in una distanza  $\epsilon$  da  $a$ . In altre parole,  $a$  è una singolarità isolata. Applicando il teorema di Laurent all'anello  $0 < |z - a| < \epsilon$ , realizziamo che ci sono due differenti possibilità: o la parte principale ha un numero finito di termini o ne ha infiniti. Se il numero è finito  $a$  è un polo, se è infinito, è una singolarità essenziale del tipo di quella che abbiamo incontrato per  $e^{1/z}$ .  
Morale: una singolarità isolata o è un polo o è una singolarità essenziale.

Passiamo alla dimostrazione del teorema (9.9). Semplifichiamoci la vita e prendiamo  $a = 0$ . Inoltre usiamo le notazioni illustrate in

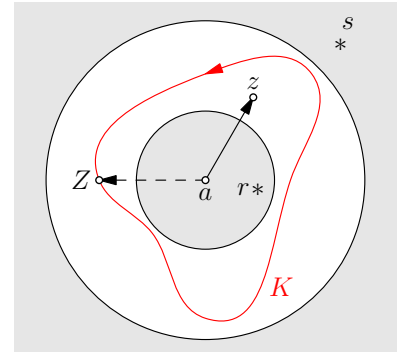


Figura 9.8: La serie converge nell'anello bianco.

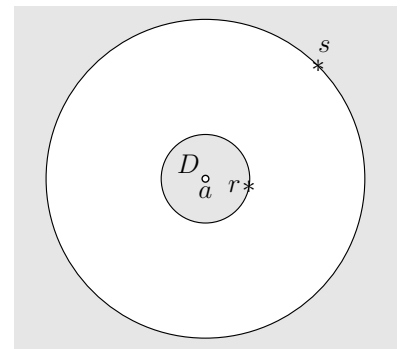


Figura 9.9: L'anello può essere steso verso l'esterno e l'interno fino ad incontrare le singolarità di  $f$  più vicine.

figura 9.10:  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono cerchi percorsi in senso antiorario, tali che  $z$  è compreso tra di loro;  $\mathcal{L}$  è un circuito semplice antiorario attorno a  $z$ , che sta dentro l'anello. Punti generici sulle curve  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{L}$  sono denotati  $Z$ ,  $W$  e  $V$  rispettivamente.

Suddividiamo la dimostrazione in tappe.

1. Dalla formula di Cauchy otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(V)}{V-z} dV = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{W-z} dW$$

La seconda identità segue dal fatto che  $\mathcal{L}$  può essere deformato in  $(\mathcal{C}) + (-\mathcal{D})$ .

2. Riscriviamo l'equazione precedente come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[ \frac{1}{1-(W/z)} \right] dW.$$

Il significato di questo è che  $|(z/Z)| < 1$  e  $|(W/z)| < 1$ , cosicchè entrambi gli integrandi a secondo membro possono essere espansi in serie geometriche.

3. Procedendo come per la serie di Taylor, per l'integrale lungo  $\mathcal{C}$  otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ \right] z^n$$

4. Un ragionamento sostanzialmente identico a quello fatto per la serie di Taylor giustifica l'integrazione termine a termine dell'integrale attorno a  $\mathcal{D}$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[ \frac{1}{1-(W/z)} \right] dW = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{n-1} f(W) dW \right] \left( \frac{1}{z} \right)^n.$$

5. L'esistenza della serie di Laurent è stabilita:

$$f(z) = \dots + \frac{d_3}{z^3} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_1}{z^1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

dove

$$d_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{m-1} f(W) dW \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ$$

6. Due osservazioni conclusive permettono di rifinire il risultato ed arrivare alla tesi del teorema:

- Gli integrali che definiscono  $d_m$  e  $c_n$  non cambiano se permettiamo a  $\mathcal{C}$  di contrarsi e a  $\mathcal{D}$  di espandersi fino a che non si fondono nello stesso loop semplice  $K$  di figura 9.8.
- Se scriviamo  $m = -n$  l'integrale che definisce il coefficiente  $d_{-n}$  di  $z^n$  ha integrando  $W^{-n-1} f(W) = f(W)/W^{n+1}$ , che è lo stesso integrando dei  $c_n$ .

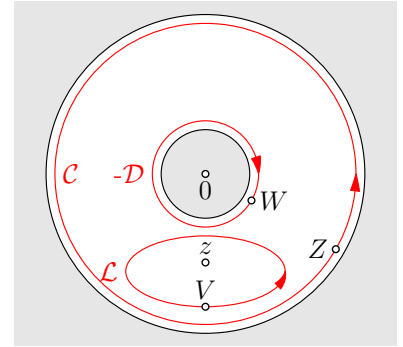


Figura 9.10: La serie converge nell'anello bianco.

Arriviamo così alla forma compatta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$$

che è proprio quanto si voleva dimostrare.

### 9.4 Espansione in multipoli

La serie di Laurent è, dal punto di vista fisico, un'espansione in multipoli. Chiariamo questo con un esempio. Supponiamo che una funzione  $f(z)$ , altrimenti analitica, abbia un polo triplo nell'origine.

Allora

$$f(z) = \frac{p}{z^3} + \frac{d}{z^2} + \frac{q}{z} + a + bz + cz^2 + \dots$$

Nell'intorno della singolarità, il comportamento della funzione è governata dalla sua parte principale, il cui campo coniugato è

$$\bar{\mathbf{P}} \leftrightarrow \frac{\bar{p}}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{d}}{\bar{z}^2} + \frac{\bar{q}}{\bar{z}}$$

Riconosciamo la sovrapposizione di un quadrupolo, di un dipolo e di una combinazione sorgente/vortice del tipo già incontrato ( $\bar{q} = A - iB$ ). La parte principale della serie corrisponde quindi ad una *espansione in multipoli*. La serie di Laurent e il teorema dei residui possono dunque essere interpretati fisicamente come segue. Il solo termine capace di generare flusso e circolazione è  $\bar{q}/\bar{z}$ , che può essere a sua volta decomposto in un vortice di intensità  $\mathcal{C} = -2\pi \text{Im}(q)$  e una sorgente di intensità  $\mathcal{F} = 2\pi \text{Re}(q)$ . Tutti gli altri termini corrispondono a multipoli che non generano né circolazione né flusso; un insieme finito di questi è nel polo, mentre il resto è all'infinito.

### 9.5 Prolungamento analitico

Si supponga di considerare la funzione analitica definita dallo sviluppo in serie di Taylor

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \tag{9.10}$$

all'interno del cerchio di convergenza  $C_1$  (si veda figura a lato). Quanta libertà abbiamo di costruire una funzione analitica  $f(z)$  che all'interno del cerchio  $C_1$  sia data dalla serie sopra e in altre regioni del piano complesso sia definita in modo indipendente? Nessuna!

Spieghiamo perché. Scelto un punto  $b$  dentro  $C_1$ , il valore di  $f(z)$  e delle sue derivate in  $b$  è determinato dalla (9.10) e risulta quindi unicamente definito lo sviluppo in serie di Taylor in  $b$

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \dots \tag{9.11}$$

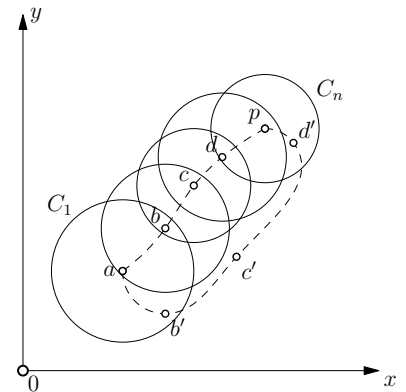


Figura 9.11: Prolungamento analitico.

che ha cerchio di convergenza  $C_2$ . Se  $C_2$  si espande oltre  $C_1$ , il valore della funzione e delle sue derivate risulta determinato in questa zona più ampia. Si dice in tal caso che la funzione è stata *prolungata analiticamente* oltre  $C_1$  e il procedimento seguito si dice di *continuazione analitica* o *prolungamento analitico*. Naturalmente, il procedimento può essere continuamente ripetuto: scelto un punto  $c$  dentro  $C_2$  si arriva ad una nuova serie che ha cerchio di convergenza  $C_3$  che può estendersi oltre  $C_1, C_2$ , ecc.

L'insieme di tutte tale rappresentazioni in termini di serie di potenze, cioè di tutti i possibili prolungamenti analitici DEFINISCE la funzione analitica  $f(z)$ . Ogni serie di potenze del tipo (9.10) è detta *elemento* della funzione e il succo di quanto abbiamo appena spiegato è che fissatone un elemento, tutti gli altri elementi della funzione, e quindi la funzione stessa, risultano determinati: dunque, nessuna libertà di definire a nostro piacimento la funzione in diverse regioni del piano complesso.

Nel realizzare il prolungamento analitico occorre evitare le singolarità. Ad esempio, in figura 9.11, non vi può essere alcuna singolarità che si trovi dentro  $C_2$  e su  $C_1$ , perchè altrimenti la serie divergerebbe in quel punto. In alcuni casi, le singolarità sul cerchio di convergenza sono talmente tante che il prolungamento analitico diventa impossibile. In tali casi si dice che il cerchio di convergenza è una *barriera naturale*.

Passando dal cerchio  $C_1$  al cerchio  $C_n$  in figura 9.11, si è scelto il percorso che passa attraverso in centri  $a, b, c, \dots p$ . Sono possibili altri percorsi, ad esempio il percorso  $a, b', c', \dots p$  mostrato in figura, e se i cerchi lungo i percorsi non contengono singolarità (come deve essere perchè si abbia prolungamento analitico), la funzione analitica così individuata non dipende dal percorso.

ESEMPIO 9.1. Le serie

$$(a) \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad (b) \sum_0^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

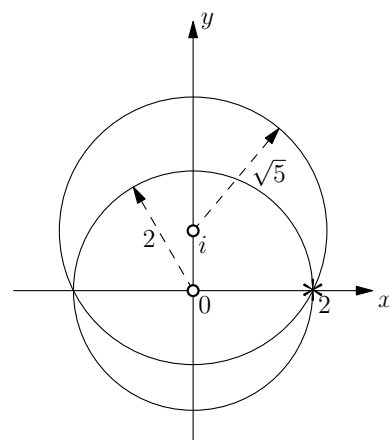
sono prolungamento analitico l'una dell'altra.

Per il criterio del rapporto, la serie (a) converge nel disco  $|z| < 2$ . In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine  $1/2$  e ragione  $z/2$ ) può essere sommata e rappresenta la funzione

$$f(z) = \frac{1/2}{1-z/2} = \frac{1}{2-z}.$$

Per il criterio del rapporto, la serie (b) converge per

$$\frac{|z-i|}{|2-i|} < 1,$$



cioè per  $|z - i| < \sqrt{5}$ . In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine  $1/(2 - i)$  e ragione  $(z - i)/(2 - i)$ ) può essere sommata e rappresenta la funzione

$$\frac{1/(2 - i)}{1 - (z - i)/(2 - i)} = \frac{1}{2 - z}.$$

Dato che le serie rappresentano la stessa funzione nella regione interna ad entrambi i cerchi  $|z| = 2$  e  $|z - i| = \sqrt{5}$ , ne segue che sono prolungamento analitico l'una dell'altra.

## 9.6 PROBLEMI

PROBLEMA 9.1.  $\square$ 

Dimostrare il teorema di Morera.

PROBLEMA 9.2.  $\square$ 

Sia  $\{f_n(z)\}$ ,  $n=1,2,3, \dots$ , una successione di funzioni analitiche nella regione  $\mathcal{R}$ . Si supponga che

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

sia uniformemente convergente in  $\mathcal{R}$ . Dimostrare che  $F(z)$  è analitica in  $\mathcal{R}$ .

PROBLEMA 9.3.  $\square$ 

Sia  $f(z)$  analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$  e  $a$  dentro  $C$ . Dimostrare che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

PROBLEMA 9.4.  $\square$ 

Sviluppare

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in serie di Laurent valevole per

(a)  $1 < |z| < 3$

(b)  $|z| > 3$

(c)  $0 < |z+1| < 2$

(d)  $|z| < 1$

PROBLEMA 9.5.  $\square$ 

Dimostrare che la serie

$$1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

non può essere prolungata analiticamente oltre  $|z| = 1$  (il cerchio  $|z| = 1$  è la barriera naturale della serie).

PROBLEMA 9.6.  $\square$ 

Sia

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt$$

(i) Dimostrare che  $F_1(z)$  è analitica in tutto il semipiano destro  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

(ii) Determinate una funzione  $F(z)$  che prolunga analiticamente  $F_1(z)$  nel semipiano sinistro  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .



## 9.7 COMPLEMENTI

### 9.7.1 Espansione in multipoli

Una delle formule più semplici e utili della fisica-matematica fu trovata nel 1782 da Adrien-Marie Legendre e quindi estesa pochi mesi dopo da Pierre-Simon de Laplace. I due fisici-matematici erano interessati a calcolare il potenziale gravitazionale associato ad una distribuzione di masse  $\mu_i$  poste nei punti  $\mathbf{r}'_i$ .

Considerarono il potenziale gravitazionale di questa distribuzione (ignoriamo il segno e la costante di gravitazione)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_i \frac{\mu_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$$

e per ciascun singolo termine della somma, Legendre ottenne (per  $r > r'$ ) lo sviluppo in serie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell}} P_{\ell}(\cos \alpha)$$

dove  $P_0 = 1, P_1(u) = u, P_2(u) = (1/2)(3u^2 - 1), \dots$  sono i *Polinomi di Legendre*. Sulla base della loro definizione, si ottengono calcolando lo sviluppo in serie di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2 - 2zu}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} P_{\ell}(u)$$

(per questa ragione, la funzione a primo membro è detta *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre). Si osservi che per  $r < r'$ , sarebbe stato conveniente raccogliere  $r'$  a denominatore e ottenere in questo modo una serie di potenze positive in  $r$  (si confronti con il trattamento della serie di Laurent).

Laplace, sempre nel 1782, fece un passo in più: usando coordinate sferiche, si rese conto che esistevano funzioni,  $Y_{\ell}^m = Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ ,  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell$ , con "buone" proprietà rispetto alle rotazioni, in termini delle quali era possibile sviluppare le funzioni di Legendre:

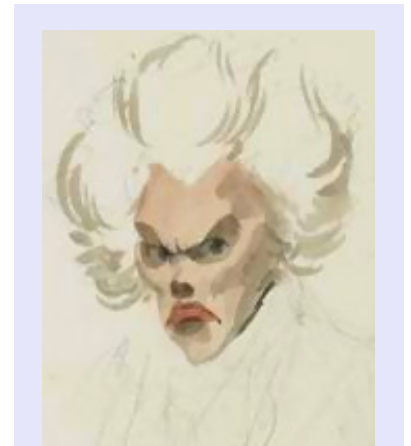
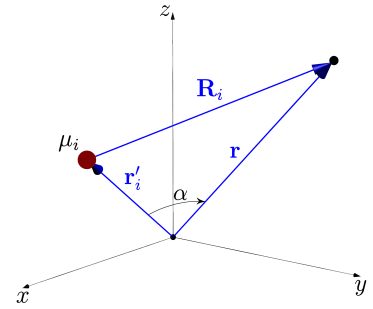
$$P_{\ell}(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m Y_{\ell}^{-m}(\theta, \phi) Y_{\ell}^m(\theta', \phi')$$

dove  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$  sono le coordinate angolari rispettivamente di  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Le funzioni  $Y_{\ell}^m$  sono dette *funzioni armoniche sferiche* normalizzate. A questo punto, Laplace espresse il potenziale gravitazionale  $\varphi(\mathbf{r})$  come

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m} \frac{Y_{\ell}^{-m}}{r^{\ell+1}}$$

dove

$$p_{\ell m} = \sum_i (-1)^m \mu_i Y_{\ell}^m(\theta'_i, \phi'_i) r'^{\ell}$$



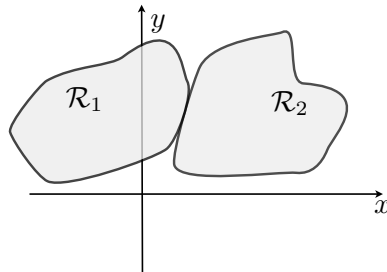
Adrien-Marie Legendre (1752–1833) è stato un matematico francese. Tra i suoi contributi, lo studio delle funzioni e degli integrali ellittici e lo sviluppo della regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati. È noto per la trasformazione di Legendre, originariamente scoperta come trasformazione geometrica, che in seguito fu usata per passare dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana della meccanica e per ottenere l'entalpia e le energie libere di Helmholtz e Gibbs a partire dall'energia interna.

sono chiamati *momenti di multipolo* e l'espansione di  $\varphi(\mathbf{r})$  è chiamata *espansione in multipoli*. Naturalmente, la funzione così ottenuta, è *armonica* nello spazio al di fuori della regione occupata dalle masse, dove vale  $\Delta\varphi = 0$ .

Correva l'anno 1782 e già era chiaro che le soluzioni dell'equazione di Laplace si raggruppavano in multipli: fissato  $\ell$ , l'insieme delle combinazioni lineari delle  $2\ell + 1$  armoniche sferiche si trasforma in se stesso per rotazioni. Nel linguaggio moderno, le armoniche sferiche di ordine  $\ell$  sono una base per la rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni di dimensione  $\ell$ . Questa matematica la si ritrova in elettrostatica e in meccanica quantistica.

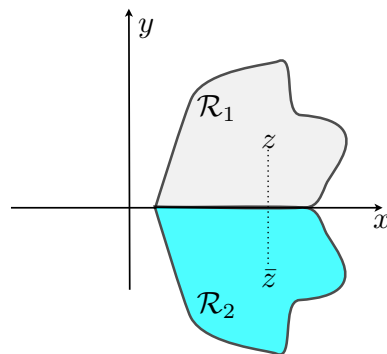
### 9.7.2 Nota sul sul prolungamento analitico

La nozione di prolungamento analitico vale anche per regioni che non sono delimitate da cerchi. Sia  $f_1(z)$  una funzione che è analitica in una regione  $\mathcal{R}_1$  e supponiamo di trovare una funzione  $f_2(z)$  che è analitica in una regione  $\mathcal{R}_2$  e che è tale che  $f_1(z) = f_2(z)$  in  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ . Allora  $f_2(z)$  è una continuazione analitica di  $f_1(z)$ . Perché ci sia continuazione analitica è sufficiente che le due regioni abbiano in comune soltanto un piccolo arco.



Mediante continuazione analitica a regioni  $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$ , possiamo estendere la regione iniziale ad altre parti del piano complesso. Le funzioni  $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots$  sono ancora chiamate *elementi* della funzione. Il *teorema di unicità* stabilisce che la continuazione analitica è unica, a meno che nel processo di estensione non si incontrino punti di diramazione. L'unicità del prolungamento analitico è garantita dall'unicità della serie di Taylor. Un importante strumento di estensione analitica è il *principio di Schwartz*. Questo teorema stabilisce che se una funzione  $F_1(z)$  è analitica in una regione  $\mathcal{R}_1$  del semipiano superiore  $\Pi^+$ , avente come bordo l'asse reale, e ha un valore reale sull'asse reale, allora può essere estesa alla regione  $\mathcal{R}_2$ , ottenuta da  $\mathcal{R}_1$  per riflessione sull'asse reale, nel seguente modo:

$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})}$$



9.7.3 *La funzione gamma*

Per  $\operatorname{Re} z > 0$ , la funzione gamma è definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (9.12)$$

Vale la formula di ricorrenza

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{dove} \quad \Gamma(1) = 1. \quad (9.13)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\ &= [t^z (-e^{-t})]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (zt^{z-1})(-e^{-t}) dt \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Se  $z$  è un intero, dalla formula di ricorrenza (9.13) si ha

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$$

per cui la gamma è una generalizzazione del fattoriale.

Per  $\operatorname{Re} z < 0$ , la definizione (9.12) perde di significato, perché l'integrale diverge. La funzione gamma nel semipiano sinistro risulta però univocamente definita per prolungamento analitico. Per mostrare questo, dimostriamo preliminarmente la formula

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \quad (9.14)$$

per ogni intero  $n$ . Dalla (9.13), si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(z+2) &= (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z) \\ \Gamma(z+3) &= (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z) \end{aligned}$$

e, in generale

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n) \cdots (z+2)(z+1)z\Gamma(z)$$

che è proprio la formula che si voleva dimostrare. Dalla (9.14), e dalla (9.12), la funzione gamma risulta così definita per  $\operatorname{Re} z \geq n$ , salvo che nei poli semplici  $z = 0, -1, -2, \dots -n$ . Dato che la (9.14) vale per qualunque intero  $n$ , la gamma risulta ovunque definita nel piano complesso eccetto che nell'origine e in tutti gli interi negativi, che sono poli semplici della funzione.

9.7.4 *La funzione zeta di Riemann*

La funzione zeta di Riemann  $\zeta(z)$  è definita, per  $\operatorname{Re} z > 1$  dalla serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

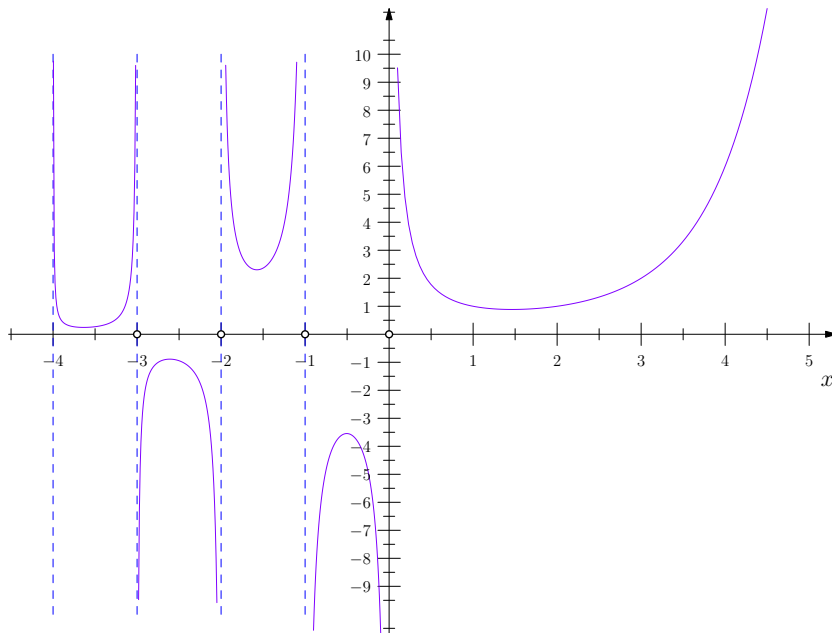


Figura 9.12: Grafico della funzione gamma sull'asse reale.

Questa serie era già stata considerata da Eulero nel 1740 per  $z$  intero positivo e successivamente estesa da Chebyshev a  $z$  reale e maggiore di uno.

Si osservi che la sostituzione  $u = t/n$  nell'integrale che definisce la funzione gamma (9.12) fornisce

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (un)^{z-1} e^{-un} n du = n^z \int_0^\infty u^{z-1} e^{-nu} du,$$

da cui

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt$$

per  $\text{Re } z > 1$ . Ora,

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \tag{9.15}$$

se  $t > 0$ . Se  $z = x + iy$ , allora

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty |t^{z-1} e^{-nt}| dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt. \tag{9.16}$$

Per grandi  $t$ ,  $1/e^t - 1 \sim e^{-t}$  e per piccoli  $t$ ,  $1/e^t - 1 \sim 1/t$ . Ne segue che per  $x > 1$  l'integrale nella (9.16) converge. Allora (per il teorema di Fubini) nella (9.15) si può scambiare la serie con l'integrale. Perciò

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \tag{9.17}$$

Questa equazione fu il primo risultato ottenuto da Riemann in suo famoso lavoro del 1859. Il secondo fu di mostrare che, rappresentando l'integrale a secondo membro della come integrale di contorno nel piano complesso  $t$  si otteneva l'equazione

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} I(z) \tag{9.18}$$

dove  $I(z)$  è analitica ovunque, con zeri per  $2, 3, 4, \dots$ . Questi zeri di  $I(z)$  cancellano i poli di  $\Gamma(1 - z)$ , che sono  $1, 2, 3, 4, \dots$ , eccetto il polo  $z = 1$ . Poiché il secondo membro della (9.18) è definito ovunque nel piano complesso eccetto in  $z = 1$ , la (9.18) definisce il prolungamento analitico della  $\zeta$  a tutto il piano complesso. Se ne conclude che la zeta di Riemann è una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  con un polo in  $z = 1$ . Dall'espressione esplicita di  $I(z)$ , che qui non diamo, risulta che  $z = 1$  è un polo semplice con residuo pari a 1. Sempre nello stesso lavoro del 1859, Riemann deduce la seguente equazione funzionale per la  $\zeta$ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1 - z) \zeta(1 - z). \tag{9.19}$$

ZERI DELLA  $\zeta$ . Il lavoro di Riemann del 1859 incomincia con un riferimento al seguente risultato di Eulero:

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \tag{9.20}$$

se  $\text{Re } z > 1$ , dove  $p_1, p_2, p_3, \dots$  è la successione dei numeri primi. Per dimostrare questo risultato, si usi la serie geometrica per esprimere  $1/(1 - p_n^{-z})$ :

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} p_n^{-mz}$$

e quindi

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} n_{N,j}^{-z},$$

dove  $n_{N,1}, n_{N,2}, n_{N,3}, \dots$  sono tutti gli interi che possono essere fattorizzati come prodotti di potenze dei numeri primi  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Facendo tendere  $N$  all'infinito, si ottiene l'equazione (9.20).

Poiché il prodotto (9.19) contiene fattori che non possono annullarsi,  $\zeta(z) \neq 0$  per  $\text{Re } z > 1$ . Supponiamo adesso che  $\zeta(z) = 0$  e  $\text{Re } z < 0$ . Poiché  $\zeta(1 - z) \neq 0$ , l'equazione funzionale (9.19) implica

$$\Gamma(1 - z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0.$$

Poiché  $\Gamma$  non ha radici, abbiamo  $z = 2k$ , per interi  $k < 0$ , come radici. I pari negativi sono detti zeri banali della  $\zeta$ . La striscia  $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$  è chiamata la *striscia critica*. Tutti gli zeri non banali della  $\zeta$  devono stare nella striscia critica.

Supponiamo adesso che  $z$  sia nella striscia critica e che  $\zeta(z) = 0$ . Poiché  $\sin(\pi z/2) \neq 0$ , vediamo che  $\zeta(1 - z) = 0$ . Vale a dire, le radici non banali, o *radici critiche*, sono simmetriche rispetto alla retta critica  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$ . Si osservi inoltre che, essendo  $\zeta(z)$  reale per  $z$  reale, le radici della  $\zeta$  sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Per il suo studio sulla distribuzione dei numeri primi, Riemann ha bisogno di stimare il numero di radici della funzione  $\zeta$  in una scatola nella striscia critica simmetrica rispetto alla retta critica. Ottiene una tale stima (dimostrata poi rigorosamente nel 1905 da Van Mangoldt) e quindi osserva che il numero di zeri sulla retta critica è circa lo stesso (*nessuno ha mai dimostrato questo!*). Quindi, continua dicendo che è "molto probabile" che tutte le radici nella striscia critica stiano sulla retta critica. Questa affermazione è nota come *ipotesi di Riemann*. Riemann continua dicendo:

Naturalmente, sarebbe desiderabile avere una dimostrazione rigorosa di questo, ma ho deciso di lasciare da parte la ricerca di una tale dimostrazione, dopo qualche vano e fugace tentativo, perché non è necessario per l'oggetto immediato della mia investigazione.

Oggi, 152 anni dopo, dopo innumerevoli sforzi di molti matematici, non abbiamo ancora ragioni per ritenere o non ritenere che l'ipotesi di Riemann sia vera. L'ipotesi di Riemann resta uno dei problemi aperti della matematica più affascinanti e suggestivi.

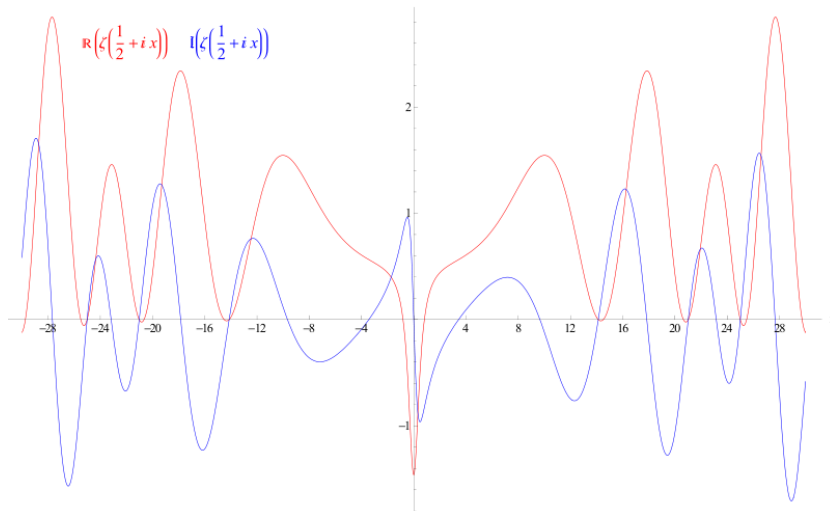


Figura 9.13: Parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) della funzione di Riemann lungo la retta critica  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$ . I primi zeri non banali si hanno per  $\text{Im } z = \pm 14.135, \pm 21.022$  e  $\pm 25.011$ .

La funzione  $\zeta$  di Riemann compare in teoria dei numeri, in statistica, come un possibile modo di regolarizzare serie divergenti in teoria quantistica dei campi, nell'analisi dell'effetto Casimir (forza attrattiva tra le armature di un condensatore in assenza di campi dovuta alle fluttuazioni di vuoto del campo elettromagnetico quantizzato), nella teoria dei sistemi dinamici e nello studio del comportamento caotico di sistemi nel regime semi-classico.

### 9.7.5 Il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana

Un sistema dinamico è un sistema (fisico, biologico, economico, etc), il cui stato  $\mathbf{x}$  evolve nel tempo secondo il sistema di equazioni differenziali del prim'ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (9.21)$$

Assumiamo che  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  è un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$ , detto campo di velocità.  $\mathbb{R}^n$  è detto lo spazio delle fasi del sistema.

La condizione che  $\mathbf{v}$  non dipenda dal tempo non è restrittiva: se dipendesse dal tempo basterebbe aggiungere la variabile  $x_{n+1} = t$  e passare al sistema in  $\mathbb{R}^{n+1}$  con equazione aggiuntiva  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . La meccanica hamiltoniana fornisce una classe di sistemi dinamici: quelli per cui  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e il campo di velocità è ottenuto per derivazione da una funzione  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , detta hamiltoniana,

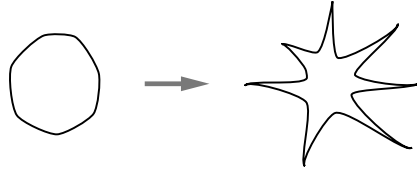
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

(quindi lo spazio delle fasi ha dimensione pari se l'hamiltoniana non dipende dal tempo).

Per un sistema dinamico generico del tipo (9.21), assumendo abbastanza regolarità sul campo  $\mathbf{v}$  (condizione purtroppo non verificata nei casi di principale interesse fisico, come la meccanica celeste), la soluzione esiste ed è unica. La soluzione è da intendere come una famiglia ad un parametro di funzioni  $\mathbf{f}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , detta *flusso*, che trasforma gli stati  $\mathbf{x}$  del sistema ad un tempo arbitrario negli stati  $\mathbf{y}$  dopo un tempo  $t$ ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x})$$

Il flusso trasforma dunque una qualunque regione  $\mathcal{R}$  dello spazio delle fasi in un'altra regione



Per studiare come varia il volume della regione si procede come segue. Come sempre, data una trasformazione, è utile conoscere le sue proprietà locali. Per  $t$  infinitesimo, diciamo  $\delta t$ , si ottiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_{\delta t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})\delta t$$

Le proprietà locali sono espresse dalla matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \delta t$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identica e  $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$  è la matrice con elementi  $\partial v_i / \partial x_j$ . La variazione del volume è data dal determinante jacobiano

$$\mathcal{J} = \det \mathbf{J} = \det \left( \mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Ricordando l'importante formula

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

e osservando che, essendo  $\delta t$  infinitesimo,

$$\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = e^{\delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}$$

si ottiene

$$\mathcal{J} = e^{\delta t \nabla \bullet \mathbf{v}}$$

in quanto la traccia della matrice Jacobiana è la somma degli elementi diagonali  $\partial v_i / \partial x_i$ , che è proprio la divergenza del campo  $\mathbf{v}$ . Abbiamo posto uguale a 1 lo jacobiano al tempo  $t$  perché abbiamo calcolato la variazione tra il tempo  $t$  e il tempo  $t + \delta t$  assumendo che al tempo  $t$  la trasformazione fosse l'identità. Fossimo partiti da un tempo anteriore a  $t$ , e posto uguale a 1 lo jacobiano a quel tempo, avremmo trovato

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) e^{\delta t \nabla \bullet \mathbf{v}}$$

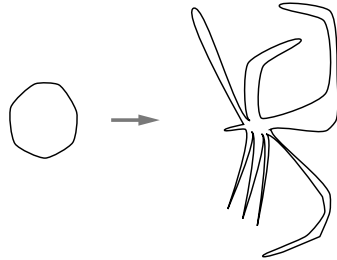
Poiché  $\delta t$  è infinitesimo,

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) + \delta t \nabla \bullet \mathbf{v} \mathcal{J}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{J}(t)} \frac{\mathcal{J}(t + \delta t) - \mathcal{J}(t)}{\delta t} = \nabla \bullet \mathbf{v}$$

da cui

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Dunque, il tasso di variazione percentuale di volume nell'intorno di un punto dello spazio del fasi è dato dalla divergenza del campo di velocità in quel punto: questo è il **teorema di Liouville!** Nei sistemi dissipativi (per esempio, nel famoso sistema di Lorenz che diede il via alla ripresa degli studi sul caos nella seconda metà del Novecento) la divergenza è tipicamente negativa. Se la divergenza è zero, la dinamica può deformare le regioni dello spazio delle fasi in modo orrendo



ma non può cambiarne il volume. Questo è il caso dei sistemi hamiltoniani, per i quali

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$$



## 10

# Funzioni generalizzate

### 10.1 La delta di Dirac

Lasciamo per un momento da parte l'analisi complessa e occupiamoci di un argomento che prima o poi spunta fuori in un corso di metodi matematici della fisica: la delta di Dirac. Questo argomento si presta ad essere trattato a svariati livelli di sofisticazione o di rozzezza. Noi ne daremo una trattazione breve e elementare, ma rigorosa. La "funzione delta"  $\delta(x)$  fu introdotta da Dirac in maniera paradossale: una "funzione" uguale a zero per  $x \neq 0$  e con la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.1)$$

per una funzione continua  $F(x)$  opportuna. Ma nessuna funzione nel senso ordinario può avere questa proprietà! Si può tuttavia immaginare una successione di funzioni  $\delta_n(x)$  che hanno picchi sempre più alti e diventano sempre più strette in  $x = 0$ , mantenendo costante e pari a 1 l'area sotto la curva, con il valore della funzione che tende a zero in ogni punto, eccetto nello zero, dove tende all'infinito. Chiamiamo queste funzioni *approssimanti della delta*.

Nel limite, una tale successione avrebbe la proprietà (10.1), nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.2)$$

e la scrittura (10.1) andrebbe intesa come una notazione abbreviata della (10.2). Le  $\delta_n$  sono dunque da intendersi come "approssimanti" per il processo di limite e non per la  $\delta(x)$ , che come funzione non esiste. Le gaussiane della successione

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.3)$$

hanno questa proprietà: l'area sotto queste curve è unitaria, in quanto  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$  e, al crescere di  $n$ , le gaussiane diventano sempre più strette e più piccate nello zero, come mostrato nella figura 10.1.

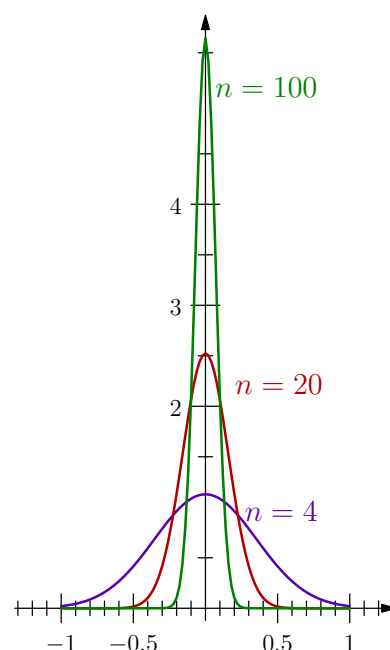


Figura 10.1: Approssimanti gaussiane della delta di larghezza  $1/n$ , per  $n = 4, 20, 100$ .

Dimostrare che per questa scelta di approssimanti vale la (10.2) per  $F(x)$  continua e limitata non è difficile. Si incominci con l'ovvia maggiorazione:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} F(x) dx - F(0) \right| &= \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} (F(x) - F(0)) dx \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |F(x) - F(0)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left| F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - F(0) \right| dx . \end{aligned}$$

Poiché  $F$  è continua, in particolare nello zero, e l'integrale assolutamente convergente, il secondo membro dell'ultima equazione tende a zero per  $n \rightarrow \infty$  e la (10.2) risulta così stabilita.

Quando la delta è definita da una successione di approssimanti (analogamente a come i reali sono definiti da opportune successione di razionali), ci si aspetta che le regole del calcolo continuo a essere valide, ad esempio che si possa parlare di derivata della delta. Se adesso si assume che  $F(x)$  sia derivabile con derivata continua e che valga l'integrazione per parti, dalla (10.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'_n(x) F(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F'(x) dx = -F'(0) \quad (10.4)$$

Nello spirito che un'identità di questo tipo è da intendersi come forma abbreviata di un processo di limite, la  $\delta'(x)$  risulta definita dalle derivate della successione (10.3),

$$\delta'_n(x) = -2nx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.5)$$

Allora la (10.4) risulta intuitivamente chiara, come mostrato in figura 10.2. La figura rende evidente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'_n(x) F(x) dx \approx \frac{F(x-h) - F(x+h)}{2h} \approx -F'(0)$$

con  $h$  infinitesimo per  $n$  grande.

La (10.4), intesa come limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_n(x) F(x) dx = -F'(0) \quad (10.6)$$

dopo un'integrazione per parti, la si dimostra analogamente a quanto visto per la (10.1) e, più in generale, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) F(x) dx = (-1)^n F^{(n)}(0) \quad (10.7)$$

Naturalmente, occorre adesso richiedere che la  $F$  sia continuamente derivabile  $n$  volte.

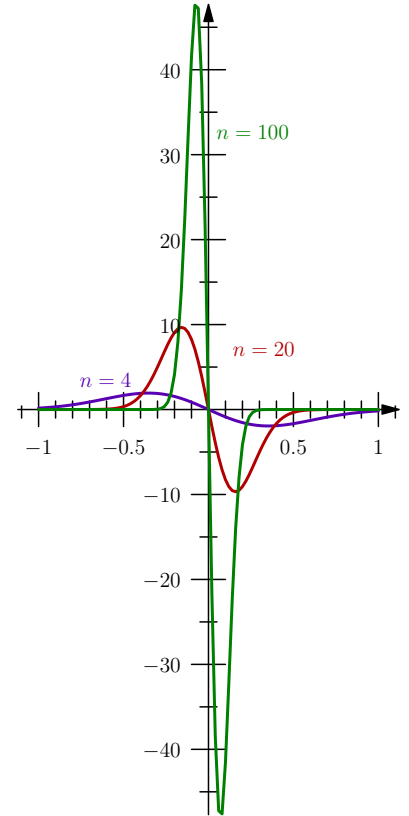


Figura 10.2: Derivate delle approssimanti della delta per  $n = 4, 20, 100$ .

Fisicamente, la delta può essere vista come una distribuzione di carica sull'asse delle  $x$  che corrisponde ad una carica puntiforme uniforme nell'origine e la sua derivata come un *dipolo* orientato nel verso negativo dell'asse delle  $x$ . Infatti, dalla (10.4), per  $F = x$ , si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)xdx = -1$$

La delta e le sue derivate corrispondono dunque a idealizzazioni fisiche familiari.

La delta può anche essere integrata: se consideriamo la successione di integrali delle approssimanti gaussiane della delta, come in figura 10.3,

$$\Theta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-ny^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{nx}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{nx})],$$

vediamo che esse stesse convergono (per  $x \neq 0$ ) alla funzione di Heaviside (o "funzione scalino")

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

Si osservi che poiché il limite delle  $\Theta_n$  è definito sotto il segno di integrale, per la  $\Theta$  così definita,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)F(x)dx = \int_0^{\infty} F(x)dx,$$

il suo valore nello zero è del tutto convenzionale (la convenzione scelta nella (10.8) è comunque quella standard). Questo perchè se di una funzione integranda si cambia il valore in un punto (o in insieme numerabile di punti) il valore dell'integrale non cambia.

### 10.2 Manipolazioni della delta

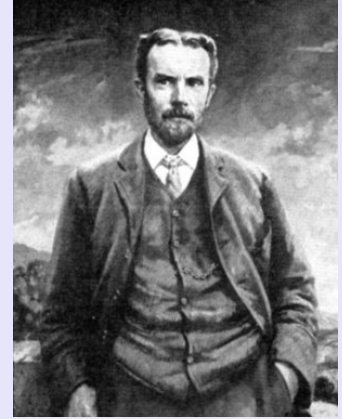
In virtù della sua caratterizzazione in termini della (10.2), la delta può essere manipolata sotto il segno di integrale come se fosse una funzione ordinaria, perchè queste manipolazioni sono scaricate sulle approssimanti  $\delta_n$ , che sono funzioni ordinarie. Inoltre, la delta può essere estesa a più dimensioni, ad esempio

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

È sulla base di questa estensione che l'equazione della divergenza del campo elettrico, in presenza di cariche  $q_i$  poste nei punti  $\mathbf{r}_i$ , può essere scritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Illustriamo questi fatti analizzando alcuni esempi.



Oliver Heaviside (1850–1925) è stato un ingegnere elettrico, fisico e matematico inglese autodidatta. Spesso in urto con l'establishment scientifico nel suo tempo, ha contribuito a sviluppare molti dei metodi che usiamo ancora oggi: ha introdotto i numeri complessi per studiare i circuiti elettrici, ha inventato il metodo delle trasformate di Laplace per risolvere le equazioni differenziali lineari; indipendentemente da Gibbs, ha introdotto le notazioni moderne di calcolo vettoriale; ha riformulato le equazioni di Maxwell nel modo in cui oggi le conosciamo in termini degli operatori vettoriali rotore e divergenza; i termini ammettenza, conduttanza, impedenza, permeabilità, ed altri, oggi di uso comune, furono conati da lui.

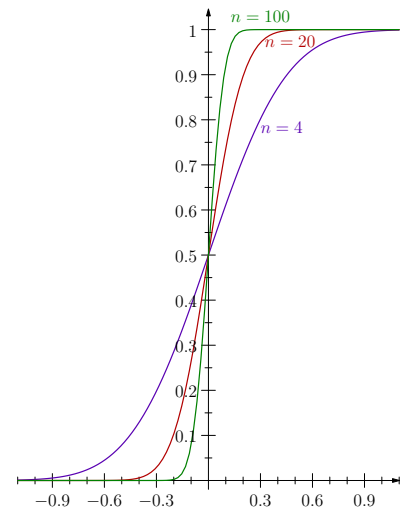


Figura 10.3: Integrali delle approssimanti della delta per  $n = 4, 20, 100$ .

ESEMPIO 10.1. Verificare che

$$x\delta(x) = 0.$$

Questa identità discende immediatamente da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nx^2}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{y^2}{\pi}} e^{-y^2} = 0$$

ESEMPIO 10.2. Verificare che

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

Per mostrare questo fatto, è utile avere un'idea di come sono fatte le approssimanti di  $\eta(x) = \delta(x^2 - a^2)$ . Se

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2},$$

sono le approssimanti della delta, allora le approssimanti di  $\eta$  sono

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2}$$

Il grafico in figura 10.4 mostra che le approssimanti sono sostanzialmente la somma di due funzioni che si concentrano una in  $-a$  e l'altra in  $+a$ , il che rende già plausibile la formula che si vuole dimostrare. Occorre capire il fattore moltiplicativo  $\frac{1}{2|a|}$  e darne una dimostrazione analitica. Consideriamo

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2} = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(x+a)^2}$$

Nell'intorno di  $x = a$  si ha

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-2a^2n(x-a)^2}$$

e quindi, nell'intorno di  $x = a$ , si ha

$$\eta_n(x) \approx \frac{1}{2|a|} \delta_n(x - a).$$

Analogamente, nell'intorno di  $x = -a$ ,

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x+a)^2(-2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-2a^2n(x+a)^2} = \frac{1}{2|a|} \delta_n(x + a)$$

Al crescere di  $n$ ,  $\eta_n(x)$  va rapidamente a zero ad eccezione di piccoli intorni di  $x = a$  e  $x = -a$ . Dunque, per  $n$  grande,

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2} \approx \frac{1}{2|a|} [\delta_n(x + a) + \delta_n(x - a)]$$

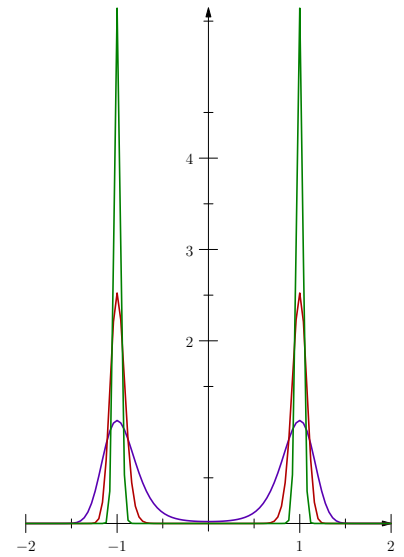


Figura 10.4: Approssimanti di  $\delta(x^2 - a^2)$  per  $n = 4, 20, 100$  e  $a = 1$ .

Passando al limite  $n \rightarrow \infty$  si ottiene quanto si voleva dimostrare.

In maniera analoga a quanto appena visto, si può arrivare alla formula generale

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (10.9)$$

dove  $x_i$  sono gli zeri di  $f(x)$  e  $f$  è tale che la sua derivata  $f'$  non si annulla negli zeri  $x_i$ . Posto  $\eta(x) = \delta(f(x))$ , sia  $\eta_n(x)$  la sua approssimate

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(f(x))^2}.$$

Consideriamo  $\eta_n(x)$  nell'intorno di uno zero  $x_i$  di  $f(x)$ . Sviluppiamo  $f(x)$  nell'intorno di  $x_i$ . Poichè  $n$  è arbitrariamente grande teniamo solo l'ordine più basso in  $x$ . Allora, essendo  $f(x_i) = 0$ , si ha

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \sqrt{\frac{nf'(x_i)^2}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} \sim \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i)$$

Al di fuori di piccoli intorni degli zeri,  $\eta_n(x)$  sarà praticamente nulla e quindi, sommando i contributi da tutti gli intorni,

$$\eta_n(x) = \delta(f(x)) \approx \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i).$$

Passando al limite  $n \rightarrow \infty$  si ottiene la (10.9).

**ESEMPIO 10.3.** Verificare che in coordinate cilindriche si ha

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

Diamo una dimostrazione generale per il calcolo della delta in un sistema di coordinate curvilinee in  $\mathbb{R}^n$ . Sia

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$$

la rappresentazione di  $\mathbf{r}$  in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in  $\mathbb{R}^n$  e sia

$$\mathbf{r} = (u_1, \dots, u_n) = \mathbf{u}$$

la sua rappresentazione in un sistema di coordinate curvilinee. Sia

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right|$$

il determinante Jacobiano della trasformazione da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{u}$ .

La delta in coordinate curvilinee è definita da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) d^n \mathbf{u} = f(\mathbf{u}_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) d^n \mathbf{u} &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \left| \frac{d^n \mathbf{u}}{d^n \mathbf{x}} \right| d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) J^{-1} d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) J^{-1} d^n \mathbf{u} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = J^{-1} \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = J^{-1} \prod_i^n \delta(u_i - u_{0i}) \quad (10.10)$$

Per il caso specifico di coordinate cilindriche in  $\mathbb{R}^3$ , il determinante Jacobiano  $J$  è  $r$  e quindi

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

### 10.3 Funzioni generalizzate

Per quanto rigoroso, il modo utilizzato finora per caratterizzare la delta può lasciare insoddisfatti: da un lato si parla di “approssimanti” della delta, ma, dall’altro, la delta in quanto funzione non può esistere. Si potrebbe però pensare di *identificare la delta con la successione delle sue approssimanti* e chiamare l’oggetto così definito *funzione generalizzata*. Dopo tutto, questo è il modo classico di allargamento di un insieme, aggiungendo ad esso le successioni che non convergono ad elementi dell’insieme: i reali, ad esempio, sono definiti come opportune successioni di razionali.

Nel definire una funzione generalizzata mediante successioni, occorre precisare in quali circostanze due successioni definiscono la stessa funzione generalizzata (come si fa per le successioni di razionali che definiscono i reali). A questo scopo si può procedere come nella (10.2), con una successione  $f_n(x)$  di “funzioni di prova”: se lo stesso risultato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx \quad (10.11)$$

emerge per ciascuna successione di una certa classe e per qualunque funzione di prova  $F(x)$ , potremmo dire che le successioni definiscono la stessa funzione generalizzata. Come abbiamo visto, per definire la



Laurent Schwartz (1915–2002) fu un matematico francese che sviluppò la teoria delle distribuzioni o funzioni generalizzate che permette di dare un senso matematico preciso e generale ad oggetti come la delta di Dirac.

delta, basta “provare” la successione  $f_n$  con funzioni continue  $F(x)$  perché il limite esista, ma, per definire le sue derivate, occorrono funzioni di prova molto più regolari (in particolare continuamente differenziabili tante volte quanto è l’ordine della derivata della delta che si vuole definire). Conviene dunque prendere funzioni di prova molto regolari se si vuole definire una classe abbastanza ampia di funzioni generalizzate.

In vista delle applicazioni all’analisi di Fourier, risulta conveniente scegliere funzioni di prova, che siano “buone” nel senso seguente: una funzione  $f(x)$ , sui reali e a valori reali, è BUONA se è infinitamente differenziabile e se è tale che  $f(x)$  e le sue derivate vanno a zero all’infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di  $|x|$ . Ne è un esempio paradigmatico la funzione  $e^{-x^2}$ . Conviene inoltre introdurre anche una classe più ampia di una funzioni che includa anche i polinomi: diremo che una funzione  $\phi(x)$  è ABBASTANZA BUONA se  $\phi(x)$  e le sue derivate crescono all’infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di  $|x|$ . Si dimostra facilmente che la derivata di una funzione buona è buona la somma di due funzioni buone è ancora una funzione buona. È altrettanto semplice che il prodotto di una funzione buona e di una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona.

Si considereranno nella (10.11) successioni di funzioni buone  $f_n(x)$  e tutto il discorso starà in piedi se, per qualunque funzione buona  $F(x)$ , il limite (10.11) esiste. Una successione che ha questa proprietà è detta regolare. Ad esempio, la successione  $e^{-x^2/n^2}$  è regolare: il limite (10.11) è  $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ , qualunque funzione buona  $F(x)$  si consideri. L’analogia con la costruzione dei reali a partire dai razionali è notevole: la regolarità della successione di funzioni buone è analoga al requisito di Cauchy e in entrambi i casi ci si aspetta che l’oggetto definito dalla successione non sia necessariamente identificabile con uno che è nell’ambiente in cui vive la successione. Per esempio, il reale definito dalla successione  $.9, .99, .999, 9999, \dots$  si identifica naturalmente con il numero 1, che è razionale, ma la regola sono successioni come quella che definisce il numero  $e$

$$1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, \dots$$

Un numero reale è definito come una successione di Cauchy di razionali. Si definisca allora una funzione generalizzata  $f(x)$  come una successione regolare  $f_n(x)$  di funzioni buone e due funzioni generalizzate si dicano uguali se le corrispondenti successioni regolari sono equivalenti, cioè se per qualunque funzione buona  $F(x)$ , il limite (10.11) è lo stesso per ciascuna successione. Per esempio, la successione  $e^{-x^4/n^4}$  è equivalente alla successione  $e^{-x^2/n^2}$ . Entrambe (e tutte le successioni a loro equivalenti) definiscono la funzione generalizzata

$I(x)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$

e che è abbastanza naturale denotare semplicemente con 1, la funzione che vale 1. Perciò ciascuna funzione generalizzata è in realtà la classe di tutte le successioni regolari equivalenti ad una data successione regolare. Passiamo ora ad alcune definizioni molto naturali sulla base di quanto è stato appena detto.

Si definisca l'integrale del prodotto di una funzione generalizzata  $f(x)$  con una funzione buona  $F(x)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx, \quad (10.12)$$

come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \quad (10.13)$$

La definizione è consistente perché il limite è lo stesso per tutte le successioni equivalenti  $f_n(x)$ .

È del tutto naturale definire la somma  $g(x) = f(x) + h(x)$  di due funzioni generalizzate  $f(x)$  e  $h(x)$ , definite dalle successioni  $f_n(x)$  e  $h_n(x)$ , come la funzione generalizzata che è definita dalla successione  $g_n(x) = f_n(x) + h_n(x)$ . Per quanto la definizione sia naturale occorre mostrarne la consistenza. Occorre cioè mostrare che

- (a)  $g_n(x)$  è una successione di funzioni buone.
- (b)  $g_n(x)$  è regolare.
- (c) Scelte differenti di successioni regolari equivalenti che definiscono le funzioni generalizzate  $f(x)$  e  $h(x)$  portano a successioni equivalenti che definiscono  $g(x)$ .

(a) è immediata, perché la somma di funzioni buone è buona. (b) Per ogni funzione buona  $F(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)F(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)F(x)dx$$

e così il limite sulla sinistra esiste, e quindi la successione  $g_n = f_n + h_n$  è regolare. Inoltre i limiti a destra sono indipendenti da quali tra le differenti successioni equivalenti di  $f_n$  e  $h_n$  sono utilizzate per definire  $f$  e  $h$ . Quindi, tutte le successioni risultanti  $f_n + h_n$  sono equivalenti verificando così (c).

Anche definire la derivata  $f'(x)$  in termini della successione  $f'_n(x)$  risulta essere una definizione consistente. Infatti per integrazione per parti,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x)F(x)dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F'(x)dx$$



e poiché la derivata  $F'(x)$  di una funzione buona  $F(x)$  è ancora una funzione buona, il limite a destra esiste ed è lo stesso per tutte le successioni regolari equivalenti  $f_n(x)$ . Quindi tutte le successioni  $f'_n(x)$  sono equivalenti e regolari, che è quanto si voleva dimostrare. Procedendo in maniera analoga, si mostra che è consistente definire  $f(ax+b)$  mediante la successione  $f_n(ax+b)$  e  $\phi(x)f(x)$ , dove  $\phi(x)$  è una funzione abbastanza buona, mediante la successione  $\phi(x)f_n(x)$ .

Riassumendo: Se due funzioni generalizzate  $f(x)$  e  $h(x)$  sono definite dalle successioni  $f_n(x)$  e  $h_n(x)$  allora:

- (i)  $f(x) + h(x)$  è definita dalla successione  $f_n(x) + h_n(x)$ ;
- (ii)  $f'(x)$  è definita dalla successione  $f'_n(x)$ ;
- (iii)  $f(ax+b)$  è definita dalla successione  $f_n(ax+b)$ .
- (iv)  $\phi(x)f(x)$ , dove  $\phi(x)$  è una funzione abbastanza buona, è definita dalla successione  $\phi(x)f_n(x)$ .

A questo punto, risulta facile dimostrare che per qualunque funzione buona  $F(x)$  si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)F(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)dx \quad (10.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)F(x)dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \quad (10.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x)f(x)]F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\phi(x)F(x)]dx \quad (10.16)$$

Questo teorema garantisce che le funzioni generalizzate sotto il segno di integrale, quando sono moltiplicate per una funzione buona, possono essere manipolate come se fossero funzioni ordinarie. In particolare, la trattazione precedente della delta di Dirac, delle sue derivate e del suo integrale, può essere riletta come una loro caratterizzazione in termini di funzioni generalizzate. Più precisamente, adesso si può stabilire il seguente teorema: *Le successioni equivalenti a  $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$  definiscono una funzione generalizzata  $\delta(x)$ , detta delta di Dirac, tale che per qualunque funzione buona  $F(x)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)F(x)dx = (-1)^n F^{(n)}(0) \quad (10.18)$$



## Il paradiso dell'integrale di Fourier

### 11.1 Trasformate di Fourier di funzioni buone

Lo spazio delle funzioni buone è il paradiso dell'integrale di Fourier. Tutte le proprietà dell'integrale di Fourier che si utilizzano nella pratica si dimostrano facilmente e rigorosamente in questo paradiso. In particolare si dimostra facilmente il *teorema di Fourier*: Se  $f(x)$  è una funzione buona, la sua trasformata di Fourier

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \stackrel{\text{def}}{=} (Ff)(y) \quad (11.1)$$

esiste ed è una funzione buona. Inoltre,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{2\pi ixy} dy \quad (11.2)$$

Si osservi il cambiamento di definizione rispetto alla (8.7) (il fattore  $2\pi$  nell'esponentiale nell'integrale (11.1) evita il fattore  $1/(2\pi)$  di fronte alla trasformata inversa (8.8)) e l'uso del cappuccio “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” per denotare la trasformata di Fourier. Si osservi che la (11.2) è equivalente a dire che se  $\widehat{f}$  è la trasformata di Fourier di  $f$ , allora  $f$  è la trasformata di Fourier di  $\mathcal{S}\widehat{f}$ , dove  $\mathcal{S}\widehat{f}(y) = \widehat{f}(-y)$ . Questo fatto è noto come *relazione di reciprocità*.

Per mostrare che se  $f(x)$  è una funzione buona, allora anche  $\widehat{f}(y)$  lo è, deriviamo  $\widehat{f}(y)$   $p$  volte. Poiché  $f$  è buona, possiamo scambiare derivata e integrale

$$\widehat{f}^{(p)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^p}{dy^p} [f(x)e^{-2\pi ixy}] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi ix)^p f(x)e^{-i2\pi yx} dx$$

Integriamo per parti  $N$  volte il secondo membro (tenendo conto che  $f$  si annulla all'infinito) secondo lo schema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2\pi ix)^p f(x)}_{\text{deriviamo}} \underbrace{e^{-i2\pi yx}}_{\text{integriamo}} dx.$$

Otteniamo

$$-\widehat{f}^{(p)}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi ix)^p f(x)] \frac{1}{(-2\pi iy)^N} e^{-2\pi iyx} dx$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}^{(p)}(y) \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi iy)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi ix)^p f(x)] e^{-2\pi iyx} dx \right| \\ &\leq \frac{(2\pi)^{p-N}}{|y|^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^N}{dx^N} [x^p f(x)] \right| dx \end{aligned}$$

Quindi  $\widehat{f}^{(p)}$  è di ordine  $|y|^{-N}$  per ogni  $N$ , cioè decresce più rapidamente di qualunque potenza negativa di  $|y|$ ; in breve, è una funzione buona. Fine della dimostrazione della prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte, introduciamo un "ammorbidente"<sup>1</sup>  $e^{-\epsilon y^2}$  dentro l'integrale a secondo membro della (11.2).

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-\epsilon y^2} e^{2\pi ixy} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi iuy} du \right] e^{2\pi ixy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} e^{-2\pi i(u-x)y} dy \right] f(u) du \quad (\text{il cambio dell'ordine di integrazione è lecito}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2(u-x)^2/\epsilon} f(u) du \quad (\text{trasformata di Fourier della gaussiana calcolata in } u-x) \end{aligned}$$

Riconosciamo nell'integrale sopra una successione regolare di  $\delta(u-x)$ . Quindi, passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si ottiene la (11.2). Fine della dimostrazione della seconda parte del teorema.

### 11.2 Lemma di Riemann-Lebesgue

Abbiamo stabilito che se  $f$  è una funzione buona, la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f}$  è ancora buona e quindi, in particolare, tende a zero all'infinito,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx = 0. \tag{11.3}$$

Questo limite ha un chiaro significato intuitivo: quando la fase è molto grande, cioè quando la frequenza di oscillazione è estremamente rapida, i contributi positivi e negativi all'area tra la funzione integranda e l'asse delle  $x$  si compensano e l'area complessiva diventa arbitrariamente piccola (si veda la figura 11.1).

Affinché la (11.3) valga non è richiesto che  $f(x)$  sia una funzione buona, è sufficiente che sia una funzione *assolutamente integrabile*, cioè tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

<sup>1</sup> "Mollifier" in inglese. Questo è, in effetti, un termine tecnico che in matematica denota un'operazione di "ammorbidimento" come quella che stiamo per fare. In spirito, è analogo alla regolarizzazione di Abel.

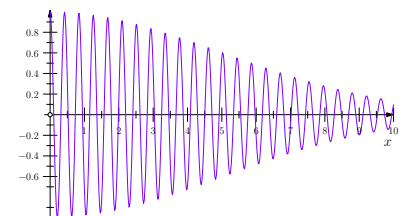


Figura 11.1: Grafico di  $\cos(15x)e^{-0.02x^2}$ . Effetto di cancellazione tra i contributi positivi e negativi all'area.

Questo fatto è noto come *Lemma di Riemann-Lebesque*. Si osservi che la richiesta di assoluta integrabilità è il requisito ovvio per la convergenza dell'integrale di Fourier, in quanto

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-2\pi ixy}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Dimostriamo adesso il lemma di Riemann-Lebesque per  $f(x)$  assolutamente integrabile. Per ogni  $\epsilon > 0$  si scelga una funzione buona  $h(x)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)| dx < \epsilon.$$

Allora, per ogni  $y$ ,

$$\left| \widehat{f}(y) - \widehat{h}(y) \right| < \epsilon.$$

Poiché  $\widehat{h}(y) \rightarrow 0$  per  $|y| \rightarrow \infty$ , si ha

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} \widehat{f}(y) \leq \epsilon.$$

Poiché questo è vero per ogni  $\epsilon$ , la dimostrazione è completa.

### 11.3 Identità di Parseval-Plancherel

Siano  $f_1$  e  $f_2$  funzioni buone e  $\widehat{f}_1$  e  $\widehat{f}_2$  siano le loro trasformate di Fourier. Allora

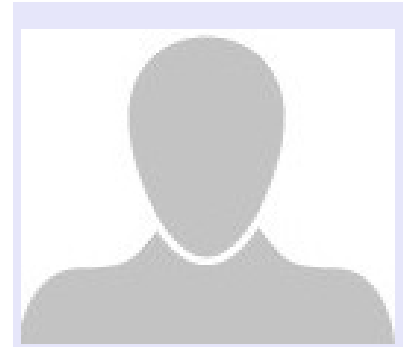
$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \widehat{f}_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx \tag{11.4}$$

Si tratta di una relazione molto utile nelle applicazioni e nella teoria dell'integrale di Fourier. Si dimostra facilmente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \widehat{f}_2(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-2\pi ixy} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} f_2(x) e^{-2\pi ixy} dx dy \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} e^{2\pi ixy} dy \right] f_2(x) dx \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx \end{aligned}$$

In particolare, se  $f_1 = f_2 = f$  si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy \tag{11.5}$$



Marc-Antoine Parseval (1755–1836) è stato un matematico francese, noto per il teorema di Parseval, originariamente formulato per le serie di Fourier.



Michel Plancherel (1885–1967) è stato un matematico svizzero, noto per il teorema di Plancherel in analisi armonica.

### 11.4 Teorema di convoluzione

La convoluzione può essere pensata come un nuovo modo di generare nuove funzioni — a partire da un insieme di funzioni — diverso da quelli soliti di somma, moltiplicazione e composizione di funzioni. La convoluzione di due funzioni reali  $f$  e  $h$  è definita come

$$f \star h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dy$$

Si osservi che si integra sulla variabile muta  $y$  lasciando così una funzione di  $x$ . Per cambiamento di variabili nell'integrale, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy$$

Dunque il prodotto di convoluzione è commutativo,  $f \star h = h \star f$ .

Se  $f$  e  $h$  sono funzioni buone anche  $f \star h$  lo è. Si può vedere questo, prendendo la derivata del prodotto di convoluzione:

$$\frac{d}{dx}f \star h(x) = f' \star h(x) = f \star h'(x)$$

La prima uguaglianza vale perché possiamo scambiare derivata e integrale per funzioni buone, la seconda segue dalla commutatività del prodotto di convoluzione. Quindi, se  $f$  e  $h$  sono buone, anche  $f \star h$  e le sue derivate hanno decrescenza rapida, cioè  $f \star h$  è una funzione buona.

Il teorema di convoluzione stabilisce che

$$\widehat{f \star h}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{h}(y) \quad (11.6)$$

Eccone la dimostrazione. Dalla definizione di trasformata di Fourier,

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi iuy}du, \quad \widehat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-2\pi ivy}dv.$$

Allora

$$\widehat{f}(y)\widehat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(u+v)y}f(u)h(v)dudv. \quad (11.7)$$

Sia  $u + v = x$  nell'integrale doppio sopra che vogliamo trasformare dalle variabili  $(u, v)$  alle variabili  $(u, x)$ . Dal calcolo di funzioni a più variabili sappiamo che

$$dudv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)}dudx,$$

dove lo jacobiano della trasformazione è dato da

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Allora la (11.7) diventa

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y)\widehat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f \star h(x)dx \\ &= \widehat{f \star h}(y)\end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Si osservi che, essendo la trasformata di Fourier inversa di  $\widehat{f}(y)$  la trasformata di Fourier di  $\widehat{f}(-y)$ , si avrà anche

$$\widehat{f}h(y) = \widehat{f} \star \widehat{h}(y)$$

La convoluzione è un'operazione di *allisciamento*. La quintessenza della convoluzione è che il grado di lisciazza del prodotto è l'unione dei gradi di lisciazza dei suoi fattori. In particolare, valgono i seguenti teoremi:

1. Se una funzione è continua e l'altra discontinua, la loro convoluzione è continua;
2. Se una funzione è derivabile  $n$  volte e l'altra  $m$  volte, la loro convoluzione è derivabile  $n + m$  volte.

Questo significa che se  $P$  è una buona funzione e  $f$  non è tanto buona, il loro prodotto di convoluzione è buono. Il che vuol dire che facendo una scelta oculata di una funzione di riferimento  $P$ , possiamo trasformare una funzione brutta in una bella. Non vogliamo snaturarla, solo pulirla: vorrà dire che sceglieremo una funzione  $P$  che sia una approssimazione liscia di una delta, in modo tale che su una scala non troppo microscopica si abbia

$$f \star P \approx f,$$

e che nella scala microscopica  $f$  venga resa liscia.

ESEMPIO 11.1. Per comprendere il fenomeno di allisciamento, consideriamo il prodotto di convoluzione tra un'approssimante della delta

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

e lo scalino unitario, cioè la funzione di Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Allora

$$\Theta \star \delta_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(y)\delta_n(x-y)dy = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=0}^{\infty} e^{-n(x-y)^2} dy$$

Fatto il cambiamento di variabili  $u = x - y$ ,  $du = -dy$ , si ha

$$\Theta \star \delta_n(x) = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=x}^{-\infty} e^{-nu^2} du = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-nu^2} du$$

La figura 11.2 sotto mostra alcuni alliscamenti dello scalino ottenuti in questo modo.

La convoluzione può essere definita per funzioni su  $\mathbb{R}$ , su  $\mathbb{T}$  e su  $\mathbb{R}^n$ . Può anche essere definita anche su insiemi di interi. In questo caso, l'analogo di  $P$  è una matrice e il prodotto di convoluzione è un prodotto di una matrice per un vettore. Queste applicazioni (digitali) della convoluzione hanno applicazioni nell'analisi numerica, nella teoria dell'analisi dei segnali e, in particolare, nella progettazione e implementazione di filtri di risposta ad ingressi impulsivi. La convoluzione si applica anche allo sviluppo di filtri per l'analisi di immagini e in fisica è un utile strumento per pulire una segnatura sperimentale dal rumore di fondo. Sia come sia, in tutte queste applicazioni c'è qualcosa di analogo a un  $P$  tale che  $f \star P \approx f$ , in una scala opportuna. Una funzione  $P$  di questo tipo è chiamato *nucleo* o *kernel*. Nel seguito incontreremo vari nuclei di questo tipo, tra questi, il nucleo del calore, nella prossima sezione, e il il nucleo di Poisson, nel capitolo 15.

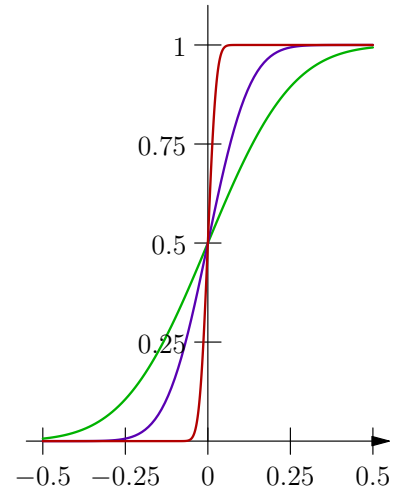


Figura 11.2: Alliscamenti dello scalino per  $n = 5, 10$  e  $50$ .

### 11.5 Il nucleo del calore

Nella sezione 8.5 abbiamo risolto l'equazione del calore

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

con condizione iniziale  $f_0(x) = f(x, 0)$  sotto le condizioni che  $f(x, t)$  e  $\partial f(x, t)/\partial x$  vadano a zero all'infinito per ogni  $t > 0$ . Con le convenzioni usate in questo capitolo, quello che avevamo mostrato allora può essere riscritto come

$$\hat{f}(k, t) = \hat{f}(k, 0) e^{-(2\pi)^2 D k^2 t} \quad (11.8)$$

dove

$$\hat{f}(k, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0) e^{-i2\pi k x} dx.$$

Poiché la trasformata di Fourier della  $f(x, t)$  è il prodotto di due funzioni, sulla base di quanto visto nella sezione precedente,  $f(x, t)$  è il prodotto di convoluzione delle loro antitrasformate. Ma l'antitrasformata della  $\hat{f}(k, 0)$  è la condizione iniziale  $f_0(x)$  e l'antitrasformata



della gaussiana  $e^{-(2\pi)^2 Dk^2 t}$  è

$$\begin{aligned} K_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi)^2 Dk^2 t} e^{i2\pi kx} dk \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi)^2 Dt}} e^{-(2\pi x)^2 / [4(2\pi)^2 Dt]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2 / (4Dt)} \end{aligned}$$

La funzione  $K_t(x)$  è chiamata *nucleo del calore* ("heat kernel"). Dunque,

$$f(x, t) = K_t \star f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (4Dt)} f_0(y) dy \quad (11.9)$$

### 11.6 Osservazioni, notazioni e convenzioni

Le equazioni (11.1) e (11.2) definiscono un operatore  $F$  sul dominio delle funzioni buone e il suo inverso  $F^{-1}$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} (Ff)(y) &= \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx \\ (F^{-1}g)(x) &= g^\vee(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{2\pi ixy} dy \end{aligned}$$

Il contenuto del teorema di Fourier per le funzioni buone è che  $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ , dove  $I$  è l'operatore identità.

Ci sono diverse convenzioni per definire la trasformata di Fourier. Passiamo in rassegna le convenzioni più popolari. Le distingueremo cambiando nome alle variabili indipendenti, e introducendo dei pedici:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \hat{f}_1(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx \\ \textcircled{2} \quad \hat{f}_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ \textcircled{3} \quad \hat{f}_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

La  $\textcircled{1}$  è quella che abbiamo adottato in questo capitolo. Con la  $\textcircled{2}$ , la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Con la  $\textcircled{3}$ , la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_3(k) e^{ikx} dk$$

In questo caso c'è simmetria tra la trasformata e la sua inversa

Ecco le regole per passare dall'una all'altra (che si ricavano facilmente dalle definizioni):

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(y) &= \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}_3(2\pi y) \\ \widehat{f}_2(\omega) &= \widehat{f}_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}_3(\omega) \\ \widehat{f}_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_1\left(\frac{k}{2\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_2(k)\end{aligned}$$

Nel seguito, quando non metteremo nessun pedice, sottoinderemo che stiamo usando la convenzione ①. Difficile dire quale convenzione sia migliore. Ognuna ha i suoi pro e i suoi contro. Per quanto sia fastidioso, conviene avere presente tutte e tre le convenzioni.

ESEMPPIO 11.2. Consideriamo la gaussiana

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

Nella sezione 8.4, abbiamo usato la convenzione ② e trovato (allora avevamo chiamato  $k$  la variabile indipendente)

$$\widehat{f}_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Con la convenzione ①, che è quella che stiamo seguendo adesso, si ha

$$\widehat{f}_1(y) = \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2 y^2}{a}}$$

Con la convenzione ③

$$\widehat{f}_3(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

### 11.7 Proprietà delle trasformate di Fourier

Nelle applicazioni il dominio della funzione considerata è un tempo o uno spazio e quindi il dominio della sua trasformata di Fourier è, rispettivamente, una frequenza o un numero d'onda. Nel seguito discuteremo le proprietà più importanti delle trasformate di Fourier tenendo presente questa interpretazione fisica.

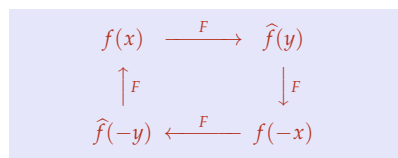
*Linearità.* La trasformata di Fourier è lineare. Per qualunque coppia di numeri complessi  $\alpha$  e  $\beta$  si ha:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{F} \alpha \widehat{f}(y) + \beta \widehat{g}(y)$$

*Relazione di reciprocità.* Per le convenzioni ① e ③ discende immediatamente dalla (11.2). Si veda il diagramma a lato. (Per la convenzione ② spunta fuori un fattore  $1/(2\pi)$ , cioè  $f(x)$  è  $1/(2\pi) \times$  la trasformata di Fourier di  $\widehat{f}(-y)$ .)

**N. B.** Con la convenzione ③, il prodotto di convoluzione è di solito definito come

$$f \star h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du$$



*Derivazione.* Calcoliamo la trasformata di Fourier della derivata:

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi i y x} dx \quad \text{integriamo per parti} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi i y)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= (2\pi i y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= (2\pi i y)\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & f'(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\times(2\pi i y)} & (2\pi i y)\widehat{f}(y) \end{array}$$

*Traslazione.* Sia  $\tau_b f(x) = f(x - b)$  l'operazione di traslazione della funzione<sup>2</sup> del numero reale  $b$ . Allora

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_b f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-2\pi i (x'+b)y} dx' \\ &= e^{-2\pi i y b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= e^{-2\pi i y b}\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Per esempio, la gaussiana  $e^{-x^2}$  centrata nell'origine diventa la gaussiana  $e^{-(x-b)^2}$  spostata di un tratto  $b$  a destra (se  $b$  è assunto positivo).

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\tau_b} & f(x - b) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{M_{-b}} & e^{-2\pi i y b}\widehat{f}(y) \end{array}$$

*Modulazione.* Sia  $M_b f(x) = e^{2\pi i x b} f(x)$  una modulazione nel dominio spaziale. Allora:

$$\begin{aligned} \widehat{M_b f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x b} f(x)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i (y-b)x} dx \\ &= \widehat{f}(y - b) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{M_b} & e^{2\pi i x b} f(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\tau_b} & \widehat{f}(y - b) \end{array}$$

*Cambiamento di scala.* Sia  $D_\alpha f(x) = f(\alpha x)$  un cambiamento di scala<sup>3</sup>. Allora

$$\begin{aligned} \widehat{D_\alpha f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-2\pi i x' y/\alpha} d\frac{x'}{\alpha} \\ &= \frac{1}{|\alpha|}\widehat{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Che induce, per  $\alpha > 1$ , una "compressione" della funzione. Per non fare confusione si tenga a mente l'esempio della gaussiana  $e^{-ax^2}$ : aumentare  $a$  significa diminuirne lo scarto quadratico medio, cioè restringere la gaussiana.

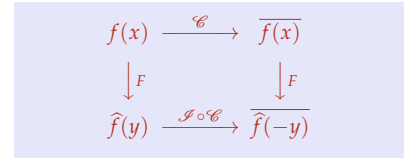
Quindi, ad una "compressione" della funzione nel dominio spaziale corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze e viceversa (si pensi al passaggio della luce attraverso una fenditura sottile e allo sparpagliamento delle frequenze spaziali, cioè dei numeri d'onda, che ne consegue).

*Inversione temporale*  $\mathcal{I}$ . Il cambiamento di scala  $\alpha = -1$  porta alla proprietà di inversione temporale (interpretando  $x$  come un tempo) o di parità (interpretando  $x$  come uno spazio): se  $h(x) = f(-x)$  allora  $\widehat{h}(y) = \widehat{f}(-y)$ .

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & f(-x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \widehat{f}(-y) \end{array}$$

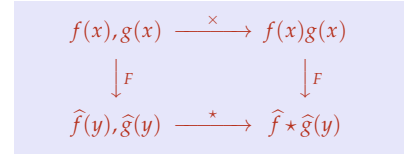
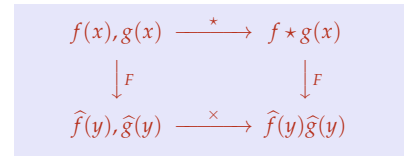
Coniugazione complessa  $\mathcal{C}$ . Se  $h(x) = \overline{f(x)}$ , allora

$$\begin{aligned} \widehat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-2\pi ixy} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ixy} dx} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix(-y)} dx} \\ &= \widehat{f(-y)}. \end{aligned}$$



Condizioni di realtà. In particolare, se  $f(x)$  è reale si ha  $\widehat{f}(-y) = \overline{\widehat{f}(y)}$ , mentre se  $f(x)$  è puramente immaginaria si ha  $\widehat{f}(-y) = -\overline{\widehat{f}(y)}$ .

Convoluzione. Come visto nella sezione 11.4, all'operazione di prodotto di convoluzione nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di prodotto usuale nel dominio delle frequenze e, viceversa, all'operazione di prodotto usuale nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di prodotto di convoluzione nel dominio delle frequenze. Queste proprietà sono riassunte nei diagrammi a lato.



NOTA. Le convenzioni ① e ③ hanno dei vantaggi rispetto alla convenzione ②. Malgrado questo c'è chi, come il sottoscritto, preferisce lavorare con la convenzione classica ②. Per evitare di fare errori con la ②, perdendo per strada dei fattori  $\pi$ , conviene sempre pensare il fattore come assorbito nella misura di integrazione e scrivere

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \end{aligned}$$

L'ultima seccatura da tenere presente è la seguente. Quando si analizza secondo Fourier una funzione nel tempo, si usa per il tempo una convenzione opposta per il segno nell'esponenziale: se  $f = f(t)$ , allora l'analisi di Fourier di  $f$  è (usando una tilde anziché un cappuccio, per distinguere)

$$\widetilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{11.10}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{11.11}$$

Se si analizza secondo Fourier una funzione nello spazio e nel tempo, allora

$$\widetilde{\widetilde{f}}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x, t) e^{-i(kx - \omega t)} dx dt \tag{11.12}$$

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{f}}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \tag{11.13}$$

Così si spiega il cambiamento di segno nella (11.11): la convenzione (11.11) permette l'interpretazione della (11.13) come una somma continua di treni d'onda.

Osserviamo infine che il teorema di convoluzione si estende a funzioni di più variabili. In particolare, al prodotto delle trasformate

$$\widehat{f}(k, \omega)\widehat{g}(k, \omega)$$

corrisponde, per antitrasformata di Fourier nello spazio e nel tempo, il prodotto di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y, t-s)g(y, s)dyds \quad (11.14)$$

### 11.8 Trasformate di Fourier di funzioni non buone

Nel capitolo 20 studieremo la trasformata di Fourier di una classe molto importante di funzioni "non buone", le funzioni a quadrato integrabile. Qui ci limitiamo ad enunciare, senza dimostrarlo, un utile criterio di esistenza della trasformata di Fourier per una certa classe di funzioni "non buone".

- (i) Si supponga che, eccetto eventualmente un numero finito di punti, la funzione  $f(x)$  sia continua e la sua derivata sia continua e limitata in ogni intervallo finito.
- (ii) Si supponga che  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$  converga, cioè sia assolutamente integrabile in  $(-\infty, \infty)$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>L'insieme delle funzioni assolutamente integrabili in  $(-\infty, \infty)$  si denota con  $L^1(\mathbb{R})$ .

Allora esiste la trasformata di Fourier  $\widehat{f}(y)$  data dalla (11.1) e vale il teorema di Fourier (11.2) nei punti di continuità di  $f$ . Se  $x$  è un punto di discontinuità di  $f$ , allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] . \quad (11.15)$$

### 11.9 Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate

La trasformata di Fourier  $\widehat{f}(y)$  della funzione generalizzata  $f(x)$  è definita dalla successione  $\widehat{f}_n(y)$ , dove  $\widehat{f}_n(y)$  è la trasformata di Fourier di  $f_n(y)$ , e  $f_n(y)$  è una successione regolare che definisce  $f(x)$ . Si consideri per esempio, la delta, che è definita dalla successione regolare (10.3). La trasformata di Fourier della (10.3) è  $e^{-\pi^2 y^2/n}$ , che è una delle successioni regolari che definisce la funzione 1. Quindi la trasformata di Fourier di  $\delta(x)$  è la funzione  $\widehat{\delta}(y) = 1$ . Naturalmente, bisogna mostrare che la definizione precedente è consistente, ma questo è presto fatto: dall'identità di Parseval-Plancherel si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_n(y)}\widehat{F}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(x)}F(x)dx$$

per ogni funzione  $F$  buona con trasformata di Fourier  $\widehat{F}$  (che sarà anch'essa buona). Quindi se  $f_n$  è regolare anche  $\widehat{f}_n$  lo è. Inoltre, a successioni equivalenti che definiscono  $f$ , corrispondono successioni equivalenti che definiscono la stessa  $\widehat{f}$ .

Le proprietà della trasformata di Fourier di funzioni buone si estendono alle funzioni generalizzate. Vediamone alcuni esempi di rappresentazioni di Fourier di funzioni generalizzate che sono utili nelle applicazioni.

ESEMPIO 11.3. Per quanto visto sopra

$$\widehat{\delta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi xy} dx = 1,$$

dunque

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi xy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (11.16)$$

ESEMPIO 11.4. Dalla (11.16), per  $x \rightarrow ax$ :

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikax} dk = \frac{1}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (11.17)$$

ESEMPIO 11.5. Dalla (11.16), per  $x \rightarrow x - b$ :

$$\delta(x - b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-b)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ibk} dk \quad (11.18)$$

ESEMPIO 11.6.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ak) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} [\delta(x + a) + \delta(x - a)] \quad (11.19)$$

ESEMPIO 11.7. Consideriamo la funzione  $\chi_{[-a,a]}(x)$  che vale 1 se  $-a < x < a$  e vale 0 altrimenti. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ikx} dk = \int_{-a}^a e^{-ikx} dk = 2 \frac{\sin(ka)}{k} \quad (11.20)$$

Assumendo che anche per una funzione discontinua continui a valere il teorema di Fourier, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \chi_{[-a,a]}(x). \quad (11.21)$$

$\chi_A(x)$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ , cioè la funzione che vale 1 se  $x \in A$  e zero altrimenti. Si osservi che

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \Theta(x + a) - \Theta(x - a)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaviside.

11.10 PROBLEMI

PROBLEMA 11.1. □

Dimostrare che

$$F^2 = \mathcal{I}$$

dove  $\mathcal{I}f(x) = f(-x)$ .

PROBLEMA 11.2. □

Dimostrare che :

- (a)  $f$  è pari se e solo se  $F^2f = f$
- (b)  $f$  è dispari se e solo se  $F^2f = -f$
- (c)  $F^4f = f$  per ogni funzione  $f$  (su cui  $F$  è definita).
- (d) La trasformata di Fourier di una funzione reale pari è reale.
- (e) La trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è immaginaria.
- (f) La trasformata di Fourier di una funzione pari è pari e di una funzione dispari è dispari.

PROBLEMA 11.3. □

Calcolare la trasformata di Fourier ② di

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROBLEMA 11.4. □

Usare la relazione di reciprocità e il problema precedente per calcolare la trasformata di Fourier ③ di

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

PROBLEMA 11.5. □

Usare il problema precedente per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 11.6. □

Usare i due problemi precedenti per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 11.7. □

Calcolare la trasformata di Fourier ② della funzione  $f(x) = e^{-a|x|}$  dove  $a > 0$ .

PROBLEMA 11.8. □

Per  $a$  e  $x$  positivi, ottenere la formula

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk.$$

PROBLEMA 11.9. □

Si consideri la funzione (generalizzata) segno

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e si stabilisca l'uguaglianza

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \text{sgn}(x)$$

PROBLEMA 11.10. □ Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(II)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{se } |x| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROBLEMA 11.11. □ Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare la trasformata di Fourier di  $g = f \star f$ .
- (b) Calcolare  $f \star f$ .

PROBLEMA 11.12. □ Usare il principio di reciprocità e le proprietà della trasformata di Fourier (che cosa diventano nel dominio delle frequenze operazioni come derivate, traslazione, cambiamento di scala etc.) per ricondursi ad trasformate note e calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$\frac{1}{1+x^2}$$

(II)

$$\frac{a - ix}{a^2 + x^2}$$

(III)

$$\frac{x}{1 + x^2}$$

(IV)

$$e^{-2x^2+2x}$$

(V)

$$e^{-\frac{1}{2}x^2+2}$$

(VI)

$$xe^{-x^2}$$

(VII)

$$x^2e^{-|x|}$$

(VIII)

$$xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

PROBLEMA 11.13.  $\square$  Si supponga che  $f$  sia una funzione pari assolutamente integrabile e sia  $h(x) = \sin(ax)$ . Dimostrare che per tutti i numeri reali  $a$  si ha

$$f \star h(x) = \sin(ax)\widehat{f}(a).$$

PROBLEMA 11.14.  $\square$

Trovare la soluzione generale di

$$Y''(x) + Y'(x) + xY(x) = 0$$

PROBLEMA 11.15.  $\square$

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a^2+t^2}$$

PROBLEMA 11.16.  $\square$

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = e^{-t^2}$$

PROBLEMA 11.17.  $\square$

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)f(u)du + 2f(x) = \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)}$$

PROBLEMA 11.18.  $\square$

Risolvere l'equazione integrale

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y}dy = \frac{1}{1+x^2}$$

PROBLEMA 11.19.  $\square$

Risolvere l'equazione mista (differenziale a alle differenze finite)

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2}$$



### 11.11 COMPLEMENTI

#### 11.11.1 Analisi dimensionale e nucleo del calore

Vogliamo studiare la propagazione del calore in un filo (adiabaticamente isolato) di lunghezza infinita. Consideriamo l'equazione del calore

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x^2},$$

Come abbiamo già sottolineato, questa equazione è ottenuta dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

che esprime la conservazione locale della densità di energia  $\propto \mathcal{T}(x, t)$ . Questo significa che vale la legge di conservazione

$$\int |\mathcal{T}(x, t)| dx = \Theta \propto \text{Energia totale.}$$

Supponiamo di volere trovare una soluzione dell'equazione del calore con i metodi dell'analisi dimensionale:  $[D] = L^2 T^{-1}$  è una costante del problema;  $\Theta = L\theta$  ( $\theta$  = temperatura), è proporzionale alla quantità iniziale di energia immessa nel sistema. Naturalmente,  $[x] = L$  e  $[t] = T$ . La quantità

$$u = x/\sqrt{Dt}$$

è adimensionale. La soluzione che cerchiamo è una temperatura:  $[\mathcal{T}] = \theta$ . Cerchiamola come funzione di  $(t, D, \Theta)$ . Deve quindi valere

$$[\mathcal{T}] = \theta = [t]^a [D]^b [\Theta]^c = T^a L^{2b} T^{-b} \theta^c L^c = L^{2b+c} T^{a-b} \theta^c$$

da cui

$$2b + c = 0 \quad a - b = 0 \quad c = 1$$

che ha soluzioni

$$a = -\frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = 1$$

Quindi l'analisi dimensionale ci dice che la soluzione è della forma

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

dove  $\Phi = \Phi(u)$  è una funzione da terminare. Il punto importante è che  $\Phi$  è una funzione di *una* variabile adimensionata, la combinazione  $u = x/\sqrt{Dt}$ , e non di  $x$  e  $t$  separatamente. Ora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi''(u) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)] \end{aligned}$$

Per l'equazione del calore

$$\frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi'(u) = -D \frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)]$$

da cui

$$\Phi'' + \frac{u}{2}\Phi' + \frac{1}{2}\Phi = 0$$

Con il vincolo (conservazione dell'energia = norma  $L^1$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$$

L'equazione sembrerebbe difficile da risolvere, ma non lo è. Riconosciamo a primo membro un differenziale esatto:

$$\frac{d}{du} \left[ \Phi' + \frac{u}{2}\Phi \right] = 0$$

Quindi

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = \text{costante}$$

Tuttavia, ogni soluzione fisicamente ragionevole deve avere  $\Phi \rightarrow 0$  e  $\Phi' \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$ . Quindi la costante di integrazione deve essere zero. L'equazione diventa

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = 0$$

Abbiamo già incontrato questa equazione nella sezione 8.8 quando abbiamo calcolato la trasformata di Fourier di una gaussiana con il metodo della derivazione sotto il segno di integrale. La soluzione è dunque

$$C e^{-u^2/4}$$

Determiniamo  $C$  imponendo la normalizzazione  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$ , da cui

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4} du = C\sqrt{4\pi} = 1$$

Quindi,

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-u^2/4}$$

Ritornando alle variabili originali,

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

### 11.11.2 Legge dei grandi numeri e limite centrale

Supponete di lanciare due dadi. La probabilità che la somma sia 7 è

$$p(7) = p(1)p(7-1) + p(2)p(7-2) + p(3)p(7-3) + p(4)p(7-4) + p(5)p(7-5) + p(6)p(7-6)$$

Questa regola è del tutto generale: la distribuzione di probabilità della somma di due variabili casuali indipendenti, con distribuzioni di probabilità  $f(x)$  e  $g(y)$  rispettivamente, è il prodotto di convoluzione

$$f \star g(x) = \int f(x)g(x-y)dy.$$

Se sommate  $N$  variabili casuali indipendenti, tutte con la stessa distribuzione di probabilità, la distribuzione della somma è

$$\underbrace{p \star \dots \star p}_{N \text{ volte}}(x) = p^{\star N}(x)$$

D'ora in poi, per semplicità, assumeremo che  $p$  sia a media zero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m = 0$$

Se moltiplicate per  $\alpha$  una variabile casuale  $X$  con distribuzione  $f(x)$ , e formate la variabile casuale  $Y = \alpha X$ , la distribuzione di  $Y$  è  $(1/\alpha)f(x/\alpha)$ . Quindi, se dividete per  $N$  la somma di  $N$  variabili casuali indipendenti  $X_i$ , tutte con la stessa distribuzione  $p(x)$ , questa variabile casuale,

$$\frac{X_1 + \dots + X_N}{N},$$

detta *media empirica*, ha distribuzione

$$Np^{*N}(Nx).$$

Per determinare l'andamento asintotico per  $N$  grande della distribuzione della media empirica, prendiamone la trasformata di Fourier

$$N \frac{1}{N} \hat{p}(k/N)^N = \hat{p}(k/N)^N,$$

dove, assumendo la convenzione ②,

$$\hat{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx} dx$$

Non è difficile vedere che  $\hat{p}(k/N)^N$  tende ad un valore costante e che quindi  $p(x)$  tende a concentrarsi nello zero (abbiamo assunto che  $p$  fosse a media zero). Dimostriamo questo fatto, mostrando un risultato più specifico: che le fluttuazione statistiche attorno allo zero sono di ordine  $1/\sqrt{N}$ . Cioè, dimostriamo che la distribuzione di

$$Y_N = \frac{X_1 + \dots + X_N}{\sqrt{N}},$$

quando  $X_i$  sono variabili casuali indipendenti, converge ad una gaussiana a media zero e varianza uguale a quella delle  $X_i$  (assunte tutte distribuite nello stesso modo), a media  $m = 0$  e varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

La distribuzione di  $Y_N$  è

$$\sqrt{N}p^{*N}(\sqrt{N}x)$$

Passiamo alla sua trasformata di Fourier che è

$$g_N(k) = \hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^N$$

Poiché siamo interessati al limite di  $N$  grande di  $g_N(k)$ , studiamo l'asintotica del suo logaritmo

$$\ln g_N(k) = N \ln \hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right).$$

Adesso sviluppiamo in serie l'argomento del logaritmo:

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[ \hat{p}(0) + \hat{p}'(0) \frac{k}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \hat{p}''(0) \frac{k^2}{N} + \dots \right].$$

Adesso osserviamo che

$$\begin{aligned}\widehat{p}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{perché è una distribuzione di probabilità}) \\ \widehat{p}'(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(-ix)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = -im = 0 \quad (\text{media zero per ipotesi}) \\ \widehat{p}''(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(-x^2)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = -\sigma^2 \quad (\text{varianza})\end{aligned}$$

Allora

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[ 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + \dots \right] \approx N \left[ -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right].$$

Quindi, nel limite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$g_N(k) \rightarrow g_*(k) = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2}$$

che è proprio la trasformata di Fourier di

$$\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

cioè la distribuzione normale (gaussiana) a media 0 e varianza  $\sigma^2$ . Risulta così dimostrato il teorema del limite centrale.

## 12

# L'equazione delle onde in una dimensione

### 12.1 L'equazione omogenea delle onde

L'equazione delle onde è l'equazione che descrive lo sviluppo di un'onda che si propaga in un mezzo. Descrive, per esempio, lo spostamento verticale di una corda vibrante, la propagazione di un'onda elettromagnetica attraverso lo spazio, di un'onda sonora nell'aria e di onde d'acqua nel mare di vario tipo.

Consideriamo prima il problema omogeneo, il caso più semplice del quale è un'onda che si propaga lungo una corda di densità costante  $\mu$  sotto l'effetto di una tensione costante  $T$ . Lo spostamento verticale  $y = f(x, t)$  soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (12.1)$$

dove  $c = \sqrt{T/\mu}$  è la velocità di propagazione, una costante. Poiché (12.1) è del secondo ordine nel tempo, la soluzione è determinata dai dati iniziali

$$f(x, t)|_{t=0} = a(x), \quad \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = b(x). \quad (12.2)$$

### 12.2 Soluzione generale di d'Alembert

La soluzione generale (12.1) ha la forma

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct), \quad (12.3)$$

dove  $\phi(x + ct)$  è un'onda che si muove verso sinistra con velocità  $c$  e la cui forma è il grafico di  $\phi$ ; analogamente,  $\psi(x - ct)$  è un'onda che si muove verso destra.

La formula (12.3) fu scoperta da d'Alembert ed è facile da ottenere mediante il cambiamento di variabili  $\xi = x - ct$  e  $\eta = x + ct$ . Calcoliamo come cambiano le derivate:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

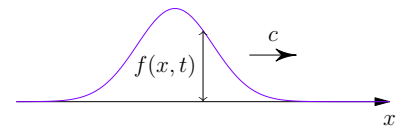


Figura 12.1:  $f(x, t)$  è l'ampiezza dell'onda. Per una corda vibrante, è il suo spostamento verticale;  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial \xi} + c \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

e derivando ancora una volta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

Quindi, l'equazione delle onde (12.1) nelle nuove variabili diventa

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ cioè } \frac{\partial f}{\partial \xi} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = 0,$$

il che vuol dire che  $\partial f / \partial \eta$  non dipende da  $\xi$ , vale a dire è una funzione della sola  $\eta$ :  $\partial f / \partial \eta = F(\eta)$ . Integrando (e indicando con  $\phi$  la primitiva della  $F$ ),  $u = \phi(\eta) + \psi$ , dove  $\psi$  non dipende da  $\eta$ , ma può dipendere da  $\xi$ . Dunque  $f = \phi(\eta) + \psi(\xi)$ , che, ritornando alle variabili  $x$  e  $t$ , è proprio la (12.3).

### 12.3 Soluzione del problema di Cauchy

Assumeremo che non ci siano vincoli al finito e che gli estremi della corda siano a  $-\infty$  e  $+\infty$ . Assumeremo inoltre che  $f(x, t)$  e  $\partial f / \partial x$  convergano a zero per  $|x| \rightarrow \infty$ .

Risolveremo il problema di Cauchy (12.1), (12.2) nello stesso modo in cui abbiamo risolto l'equazione del calore (sezioni 8.5 e 11.5), cioè mediante trasformata di Fourier. In questo capitolo useremo la convenzione ②:

$$\widehat{f}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (12.4)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k, t) e^{ikx} dk \quad (12.5)$$

Prendendo la trasformata di Fourier della (12.1), si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \widehat{f}(k, t)}{\partial t^2} + k^2 \widehat{f}(k, t) = 0. \quad (12.6)$$

La (12.6) è l'equazione di un oscillatore armonico classico ed è facilmente risolta:

$$\widehat{f}(k, t) = A(k) \cos(|k|ct) + B(k) \sin(|k|ct),$$

dove  $A(k)$  e  $B(k)$  sono costanti di integrazione che possono dipendere dal parametro  $k$ . Imponendo che le condizioni al contorno (12.2) siano soddisfatte, si determinano le costanti  $A(k)$  e  $B(k)$ :

$$\widehat{f}(k, 0) = A(k) = \widehat{a}(k) \quad \frac{\partial \widehat{f}(k, 0)}{\partial t} = |k|cB(k) = \widehat{b}(k), \quad (12.7)$$

dove  $\widehat{a}$  e  $\widehat{b}$  sono le trasformate di Fourier dei dati iniziali. Quindi

$$\widehat{f}(k, t) = \widehat{a}(k) \cos(|k|ct) + \frac{\widehat{b}(k)}{c|k|} \sin(|k|ct)$$

e poiché  $\cos(|k|ct)$  e  $\sin(|k|ct)/|k|$  sono pari, possiamo sostituire in esse  $|k|$  con  $k$  e scrivere

$$\widehat{f}(k, t) = \widehat{a}(k) \cos(kct) + \frac{\widehat{b}(k)}{ck} \sin(kct). \quad (12.8)$$

La soluzione della (12.1) è dunque

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k, t) e^{ikx} dk \equiv \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t), \quad (12.9)$$

dove

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(k) \cos(kct) e^{ikx} dk \quad (12.10)$$

$$\mathcal{B}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{b}(k)}{ck} \sin(kct) e^{ikx} dk. \quad (12.11)$$

Prima di procedere con il calcolo di questi integrali, osserviamo che, usando la formula di Eulero per esprimere seno e coseno negli integrali  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , si vede che entrambi dipendono dalle variabili  $x + ct$  e  $x - ct$ ; vale a dire  $f(x, t)$  ha la forma (12.3).

Alcune soluzioni particolari della (12.1) meritano un'attenzione particolare. Queste sono le onde monocromatiche (di singola frequenza), che sono della forma

$$f(x, t) = e^{i(x/c-t)\omega}$$

dove  $\omega$  è la frequenza;  $f(x, t)$  è un'onda di frequenza  $\omega$  che si muove verso destra.

Adesso discutiamo separatamente i due contributi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , sia da un punto di vista matematico sia da un punto di vista fisico. Se la "velocità" iniziale è nulla, la soluzione è data solo dal termine  $\mathcal{A}$  che è la trasformata di Fourier inversa del prodotto di due funzioni di  $k$ . Pur avendo dimostrato il teorema di convoluzione solo per funzioni buone, esso continua a valere se  $\widehat{a}$  decade rapidamente in  $k$ . Applicando questa estensione del teorema di convoluzione, si ottiene

$$\mathcal{A}(x, t) = a \star F^{-1}\{\cos(kct)\}(x). \quad (12.12)$$

Ora (cfr. (11.19)),

$$F^{-1}\{\cos(kct)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikct} + e^{-ikct}}{2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} [\delta(x + ct) + \delta(x - ct)]$$

e quindi

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)] \quad (12.13)$$

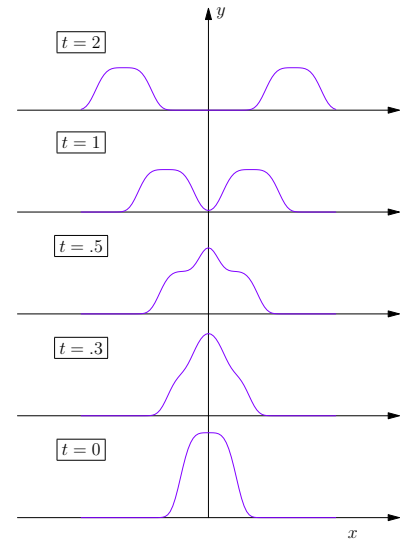


Figura 12.2: Evoluzione temporale del profilo iniziale  $y = a(x)$ : dopo una fase iniziale di separazione, metà del profilo si propaga inalterato a destra e metà a sinistra, entrambi con velocità  $c$ . Per la figura si è scelto  $a(x) = e^{-4x^4}$ .

Questo termine rappresenta la somma (divisa per due) dello spostamento verticale iniziale della corda traslato di  $ct$  a destra e di  $ct$  a sinistra; si veda la figura 12.2.

Per il termine  $\mathcal{B}$ , potremmo procedere in modo analogo, in quanto anche  $\mathcal{B}$  è la trasformata di Fourier inversa del prodotto di due funzioni di  $k$ , e scrivere

$$\mathcal{B}(x, t) = b \star F^{-1} \left\{ \frac{\sin(ckt)}{ck} \right\} (x). \quad (12.14)$$

In questo caso però, l'integrale

$$F^{-1} \left\{ \frac{\sin(ckt)}{ck} \right\} (x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ckt)}{ck} e^{ikx} dk$$

è mal definito, avendo una singolarità lungo il cammino d'integrazione. Tuttavia, usando la formula di inversione (11.21), si ottiene

$$F^{-1} \left\{ \frac{\sin(ckt)}{ck} \right\} (x) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x), \quad (12.15)$$

da cui,

$$\mathcal{B}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-ct, ct]}(x-y) b(y) dy \quad (12.16)$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy. \quad (12.17)$$

Questo integrale rappresenta l'effetto cumulativo del profilo di velocità iniziale. Per vedere quest'ultimo punto più chiaramente, consideriamo il caso in cui  $a(x) = 0$  e  $b(x) = \delta(x)$ , che possiamo pensare come un impulso unitario in  $x = 0$  a  $t = 0$ , per esempio, una corda di chitarra pizzicata. Allora otteniamo

$$f(x, t) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x), \quad (12.18)$$

cioè la funzione che vale  $1/2c$  se  $-ct < x < ct$  e 0 altrimenti. Perciò l'effetto dell'impulso in  $x = 0$  si propaga a sinistra e a destra con velocità  $c$ , creando nel piano  $xt$  (spaziotempo) un "cono caratteristico" o dominio di influenza delimitato dalle due rette (dette caratteristiche)  $x = \pm ct$ .

### 12.4 Conservazione dell'energia

C'è conservazione dell'energia per una soluzione dell'equazione delle onde. L'energia totale è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. Per una corda di spostamento verticale  $y = f(x, t)$ , di

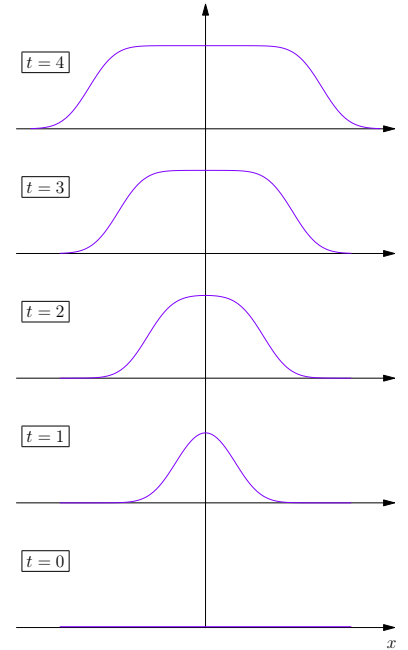


Figura 12.3: Evoluzione temporale del profilo della corda per una distribuzione iniziale iniziale di velocità  $b(x)$  gaussiana e profilo iniziale  $a(x) = 0$ .

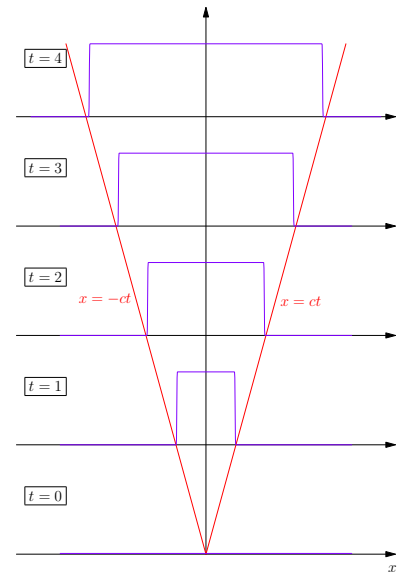


Figura 12.4: Evoluzione temporale del profilo della corda per una distribuzione iniziale iniziale di velocità  $b(x) = \delta(x)$  e profilo iniziale  $a(x) = 0$ . Questo è il limite della gaussiana (normalizzata) della figura 12.3 quando la sua larghezza tende a zero. Il cono di influenza è la regione nel piano  $x, t$  delimitata dalle rette caratteristiche  $x = ct$  e  $x = -ct$ .



densità lineare  $\mu$  e tensione  $T$

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{\int \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\int \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx}_{\text{energia potenziale}} \\ &= \frac{\mu}{2} \int dx \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\mathcal{Z}}{2c} \int dx \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

dove si è introdotto l'impedenza  $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu T} = \mu c$ . Verifichiamo la conservazione dell'energia, calcolando  $dE/dt$ . Differenziando sotto il segno di integrale e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\mathcal{Z}}{2c} \int dx \left[ 2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right] \\ &= \frac{\mathcal{Z}}{c} \int dx \frac{\partial y}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dunque, l'energia ad un qualunque tempo  $t$  ha lo stesso valore che ha al tempo iniziale,

$$E(t) = E(0).$$

### 12.5 L'equazione non omogenea delle onde

Consideriamo adesso il caso in cui una forza esterna  $F(x, t)$  è applicata alla corda. In questo caso l'equazione del moto per lo spostamento verticale  $y = f(x, t)$  soddisfa l'equazione non omogenea delle onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (12.19)$$

Naturalmente, nel caso di onde acustiche o onde elettromagnetiche (in una dimensione), il termine forzante  $F(x, t)$  sarà interpretato come sorgente del campo  $f(x, t)$ .

Come nel caso delle equazioni lineari ordinarie, data una soluzione particolare della (12.19), è possibile ottenere un'altra soluzione aggiungendo una soluzione dell'equazione omogenea (12.1). Quindi la soluzione più generale dell'equazione non omogenea può essere scritta come una somma di una soluzione omogenea  $o = o(x, t)$  e una soluzione particolare  $p = p(x, t)$ .

Più precisamente, la procedura per trovare una soluzione della (12.19) è la seguente. Si fissino i dati iniziali

$$f(x, 0) = a(x) \quad \text{e} \quad \partial_t f(x, 0) = b(x)$$

(e, naturalmente, sia fissato il termine forzante  $F(x, t)$ ). Quindi si trovi una *qualunque* soluzione  $p(x, t)$  della (12.19). Si osservi che non c'è bisogno che  $p(x, t)$  soddisfi i dati iniziali. A questo punto, si risolva l'equazione omogenea associata con dati iniziali

$$o(x, 0) = a(x) - p(x, 0) \quad \text{e} \quad \partial_t o(x, 0) = b(x) - \partial_t p(x, 0).$$

Conclusione: l'unica soluzione della (12.19) che soddisfa i dati iniziali è

$$f(x, t) = o(x, t) + p(x, t).$$

Si osservi che è sbagliato parlare di "la" soluzione particolare: ce ne sono quante vogliamo! Il metodo sopra descritto dà unicità per la soluzione  $f$ , ma non per  $o$  e  $p$  presi individualmente.

### 12.6 Risoluzione mediante analisi di Fourier

Un metodo comune in fisica per trovare una soluzione particolare della (12.19) è mediante analisi di Fourier. Si trasformi secondo Fourier la (12.19) rispetto allo spazio e al tempo, con le convenzioni (11.12) e (11.13). Procedendo in questo modo e chiamando  $p(x, t)$  la soluzione particolare, si ottiene

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \widehat{p}(k, \omega) = -k^2 \widehat{p}(k, \omega) + \widehat{F}(k, \omega),$$

da cui

$$\widehat{p}(k, \omega) = \frac{c^2 \widehat{F}(k, \omega)}{-\omega^2 + c^2 k^2}. \tag{12.20}$$

Per il teorema di convoluzione (11.14),

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x - y, t - s) F(y, s) dy ds, \tag{12.21}$$

dove

$$\mathcal{G}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2} \frac{d\omega}{2\pi} \right] e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}. \tag{12.22}$$

Tuttavia, l'integrale

$$\widehat{\mathcal{G}}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{12.23}$$

è mal definito, in quanto lungo il cammino d'integrazione ci sono i poli  $\omega_- = -c|k|$  e  $\omega_+ = c|k|$  della funzione integranda. Supponiamo di regolarizzare l'integrale spostando i poli di un pelino sotto l'asse reale nel piano di variabile complessa  $z = \omega + i\sigma$  e chiamiamo la funzione definita dall'integrale così regolarizzato  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$  (si veda la figura 12.5).

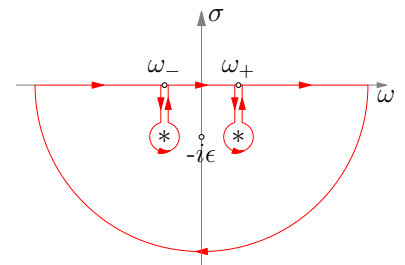


Figura 12.5: I poli sono spostati di un tratto  $\epsilon$  nel semipiano inferiore.

Allora, per  $t > 0$ , l'integrale di contorno che definisce  $\widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t)$  va chiuso nel semipiano inferiore, come mostrato in figura 12.5, mentre per  $t < 0$  va chiuso in quello superiore. Poiché nel semipiano superiore non ci sono singolarità, concludiamo che  $\widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t) = 0$  per  $t < 0$ . Per  $t > 0$ , tenuto conto dell'orientazione oraria del circuito in figura 12.5, si ha

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t) &= (-2\pi i) \frac{1}{2\pi} \left[ \text{Res} \left( \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2}, -c|k| \right) + \text{Res} \left( \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2}, c|k| \right) \right] \\ &= -i \left[ \frac{e^{-i(c|k|t)}}{-2c|k|} + \frac{e^{i(c|k|t)}}{2c|k|} \right] = \frac{e^{i(c|k|t)} - e^{-i(c|k|t)}}{2ic|k|} \\ &= \frac{\sin(ckt)}{ck}\end{aligned}$$

Conosciamo già l'antitrasformata di questa funzione, che è data dall'equazione (12.15). Dunque,

$$\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t) = \frac{1}{2c} \Theta(t) \chi_{[-ct, ct]}(x) \quad (12.24)$$

dove  $\Theta(t)$  è la funzione di Heaviside (a parole:  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$  è la funzione che vale 0 per  $t \leq 0$  e vale  $1/(2c)$  per  $t > 0$  e  $x$  compreso tra  $-ct$  e  $ct$ ). Sostituendo nella (12.21), troviamo la soluzione particolare

$$p(x, t) = \mathcal{G}^{\text{ret.}} \star c^2 F(x) \quad (12.25)$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-c(t-s), c(t-s)]}(x-y) F(y, s) dy ds \quad (12.26)$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy ds. \quad (12.27)$$

Si lascia come esercizio il mostrare che quando questa espressione è sostituita nella (12.19), l'equazione risulta soddisfatta. Prima di procedere è bene aver chiaro il significato geometrico della soluzione trovata illustrato in figura 12.6.

Determiniamo adesso la soluzione completa della (12.19). Supponiamo che la sorgente  $F(x, t)$  venga accesa ad un qualche istante, in modo tale che per  $t$  minore di un qualche tempo  $t_0$  sia nulla. Charamente, da un punto di vista fisico, questa non è una restrizione significativa. Per comodità scegliamo questo tempo  $t_0$  come origine per l'asse dei tempi, esattamente come in figura 12.6.

Allora, essendo  $F(x, t) = 0$  per  $t \leq 0$ , si avrà anche che per  $t \leq 0$   $p(x, t)$  è nulla ed è nulla sua derivata (per  $t \leq 0$  la funzione è identicamente nulla, si veda la figura 12.7). Possiamo allora prendere, come soluzione dell'omogenea associata, la soluzione  $o(x, t) = \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t)$  trovata precedentemente, scaricando in questo modo i dati iniziali  $a(x)$  e  $b(x)$  sulla soluzione dell'omogenea.

In alcuni casi (per es. in elettromagnetismo), conviene prendere  $t_0 < 0$  (cioè nel passato). In questo caso,  $\mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t)$  va intesa come soluzione dell'omogenea associata con condizioni iniziali in  $t_0$ .

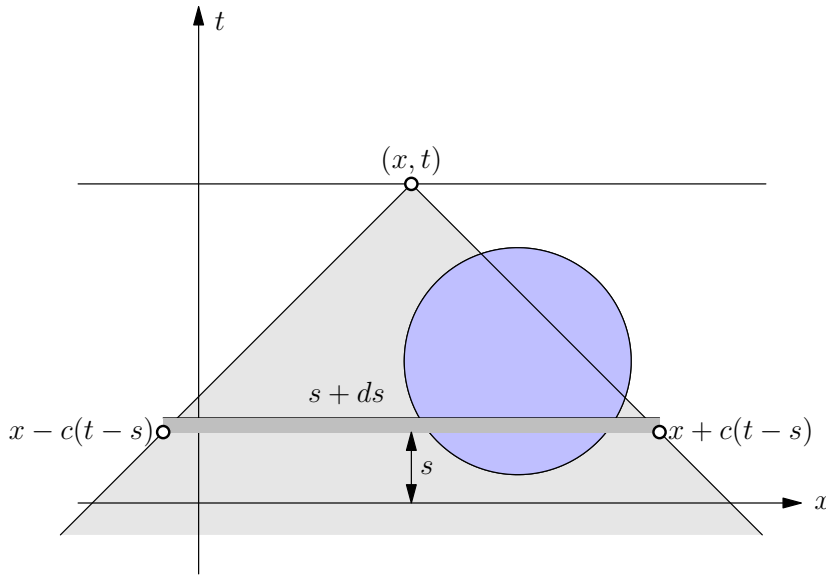


Figura 12.6: Il campo

$$p(x, t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

in un dato punto  $(x, t)$  dello spazio-tempo dipende soltanto dai valori del termine forzante (o sorgente) nei punti che si trovano nel “cono d’ombra” passato del punto. Questo cono o *regione di influenza* è delimitato dalle rette caratteristiche di pendenza  $1/c$  e  $-1/c$  che passano per il punto  $(x, t)$ : nella figura è la regione colorata in grigio. Questo cono è il dominio di integrazione. La regione colorata in blu è dove la sorgente  $F(x, t)$  è non nulla, cioè il supporto spaziotemporale della sorgente. Contribuisce al valore del campo nel punto  $(x, t)$  soltanto quella parte del supporto della sorgente che è nella regione di influenza. Il contributo

$$ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

all’integrale è quello di una striscia di spessore  $ds$  (colorata in grigio scuro in figura). Sommando i contributi di tutte le striscie, per  $s$  che varia tra  $-\infty$  e  $t$ , si ottiene il valore del campo  $p$  nel punto  $(x, t)$ . Naturalmente, il contributo delle striscie sotto il supporto della sorgente è nullo.

La soluzione completa della (12.19) è dunque

$$f(x, t) = \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy, \quad (12.28)$$

dove  $\mathcal{A}(x, t)$  e  $\mathcal{B}(x, t)$  sono dati, rispettivamente, dalle equazioni (12.13) e (12.17) (Il limite inferiore d’integrazione è stato posto a zero perché abbiamo assunto che la funzione  $F$  sia nulla per  $t < 0$ ).

**DUE OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.** La prima è di carattere fisico: se avessimo spostato i poli  $\omega_- = -c|k|$  e  $\omega_+ = c|k|$  di un pelino nel semipiano superiore, per  $t > 0$  avremmo dovuto chiudere il cammino nel semipiano inferiore (e, viceversa, nel semipiano superiore per  $t < 0$ ). Si lascia come esercizio il mostrare che in questo caso, invece della (12.29), avremmo trovato

$$\mathcal{G}^{\text{adv.}}(x, t) = \frac{1}{2c} \Theta(-t) \chi_{[-ct, ct]}(x) \quad (12.29)$$

e la soluzione particolare  $p = \mathcal{G}^{\text{adv.}} \star c^2 F$  avrebbe avuto la proprietà di dipendere dai valori assunti dalla forza nel futuro e non nel passato. Questa situazione è descritta ribaltando la figura 12.6 rispetto al tempo ( $t \rightarrow -t$ ), con i coni d’ombra nel passato che diventano coni d’ombra nel futuro. Chiaramente questa non è una situazione fisicamente accettabile, per lo meno se il campo in questione descrive lo spostamento trasversale di una corda: *l’effetto generato dal termine forzante sulla corda deve essere successivo alla causa, cioè il termine forzante stesso.* Questa proprietà *causale* della propagazione

Nel caso dell’elettromagnetismo, la situazione è delicata, essendo la teoria invariante per inversione temporale. Un approfondimento di queste questioni, sebbene molto interessante, esula dai nostri scopi (ma non è un caso che abbiamo usato gli apici “ret.” e “adv.” in analogia con l’uso in elettromagnetismo dei potenziali ritardati e anticipati).

dell'azione è quella dovuta proprio alla presenza di  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$  nella convoluzione (12.27). Se avessimo usato  $\mathcal{G}^{\text{adv.}}(x, t)$  avremmo avuto un comportamento anti-causale in cui gli effetti precedono le cause.

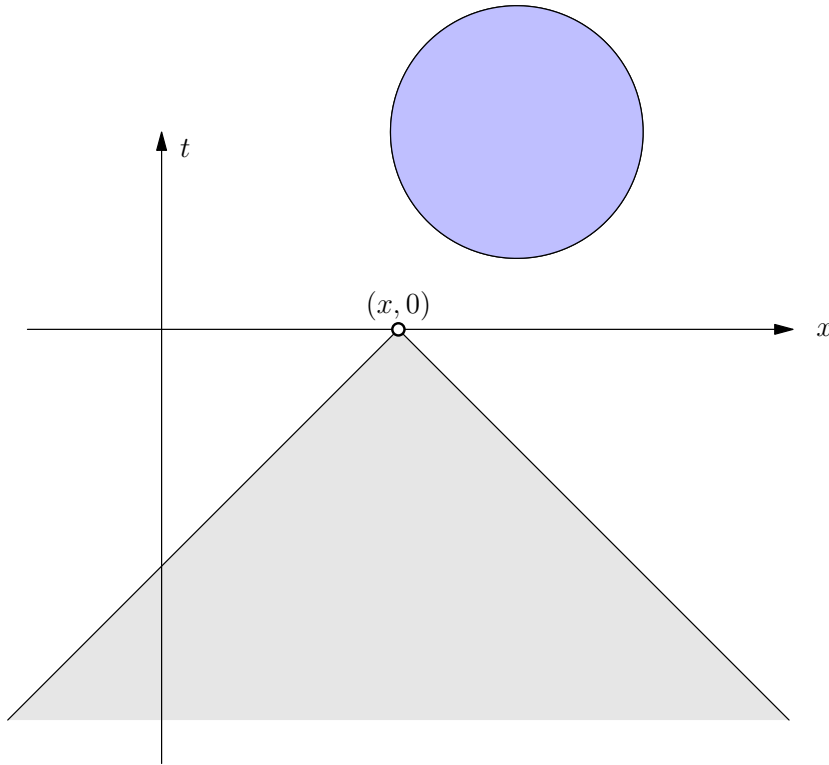


Figura 12.7: Se la sorgente è nel futuro ( $t > 0$ ), la funzione  $p(x, 0)$  è identicamente nulla (per cui, in particolare, è nulla anche la sua derivata rispetto al tempo).

La seconda osservazione è matematica. Come si verifica facilmente, la funzione

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^t ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

si annulla per  $t = 0$  e così fa la sua derivata  $\partial_t u(x, 0)$ , anche quando  $F(x, t) \neq 0$  per  $t \leq 0$ . Ma allora (12.28) è in effetti la soluzione completa della (12.19) per un termine forzante  $F(x, t)$  generico.

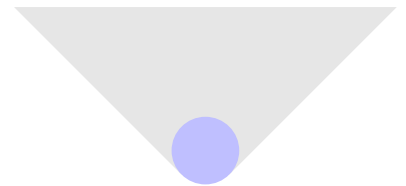


Figura 12.8: Se la sorgente (o forzante) è localizzata spaziotemporalmente nella regione colorata in blu, la sua regione di influenza è il cono (colorato in grigio) nel futuro. Questo è l'effetto causale determinato da  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$ .



# 13

## Poli lungo il cammino e funzioni causali

### 13.1 Parte principale di Cauchy

Nonostante la delta di Dirac sia stata la prima funzione generalizzata ad essere introdotta, il metodo di attribuire valori a integrali e serie mediante un processo di regolarizzazione (analogamente a quanto abbiamo visto con le approssimanti buone della delta), ha avuto antenati molto più antichi, tra questi, la *parte principale di Cauchy*, che è, come vedremo tra breve, un modo di regolarizzare integrali divergenti contenenti  $1/x$ .

Integrali contenenti  $1/x$  lungo l'asse reale sono del tipo

$$\int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - x_0} dx \quad (13.1)$$

e sono mal definiti a meno che non sia  $g(x_0) = 0$ . Sulla base di quanto visto nel precedente capitolo, un modo per definire un tale integrale è come limite

$$\int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - x_0} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx$$

Come abbiamo già visto per l'integrale (12.23), il risultato dipende dal modo in cui viene evitata la singolarità, cioè dal segno di  $i\epsilon$  nel denominatore (nel seguito assumeremo sempre che  $\epsilon$  sia positivo).

Poniamo per semplicità  $x_0 = 0$  e incominciamo con lo studiare

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx$$

In questo caso il polo è in  $x = +i\epsilon$  ed è sopra l'asse reale. Allora il cammino può essere deformato come mostrato in figura 13.1. L'integrale consiste di due pezzi. C'è l'integrale lungo l'asse reale, eccetto per la singolarità che è evitata simmetricamente attorno all'origine. In altre parole, c'è il contributo

$$\left[ \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{g(x)}{x} + \int_{\epsilon}^b \frac{g(x)}{x} \right].$$

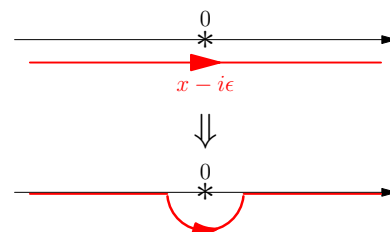


Figura 13.1: Deformazione di un cammino di poco sotto l'asse reale in un cammino che passa sotto il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio  $\epsilon$ , essendo percorso in senso anti-orario è  $\frac{1}{2}2\pi i g(0) = i\pi g(0)$ .

Passando al limite  $\epsilon \downarrow 0$ , c'è un'esatta cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale, ciascuna delle quali diventa infinita nel limite, come illustrato in figura 13.2. Questa regolarizzazione è detta *parte principale di Cauchy* dell'integrale ed è denotata con

$$P \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[ \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^b \frac{g(x)}{x} dx \right]$$

E poi c'è il contributo dovuto all'arco attorno al polo. Facendo tendere a zero il raggio del cerchio, possiamo sostituire  $g(x)$  con il suo valore costante e l'integrale lungo il semicerchio è metà di quello lungo un integrale di contorno. Quindi il termine addizionale è

$$i\pi g(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} i\pi\delta(x)g(x)dx$$

L'integrale completo è allora dato dalla somma dei due pezzi,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx = P \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x} dx + \int_{-a}^b i\pi\delta(x)g(x)dx. \quad (13.2)$$

Per esprimere questa identità scriviamo

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x). \quad (13.3)$$

a patto che sia inteso che  $P$  è la parte principale dell'integrale, che l'intero membro destro è dentro un integrale e che  $\epsilon$  sia fatto tendere a zero. In altre parole, la (13.3) va intesa come la definizione di una funzione generalizzata.

Il caso con il modo opposto di evitare il polo è trattato similmente. In questo caso si ottiene

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (13.4)$$

Il segno meno a secondo membro è perché il semicerchio adesso è percorso in senso orario. Si veda la figura 13.3. Combinando le formule (13.3) e (13.4), si ottiene

$$P \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x - i\epsilon} + \frac{1}{x + i\epsilon} \right]. \quad (13.5)$$

Vediamo così che la parte principale è la media dei cammini appena sopra e appena sotto il polo.

Naturalmente, per il discorso appena fatto non è richiesto che il polo sia nell'origine. Se il polo è in  $x = a$ , si avrà

$$\frac{1}{x - a - i\epsilon} = P \frac{1}{x - a} + i\pi\delta(x - a), \quad (13.6)$$

$$\frac{1}{x - a + i\epsilon} = P \frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a), \quad (13.7)$$

$$P \frac{1}{x - a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x - a - i\epsilon} + \frac{1}{x - a + i\epsilon} \right]. \quad (13.8)$$

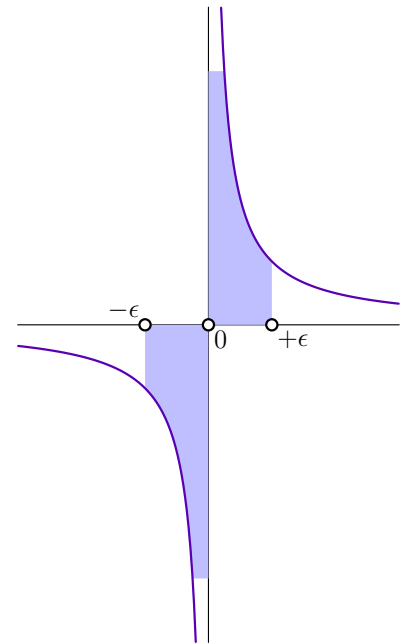


Figura 13.2: Parte principale di Cauchy: cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale.

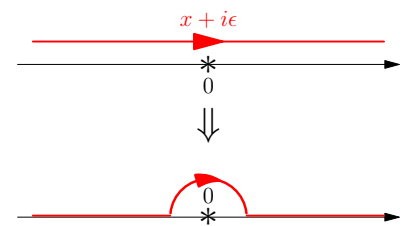


Figura 13.3: Deformazione di un cammino di poco sopra l'asse reale in un cammino che passa sopra il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio  $\epsilon$  è percorso in senso orario e quindi dà un contributo  $-i\pi g(0)$ .



ESEMPIO 13.1. Verifichiamo le formule ottenute in un esempio semplice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx$$

Usando

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\epsilon} dx$$

Il primo termine permette di chiudere il cammino con un semicerchio nel piano superiore, il secondo nel semipiano inferiore (Lemma di Jordan). Poiché il polo  $z = +i\epsilon$  è nel semipiano superiore, solo il semicerchio superiore circonda il polo. Il residuo nel polo vale 1. Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \times 1 = \pi i$$

D'altro canto, la parte principale dell'integrale è zero

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

in quanto  $\cos x$  è pari e la cancellazione è esatta. Dalla definizione della  $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x) (i\pi\delta(x)) dx = i\pi \cos(0) = i\pi$$

Dunque la formula

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

risulta verificata.

### 13.2 Teorema e formula di Cauchy generalizzate

Sia  $f(z)$  sia una funzione complessa con poli semplici nei punti  $a_i$  lungo l'asse reale  $C$ . Supponiamo di voler integrare  $f(z)$  lungo un cammino chiuso che contiene l'asse reale, che sia chiudibile o nel semipiano superiore o in quello inferiore da un semicerchio di contributo nullo nel limite di raggio infinito. Allora una conseguenza immediata della (13.8) è

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}(f) + i\pi \sum \text{Res}(f, a_i). \quad (13.9)$$

Si osservi che non è essenziale che i poli siano sull'asse reale. In generale, si ha

$$P \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum (\text{res. dentro } C) + \pi i \times \sum (\text{res. su } C) \quad (13.10)$$

Questa formula estende il teorema di residui al caso di poli lungo il cammino di integrazione (e ha un qualche significato intuitivo: un po' paradossalmente si potrebbe dire che un polo lungo il cammino è "metà dentro e metà fuori" e quindi che il suo contributo è metà del contributo dei poli dentro il cammino). La formula cessa di valere per poli di ordine pari perché in questo caso  $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  non è finito, non essendoci cancellazione.

Procedendo in modo analogo, si estende la formula di Cauchy, per una funzione analitica dentro e lungo un contorno  $C$ , ad un punto  $z$  che si trova sul contorno di integrazione:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} P \oint \frac{f(Z)dZ}{Z-z}. \tag{13.11}$$

ESEMPPIO 13.2. Riconsideriamo il calcolo di

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

dell'esempio 8.3 del capitolo 8. Adesso risulta chiaro che il risultato non dipende dalla particolare regola di aggiramento del polo che allora avevamo scelto. Lo stesso esercizio può ora essere svolto più velocemente applicando la (13.10):

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$$

essendo 1 il residuo di  $e^{iz}/z$  in  $z = 0$ .

### 13.3 Formule integrali di Poisson per il semipiano

Supponiamo che di una funzione  $f = u + iv$  sappiamo che è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  (incluso l'infinito e l'asse reale) e sono noti i valori di  $u$  e  $v$  sull'asse reale. Abbiamo dati sufficienti per ricostruire la funzione nel semipiano superiore?

Se reinterpretiamo il problema in termini elettrostatici, la risposta alla domanda sembrerebbe affermativa. Infatti, analiticità di  $f$  in  $\Pi^+$  significa armonicità di  $u$  e  $v$ . Possiamo cioè interpretare  $u$  come un potenziale elettrostatico che nel semipiano superiore soddisfa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e di cui è assegnato il valore sull'asse reale. Analogo discorso vale per  $v$ .

Per determinare  $f$  applichiamo la formula di Cauchy al circuito  $C$  in figura 13.4 per un punto  $z$  dentro  $C$  e per il punto  $\bar{z}$  (che è fuori):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z-z} dZ \tag{13.12}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z-\bar{z}} dZ \tag{13.13}$$

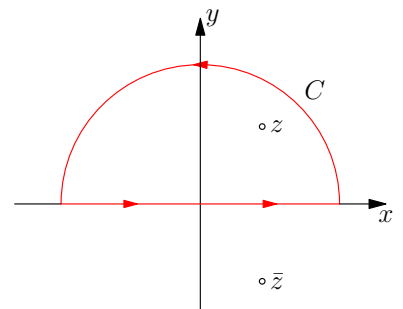


Figura 13.4: Significato elettrostatico delle formule (13.12) e (13.13). Il problema è di trovare il potenziale nel semipiano superiore, quando è noto il potenziale sulla linea  $y = 0$ . Il metodo delle immagini è l'artificio usato in elettrostatica per risolvere problemi di questo tipo. Possiamo pensare che il fattore  $1/(Z-z)$  nell'integrale di Cauchy rappresenti una "carica" nel punto  $z = x + iy$ . Introducendo una carica immagine negativa in  $\bar{z} = x - iy$  forziamo le desiderate condizioni al contorno sull'asse reale.

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(Z) \left[ \frac{1}{Z-z} - \frac{1}{Z-\bar{z}} \right] dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(Z) \frac{z-\bar{z}}{(Z-z)(Z-\bar{z})} dZ.$$

Essendo  $z = x + iy$  e  $Z = X + iY$ , esplicitando il contorno in figura, si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{yf(X)}{(X-x)^2 + y^2} dX + \int_{C_R} \frac{yf(Z)}{(Z-z)(Z-\bar{z})} dZ,$$

dove  $C_R$  è il semicerchio di raggio  $R$ . Avendo assunto che  $f(z)$  analitica nel semipiano superiore (incluso l'infinito), nel limite  $R \rightarrow \infty$  l'integrale lungo  $C_R$  dà contributo nullo e si ottiene

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{(X-x)^2 + y^2} dX, \tag{13.14}$$

Poiché entrambi i lati di (13.14) contengono solo coefficienti reali, questa equazione vale separatamente per  $u$  e  $v$ , le parti reale e immaginaria di  $f$ ,

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X,0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \tag{13.15}$$

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X,0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \tag{13.16}$$

Le formule (13.15) e (13.16) sono dette *formule integrali di Poisson per il semipiano*. Esse danno i valori di una funzione armonica nel semipiano superiore, ad esempio il potenziale elettrostatico, in termini dei suoi valori sull'asse delle  $x$  (il bordo) del semipiano (naturalmente, a patto che  $f(z)$  sia analitica nel semipiano superiore).

Per ottenere una relazione tra  $u$  e  $v$ , la precedente derivazione suggerisce di sommare membro a membro (13.12) e (13.13):

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X-x}{(X-x)^2 + y^2} f(X) dX. \tag{13.17}$$

Uguagliando parti reali e immaginarie, otteniamo

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)v(X,0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \tag{13.18}$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)u(X,0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \tag{13.19}$$

Queste equazioni possono essere usate per determinare il comportamento di  $u$  e  $v$  sul contorno stesso, cioè per  $y = 0$ . Dalla (13.11) si ottiene

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X,0)}{X-x} dX \tag{13.20}$$

$$v(x,0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X,0)}{X-x} dX \tag{13.21}$$



Siméon Denis Poisson (1781–1840) è stato un matematico e fisico francese. Come fisico, fu un sostenitore della teoria corpuscolare (newtoniana) della luce. Studente di Lagrange e Laplace, fu il maestro, tra gli altri, di Dirichlet e Liouville.

Queste relazioni compaiono nella teorie delle trasformate di Hilbert e in fisica sono note come *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*.

### 13.4 Formule integrali di Poisson per il cerchio

Ci si può porre un problema analogo per il cerchio: se  $f(z)$  è analitica dentro e su un cerchio  $C_R$  di raggio  $R$ , i valori di  $f$  sul bordo determinano univocamente  $f$  dentro al cerchio? La risposta è nuovamente affermativa ed è data dalla formula di Poisson per il cerchio

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2} f(\theta) d\theta. \quad (13.22)$$

per  $a = re^{it}$ ,  $r < R$ , dentro al cerchio e  $f(\theta) \equiv f(Re^{i\theta})$ , il valore di  $f$  sul cerchio. Questa formula può essere ottenuta mediante metodo delle immagini, ponendo una carica immagine in  $R^2/\bar{a}$ . Si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z - a} dZ \quad (13.23)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z - R^2/\bar{a}} dZ \quad (13.24)$$

Sottraendo membro a membro, posto  $Z = Re^{i\theta}$ , e tenuto conto che  $dZ = iZd\theta$ , si ottiene la (13.22).

### 13.5 Integrale di Fourier di funzioni causali

L'analiticità nel semipiano superiore non riguarda solo le applicazioni all'elettrostatica, che abbiamo considerato nella sezione 13.3. È anche una proprietà importante delle trasformate di Fourier di funzioni del tempo che sono nulle per tempi negativi. Questa proprietà si è manifestata nello studio dell'equazione delle onde, dove abbiamo visto che  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$  ha buone proprietà causali quando la sua trasformata di Fourier è analitica nel semipiano superiore. Vogliamo adesso mostrare che questa è una caratteristica del tutto generale.

Interpretando la variabile  $t$  come tempo, conveniamo di chiamare *causale* una funzione si annulla per  $t < 0$ . Vogliamo sapere quali siano le proprietà di analiticità della trasformata di Fourier di una funzione di questo tipo. In altre parole, per  $f(t)$  assolutamente integrabile, sia

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it\omega} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{it\omega} dt \quad (13.25)$$

ed estendiamo questa funzione al piano delle frequenze complesse  $z = \omega + i\sigma$ . Consideriamo cioè la funzione

$$\hat{f}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad (13.26)$$

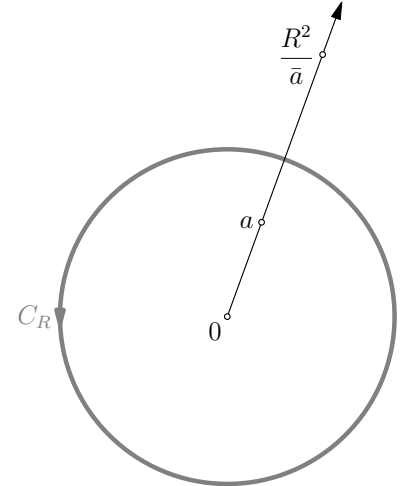


Figura 13.5: Carica immagine nel punto  $R^2/\bar{a}$ . Questo punto è l'inversione geometrica di  $a$  rispetto al cerchio di raggio  $R$  (cfr. Complementi 5.8.2).

In verità, è sufficiente che  $f(t)$  sia a quadrato integrabile.

e domandiamoci dove questa funzione è sicuramente analitica. Si vede immediatamente che se  $\sigma = \text{Im}(z) > 0$ , allora

$$|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$$

e quindi l'integrale (21.3) è assolutamente convergente nel semipiano superiore  $\text{Im}(z) > 0$ . Allora per ogni curva semplice chiusa  $C$  tutta contenuta nel semipiano superiore si ha

$$\oint_C \widehat{f}(z) dz = \oint_C \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt dz = \int_0^\infty \left[ \oint_C e^{itz} dz \right] f(t) dt = 0.$$

Concludiamo quindi, per il teorema di Morera, che  $\widehat{f}(z)$  è analitica nel semipiano superiore. L'analiticità nel semipiano superiore è dunque garantita soltanto dalla condizione di causalità: *se una funzione  $f(t)$  si annulla per  $t < 0$ , la sua trasformata di Fourier è analitica nel semipiano superiore.*

### 13.6 Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig

Vista la grande importanza in fisica delle relazioni di dispersione di Kramers-Kronig, le riproponiamo in maniera indipendente da quanto visto finora, con le notazioni e terminologia della fisica. In particolare, sia  $z = \omega + i\sigma$  la frequenza complessa, con parte reale  $\omega$  e parte immaginaria  $\sigma$ .

Ridotte all'osso, le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig non sono altro che la formula di Cauchy per punti su  $C$ , cioè la (13.11), quando la funzione integranda

$$\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$$

è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e si considera il cammino in figura 13.6 dove  $\omega$  è sull'asse reale. Allora

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{13.27}$$

(si osservi che  $\omega$  e  $\omega'$  sono reali). Separando parte reale e parte immaginaria di  $\chi = \chi' + i\chi''$ ,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{13.28}$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{13.29}$$

Per chiarire l'importanza in fisica delle relazioni di dispersione, occorrerebbe rispondere alle domande seguenti: quali grandezze fisiche soddisfano le relazioni di dispersione? Perché tali grandezze soddisfano le relazioni di dispersione? Qual è il significato fisico delle

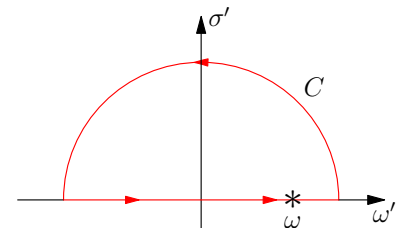


Figura 13.6: Polo lungo il cammino d'integrazione nell'integrale (13.27).

relazioni di dispersione? Si tratta di domande importanti a cui qui possiamo solo dare una risposta sommaria.

Per quel che riguarda la prima domanda, possiamo dire che, tipicamente, la grandezza fisica  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  è la continuazione analitica della trasformata di Fourier di una funzione che rappresenta come una certa proprietà  $P$  di un sistema fisico risponde, nel corso del tempo, ad una “forza” (intesa in senso generalizzato) applicata  $F$  (ad esempio,  $P$  potrebbe essere l’angolo di un pendolo e  $F$  la forza del motore che guida il pendolo). Se l’intensità della forza è piccola, la risposta è lineare

$$P(t) = \int_{-\infty}^t K(t-u)F(u)du \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{P}(z) = \chi(z)\tilde{F}(z).$$

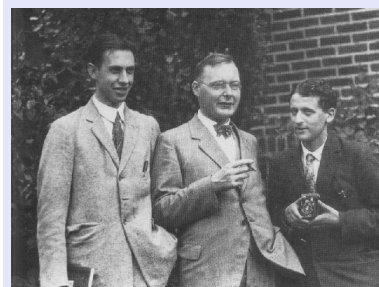
$\chi$  è nota come *suscettività* o *ammettenza*.

Veniamo alla seconda domanda: per ragioni fisiche,  $K(t-u)$  deve essere zero per  $t < u$ . Infatti, la risposta del sistema al tempo  $t$  deve essere successiva alla forza applicata al tempo  $u$  (per  $t < u$  la risposta del sistema è zero, perché la forza non è stata ancora applicata). Nella sezione precedente abbiamo visto che la trasformata di Fourier di una funzione  $f(t)$  nulla per  $t < 0$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$ . La sola ipotesi su cui si basano le relazioni di dispersione — che la funzione sia analitica nel semipiano superiore — è dunque soddisfatta. Quindi per  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  valgono le relazioni di dispersione quando  $z$  tende all’asse reale, cioè  $z = \omega$  (e  $\sigma = 0$ ).

Infine, per quel che riguarda il significato fisico delle relazioni di dispersione, ci limitiamo a ricordare questo: la parte immaginaria delle funzione di risposta  $\chi(\omega)$  descrive come il sistema dissipa energia, essendo sfasato con la forzante. Le relazioni di Kramers-Kronig implicano che la risposta dissipativa (resistenza, per i circuiti elettrici) è sufficiente a determinare la risposta in fase reattiva (reattanza, per i circuiti elettrici) e viceversa.

Chiariti questi punti, occorre mettere in evidenza che le formule (13.28) e (13.29) non sono utili per ricostruire la risposta fisica perché gli integrali vanno da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il che implica una conoscenza della risposta per frequenze negative. Tuttavia questo problema è facilmente aggirato:  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$  è la trasformata di Fourier di una funzione reale, quindi  $\chi(-\omega) = \overline{\chi(\omega)}$ . Questo significa che  $\chi'(\omega)$  è una funzione pari e  $\chi''(\omega)$  è una funzione dispari. Usando questo fatto, il dominio di integrazione può essere portato da  $(-\infty, +\infty)$  a  $[0, +\infty)$  nel modo seguente: si moltiplichino numeratore e denominatore della funzione integranda a secondo membro della (13.28) per  $(\omega + \omega')$  e si separino i contributi,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega'\chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{\omega}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$



Hans Kramers (1894–1952) è stato un fisico danese. Studente di Niels Bohr è noto per l’approssimazione semi-classica della meccanica quantistica detta approssimazione WKB (“W” sta per Wentzel, “K” per Kramers e “B” per Brillouin) e per il suo lavoro con Kronig sulle relazioni di dispersione. Nella foto (del 1928 circa) è al centro con George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit, famosi per la scoperta dello spin dell’elettrone.



Ralph Kronig (1904–1995) è stato un fisico tedesco. Noto principalmente per il modello cristallino di Kronig-Penney e per le relazioni di dispersione, insieme con Rabi diede la prima soluzione dell’equazione di Schrödinger per un rotatore rigido (1927) e anticipò l’idea di Pauli dello spin.

Poiché  $\chi''(\omega)$  è dispari, il secondo integrale si annulla e rimaniamo con

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (13.30)$$

Lo stesso argomento per la parte immaginaria fornisce

$$\chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (13.31)$$

Le equazioni (13.30) e (13.31) sono in effetti le relazioni derivate originariamente da Kramers e Kronig.





## 14

# Trasformate di Laplace

### 14.1 Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier

Data una funzione  $f(t)$ , la si trasformi prima nella funzione causale  $f^+(t)$ , ponendo  $f^+(t) = f(t)$  per  $t > 0$  e  $f^+(t) = 0$  per  $t < 0$ .

Quindi si consideri la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f^+}(\omega)$ , e infine il continuamento analitico  $\widehat{f^+}(z)$  di quest'ultima nel piano  $z = \omega + i\sigma$ ,

$$\widehat{f^+}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)e^{itz} dt \quad (14.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt \quad (14.2)$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{izt} dt \quad (14.3)$$

Per quanto visto nel capitolo precedente, questa funzione è analitica per  $\text{Im}(z) = \sigma > 0$ .

In alcuni testi, la funzione  $\widehat{f^+}(z)$  è chiamata trasformata Laplace di  $f(t)$ . Per distinguerla dall'usuale nozione quando si possa generare confusione, chiameremo  $\widehat{f^+}(z)$  trasformata di Laplace<sup>②</sup> e la nozione usuale  $\tilde{f}(s)$  trasformata di Laplace<sup>①</sup>. Riassumendo,

$$\widehat{f^+}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{izt} dt \quad \text{Im}(z) > 0 \quad (14.4)$$

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (14.5)$$

Si osservi che

$$\tilde{f}(s) = \widehat{f^+}(is), \quad (14.6)$$

cioè le due definizioni coincidono, a meno di una rotazione di  $\pi/2$  nel piano complesso.

Dalla (14.2) segue che  $\widehat{f^+}(z)$ , per  $z = \omega + i\sigma$  è la trasformata di Fourier della funzione

$$f_{\sigma}(t) = f^+(t)e^{-\sigma t},$$

da cui

$$f^+(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} f^+(t) &= e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i(\omega + i\sigma)t} d\omega \end{aligned}$$

Essendo  $f^+(t)$  causale,  $\widehat{f}^+(z)$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e quindi singolarità di  $\widehat{f}^+(z)$  saranno tutte nel semipiano inferiore  $\Pi^-$ . Allora

$$f^+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_K \widehat{f}^+(z) e^{-izt} dz, \quad (14.7)$$

dove  $K$  è qualunque linea nel semi-piano superiore  $\Pi^+$ , parallela all'asse reale, e tale che le singolarità di  $\widehat{f}^+(z)$  sono sotto  $K$ . Se adesso operiamo il cambiamento di variabili  $w = -iz$  nell'integrale a secondo membro, otteniamo

$$f^+(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-iK} \widehat{f}^+(iw) e^{wt} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tilde{f}(z) e^{zt} dz, \quad (14.8)$$

dove  $L$  è ottenuta per rotazione di  $-\pi/2$  da  $K$  ed è quindi una retta parallela all'asse immaginario a destra di tutte le singolarità di  $\tilde{f}(w)$ . Questa è proprio la regola che avevamo dato nella sezione 8.7 per l'antitrasformata di Laplace.

## 14.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Consideriamo la trasformata di Laplace<sup>(2)</sup>. Assumiamo che le funzioni di cui consideriamo la trasformata sono tutte nulle nel passato e di conseguenza, per comodità, tralasciamo l'apice "+"

ESEMPIO 14.1. Come esempio, consideriamo  $f(t) = t, t > 0$ . Allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \int_0^{\infty} t e^{itz} dt, \quad \text{Im}(z) > 0 \\ &= t \frac{1}{iz} e^{itz} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{iz} e^{itz} dt \\ &= 0 - \frac{1}{iz} \left[ \frac{1}{iz} e^{itz} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Verifichiamo la formula di inversione e calcoliamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz$$

Chiudiamo  $L$  su un cammino di raggio  $R$  nel semipiano inferiore. Allora, poiché chiudiamo in senso orario,

$$\oint \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -2\pi i \sum \text{Res}$$

Abbiamo un polo doppio per  $z = 0$ . Quindi

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -i \left. \frac{d}{dz} z^2 \frac{-1}{z^2} e^{-izt} \right|_{z=0} = -i(-1)(-it) = t$$

La trasformata di Laplace, essendo la continuazione analitica di una trasformata di Fourier, condivide molte delle proprietà della trasformata di Fourier, ma ci sono anche delle differenze che è importante mettere in evidenza. Queste differenze nascono dal fatto che la funzione  $f(t)$  vista come funzione su  $\mathbb{R}$  è nulla per  $t < 0$ . Una conseguenza immediata di questo fatto riguarda come si trasformano le derivate.

Consideriamo la trasformata di  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(z) &= \int_0^\infty f'(t) e^{itz} dt \\ &= f(t) e^{itz} \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t) (iz) e^{itz} dt \\ &= -f(0) - iz \widehat{f}(z) \end{aligned}$$

E in maniera analoga si mostra che

$$\widehat{f}''(z) = -z^2 \widehat{f}(z) + izf(0) - f'(0)$$

Queste caratteristiche rendono la trasformata di Laplace uno strumento molto utile per risolvere problemi al contorno con condizioni iniziali. Vediamone degli esempi.

**ESEMPIO 14.2** (particella in un fluido). Equazione per la velocità ( $m = 1$ )

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = 0$$

Quindi

$$-iz \widehat{v}(z) - v_0 + \gamma \widehat{v}(z) = 0$$

da cui

$$\widehat{v}(z) = \frac{i}{z + i\gamma} v_0$$

Come ci aspettavamo, la singolarità è nel semipiano inferiore. Nel semipiano superiore la funzione è analitica. Invertiamo

$$v(t) = e^{-\gamma t} v_0$$

ESEMPIO 14.3 (equazione del calore). L'equazione è arcinota

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Sia  $\widehat{f}(k, z)$ , la trasformata di Fourier usuale rispetto allo spazio e la trasformata di Laplace rispetto al tempo (= Fourier con opposta convenzione sul segno) della funzione  $f(x, t)$ , che assumiamo nulla per  $t < 0$ . Allora

$$-iz\widehat{f}(k, z) - \widehat{f}_0(k) = -k^2 D \widehat{f}(k, z)$$

da cui

$$\widehat{f}(k, z) = \frac{i}{z + iDk^2} \widehat{f}_0(k).$$

Un'altra proprietà che la trasformata di Laplace eredita è il prodotto di convoluzione. Anche in questo caso c'è una differenza che nasce dal fatto che le funzioni di cui si considera la trasformata di Laplace sono nulle per  $t < 0$ . Questo significa che al prodotto di due trasformate

$$\widehat{f}(z)\widehat{g}(z)$$

corrisponde il prodotto di convoluzione

$$f \star g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = g \star f(t)$$

ESEMPIO 14.4 (particella in un fluido sotto l'azione di una forza dipendente dal tempo). Equazione per la velocità ( $m = 1$ )

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = f(t)$$

Quindi

$$-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = \widehat{f}(z)$$

da cui

$$\widehat{v}(z) = \frac{i}{z + i\gamma} v_0 + \frac{i}{z + i\gamma} \widehat{f}(z)$$

Dalla (14.7) segue che l'antitrasformata di  $\frac{i}{z+i\gamma}$  è  $e^{-\gamma t}$ . Quindi

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} f(u) du$$

### 14.3 Nozione usuale di trasformata di Laplace

Come abbiamo detto, di solito la trasformata di Laplace è definita nel piano delle frequenze complesse  $z = \omega + i\sigma$  ruotato di  $-\pi/2$ , cioè ponendo  $s = -iz$ . Si definisce

$$\widetilde{f}(s) = \widehat{f}(is) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

(trasformata di Laplace<sup>①</sup>). La trasformata  $\tilde{f}(s)$  è calcolata per  $s$  reale e poi estesa per prolungamento analitico al piano complesso  $s$ . Procedere in questo modo avrà anche i suoi vantaggi (forse), ma oscura il legame con la trasformata di Fourier, introducendo un'innaturale rotazione nel piano delle frequenze. Sia come sia, poiché questa è il modo standard di procedere dei libri, continuiamo la nostra discussione della trasformata di Laplace sulla base della definizione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

per  $s$  reale e positivo. Ecco le proprietà più importanti di  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

*Linearità*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$$

*Prima proprietà della traslazione* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s - a)$$

*Seconda proprietà della traslazione* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  e  $g(t) = f(t - a)$  per  $t > a$  e  $g(t) = 0$  per  $t < a$  allora

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} \tilde{f}(s)$$

*Proprietà del cambio di scala* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

*Trasformata di Laplace della derivata* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

*Trasformata di Laplace degli integrali* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

*Prodotto per  $t^n$*  Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s)$$

*Divisione per t* Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \tilde{f}(u) du$$

*Funzioni periodiche* Se  $f(t)$  è una funzione periodica di periodo  $T$  allora

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

*Comportamento di  $f(s)$  per  $s \rightarrow \infty$*  Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0$$

*Teorema del valore iniziale* Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{f}(s)$$

*Teorema del valore finale* Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{f}(s)$$

*Generalizzazione del teorema del valore iniziale* Se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

si dice che per valori di  $t$  prossimi a zero ( $t$  piccolo),  $f(t)$  è prossima a  $g(t)$  e si scrive  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow 0$ . Analogamente, se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(s)}{\tilde{g}(s)} = 1$$

si dice che per valori elevati di  $s$ ,  $\tilde{f}(s)$  è prossima a  $\tilde{g}(s)$  e si scrive  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ . Allora vale il teorema:

★ Se  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow 0$ , allora  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ .

*Generalizzazione del teorema del valore finale*

★ Se  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ , allora  $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$  per  $s \rightarrow 0$ .

Sia adesso  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  l'anti-trasformata di Laplace. Ecco le sue proprietà più importanti.

*Linearità*

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

*Prima proprietà della traslazione* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s - a)\} = e^{at} f(t)$$

*Seconda proprietà della traslazione* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\tilde{f}(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}$$

*Proprietà del cambio di scala* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

*Antitrasformata di Laplace di derivate* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

*Antitrasformata di Laplace di integrali* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \tilde{f}(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

*Prodotto per s* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\tilde{f}(s)\} = f'(t)$$

*Divisione per s* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$$

*Proprietà della convoluzione* Se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = g \star f(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)du = f \star g(t)$$

#### 14.4 Formula di inversione

La formula di inversione è data dalla (14.8), che era già stata anticipata nella sezione 8.7. Si vedano la formula (8.21), la corrispondente figura a lato e la figura 8.12 per il caso in cui ci siano punti di diramazione.

## 14.5 PROBLEMI

PROBLEMA 14.1.  $\square$ 

Determinare la trasformata di Laplace  $\tilde{f}(s)$  di ciascuna delle seguenti funzioni definite su  $(0, \infty)$ .

1.  $f(t) = (at + b)^2$
2.  $f(t) = \cosh t$
3.  $f(t) = \sin^2 t$
4.  $f(t) = \sin t \cos t$
5.  $f(t) = t \sinh t$
6.  $f(t) = 1/\sqrt{t}$

PROBLEMA 14.2.  $\square$ 

Determinare l'anti-trasformata di Laplace  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  di ciascuna delle seguenti trasformate di Laplace.

1.  $F(s) = \frac{a}{s+b}$
2.  $F(s) = \frac{2s-5}{s^2-9}$
3.  $F(s) = \frac{1}{s^2+2s}$
4.  $F(s) = \frac{1}{s^{3/2}}$

5.  $F(s) = \frac{e^{-3s} + e^{-s}}{s}$

6.  $F(s) = \ln \left( \frac{s+a}{s+b} \right)$

PROBLEMA 14.3.  $\square$ 

Usare la trasformata di Laplace per risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^t (t-u)^3 Y(u) du = f(t)$$

nell'incognita  $Y$ . Stabilire quali condizioni deve soddisfare  $f$  affinché il metodo sia attendibile.

PROBLEMA 14.4.  $\square$ 

Usare la trasformata di Laplace per ottenere la soluzione dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad x > 0, \quad t > 0,$$

soggetta alla condizione al contorno

$$f(0, t) = \cos^2 t \quad t \geq 0$$

e alle condizioni iniziali

$$f(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0$$



## Problema di Dirichlet nel piano

### 15.1 Complementi sulle rappresentazioni conformi

**TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIEMANN.** È un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua estrema generalità. La sua dimostrazione esula dai limiti di questo corso. Ci limitiamo ad enunciarlo:

Sia  $C$  una linea chiusa semplice del piano  $z$  che costituisce la frontiera di una regione  $\mathcal{R}$ . Sia  $\mathbb{T}$  il cerchio di raggio unitario e centro nell'origine che costituisce la frontiera del disco unitario  $\mathbb{D}$  nel piano  $z^*$ . Allora esiste una funzione  $z^* = f(z)$  analitica in  $\mathcal{R}$ , che rappresenta ogni punto di  $\mathcal{R}$  su un punto corrispondente di  $\mathbb{D}$  e ogni punto di  $C$  su un punto corrispondente di  $\mathbb{T}$ , in una corrispondenza biunivoca.

(15.1)

**TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER.** Si supponga di far coincidere il piano  $z^*$  con il piano  $z$  in modo che gli assi delle coordinate coincidano e che formino quindi sostanzialmente un solo piano. Si può allora pensare alla trasformazione  $z^* = f(z)$  come ad una rappresentazione di certi punti del piano in altri punti. I punti per i quali  $z = f(z)$  resteranno fermi: per questa ragione si dice che sono i *punti fissi* o *invarianti* della trasformazione. Se  $f$  è complicata è difficile determinare se  $f$  ha punti fissi e quali sono. Grazie a Brouwer, sappiamo che ce ne sarà sempre almeno uno. Vale infatti il seguente teorema:

Ogni trasformazione continua del disco unitario  $\mathbb{D}$  in sé stesso ha almeno un punto fisso.

(15.2)

Anche questo è un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua generalità.

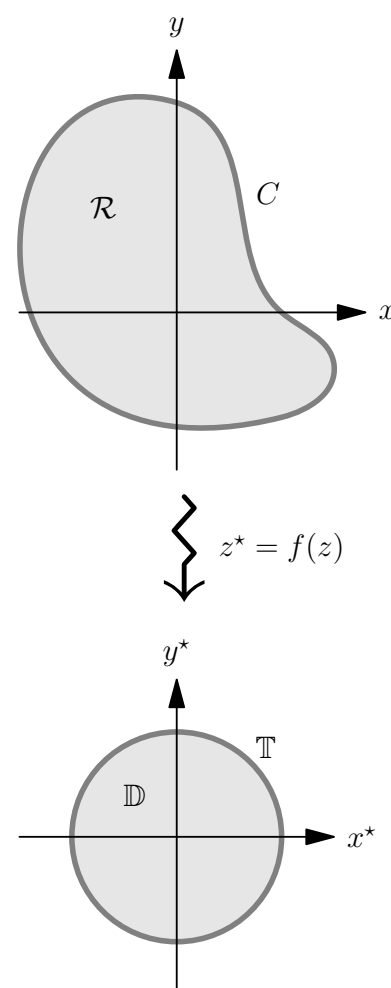
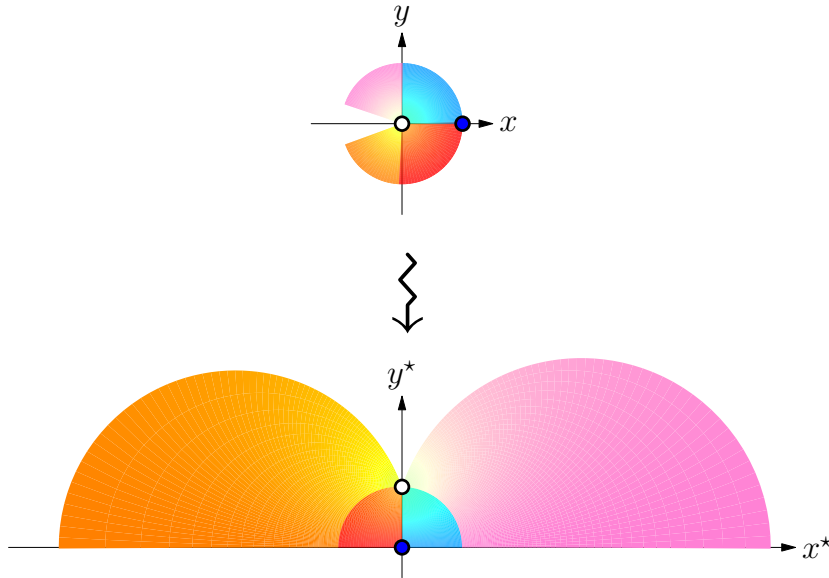


Figura 15.1: Rappresentazione di Riemann nel disco unitario.

ESEMPI DI TRASFORMAZIONI CONFORMI

Rappresentazione di un cerchio in un semipiano (e viceversa):

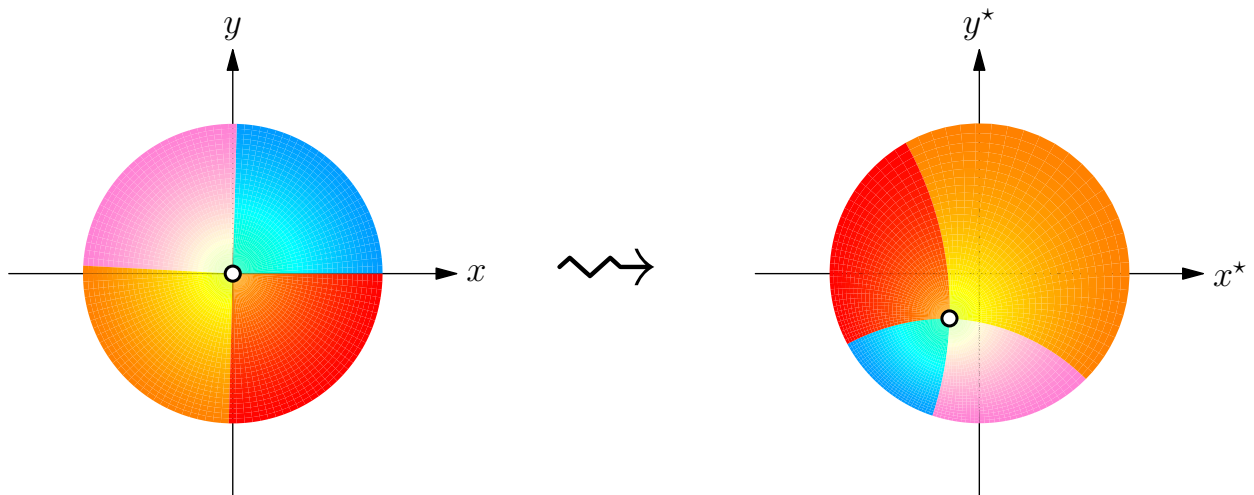
$$z^* = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \quad z = \frac{i-z^*}{i+z^*}$$



Si osservi che si tratta di una trasformazione di Möbius. Si vede che il centro del cerchio  $z = 0$  finisce in  $z^* = i$  e che  $z = -1$  corrisponde a  $z^* = \infty$ , mentre  $+1$  finisce nello zero. Il semicerchio inferiore finisce nell'asse reale negativo e quello superiore in quello positivo.

Swap tra un punto qualunque nel cerchio unitario e centro del cerchio:

$$z^* = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad |a| < R = 1 \quad (15.3)$$



L. E. J. Brouwer (1881–1966) è stato un matematico e filosofo danese che ha lavorato in topologia, teoria degli insiemi e analisi complessa. È noto per l'approccio costruttivo, noto come intuizionismo, in filosofia della matematica.

Anche questa è una trasformazione di Möbius, denotiamola  $M_a(z)$ .

La matrice associata è

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché il determinante  $-1 + |a|^2 \neq 0$ , la trasformazione è invertibile (essendo  $|a| < 1$ ). Lo swap si vede immediatamente:

$$M_a(0) = a \quad \text{e} \quad M_a(a) = 0$$

Inoltre, si verifica facilmente che questa trasformazione rappresenta il disco unitario  $\mathbb{D}$  in sè stesso: notiamo che

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro

$$|z - a|^2 - |\bar{a}z - 1|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

Quindi  $|z - a| < |\bar{a}z - 1|$ , da cui

$$|z^*| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

e quindi  $z^*$  sta dentro il disco unitario  $\mathbb{D}$ .

### 15.2 Distribuzione di temperatura in una piastra circolare

Consideriamo un flusso stazionario di calore in una piastra metallica le cui facce sono isolate. Nell'interno della piastra la temperatura  $T(z)$  è una funzione armonica,  $\Delta T = 0$ , e il flusso di calore è il campo vettoriale  $\nabla T$ . Misuriamo la temperatura lungo la circonferenza  $C$  di un cerchio, che per semplicità sceglieremo di raggio  $R = 1^1$ , l'interno del quale è privo di sorgenti e pozzi, e il cui centro possiamo scegliere convenientemente come l'origine. Quando  $Z = e^{i\theta}$  si muove lungo  $C$ , possiamo esprimere la temperatura come funzione dell'angolo, cioè,  $T = T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} T(e^{i\theta})$ . È fisicamente plausibile che questi valori determinino la temperatura in qualunque punto  $z$  dentro al cerchio. Sappiamo già che le cose stanno così per il centro del cerchio  $z = 0$ : il teorema della media di Gauss afferma che

$$T(0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta$$

e anche se non avessimo saputo nulla del teorema della media, da fisici, questa è la formula che avremmo scritto immediatamente per la temperatura nel centro.

<sup>1</sup> È solo una questione di unità di misura, non perdiamo nulla nell'assumere questo.

“Stesse equazioni hanno le stesse soluzioni”, diceva Feynman, e nel dire questo non voleva annoiarci con una tautologia, ma sollecitarci ad usare l’intuizione sviluppata nel risolvere un problema di fisica per un altro, fisicamente diverso, ma riguardante un fenomeno governato dalle stesse equazioni. La formula integrale di Poisson per il cerchio data l’equazione (13.22) è stata ottenuta con metodi di elettrostatica, ma poichè l’equazione è la stessa, vale a dire l’equazione di Laplace, la (13.22) fornisce anche la soluzione al problema della distribuzione di temperatura nella piastra:

$$T(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2} \right] T(\theta) d\theta. \tag{15.4}$$

per  $a = re^{it}$  dentro il disco unitario e  $T(\theta) \equiv T(e^{i\theta})$ , la temperatura sul bordo, cioè il cerchio unitario;  $Z = Re^{i\theta}$  è un punto sul cerchio.

La formula dice che  $T(z)$  è una *media pesata* di  $T$  sul bordo, con la temperatura di ciascun elemento di  $\mathbb{T}$  che contribuisce a  $T(z)$  in proporzione al suo peso, che è la funzione in parentesi quadrate (15.4),

$$P = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2}. \tag{15.5}$$

Più lontano è l’elemento sul bordo da  $a$ , inferiore è il suo peso; quando  $a$  è nel centro si ritrova il teorema della media di Gauss.

C’è un modo geometrico di comprendere la formula del peso  $P$  data dalla (15.5). Consideriamo la trasformazione “swap” (15.3) che scambia un punto qualunque nel cerchio con il centro del cerchio unitario e facciamo l’ipotesi che la temperatura sia ancora data dal teorema della media, a patto però di distorcere la distribuzione sul bordo con la trasformazione “swap”, cioè

$$T(a) = T(0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta. \tag{15.6}$$

Calcoliamo il secondo membro della (15.6). Per cambiamento di variabili si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) \frac{d\theta^*}{d\theta} d\theta$$

Ma, per l’esercizio (15.2),

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2},$$

che è proprio il peso  $P$  nella formula di Poisson (15.4).

Per capire meglio il significato geometrico di questa costruzione, consideriamo la distribuzione di temperatura in cui la metà superiore del cerchio è a  $0^0$  e quella inferiore a  $100^0$ . L’effetto della trasformazione “swap” (15.3) sui punti che stanno sul cerchio è quello mostrato in figura 15.2: un punto  $Z$  sul cerchio si trasforma nel punto  $Z^*$ ,

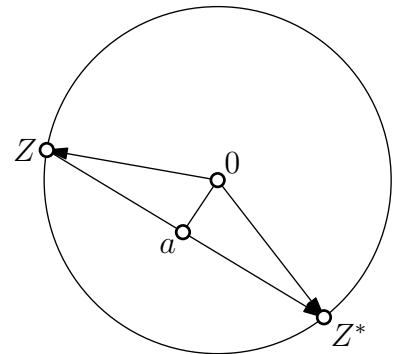


Figura 15.2: Costruzione geometrica di  $Z \rightarrow Z^*$  sul cerchio.

estremo delle corda che passa per  $Z$  e per  $a$  (per una dimostrazione di questo, si veda l'esercizio 15.1 nei complementi 15.6.1). Con questa costruzione, il contributo della parte lontana risulta correttamente ricalibrato: per trovare la temperatura in  $z = a$  si trasporti ciascuna temperatura sul cerchio unitario nel punto direttamente opposto come visto da  $z = a$ , come mostrato in figura 15.3. Quindi si prenda la media della nuova distribuzione di temperatura così ottenuta, vedere la figura 15.4

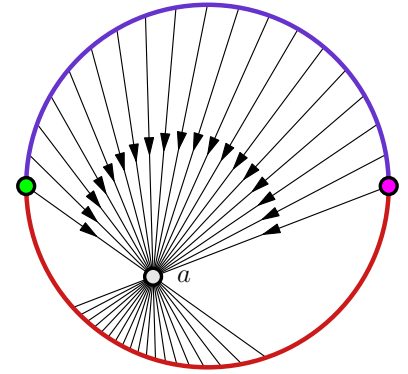


Figura 15.3: La metà superiore del bordo del cerchio è a  $0^\circ$  e quella inferiore a  $100^\circ$ . Le temperature della metà superiore del cerchio sono trasportate in quella inferiore secondo la regola descritta nella figura 15.2 e viceversa.

### 15.3 Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

È importante aver chiaro quel che si compra e quel che NON si compra con la formula di Poisson. Questa formula stabilisce che per una funzione analitica dentro al cerchio e SUL cerchio, il valore della funzione dentro al cerchio è la media pesata (15.4) dei valori della funzione sul cerchio. Questo è collegato al ben più difficile problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } (x,y) \in \mathcal{R} \quad (15.7)$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{per } (x,y) \in \partial\mathcal{R}. \quad (15.8)$$

Nel problema di Dirichlet è ASSEGNATA un funzione  $f$  sul bordo  $\partial\mathcal{R}$  e il problema consiste nel determinare una funzione armonica dentro  $\mathcal{R}$  che assume il valore assegnato sul bordo quando ci si avvicina al bordo.

Per affrontare questo problema, consideriamo la funzione a *valori reali*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \right] f(\theta) d\theta. \quad (15.9)$$

Questa può apparire come una riscrittura della (15.4): la variabile  $a$  è stata chiamata  $z$ , e la  $u$  potrebbe essere interpretata come la parte reale della funzione analitica  $T$ . C'è, tuttavia, una differenza sostanziale: abbiamo chiamato  $f$  la condizione al contorno che vogliamo assegnare più o meno arbitrariamente. Si osservi che non si sta assumendo che  $u$  e  $f$  coincidano sul cerchio unitario  $\mathbb{T}$ , ma, assegnata  $f$  su  $\mathbb{T}$ , si vuole stabilire se esista una funzione armonica  $u$  nel disco unitario  $\mathbb{D}$  che coincide con  $f$  su  $\mathbb{T}$ . Per il momento, il secondo membro della (15.9) va inteso come una definizione della funzione  $u$ , del quale vogliamo comprendere bene la struttura.

In primo luogo, osserviamo che la funzione in parentesi quadre nella (15.9) è la parte reale di una funzione analitica. Più precisamen-

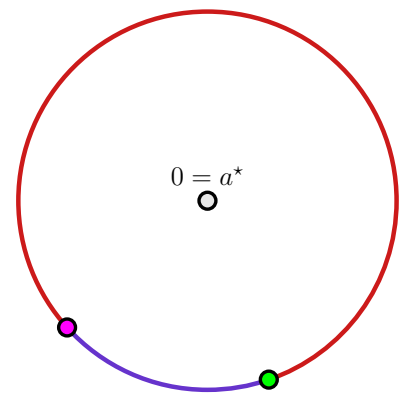


Figura 15.4: La temperatura in  $a$  per la data distribuzione (metà superiore del cerchio a  $0^\circ$ , metà inferiore a  $100^\circ$  è la temperatura media (cioè la temperatura nel centro del disco) della distribuzione sul cerchio ottenuta con la costruzione della figura 15.3.

te, per  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  ( $r < 1$ ) e  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  si ha

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right). \quad (15.10)$$

Infatti,

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{(e^{i\theta} + z)(e^{-i\theta} - \bar{z})}{|e^{i\theta} - z|^2} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

La funzione

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \quad (15.11)$$

è detta *nucleo di Poisson* e, dalla prima uguaglianza della (15.10) vediamo che  $u$  è il prodotto di convoluzione

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta \equiv P_r * f(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}. \quad (15.12)$$

Nell'analisi di questo problema, l'osservazione cruciale fu fatta da Hermann Schwarz: la funzione

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) f(\theta) d\theta \quad (15.13)$$

è analitica in  $\mathbb{D}$  per *qualsunque* funzione integrabile reale  $f$  su  $\mathbb{T}$  (questo segue dalle relazioni di Cauchy-Riemann). L'equazione (15.13) è detta *formula di Schwartz* e permette di ricostruire la funzione analitica completa  $g(z)$  nel disco  $\mathbb{D}$  a partire dalla sua parte reale su  $\mathbb{T}$ . Ma  $u$  è la parte reale di  $g$ , in quanto dalla (15.10) si ha

$$P_r(t - \theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}. \quad (15.14)$$

Dunque, la funzione  $u(z)$ , data dalla (15.12), è armonica per qualunque funzione integrabile reale  $f$  su  $\mathbb{T}$ .

Prima di tirare le fila del discorso, alla luce di quest'ultima affermazione, è utile fare una conoscenza più ravvicinata con il nucleo di Poisson. Ci dedicheremo a questo nella prossima sezione.

### 15.4 Il nucleo di Poisson

In figura 15.5 sono riportati i grafici del nucleo di Poisson per diversi valori di  $r$ . Sembra una successione di approssimazioni della delta di Dirac  $e$ , in effetti, lo è. Ma è la delta su  $\mathbb{T}$  e non su  $\mathbb{R}$ . Data una successione  $r_n$  tendente a 1, la corrispondente successione di nuclei integrali di Poisson

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}.$$

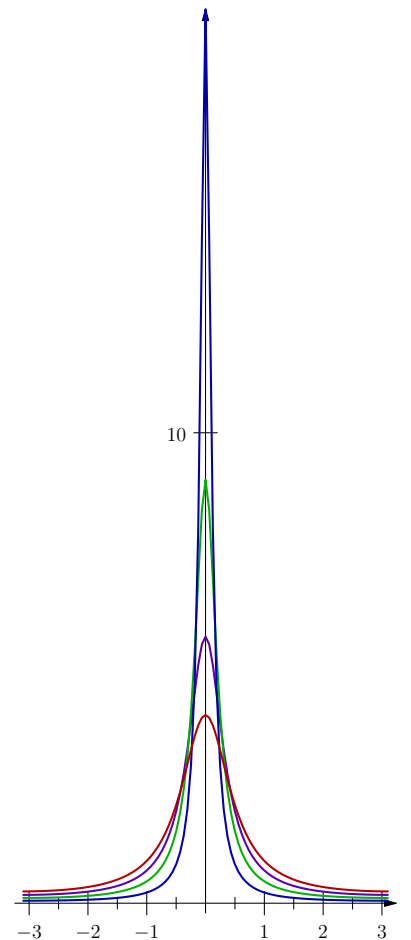
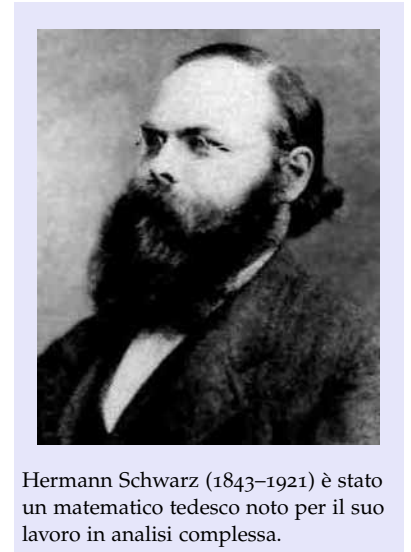
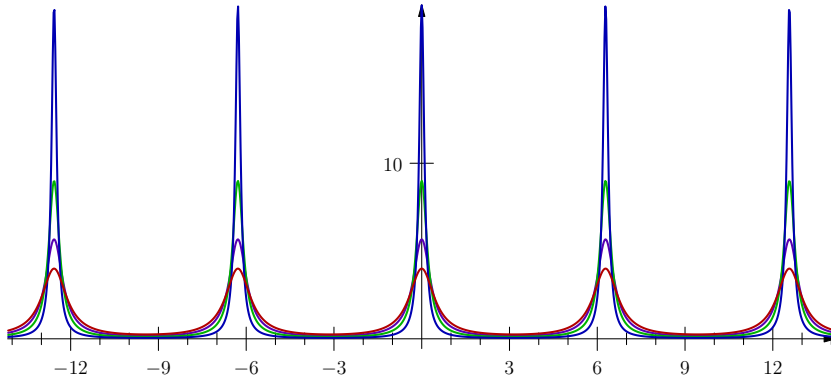


Figura 15.5: Nucleo di Poisson per  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  in  $-\pi \leq t < \pi$ .

è una successione regolare di buone funzioni, nel modo in cui possono essere buone le funzioni su  $\mathbb{T}$ : ovviamente non può esserci decrescenza all'infinito, visto che  $\mathbb{T}$  è compatto. Se prolungassimo  $t$  a destra e a sinistra i grafici si ripeterebbero periodicamente:



Le proprietà che rendono la successione  $\frac{1}{2\pi}P_r, r \rightarrow 1$ , una successione di approssimanti della delta su  $\mathbb{T}$  sono le seguenti:

1.  $P_r(t) > 0$  per tutti gli  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  (cioè per  $r < 1$  e  $-\pi \leq t < \pi$ ).
2.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$
3. Il massimo di  $P_r(t)$  fuori da qualunque intorno  $(-\delta, \delta)$  di  $t = 0$ , non importa quanto sia piccolo, tende a 0 per  $r$  che tende a 1.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: (1) è ovvio; (2) è lasciato come esercizio (facile); (3) segue dall'osservazione che  $1 + r^2 > 2r$  (perché  $(1 - r)^2 > 0$ ), da cui

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(t))}.$$

che tende a 0 per  $r \uparrow 1$  in tutti i punti per cui  $\cos t \neq 1$ .

Concludiamo con una formula per lo sviluppo in serie del nucleo di Poisson. Usando la formula (15.14) per  $P_r(t - \theta)$  (e l'onnipresente serie geometrica), si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) &= \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{(ze^{-i\theta})}{1 - (ze^{-i\theta})} \right] = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-i\theta})^n \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (re^{it} e^{-i\theta})^n = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(t-\theta)} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(t - \theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}. \end{aligned}$$

Esplicitamente,

$$P_r(t - \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}, \tag{15.15}$$

che è una formula molto carina.

### 15.5 Teorema di convergenza uniforme

Vale l'importante teorema che, se si permette il gioco di parole, chiude il cerchio del problema di Dirichlet per il cerchio:

Se  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{T}$ , la funzione

$$u(z) = u_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}, \tag{15.16}$$

armonica nel disco  $\mathbb{D}$ , converge uniformemente a  $f$  quando  $r$  tende a 1.

In questo modo risulta stabilita l'esistenza (e unicità) della soluzione del problema di Dirichlet nel disco con condizioni continue al bordo (l'unicità è facile: si vedano i Complementi 5.8.1). A questo punto, per il teorema delle rappresentazioni di Riemann, risolto il disco, risulta anche risolto il problema di Dirichlet (esistenza e unicità della soluzione) per qualunque regione la cui frontiera è una curva semplice chiusa.

La dimostrazione del teorema (15.16), è data nei complementi 15.6.1. Qui ci limitiamo a commentarlo. In primo luogo, osserviamo che convergenza uniforme significa non solo che, puntualmente,

$$\lim_{r \uparrow 1} u_r(t) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta = f(t)$$

ma anche che, l'errore massimo

$$E_{\max} = \sup_{-\pi < t \leq \pi} |f(t) - u_r(t)|$$

tende a zero per  $r$  che tende a 1.

Supponiamo adesso che  $f$  sia soltanto continua a tratti e sia  $t_0$  un punto di discontinuità, per esempio  $t_0 = \pi$ , come nell'esempio della piastra circolare con la metà superiore del cerchio ad una temperatura e quella inferiore ad una temperatura differente. Consideriamo un punto  $z$  dentro al disco in prossimità del punto di discontinuità, come mostrato in figura 15.6.

Poiché  $u$  è analitica, il suo valore in  $z = re^{i\theta}$  è pari al valor medio di  $u$  lungo un piccolo cerchio centrato in  $z$ . Man mano che facciamo tendere  $z$  a  $e^{it_0}$ , facendo tendere  $r$  a 1 e  $\theta$  a  $t_0$ , e al contempo rendiamo il raggio del cerchio centrato in  $z$  sempre più piccolo, il contributo

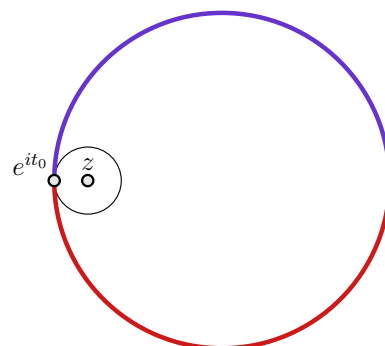


Figura 15.6: La funzione  $f(\theta)$  sul cerchio è discontinua per  $\theta = t_0$ .



alla media sarà dominato dai due valori di  $f$  immediatamente a destra e a sinistra di  $t_0$ . Dunque, nel limite si avrà

$$u_1(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)] . \tag{15.17}$$

Come esempio di questo, consideriamo la funzione  $u_r(t)$  determinata dal valore al contorno

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{per } -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{per } 0 < \theta < \pi \end{cases} \tag{15.18}$$

Si vedano le figure 15.7 e 15.8.

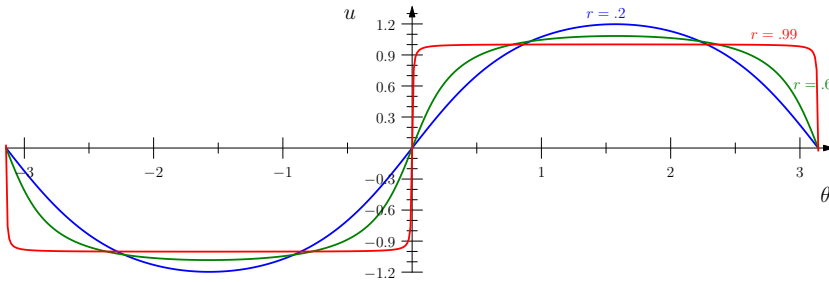


Figura 15.7: Grafico di  $u_r(t)$  per  $r = .2, .6$  e  $.99$ . In  $t = 0$  e  $t = \pi$  (e  $t = -\pi$ ), dove la funzione sul bordo è discontinua, si vede l'effetto di media

$$u_1(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)] .$$

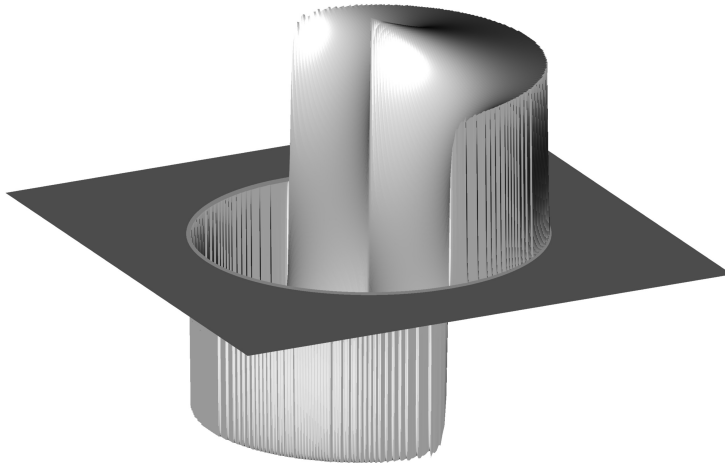


Figura 15.8: Grafico della superficie  $u_r(t)$  per funzione al contorno (15.18). In termini di temperatura, la superficie rappresenta la temperatura stazionaria nei punti di una piastra circolare il cui bordo è mantenuto, la metà superiore, diciamo, a  $10^0$  C e la metà inferiore a  $-10^0$  C. Come ci si poteva aspettare da semplici considerazioni di simmetria, i punti del disco, bordo incluso, lungo il diametro tra  $0$  e  $\pi$  sono alla temperatura media tra le due temperature sul bordo

## 15.6 COMPLEMENTI

## 15.6.1 Complementi sulla trasformazione "swap" di Möbius

**ESERCIZIO 15.1.** *Mostrare che per effetto della (15.3) un punto  $Z$  sul cerchio  $\mathbb{T}$  di raggio 1 si trasforma nel punto  $Z^*$ , estremo delle corda che passa per  $Z$  e per  $a$ , secondo la costruzione geometrica mostrata in figura 15.2.*

Risolviamo l'esercizio con i metodi della geometria analitica. Dobbiamo trovare l'intersezione tra la retta che passa per i punti  $Z$  e  $a$  e il cerchio di raggio 1. L'equazione della retta è

$$(\bar{Z} - \bar{a})z - (Z - a)\bar{z} - (a\bar{Z} - \bar{a}Z) = 0$$

e naturalmente l'equazione del cerchio è  $\bar{z}z = 1$ . Moltiplichiamo l'equazione della retta per  $z$ , teniamo conto dell'equazione del cerchio, e riconduciamo l'equazione algebrica di secondo grado così ottenuta alla forma standard con coefficiente quadratico uguale a 1. Otteniamo

$$z^2 - \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}}z - (Z - a) = 0$$

Sappiamo che  $Z$  è soluzione, possiamo dunque abbassare di grado l'equazione ricordando che la somma delle radici è pari al coefficiente lineare cambiato di segno; chiamiamo  $Z^*$  la radice che cerchiamo. Allora

$$Z + Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}},$$

da cui

$$Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} - Z = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z - 1 + \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{a\bar{Z} - 1}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{(-Z)(a\bar{Z} - 1)}{(-Z)(\bar{Z} - \bar{a})} = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

**ESERCIZIO 15.2.** *Calcolare lo Jacobiano della trasformazione sulla circonferenza  $\mathbb{T}$  di raggio 1.*

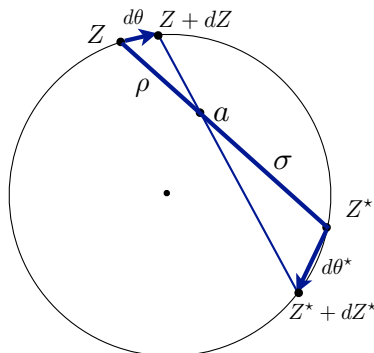
È richiesto il calcolo di

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}$$

dove  $dZ = iZd\theta$  e  $dZ^* = iZ^*d\theta^*$ . Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{Z}{Z^*} \frac{dZ^*}{dZ}$$

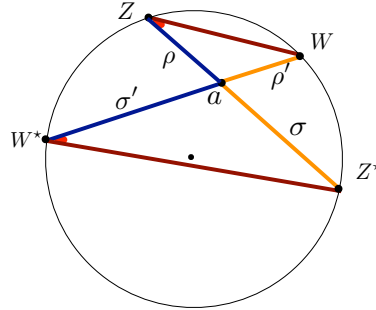
Si lascia come esercizio a casa il calcolo algebrico. Qui si fornisce un calcolo geometrico. Si consideri la figura sotto:



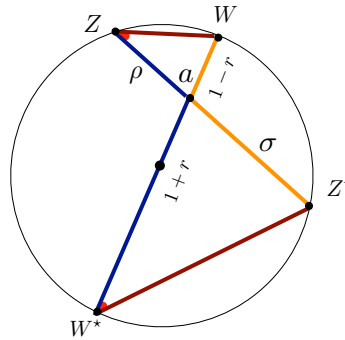
Lo Jacobiano è il rapporto tra le lunghezze d'arco infinitesime  $d\theta^*$  e  $d\theta$ . Poiché i triangoli in figura (in blu) sono simili  $d\theta^* : \sigma = d\theta : \rho$ . Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\sigma}{\rho}$$

Per determinare  $\sigma/\rho$  osserviamo che i triangoli finiti mostrati nella figura sotto sono simili.



Allora  $\rho : \sigma' = \rho' : \sigma$ . Ne segue che  $\rho\sigma = \rho'\sigma' = \text{costante}$ . Per determinare la costante, scegliamo  $W$  in modo che il segmento  $WW^*$  sia un diametro come in figura:



Posto  $a = re^{i\alpha}$ , si ottiene  $\rho\sigma = (1+r)(1-r) = 1-r^2$ . Quindi  $\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma\rho}{\rho^2} = \frac{1-r^2}{\rho^2}$   
 Ma  $\rho^2 = |Z-a|^2$ , per cui il risultato finale è

$$\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{1-r^2}{|Z-a|^2}$$

### 15.6.2 Dimostrazione del teorema di convergenza uniforme

**TEOREMA** Se  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{T}$ , la funzione

$$u(z) = u_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}$$

converge uniformemente a  $f$  quando  $r$  tende a 1 ( $f(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(e^{is})$ ).

*Dimostrazione.* Incominciamo con lo stimare l'errore tra il limite e la funzione  $u$ :

$$E_r(t) = |f(t) - u_r(t)| = \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta \right|$$

Per cambiamento di variabili  $t - \theta = s$ , si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) f(t - s) ds$$

Allora

$$E_r(t) = \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) f(t - s) ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) [f(t) - f(t - s)] ds \right|,$$

essendo  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = 1$ . Poiché il modulo dell'integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo (e  $P_r(s)$  è positiva), otteniamo

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds.$$

I problemi nascono da  $s = 0$ , dove  $P_r(s)$  diverge. Separiamo allora l'integrazione in due parti, una su un piccolo intorno dello 0 e l'altra sul resto:

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds.$$

La funzione  $f$  è continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi limitata da una costante  $M$ . Per  $|s| > \delta$  il massimo di  $P_r(s)$  è maggiorato da  $\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$  che tende a zero per  $r$  che tende a 1. Quindi

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds + 2M \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}.$$

La funzione  $f$  è continua su  $\mathbb{T}$ , ma poichè  $\mathbb{T}$  è compatto (=chiuso e limitato) per il *Teorema di Heine-Cantor* è anche uniformemente continua. Si fissi allora un  $\epsilon$  arbitrario, dalla continuità uniforme segue che esiste un  $\delta > 0$  tale che per tutti i  $t$  e  $s$  con  $|s| < \delta$  si ha  $|f(t) - f(t - s)| < \epsilon/2$ . Quindi, per ogni  $\epsilon$  esiste un  $\delta$  tale che

$$E_r(t) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}.$$

Si prenda  $r$  così vicino a 1 che il secondo termine sia minore di  $\epsilon/2$ . Allora

$$E_r(t) \leq \epsilon.$$

Che è quanto si voleva dimostrare: l'errore tende a zero uniformemente in  $t$ , cioè la funzione  $u(z)$ , armonica nel disco  $\mathbb{D}$  converge *uniformemente* al suo valore assegnato  $f$  sulla frontiera  $\mathbb{T}$  quando  $z$  tende a un punto della frontiera.

## Analisi di Fourier

### 16.1 Il problema fondamentale dell'analisi di Fourier

Nella memoria del 1807, Fourier affronta e risolve il seguente problema: determinare come evolve nel tempo la temperatura di una sbarretta i cui estremi sono mantenuti a temperatura costante e la cui temperatura al tempo iniziale ha una distribuzione assegnata (e la sbarretta è separata adiabaticamente dall'esterno). Dapprima, Fourier ricava da considerazioni fisiche l'equazione per la temperatura  $f$  che porta il suo nome (e che abbiamo già incontrato in capitoli precedenti), e poi passa a risolverla per il problema considerato. Nel fare questo, Fourier utilizza lo sviluppo in serie

$$f(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (16.1)$$

che porta il suo nome. Nella sezione 2.8 abbiamo visto che una serie di questo tipo emerge quando si considera una serie di potenze complesse sul cerchio di convergenza. In questo capitolo e nei successivi intendiamo discutere i problemi matematici riguardanti questi tipi di serie.

È importante sottolineare che la novità del metodo di Fourier non sta tanto nell'usare lo sviluppo (16.1), ma nell'idea che questo sviluppo valga per un'ampia classe di funzioni  $f(\theta)$ . In effetti, era questa generalità che veniva contestata a Fourier dai matematici del suo tempo e ci volle molto tempo per stabilire quanto generale fosse la classe delle funzioni sviluppabili secondo Fourier. Sorprendentemente, questa ricerca continuò ancora per tutto il Novecento.

Sviluppi in serie del tipo (16.1) erano già stati usati prima di Fourier, nella teoria dei sistemi vibranti. Il problema che era stato affrontato era quello di caratterizzare la classe delle funzioni periodiche di un dato periodo. Precisiamo meglio questo problema.

Chiaramente,  $\cos n\theta$  e  $\sin m\theta$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  sono funzioni periodiche, di periodo  $2\pi/n$  e  $2\pi/m$  rispettivamente, e se passiamo a combinazioni lineari di queste funzioni, la funzione così ottenuta sarà periodica con periodo uguale al minimo comune multiplo di  $2\pi/n$  e  $2\pi/m$ . Generalizzando, possiamo dire che una somma del tipo

$$c_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

dove  $c_0, a_n, b_n$  sono costanti, è certamente periodica di periodo  $2\pi$ .

Passando al limite per  $N$  che va all'infinito, otterremo una serie, detta *trigonometrica*, la quale, se converge, rappresenta una funzione  $f(\theta)$ , periodica di periodo  $2\pi$ . Questo è il problema della "sintesi" di Fourier: sotto quali condizioni per i coefficienti  $c_0, a_n$  e  $b_n$  è possibile "sintetizzare" una funzione periodica?

Già Daniel Bernoulli e Eulero lavoravano con serie del tipo (16.1), ma, fino a Fourier, la convinzione diffusa era che, in generale, il problema inverso non avesse soluzione. Questo è il problema dell'"analisi" di Fourier: *data una funzione  $f(\theta)$  reale, periodica con periodo  $2\pi$ , è possibile determinare le costanti  $c_0, a_n, b_n$  in modo da formare una serie del tipo (16.1)?*

Come avremo modo di apprezzare nel seguito, i problemi di "sintesi" e "analisi" non sono facili e richiedono rigore matematico. Ma prima di volgerci a questo studio, osserviamo che qualora si ammetta che effettivamente la serie converge alla funzione  $f(\theta)$  e che sia lecita l'integrazione termine a termine, il calcolo dei coefficienti  $c_0, a_n, b_n$  è facile e immediato.

Questo calcolo è stato svolto nel problema 2.4. Rivediamone la soluzione: in primo luogo si stabiliscono le identità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \tag{16.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn} \tag{16.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn} \tag{16.4}$$

dove  $\delta_{mn}$  è la delta di Kronecker ( $= 1$  per  $m = n$  e  $0$  altrimenti). Quindi si integrano ambo i membri della (16.1) tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta = 2\pi c_0$$

Si moltiplicano poi ambo i membri della (16.1) per  $\cos m\theta$  e si integra ancora tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \pi a_m .$$

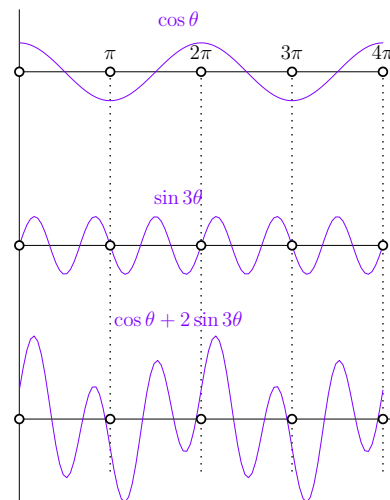


Figura 16.1: Il periodo di una combinazione lineare di funzioni periodiche è il minimo comune multiplo dei loro periodi.



Daniel Bernoulli (1700-1782) fu un matematico e fisico svizzero e uno dei matematici prominenti della famiglia dei Bernoulli. Noto per i suoi contributi alla meccanica e all'idrodinamica, contribuì anche allo sviluppo della teoria della probabilità (scoperta dallo zio Jacob Bernoulli) e in particolare alle prime applicazioni all'economia (teoria del rischio). Nello studio dei sistemi vibranti (corde e membrane) già utilizzava sviluppi in serie del tipo (16.1).

Questo perché l'integrale  $\int_{-\pi}^{\pi} c_0 \cos m\theta d\theta$  è nullo e sono pure nulli gli integrali  $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n\theta \cos m\theta d\theta$  ( $n \neq m$ ) e  $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n\theta \cos m\theta d\theta$ . Si moltiplichino infine ambo i membri della (16.1) per  $\sin m\theta$  e si integri tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Procedendo in modo analogo a prima, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = \pi b_m.$$

In conclusione, si ottiene

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad (16.5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1 \quad (16.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1. \quad (16.7)$$

Le costanti  $c_0, a_n, b_n$  sono dette *coefficienti* o *coordinate* reali di Fourier della funzione  $f(\theta)$ . Le coordinate di Fourier complesse sono definite come

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad (16.8)$$

e sono legate a quelle reali dalle relazioni

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad a_n = c_n + \bar{c}_n, \quad b_n = i(c_n - \bar{c}_n). \quad (16.9)$$

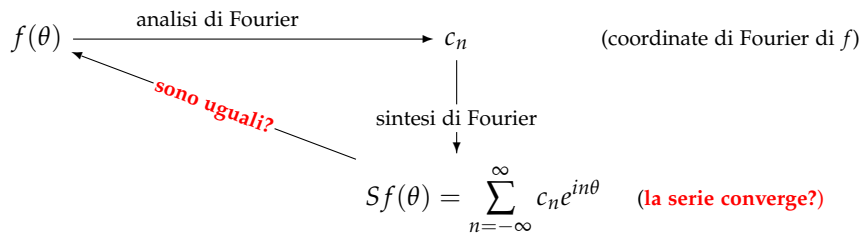
Queste coordinate permettono una forma più compatta dello sviluppo di Fourier. Infatti, se poniamo  $c_{-n} = \bar{c}_n$ , la (16.1) diventa

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad (16.10)$$

come si può facilmente verificare. Nel seguito, salvo avviso contrario, quando parleremo di sviluppo o serie di Fourier ci riferiremo alla serie (16.10), con le coordinate complesse date dalla (16.8), ma, naturalmente, ciò che diremo vale anche per sviluppo in coordinate reali (16.1).

Come abbiamo detto, lo sviluppo di  $f(\theta)$  in serie di Fourier è stato ottenuto *assumendo* che la serie converga alla funzione  $f(\theta)$  e che sia lecita l'integrazione termine a termine della serie. Il problema matematico lasciato aperto è quello di stabilire quando queste assunzioni sono effettivamente giustificate. Questo è il problema fondamentale dell'analisi di Fourier.

Possiamo descrivere questo problema mediante il seguente diagramma:



Nel primo stadio di “analisi” vengono determinate le coordinate  $c_n$ ; la (16.8) mostra che il requisito minimo per questo stadio è l’integrabilità della funzione su  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ . Il secondo stadio consiste nella “sintesi” della funzione  $Sf(\theta)$  a partire dalle coordinate di Fourier di  $f$ . A questo stadio la domanda cruciale è se la serie converge. L’ultimo stadio del processo è la risalita: la funzione  $Sf(\theta)$ , così ottenuta, è uguale alla funzione di partenza  $f(\theta)$ ?

Per rispondere alla prima domanda, si possono usare criteri di convergenza delle serie, alcuni dei quali sono stati incontrati nei primi capitoli, come il *Criterio M* di Weierstrass della sezione 3.2 o il *Criterio di Abel* (2.17). La risposta alla seconda è più difficile, specialmente se si vuole rendere conto dell’intuizione originaria di Fourier che il recupero di una funzione dalle sue coordinate di Fourier valga per un’ampia classe di funzioni.

Concludiamo questa sezione con tre annotazioni.

- (1) È invalso l’uso (specialmente nella letteratura matematica) di denotare le coordinate complesse  $c_n$  con il simbolo  $\hat{f}(n)$  e scrivere

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}. \quad (16.11)$$

Questo rende più evidente l’analogia con gli integrali di Fourier. Talvolta (a partire dall’equazione sotto) seguiremo anche noi questa consuetudine.

- (2) La somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier è denotata

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}. \quad (16.12)$$

- (3) Un’espressione del tipo

$$\mathcal{P}_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N d_n e^{in\theta}. \quad (16.13)$$

con  $d_{-n} = \overline{d_n}$  è detta *polinomio trigonometrico* (reale). Mediante un cambiamento di variabili analogo a (16.9),  $\mathcal{P}_N$  può essere riscritto



come

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta]$$

con  $p_n$  e  $q_n$  reali. La somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier di una funzione  $f$  è dunque un polinomio trigonometrico di un certo tipo.

## 16.2 Esempi di serie di Fourier di funzioni periodiche

Nelle applicazioni, le serie di Fourier sono tipicamente usate per analizzare funzioni (segnali) periodici. Mentre nello studio teorico è preferibile lavorare con funzioni sul cerchio unitario  $\mathbb{T}$ , nelle applicazioni l'oggetto di interesse sono funzioni sulla retta reale, periodiche e di periodo  $2\pi$  (con un cambiamento di scala, un periodo  $L$  può essere reso uguale a  $2\pi$ ).

Naturalmente, i due punti di vista sono equivalenti: la funzione su  $\mathbb{T}$  è, per così dire, "srotolata" sulla retta reale  $\mathbb{R}$ , e gli sviluppi in serie (16.1) o (16.10) sono estesi a sinistra di  $-\pi$  e a destra di  $\pi$ . L'accorgimento è di tradurre correttamente le proprietà delle funzioni su  $\mathbb{T}$  in proprietà delle funzioni periodiche associate su  $\mathbb{R}$ .

Nel cerchio unitario  $\mathbb{T}$ ,  $-\pi$  e  $\pi$  rappresentano lo stesso punto, quindi la continuità della funzione in  $\pi$  sul cerchio corrisponde alla condizione  $f(-\pi) = f(\pi)$  per la funzione periodica associata su  $\mathbb{R}$ . Analogo discorso vale per le derivate: la continuità della derivata  $p$ -esima in  $\pi$  sul cerchio corrisponde all'uguaglianza delle derivate  $p$ -esime calcolate in  $-\pi$  e  $\pi$ . Vediamo adesso qualche esempio.

ESEMPIO 16.1 (Onda quadra).

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

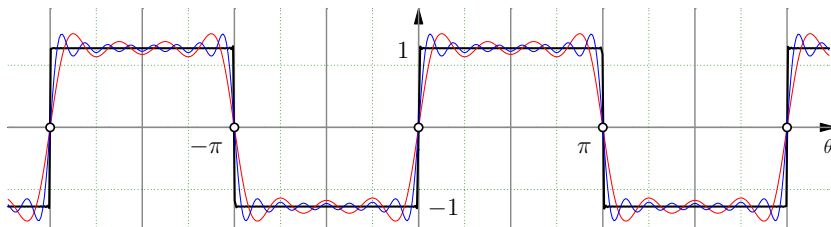
Calcoliamone le coordinate di Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -k \int_{-\pi}^0 d\theta + k \int_0^{\pi} d\theta \right] = 0, \\ a_n &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = 0 \\ b_n &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos n\theta}{n} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 4/n\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier associata all'onda quadra è

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [(2n+1)\theta]}{2n+1}$$

Osserviamo che per  $\theta = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , la serie  $Sf$  è identicamente nulla. In qualunque intervallo chiuso che non contenga questi punti,  $S_N f$  converge uniformemente a  $f$ , ma se li contiene la convergenza non è uniforme. Questo aspetto verrà approfondito nella sezione 16.4.



Nella figura sopra (e nelle figure negli esempi che seguono) sono rappresentate le somme parziali  $S_N f$  per  $N = 4$  (in rosso) e per  $N = 8$  (in blu).

ESEMPIO 16.2 (Onda triangolare).

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} -\theta & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a quanto visto per l'onda quadra, si trova

$$c_0 = \pi/2 \quad a_n = \begin{cases} -4/n^2\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}, \quad b_n = 0$$

(il calcolo esplicito degli integrali è lasciato come esercizio). Dunque,

$$Sf(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

Osserviamo che i moduli dei termini della serie a secondo membro sono maggiorati dalle costanti  $M_n = \pi/(2n+1)^2$ ,

$$\left| \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} \right| < \frac{\pi}{(2n+1)^2}$$

e che la serie  $\sum M_n$  è convergente. Allora per il *Criterio M* di Weierstrass della sezione 3.2, la serie è uniformemente convergente e quindi  $Sf(\theta)$  è proprio la funzione  $f(\theta)$ . Osserviamo infine che la serie

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

per l'onda triangolare è ottenuta integrando termine a termine la serie associata all'onda quadra.

**Onda quadra**

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

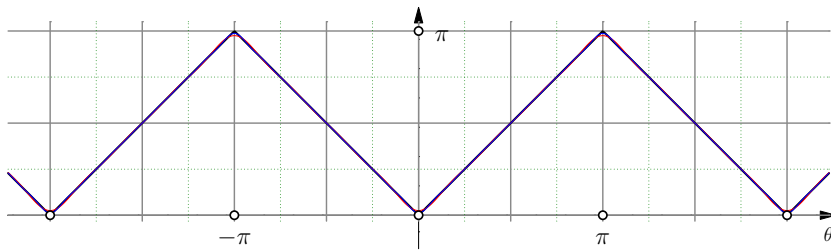
$$b_n = \begin{cases} 4/n\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$c_n = -ib_n/2$$

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$$

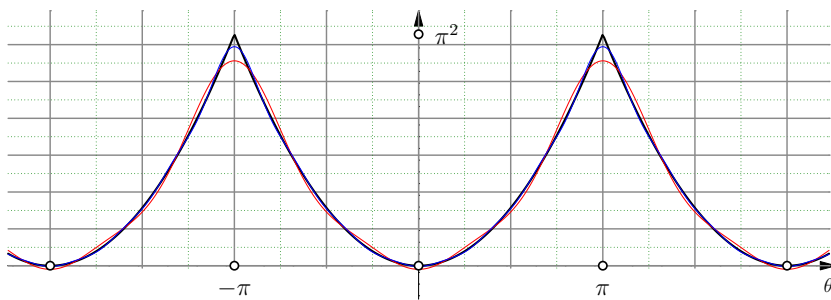
$$= f(\theta) \quad \text{per } \theta \neq k\pi$$

$$= 0 \quad \text{per } \theta = k\pi$$

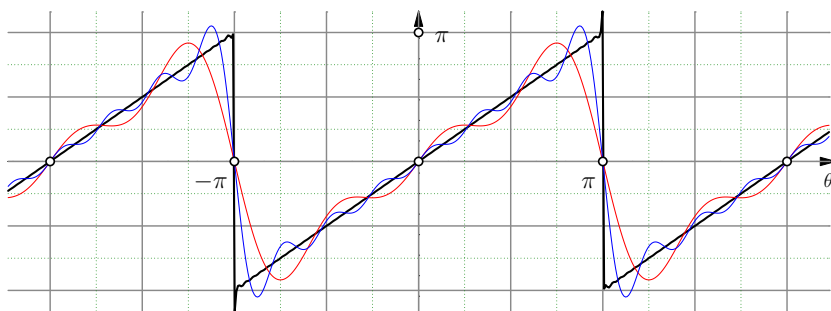


Degli esempi seguenti ci limitiamo a fornire le tabelle riassuntive. Lo studio dettagliato di questi esempi è lasciato come esercizio.

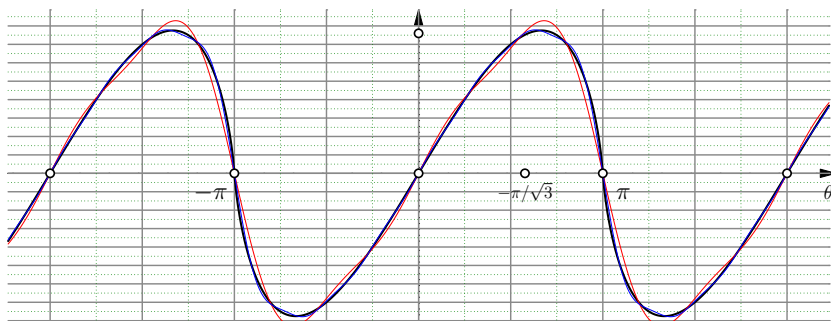
ESEMPIO 16.3.



ESEMPIO 16.4.



ESEMPIO 16.5.



**Onda triangolare**

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} -\theta & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$c_0 = \pi/2$$

$$a_n = \begin{cases} -4/n^2\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} = f(\theta)$$

**Onda parabolica**

$$f(\theta) = \theta^2 \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$c_0 = \pi^2/3$$

$$a_n = 4(-1)^n \frac{\cos n\theta}{n}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n^2} = f(\theta)$$

**Onda a dente di sega**

$$f(\theta) = \theta \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = -2(-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}$$

$$Sf(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n} = f(\theta) \quad \text{per } \theta \neq k\pi$$

$$= 0 \quad \text{per } \theta = k\pi$$

**Onda "abbastanza liscia"**

$$f(\theta) = \theta(\pi - \theta)(\pi + \theta) \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

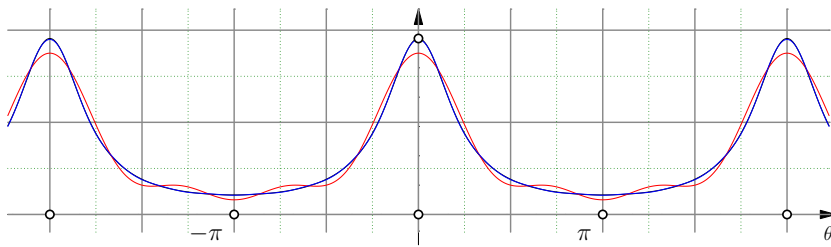
$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = 12(-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n^3}$$

$$Sf(\theta) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n^3} = f(\theta)$$

## ESEMPIO 16.6.



Si osservi che le somme parziali  $S_N f$  hanno differenti velocità di convergenza: come si può verificare con le simulazioni numeriche, la convergenza per l'onda quadra e l'onda a dente di sega è molto più lenta che negli altri esempi. In particolare, per queste funzioni, ci sono fluttuazioni significative nell'intorno dei punti di discontinuità. In questi punti,  $S_N f$  converge al valore medio dei limiti destro e sinistro e la convergenza in intervalli chiusi che contengono questi punti non è uniforme. Questo fatto, messo in evidenza da Gibbs, verrà discusso nella sezione 16.4.

## 16.3 Il teorema di Dirichlet

Il risultato matematico rigoroso più antico sulle serie di Fourier è del 1829 ed è dovuto a Dirichlet.

**TEOREMA DI DIRICHLET.** *Si supponga che, eccetto eventualmente un numero finito di punti, la funzione  $f(\theta)$  sia continua e la sua derivata sia continua e limitata. Allora, per tutti  $\theta \in \mathbb{T}$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta^+) + f(\theta^-)] \quad (16.14)$$

dove  $f(\theta^+)$  e  $f(\theta^-)$  sono rispettivamente i limiti destro e sinistro di  $f(t)$  quando  $t$  tende a  $\theta$ .

Questo risultato può essere affinato nel seguente modo: Se  $f$  è continua in  $(a, b) \subset \mathbb{T}$ , la successione delle somme parziali  $S_N f(\theta)$ , per  $N \rightarrow \infty$ , converge uniformemente a  $f(\theta)$  in ogni sotto-intervallo chiuso di  $(a, b)$ . Alla luce di questo teorema si rivedano gli esempi della sezione 16.2. Si osservi la convergenza al valor medio dei limiti destro e sinistro negli esempi 1 (onda quadra) e 4 (onda a dente di sega). Nella prossima sezione si dimostrerà, per il caso particolare dell'onda a dente di sega, l'assenza di convergenza uniforme in un intervallo che contiene un punto di discontinuità.

## Onda "molto liscia"

$$f(\theta) = 3/(5 - 4 \cos \theta) \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$c_0 = 1$$

$$a_n = 2^{-n}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos n\theta = f(\theta)$$

Si confronti quel che segue con l'analogo risultato per gli integrali di Fourier esposto nella sezione 11.8.

16.4 Il fenomeno di Gibbs

Il fisico americano Albert Michelson inventò molti strumenti di straordinaria precisione, soprattutto nel campo dell'ottica. Nel 1898, costruì un analizzatore armonico che permetteva di determinare le prime 80 coordinate di Fourier di una funzione  $f(\theta)$  data graficamente. La macchina poteva anche essere usata come sintetizzatore armonico. Perciò Michelson procedette ad una verifica di precisione delle operazioni della macchina, perché, avendo ottenuto le prime 80 coordinate, la macchina doveva sintetizzarle e ridare la funzione originale con un elevato grado di precisione.

Michelson trovò che così era per la maggior parte delle funzioni analizzate, ma quando provò con un'onda quadra scoprì uno strano fenomeno. La sintesi riproduceva l'onda quadra (a parte piccole oscillazioni), ma al punto di discontinuità appariva una protuberanza che non era presente nella funzione originaria. Michelson era perplesso e pensava che forse qualche difetto meccanico interno della macchina poteva causare il problema. Scrisse allora a Gibbs, l'eminento fisico matematico, tra i padri della moderna meccanica statistica, chiedendogli la sua opinione. Gibbs investigò il fenomeno e lo spiegò (in una lettera a *Nature* nel 1899), sulla base della convergenza non uniforme delle serie di Fourier nella vicinanza di un punto di discontinuità.

In figura 16.2 è riprodotto quanto probabilmente osservò Michelson con il suo strumento. Lo stesso fenomeno per l'onda a dente di sega è illustrato in figura 16.3. Per analizzare quello che succede consideriamo l'onda a dente di sega (lasciando come esercizio l'analogo studio per l'onda quadra), la cui somma parziale  $N$ -esima della sua serie di Fourier è

$$S_N f(\theta) = -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Vogliamo stimare, al variare di  $N$ , l'errore massimo

$$E_{\max} = \sup |S_N f(\theta) - f(\theta)|. \tag{16.15}$$

A tal fine, determiniamo i massimi di  $S_N f(\theta)$  calcolandone la derivata prima e ponendola uguale a 0. Poniamo inoltre  $z = e^{i\theta}$ . Si ha

$$\begin{aligned} S_N(f)'(\theta) &= -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos n\theta = -2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N (-z)^n \right] \\ &= -2 \operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] \end{aligned}$$

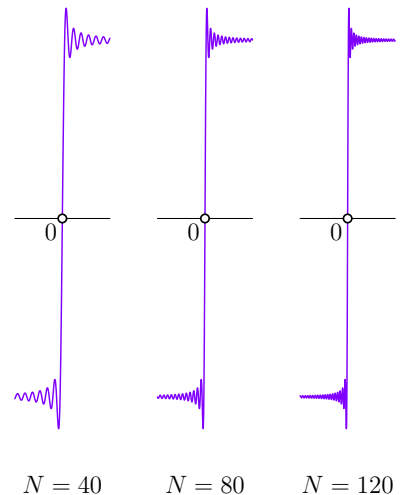


Figura 16.2: Fenomeno di Gibbs per l'onda quadra.

(ricordando la solita formula per la progressione geometrica). Perciò dobbiamo risolvere l'equazione

$$\operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] = 0$$

Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ 1 - (-1)^N e^{iN\theta} \right] \left[ 1 + e^{iN\theta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \left\{ \cos \theta + 1 - (-1)^N \cos(N + 1)\theta - (-1)^N \cos N\theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{1 + \cos \theta} \left\{ \cos(N + 1)\theta + \cos(N + 1)\theta \cos \theta + \sin(N + 1)\theta \sin \theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \cos(N + 1)\theta + (-1)^N \frac{\sin(N + 1)\theta \sin \theta}{1 + \cos \theta} = 0 \end{aligned}$$

L'espressione si annulla quando  $\theta^* = (M/N + 1)\pi$  e  $M$  ha la stessa parità di  $N$ . Evidentemente il massimo assoluto di  $S_N f(\theta)$  in  $[-\pi, \pi)$  si ha per

$$\theta_{\max}^* = \frac{N}{N + 1} \pi$$

Calcoliamo l'andamento di  $S_N f(\theta_{\max}^*)$  per  $N \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta_{\max}^*) &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{n\frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

Per valutare il limite, facciamo tesoro della seguente osservazione. Ogni qual volta si incontra un limite del tipo

$$I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{an}{N}\right) \frac{a}{N}$$

si ha di fronte l'approssimazione di Riemann di un integrale. Infatti, l'integrale di Riemann è il limite della somma dei  $\Delta\theta_n$  moltiplicati per il valore della funzione in un punto qualunque tra  $\theta_n$  e  $\theta_n + \Delta\theta_n$  e ovviamente il limite non dipende dalla partizione. Per  $I_N$  si ha una partizione dell'intervallo  $[0, a]$  in intervallini  $\Delta\theta_n$  di ampiezza uguale e pari a  $a/N$ ;  $f(na/N)$  è il valore della funzione calcolata

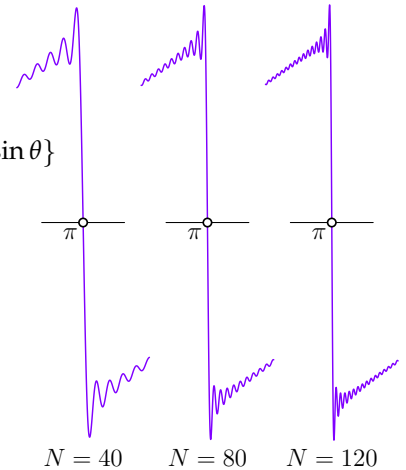
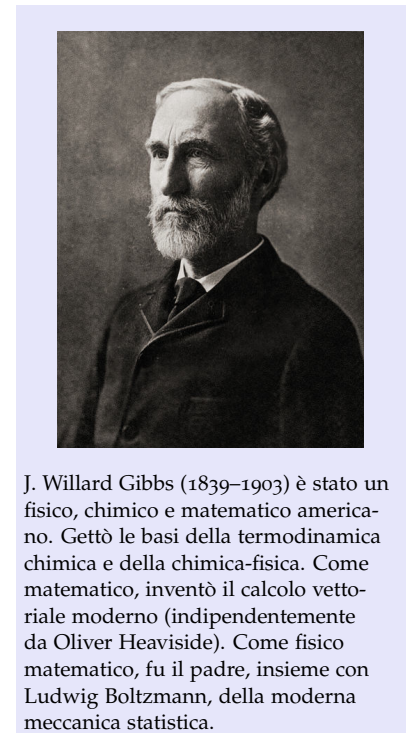


Figura 16.3: Fenomeno di Gibbs per l'onda a dente di sega.



J. Willard Gibbs (1839-1903) è stato un fisico, chimico e matematico americano. Gettò le basi della termodinamica chimica e della chimica-fisica. Come matematico, inventò il calcolo vettoriale moderno (indipendentemente da Oliver Heaviside). Come fisico matematico, fu il padre, insieme con Ludwig Boltzmann, della moderna meccanica statistica.

nell'estremo destro dei  $\Delta\theta_n$ . Dunque,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{an}{N}\right) \frac{a}{N} = \int_0^a f(\theta) d\theta.$$

Quindi

$$2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{n \frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N} = 2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$$

La conclusione è dunque che *l'errore massimo non va a zero, ma si assesta su un valore costante per  $N$  grande!* Questo era l'effetto che Michelson osservò con la sua macchina armonica.

Possiamo determinarne il valore numerico. Il calcolo numerico dell'integrale  $2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$  lo si può fare per sviluppo in serie di Taylor di  $\sin \theta / \theta$  e poi passando all'integrazione termine a termine. Diciamo che ci basta un valore numerico con 3 cifre significative dopo la virgola. Si dovrebbe ottenere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta_{\max}^*) = 3.704$$

Si ha quindi uno sfioramento (rispetto al valore  $y = \pi$  della funzione in  $\theta = \pi$ ) di 0.562 che è circa il 9% di  $2\pi$ , cioè il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità  $\theta = \pi$  (dove la funzione salta da  $\pi$  a  $-\pi$ ). Questo fatto, detto *fenomeno di Gibbs*, è abbastanza universale: se ripetete il calcolo per l'onda quadra, trovate di nuovo uno sfioramento di circa il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità.

Questo assestamento dell'errore su un valore costante non è però incompatibile con la "regola della media": nel punto di discontinuità si ha esatta compensazione tra l'errore a destra e quello a sinistra della discontinuità e la funzione converge alla media tra i limiti destro e sinistro. Come correttamente comprese Gibbs, questo fenomeno è una manifestazione dell'assenza di uniformità del limite in prossimità della discontinuità — l'errore massimo non va a zero.

Il fenomeno di Gibbs è stato anche sfruttato per scopi pratici; ad esempio, nel microscopio a contrasto di fase, permette di evidenziare il contrasto tra il contorno di un oggetto e lo sfondo.

### 16.5 Risultati classici sulle serie di Fourier

DERIVAZIONE. Sia  $f(\theta)$  derivabile con derivata prima continua in  $\mathbb{T}$ . Si osservi che questo implica che la funzione ha lo stesso valore in  $-\pi$  e  $\pi$  e che la stessa vale per la derivata prima. Poiché  $f(\theta)$  è derivabile, si integri per parti

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{in} e^{-in\theta} f(\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{in} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{in} \widehat{f}'(n)\end{aligned}$$

Dunque,

$$\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n) \quad (16.16)$$

Si osservi che né l'esempio 2 (onda triangolare) né l'esempio 3 (onda parabolica) hanno derivata prima continua: in entrambi i casi la derivata è discontinua in  $\pi$ , in quanto  $f'(\pi) \neq f'(-\pi)$ . Ad esempio, per l'onda parabolica,  $f'(\theta) = 2\theta$ , e questa funzione assume valori diversi in  $\pi$  e  $-\pi$ :  $f'(\pi) = 2\pi$  e  $f'(-\pi) = -2\pi$ . Sono invece continue con derivata prima continua l'onda "abbastanza liscia" (esempio 5) e l'onda "molto liscia" (esempio 6). Per la prima, si ha

$$f'(\theta) = \pi^2 - 3\theta^2 \implies f'(-\pi) = f'(\pi)$$

e la verifica della continuità della derivata per la seconda è lasciata come esercizio.

Ricordiamo a questo punto una notazione che è standard in matematica:  $C^p(\mathbb{T})$  è l'insieme delle funzioni continuamente derivabili  $p$  volte. In particolare,  $C^0(\mathbb{T})$  è lo spazio  $C(\mathbb{T})$  delle funzioni continue;  $C^1(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue con derivata prima continua;  $C^2(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue derivabili due volte, con derivate prima e seconda continua, e così via. Naturalmente, si ha  $C^p \subset \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C$ .

Capito il gioco che porta alla (16.16), lo si può replicare: se  $f(\theta)$  è derivabile due volte, con derivata prima e seconda continua, allora  $\widehat{f}''(n) = -n^2\widehat{f}(n)$  e, più in generale, se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora

$$\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \widehat{f}(n). \quad (16.17)$$

"LISCEZZA" DI  $f(\theta) \implies$  ANDAMENTO ALL'INFINITO DI  $\widehat{f}(n)$ . Un tema classico dell'analisi di Fourier è la relazione tra le proprietà di regolarità della funzione  $f(\theta)$  e l'andamento all'infinito delle sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$ . Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$  allora per la (16.17)

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{|n|^p} |\widehat{f^{(p)}}(n)| = \frac{1}{|n|^p} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|^p} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(\theta)| d\theta \right)\end{aligned}$$



Poiché  $f^{(p)}(\theta)$  è per ipotesi continua nell'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ , sarà limitata da una costante finita e positiva  $C$ ,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}. \quad (16.18)$$

Risulta così dimostrato che:

*Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono almeno come  $1/|n|^p$  per  $|n| \rightarrow \infty$ .*

(16.19)

A questo riguardo, tre commenti.

Uno. L'inversa della (16.19) in generale non vale: la funzione ottenuta sintetizzando coordinate che decadono come  $1/n^p$  non solo non è necessariamente una funzione derivabile  $p$  volte, ma non è detto neanche che sia una funzione continua. Come esempio, si consideri la funzione  $f(\theta)$  che vale 1 se  $\theta \in [0, 1]$  e 0 altrimenti. La funzione è chiaramente discontinua e le sue coordinate sono

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-in\theta} d\theta = \frac{1 - e^{-in}}{2\pi in}$$

Ne segue che  $|\widehat{f}(n)| \leq 1/(\pi n)$ , e dunque le coordinate di  $f$  decadono come  $1/n$ , ma la funzione non né derivabile né continua. Inoltre, l'onda parabolica (esempio 3) ha coordinate che decadono come  $1/n^2$ , ma la funzione, pur essendo continua, non ha derivata prima continua.

Due. Dalla (16.19) segue immediatamente la dimostrazione del seguente teorema: *Se  $f \in C^2(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ .* Infatti, se  $f(\theta)$  è derivabile due volte, allora  $|\widehat{f}(n)| \leq C/n^2$ . Poiché  $\sum 1/n^2$  è convergente, per il criterio M di Weierstrass della sezione 3.2,  $\sum \widehat{f}(n)e^{in\theta}$  è uniformemente (e assolutamente) convergente.

Tre. Dalla (16.19) segue che se  $f$  è analitica, cioè infinitamente derivabile, allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono esponenzialmente in  $n$  per  $|n| \rightarrow \infty$ . Infatti, in questo caso, la (16.19) stabilisce che le coordinate  $\widehat{f}(n)$  vanno a zero più rapidamente di qualunque potenza inversa di  $n$ . Questo è il caso dell'onda "molto liscia" (esempio 6): la funzione  $f(\theta) = 3/(5 - 4 \cos \theta)$  è infinitamente derivabile con tutte le derivate continue nel passaggio da  $\pi$  a  $-\pi$  e, in effetti, le sue coordinate di Fourier decadono come  $2^{-n} = e^{-(\ln 2)n}$ , cioè più rapidamente di qualunque potenza di  $1/n$ .

**N.B.** Si osservi che non si può dimostrare in modo analogo che se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ , in quanto l'informazione che le coordinate di  $f$  decadono almeno come  $1/n$  non è sufficiente a stabilire la convergenza della serie. Per la dimostrazione di questo fatto, occorre usare metodi differenti, vedere sotto.

**VELOCITÀ DI CONVERGENZA DELLE SOMME PARZIALI.** Più liscia è  $f$  più veloce è la convergenza delle somme parziali di Fourier. Più precisamente, si ha il seguente teorema: *Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , per  $p \geq 2$ ,*

allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $\theta$ , tale che

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{N^{p-1}}$$

e se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $\theta$ , tale che

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

Questi risultati (che non dimostreremo) forniscono automaticamente la convergenza uniforme delle somme parziali di Fourier per funzioni  $C^p$ ,  $p \geq 1$  e quindi, in particolare, la dimostrazione del teorema: Se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ .

ANDAMENTO ALL'INFINITO DI  $\hat{f}(n) \Rightarrow$  "LISCEZZA" DI  $f(\theta)$ . Il seguente teorema stabilisce una condizione sufficiente abbastanza utile allo scopo:

Se le coordinate di Fourier  $\hat{f}(n)$  di una funzione  $f$  soddisfano

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha} \quad \text{per tutti gli } |n| \gg 1$$

per qualche potenza  $\alpha > p + 1$  e qualche costante positiva  $C$  allora la serie di Fourier (16.20)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione di classe  $C^p$ .

È importante che  $\alpha$  sia strettamente maggiore di  $p + 1$  e non maggiore o uguale. Consideriamo infatti l'onda "abbastanza liscia"  $f(\theta)$  dell'esempio 5 i cui coefficienti  $\hat{f}(n)$  decadono come  $n^{-3}$ . Dunque,  $\alpha = 3$  e quindi deve essere  $p < 3 - 1 = 2$ . Se ne conclude che la funzione è almeno di classe  $C^1$ , come in effetti è. Si osservi che essendo  $f''(\theta) = -6\theta$ , l'onda abbastanza liscia non è di classe  $C^2$ .

Osserviamo infine che l'applicazione del teorema (16.20) alle serie di Fourier dell'onda triangolare e dell'onda parabolica, per le quali  $|\hat{f}(n)| < C/n^2$ , permette di concludere che le funzioni sintetizzate da questi coefficienti sono  $C^0$ , cioè continue (come in effetti sono).

INTEGRAZIONE. La parola d'ordine è che la derivazione peggiora la convergenza della serie di Fourier (in quando le sue coordinate sono moltiplicate per  $in$ ), ma l'integrazione la migliora. Se la serie è uniformemente convergente, cossiché l'integrale può essere scambiato con il limite delle somme parziali, è chiaro che la serie può essere integrata termine a termine. Come effetto dell'integrazione le coordinate di

Gli strumenti principali per stabilire il teorema (16.20) sono il Criterio  $M$  di Weierstrass della sezione 3.2 e il seguente teorema di analisi: Se  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$  è una serie uniformemente convergente, allora anche  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$  è uniformemente convergente e, inoltre,  $f'(x) = g(x)$ .

Fourier  $\widehat{f}(n)$  risultano moltiplicate per  $1/(in)$ . Ma anche se la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$  associata a  $f$  non converge uniformemente, la serie di Fourier ottenuta per integrazione termine a termine converge, purché  $f$  sia assolutamente integrabile, cioè tale che <sup>1</sup>

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty. \quad (16.21)$$

Consideriamo l'esempio della serie di Fourier dell'onda quadra, che è una funzione discontinua,

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}.$$

L'integrazione termine a termine di questa serie fornisce

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} + C$$

che converge ad una funzione continua, in accordo con il teorema (16.20). Se si sceglie la costante arbitraria  $C = \pi/2$ , si ottiene l'onda triangolare dell'esempio 2. Analogamente, per integrazione termine a termine dell'onda a dente di sega (discontinua), si passa all'onda parabolica (continua).

### 16.6 Dal problema di Dirichlet nel piano all'analisi di Fourier

Con Fejér si entra a pieno titolo nella matematica del 900. I suoi contributi all'analisi di Fourier sono dei primi anni del 900 e, secondo alcuni, diedero un'impronta significativa agli sviluppi dell'analisi di Fourier nei cinquant'anni successivi. La domanda che Fejér si pone è la seguente:

È possibile recuperare i valori di una funzione (integrabile) su  $\mathbb{T}$  dalla conoscenza delle sue coordinate di Fourier? (16.22)

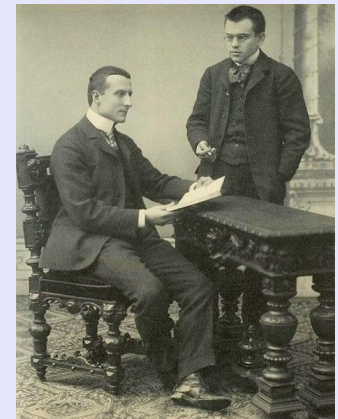
Se per recuperare si intende la sintesi di Fourier tradizionale,

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

la risposta è in generale no. Tuttavia, Fejér scoprì che *possiamo* sempre recuperare una funzione continua dalle sue coordinate di Fourier, se le sintetizziamo in una maniera diversa da quella tradizionale, cioè se utilizziamo un modo diverso di sommare le serie infinite.

Per comprendere l'idea di Fejér, si ripesci la soluzione del problema di Dirichlet per il disco unitario in termini del nucleo di Poisson (per il quale, "ripescare" sembra proprio il termine appropriato) e si

<sup>1</sup> L'insieme delle funzioni che soddisfano la (16.21) si denota con  $L^1(\mathbb{T})$ .



Lipót Fejér (1880-1959) è stato un matematico ungherese noto per i suoi lavori in analisi reale e complessa. Tra i suoi studenti di dottorato ci furono John von Neumann, Paul Erdős, George Pólya e Cornelius Lanczos. Nella foto è a destra in piedi (a sinistra c'è il matematico greco Constantin Carathéodory, noto ai fisici per una formulazione geometrica della termodinamica, si veda il libro "Calore e termodinamica" di Zemansky).

sostituisca lo sviluppo (15.15) del nucleo di Poisson nell'espressione per  $u_r(t)$  nel teorema (15.16). Si ottiene:

$$\begin{aligned} u_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta) f(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(\theta) d\theta \right] e^{int} \end{aligned}$$

L'espressione in parentesi quadrate è proprio l' $n$ -esima coordinata di Fourier di  $f(\theta)$ ! Accade così che la soluzione del problema di Dirichlet del piano getti luce su un problema matematico completamente diverso. Questo è un esempio di come anche in matematica (e non solo in fisica) siano in qualche modo all'opera leggi di "grande unificazione".

Dunque, se  $f(\theta)$  è continua su  $\mathbb{T}$ , per il teorema di convergenza uniforme (15.16) si può concludere che

$$\limsup_{r \uparrow 1} \sup_{\theta \in \mathbb{T}} \left| f(\theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta} \right| = 0, \quad (16.23)$$

ovvero

$$f(\theta) = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta}, \quad (16.24)$$

che è proprio un recupero della funzione  $f$  a partire dalle sue coordinate di Fourier—una "sintesi" di Fourier opportunamente regolarizzata.

La differenza tra questa "sintesi" delle coordinate di Fourier e quella classica è tutta nel fattore di regolarizzazione  $r^{|n|}$  che compare nella serie (16.24). Questa regolarizzazione è chiamata *somma secondo Abel* della serie di Fourier (si vedano i complementi 2.10.2). Se  $f$  è continua, per il teorema di convergenza uniforme (15.16), si può dunque rispondere affermativamente alla domanda (16.22), a patto che la serie di Fourier sia sommata secondo Abel. Se  $f$  è solo integrabile, la procedura permette un recupero dei suoi valori dove essa è continua. (Per stabilire questi risultati, Fejér usò la somma di Cesaro della serie, ma la sostanza del ragionamento non cambia.)

Si osservi che questo approccio alla teoria delle serie di Fourier fornisce una spiegazione semplice e intuitiva della convergenza della serie di Fourier alla media del limite destro e sinistro nei punti di discontinuità, come stabilito dal teorema di Dirichlet. Dall'equazione (15.17) segue infatti che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta_0} \xrightarrow{r \uparrow 1} \frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)]$$

se  $\theta_0$  è un punto di discontinuità della funzione.

Consideriamo adesso il limite (16.23) e denotiamo con

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (16.25)$$

le somme parziali della serie di Fourier sommata secondo Abel e con

$$\mathcal{S}f(\theta) = \lim_{r \uparrow 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta), \quad (16.26)$$

il limite (uniforme in  $\theta$ ) della loro successione. Per quanto abbiamo appena detto, si ha  $\mathcal{S}f(\theta) = f(\theta)$ , dove  $f$  è continua, e  $\mathcal{S}f(\theta_0) = \frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)]$ , nei punti  $\theta_0$  di discontinuità di  $f$ . Il significato del limite (16.26) è che per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $r < 1$  e un intero  $M$  tali che per  $N \geq M$  si ha

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |\mathcal{S}f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon, \quad (16.27)$$

e questo vuol dire che la convergenza è uniforme in  $\theta$  sia nei punti dove  $f(\theta)$  è continua sia dove non lo è. Perciò non si manifesta alcun fenomeno di Gibbs per la serie di Fourier sommata secondo Abel.

Questo fatto rende la serie di Fourier sommata secondo Abel un oggetto forse ancora più interessante della serie classica di Fourier, specialmente nelle applicazioni alla teoria dei segnali (ma anche in matematica pura). L'effetto della regolarizzazione è di pulire il segnale in presenza di variazioni rapide o discontinuità e quindi di filtrare via artefatti di riverbero, come il fenomeno di Gibbs, proprio in virtù della convergenza uniforme in  $\theta$  delle somme parziali  $\mathcal{S}_N^{(r)}$ , come illustrato nella figura 16.4.

### 16.7 Teorema di approssimazione di Weierstrass

Se la funzione  $f$  è continua, la (16.27) diventa

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon, \quad (16.28)$$

il che vuol dire che  $f$ , per scelta opportuna di  $r$  e  $N$ , può essere approssimata con precisione arbitraria da

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

che è un particolare tipo di polinomio trigonometrico. Risulta così dimostrato un teorema classico di analisi dovuto a Weierstrass:

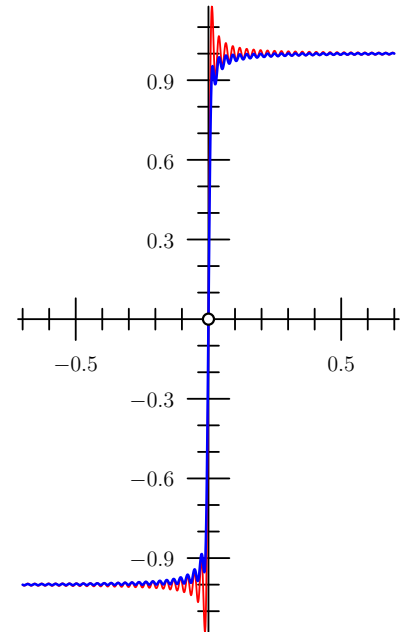


Figura 16.4: Onda quadra in un intorno dello zero. Confronto, per  $N = 120$ , tra la somma parziale classica  $S_N f$  (in rosso) e la somma parziale  $\mathcal{S}_N^{(r)}$  regolarizzata secondo Abel, per  $r = 0.994$  (in blu). Si noti l'assenza del fenomeno di Gibbs per la somma così regolarizzata.



Karl Weierstrass (1815–1897) fu un matematico tedesco, noto per l'instillazione del rigore in analisi e padre dell'analisi moderna. Fu docente per diverso tempo in scuole secondarie, dove, oltre alla matematica, insegnò fisica, botanica e ginnastica.

**TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.** *Le funzioni continue in un intervallo chiuso sono approssimate uniformemente dai polinomi trigonometrici. Equivalentemente, i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio delle funzioni continue rispetto alla norma uniforme.*

### 16.8 Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Consideriamo un polinomio trigonometrico

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta]$$

che fornisce una “buona” approssimazione di una funzione  $f(\theta)$  in  $[-\pi, \pi]$ . Se riportiamo in un grafico gli “errori”, cioè la curva rappresentata da  $f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)$ , tali errori appariranno ora positivi ora negativi. Occorre un criterio per valutare la bontà dell’approssimazione.

Un tale criterio è, ad esempio, l’errore massimo, l’efficacia del quale, come abbiamo visto sopra, è garantita dal teorema di approssimazione di Weierstrass. Un’altro criterio è suggerito dalla regressione lineare dove, per evitare ogni compensazione fra errori positivi e negativi si considera il quadrato del modulo, cioè

$$|f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)|^2.$$

Questo è l’errore quadratico per il singolo “dato”  $\theta$ . L’errore quadratico totale si ottiene sommando tutti gli errori quadratici nell’intervallo  $[-\pi, \pi]$ , vale a dire, si ha un’idea dell’errore compiuto mediante l’approssimazione *sull’intero intervallo* dal valore dell’integrale

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)]^2 d\theta \quad (16.29)$$

Notiamo che mentre l’approssimazione basata sull’errore massimo si basa su un concetto *locale* di errore, l’errore quadratico totale si basa su un concetto *globale*.

Diremo che la funzione  $f(\theta)$  è stata ben approssimata mediante il polinomio trigonometrico  $\mathcal{P}_N$  quando l’errore quadratico totale  $D$  è minimo. Ora tale errore dipende dai valori assegnati ai vari coefficienti  $d_0$ ,  $p_n$  e  $q_n$ , quindi il minimo di  $D$  si troverà uguagliando

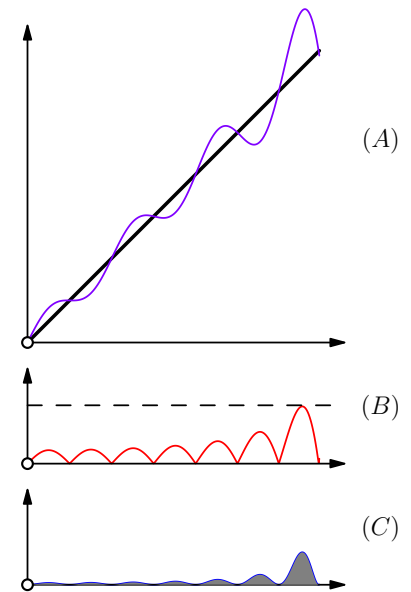


Figura 16.5: (A) Onda a dente di sega  $f(\theta)$  tra 0 e  $\pi$  (in nero) e somma parziale di Fourier  $S_N(\theta)$  per  $N = 8$  (in viola). (B) Grafico dell’errore puntuale  $|f(\theta) - S_N(\theta)|$ ; la linea tratteggiata indica l’errore massimo. (C) Grafico dell’errore quadratico puntuale  $|f(\theta) - S_N(\theta)|^2$ ; l’errore quadratico totale è l’area della regione tra la curva e l’ascissa (in grigio). Anticipando un risultato che verrà dato in seguito, dalle figure risulta chiaro che anche se l’errore massimo si stabilizza ad un valore costante (fenomeno di Gibbs), l’errore quadratico totale può diminuire costantemente all’aumentare di  $N$ .

a zero le derivate parziali di  $D$  rispetto ai coefficienti stessi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial d_0} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] d\theta = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial p_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] \cos m\theta d\theta = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial q_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] \sin m\theta d\theta = 0\end{aligned}$$

Ricordando le formule (16.2), (16.3) e (16.4), queste equazioni diventano:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta - 2\pi d_0 &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta - \pi p_n &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta - \pi q_n &= 0,\end{aligned}$$

vale a dire, i coefficienti  $d_0$ ,  $p_n$  e  $q_n$  risultano essere proprio le coordinate di Fourier di  $f(\theta)$ .

In conclusione, le somme parziali  $S_N f$  della serie di Fourier di una funzione  $f$  forniscono la migliore approssimazione della funzione nel senso dei minimi quadrati: *sono i polinomi trigonometrici che approssimano la funzione con il minimo errore quadratico totale*. Siamo arrivati così ad un modo completamente diverso di comprendere la *ratio* delle serie di Fourier, un modo completamente indipendente dalla teoria delle funzioni periodiche, dallo studio dei sistemi vibranti e dal problema di Dirichlet nel piano.

## 16.9 PROBLEMI

PROBLEMA 16.1.  $\square$  Sia  $\Theta$  la funzione scalino di Heaviside,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostrare che la serie di Fourier associata a  $\Theta(x)$  è

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2\ell+1)ix}}{2\ell+1}$$

PROBLEMA 16.2.  $\square$

Mostrare che la serie di Fourier associata a  $\Theta(x)$  può essere riscritta come

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$$

PROBLEMA 16.3.  $\square$

Sia  $f(x) = e^{ax}$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Mostrare che la serie di Fourier associata a  $f(x)$  è

$$\frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (a + in)}{a^2 + n^2} e^{inx}$$

PROBLEMA 16.4.  $\square$

Calcolare la serie di Fourier della funzione  $\frac{1}{2}x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , senza calcolare esplicitamente le sue coordinate di Fourier, ma sfruttando il fatto che la serie di Fourier di  $x$  è

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

PROBLEMA 16.5.  $\square$

Si consideri la formula del problema precedente per  $x$  e la si derivi rispetto a  $x$ . La derivata di  $x$  è 1 e la derivata della serie è

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos nx$$

cioè

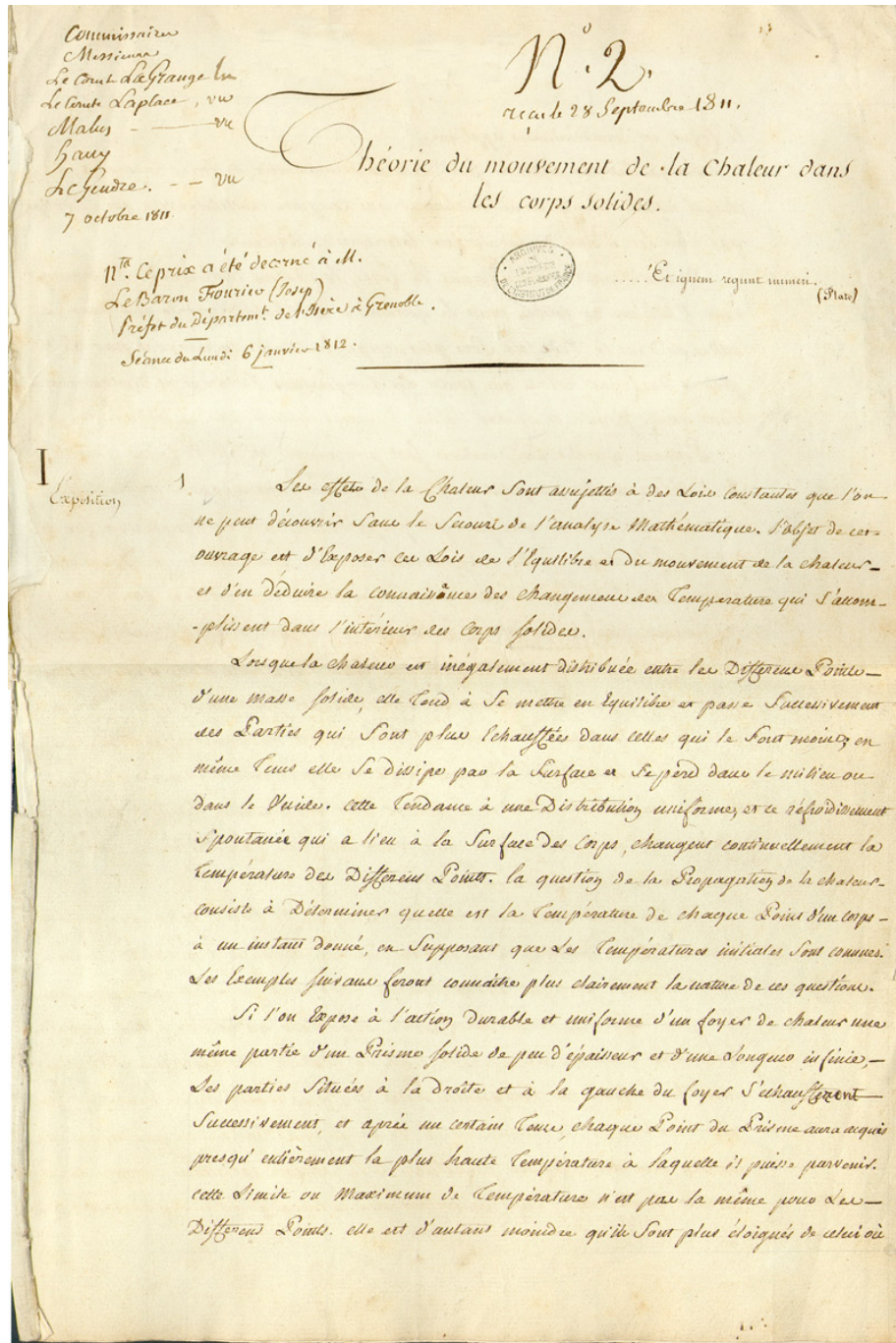
$$2 \cos x - 2 \cos 2x + 2 \cos 3x - \cos 4x + \dots$$

che non è di certo 1: lo sviluppo di Fourier di 1 contiene un solo termine, 1 appunto (perché?). Spiegare dove si è sbagliato.



## 16.10 COMPLEMENTI

## 16.10.1 La memoria originale di Fourier



Prima pagina dell memoria *Theorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* presentata da Jean-Baptiste Joseph Fourier nel 1807 all'Accademia di Francia. La commissione che deve giudicare la memoria è

formata da Lagrange, Laplace, Haüy, Malus e Legendre. La commissione rende noto il suo verdetto il 16 Dicembre 1811:

*La commission chargée de l'examen des Mémoires qui ont concouru pour le prix de Géométrie, relatif à la chaleur, propose de décerner le prix au Mèmoire n° 2 portant pour épigraphe: "Et ignem regunt numeri (Plato)". Le président ayant fait l'ouverture du billet cacheté joint au Mèmoire, on y trouve le nom de Joseph Fourier. Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur[...]; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.*

La memoria non viene pubblicata. L'accettazione definitiva delle idee innovatrici di Fourier e la gloria non arriveranno prima del 1822.

### 16.10.2 L'oscillatore armonico smorzato

Consideriamo l'oscillatore armonico smorzato

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

dove  $f(t)$  è una forza periodica di periodo  $T$  (termine forzante). Sia

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad (16.30)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} \quad (16.31)$$

Posto  $\omega = 2\pi/L$ , usando il "Dizionario tempo  $\longleftrightarrow$  frequenza temporale" otteniamo

$$\left[ -n^2 \omega^2 + in\gamma\omega + \omega_0^2 \right] \hat{x}(n) = \hat{f}(n)$$

cioè

$$\hat{x}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{-n^2 \omega^2 + in\gamma\omega + \omega_0^2} \quad (16.32)$$

Questa semplice equazione (di certo già incontrata diverse volte), contiene una notevole quantità di fisica.

In primo luogo, notiamo che ciascuna coordinata di Fourier della forza guida un singolo modo di Fourier nella risposta dell'oscillatore.

In secondo luogo, il principio di sovrapposizione dei sistemi lineari entra in gioco: secondo l'equazione (16.31) la risposta totale dell'oscillatore è una sovrapposizione delle risposte di ciascuno dei singoli modi di Fourier. Inoltre, ciascun modo è eccitato indipendentemente e non ha effetti sugli altri modi. Se il sistema avesse avuto un briciolo di non-linearità (ottenuta, per esempio, con l'aggiunta di un termine cubico  $\lambda x^3$  alla forza elastica  $-\omega_0^2 x$ ), avremmo potuto ancora usare la (16.30) per decomporre il moto in modi di Fourier, ma i modi di Fourier sarebbero risultati accoppiati e non più indipendenti.

In terzo luogo, osserviamo che per modi di Fourier elevati,  $n\omega \gg \omega_0$ , la risposta è circa

$$\hat{x}(n) \sim \frac{\hat{f}(n)}{-n^2 \omega^2}$$

che, all'aumentare di  $n$ , si avvicina a 0 più rapidamente delle coordinate di Fourier della forza. In sostanza, una forzante di frequenza elevata non ha quasi alcun effetto sull'oscillatore. Anche se la forzante ha frequenze molto alte, l'oscillatore si comporta in modo più regolare: non può rispondere molto a frequenze che sono molto più grandi della sua frequenza naturale  $\omega_0$ .

In quarto luogo, per forze esterne di bassa frequenza, cioè tali che  $n\omega \ll \omega_0$  per tutti i modi che intervengono nella forza, la risposta è

$$\hat{x}(n) \sim \frac{\hat{f}(n)}{\omega_0^2}$$

Possiamo allora risommare la serie secondo la (16.31) e ottenere

$$x(t) \sim \frac{f(t)}{\omega_0^2}$$

Questo è intuitivamente chiaro da un punto di vista fisico: quando *molto lentamente* si esercita una forza su una molla, la molla risponde cambiando la sua lunghezza proporzionalmente alla forza applicata.

Infine, si osservi che certi modi di Fourier sono eccitati a livelli più alti di altri modi. Per modi di Fourier tali che

$$n\omega \approx \omega_0,$$

il denominatore nella (16.32) è prossimo a zero se  $\gamma$  è piccolo, e la risposta del sistema esibisce il noto fenomeno della risonanza con le ampiezze che crescono notevolmente.



# 17

## Spazi di Hilbert

### 17.1 Spazi normati

Consideriamo le funzioni continue (a valori reali o complessi) su un intervallo chiuso  $[a, b]$ . Se  $f$  e  $g$  sono funzioni continue, chiaramente anche  $\alpha f + \beta g$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono scalari, lo è: le funzioni continue formano uno spazio vettoriale. Si può parlare di lunghezza, o norma, di una funzione continua, e ci sono molti modi di farlo. La “norma del sup”, o norma uniforme, è così definita

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (17.1)$$

È facile convincersi che questa nozione di lunghezza soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) della norma presentate nella sezione 2.4. Le proprietà (i) e (ii) sono facilmente verificate e lo stesso può dirsi per la disuguaglianza triangolare. Questa disuguaglianza per numeri reali è ovvia,  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ , e da questa discende

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

Dunque,  $C[a, b]$ , lo spazio delle funzioni continue su  $[a, b]$  con norma (17.1), è uno spazio normato.

Come abbiamo visto nella sezione 2.4, dalla nozione di lunghezza si può facilmente passare alla nozione di distanza. Se definiamo

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty},$$

si vede che sono soddisfatte le proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) della distanza. Se si ha una nozione di distanza, si ha una nozione metrica di vicinanza tra punti, e se si ha una nozione di vicinanza, si può parlare di convergenza di una successione  $(f_n)$  di punti nel modo seguente: la successione  $(f_n)$  converge a  $f$  se la distanza tra  $f_n$  e  $f$  tende a zero, cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0$$

**N. B.** È giunto il tempo di riprendere e approfondire le idee che sono state introdotte nella sezione 2.4.

Ora, il problema è che, in generale, non è detto che il limite di una successione di elementi che appartengono ad una classe sia ancora un elemento di quella classe. L'esempio paradigmatico sono i razionali: in generale, successioni di razionali non convergono necessariamente a numeri razionali. È per questa ragione che Cauchy introdusse la nozione di convergenza che prende il suo nome: per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un intero positivo  $N$  tale che per tutti  $m, n > N$ ,  $d(f_n, f_m) < \epsilon$ . Si può dimostrare che ogni successione di Cauchy ( $f_n$ ) in  $C[a, b]$  converge ad un elemento di  $C[a, b]$  (si veda i complementi 17.11.2).

Uno spazio normato, in cui ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio stesso, è detto completo. Uno spazio di questo tipo è anche noto anche come *spazio di Banach*. Per esempio,  $C[a, b]$ , munito di norma uniforme, è uno *spazio vettoriale normato completo*, cioè uno spazio di Banach.

La completezza di uno spazio normato è regolata dal seguente teorema:

Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente nello spazio è convergente, cioè se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k < \infty$$

(17.2)

Si osservi che il significato geometrico intuitivo di questo teorema è quello espresso dalla figura 2.10 del capitolo 2 (per una dimostrazione di questo fatto, si veda la 6 dei complementi 17.11.2).

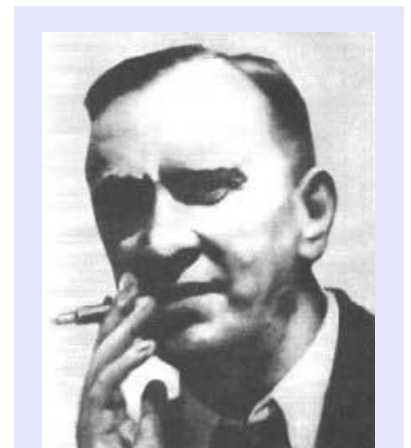
## 17.2 Spazi con prodotto scalare

Uno spazio di Banach, pur avendo una struttura per molti versi analoga a quella dello spazio euclideo finito-dimensionale, è privo di una nozione di prodotto scalare tra vettori. Ricordiamo dal capitolo 2 come sono fatti gli spazi vettoriali muniti di prodotto scalare ripresentando le caratteristiche salienti dello spazio euclideo complesso  $\mathbb{C}^n$ , lo spazio dei vettori  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , con componenti  $z_i$  complesse. Tra coppie di vettori qualunque  $\mathbf{z}, \mathbf{w}$  in questo spazio è definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n \quad (17.3)$$

che gode delle seguenti proprietà:

- (i)  $\langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{z} \rangle}$  (simmetria coniugata)
- (ii)  $\langle \mathbf{u} | \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$  (linearità nel secondo argomento)



Stefan Banach (1892–1945) è stato un matematico polacco tra i più influenti del XX secolo. Noto al grande pubblico (si fa per dire) per il paradosso di Banach-Tarski, secondo cui esiste una decomposizione finita di una sfera tale che ricomponendone i pezzi si possono formare due sfere identiche a quella di partenza (e, naturalmente, la procedura può essere iterata).

(iii)  $\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle \geq 0$  (=0 sse  $\mathbf{z} = 0$ ) (positività)

Si osservi che (i) e (ii) implicano

$$\langle \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{z} | \mathbf{u} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle$$

Il prodotto scalare in  $\mathbb{C}^n$  è dunque una forma definita su coppie di vettori di  $\mathbb{C}^n$  che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro. Una forma di questo tipo è detta *hermitiana* o *sesquilineare*.

Se c'è un prodotto scalare tra vettori, c'è anche una nozione di lunghezza: la lunghezza del vettore  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  è data dal *teorema di Pitagora*

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle}$$

e soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) della norma, in particolare la disuguaglianza triangolare  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ , che stabilisce che la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato.

La disuguaglianza triangolare si verifica facilmente a partire dalla (17.3). Ma c'è anche un modo più complicato per verificarla, che a posteriori risulta più profondo e utile. Questo si realizza in due passi. Primo passo: a partire dalle proprietà (i) (ii) e (iii) del prodotto scalare e dalla *definizione*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}, \quad (17.4)$$

si dimostra la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \quad (17.5)$$

Secondo passo: si usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per dimostrare la disuguaglianza triangolare. Si vedano le dimostrazioni 3 e 4 dei complementi 17.11.2. Ma qual è il vantaggio di questo modo più complicato di ottenere la disuguaglianza triangolare? Un guadagno notevole di generalità!

Un qualunque spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare, soddisfacente le proprietà (i), (ii) e (iii), risulta automaticamente uno spazio normato, con norma definita dalla (17.4). Infatti, le proprietà (i) e (ii) della norma sono banalmente verificate e la disuguaglianza triangolare vale in quanto conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. *Qualunque riferimento alla dimensione finita dello spazio è stato così eliminato* e il fatto che uno spazio con prodotto scalare diventi uno spazio normato è indipendente dalla sua dimensione; in altre parole, vale anche per spazi di dimensione infinita.

Se lo spazio normato così ottenuto è completo (è cioè uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare), è

detto *spazio di Hilbert*; se questo non accade, cioè se lo spazio non è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare, è usualmente chiamato *spazio pre-hilbertiano*. Uno spazio di Hilbert è di solito denotato con il simbolo  $\mathcal{H}$ .

Teoremi dimostrati per un generico spazio di Hilbert varranno automaticamente per spazi di Hilbert concreti, di cui, nel seguito vedremo esempi particolarmente importanti.

Ecco un esempio di teorema che vale per uno spazio di Hilbert generico e che si dimostra facilmente a partire dalle proprietà del prodotto scalare e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

**TEOREMA DI CONTINUITÀ DEL PRODOTTO SCALARE.** Se  $\{\mathbf{u}_n\}$  e  $\{\mathbf{v}_n\}$  sono due successioni di vettori di  $\mathcal{H}$  che convergono in norma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{v},$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}_n | \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

### 17.3 Lo spazio $\ell^2$

Lo spazio  $\mathbb{C}^n$ , con prodotto scalare dato da (17.3) è uno spazio di Hilbert finito-dimensionale. L'esempio più semplice di spazio di Hilbert infinito-dimensionale è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile, vale a dire delle successioni infinite  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$ , con componenti  $z_k$  complesse, tali che

$$\|\mathbf{z}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty \quad (17.6)$$

Questo spazio è usualmente chiamato  $\ell^2$ . In questo spazio il prodotto scalare è così definito

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k w_k \quad (17.7)$$

La serie a secondo membro converge in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (esercizio).

Lo spazio  $\ell^2$  è completo ed è quindi uno spazio di Hilbert. La dimostrazione di questo fatto è data nei complementi 17.11.2 (dimostrazione 5).

### 17.4 La notazione di Dirac

In meccanica quantistica, lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un raggio in uno spazio di Hilbert complesso e separabile (daremo la definizione di spazio separabile nel seguito) o, equivalentemente, da un punto nello spazio di Hilbert proiettivo del sistema.



David Hilbert (1862–1943) è stato un matematico tedesco, probabilmente il più influente a cavallo tra il XIX e il XX secolo. Noto il per il suo approccio formalistico al problema dei fondamenti della matematica, si occupò anche di fisica, in particolare arrivò alle equazioni della relatività generale quasi parallelamente ad Einstein. L'azione, da cui seguono queste equazioni per principio di minimo, è detta "azione di Einstein-Hilbert". Sembra che abbia detto: "la fisica è troppo difficile per essere lasciata ai fisici".



Con in mente le applicazioni della teoria degli spazi di Hilbert alla meccanica quantistica, Dirac introdusse la notazione dei bra e dei ket per descrivere i vettori di uno spazio di Hilbert. Questa notazione può essere descritta nel seguente modo.

Incominciamo col complicarci la vita e rappresentiamo un vettore  $\mathbf{u}$  di  $\mathcal{H}$  con il simbolo  $|\mathbf{u}\rangle$ . Lo chiameremo vettore “ket”, ma resta sempre lo stesso vettore  $\mathbf{u}$  di prima. Adesso rappresentiamo lo stesso vettore  $\mathbf{u}$  con il simbolo  $\langle\mathbf{u}|$ , che chiameremo vettore “bra”, ma resta sempre, di nuovo, lo stesso vettore di prima. Introduciamo infine le seguenti regole per manipolare i simboli di bra e ket

$$|\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}\rangle = \alpha|\mathbf{u}\rangle + \beta|\mathbf{v}\rangle \quad \langle\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}| = \bar{\alpha}\langle\mathbf{u}| + \bar{\beta}\langle\mathbf{v}|$$

Il prodotto scalare (“braket”<sup>1</sup>) risulta, simbolicamente, il prodotto dei simboli bra e ket,

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$$

La notazione rende così manifesto che il prodotto scalare è una forma hermitiana (lineare in un argomento e antilineare nell’altro).

Si potrebbe dare alla notazione simbolica anche un significato matematico e identificare i “bra” con il duale  $\mathcal{H}^*$  di  $\mathcal{H}$  (cioè lo spazio dei funzionali lineari continui su  $\mathcal{H}$ ). Ma si tratta di una sofisticazione matematica inutile: poiché per il teorema di Riesz,  $\mathcal{H}^*$  è naturalmente identificato con  $\mathcal{H}$  stesso, è fuorviante pensare che per rappresentare lo stato di un sistema quantistico siano necessari due tipi distinti di vettori, i “bra” e i “ket” o che il prodotto scalare sia tra un prodotto misterioso di un “bra” e di un “ket”. In breve, la notazione di Dirac va presa per quello che è (indipendentemente da che cosa ne pensasse Dirac stesso): una notazione conveniente e utile, ma niente di più.

La notazione di Dirac è particolarmente conveniente per denotare l’operatore di proiezione ortogonale su un vettore  $\mathbf{v}$  con

$$\frac{|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|}{\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle} = |\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|, \quad \mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

per cui la proiezione di  $\mathbf{u}$  lungo  $\mathbf{v}$  risulta

$$|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle.$$

Con la notazione di Dirac, risulta particolarmente trasparente che il quadrato del proiettore sia il proiettore stesso:  $|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}||\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}| = |\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|$ , in quanto  $\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle = 1$ .

### 17.5 Basi ortonormali

Una successione (limitata o infinita) di vettori  $\{\mathbf{e}_n\}$  in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  per cui  $\langle\mathbf{e}_n|\mathbf{e}_m\rangle = 0$  quando  $n \neq m$  si chiama *sistema*

<sup>1</sup> Risulta così svelato l’arcano della terminologia “bra” e “ket”: “braket” in inglese vuol dire “parentesi” (e ci sono ovviamente due tipi di parentesi, quelle che hanno la gobba a sinistra e quelle che la hanno a destra). Questa terminologia, che riflette anche un sottile humor, è di Dirac.

ortogonale. Se inoltre si ha  $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle = \|\mathbf{e}_n\| = 1$ , il sistema si chiama *ortonormale*. Riassumendo, per tale sistema si ha

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (17.8)$$

Se un sistema ortogonale è formato da un numero finito  $n$  di vettori, questi vettori sono linearmente indipendenti. Infatti, considerando il prodotto scalare dell'elemento  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  con  $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n = 0$ , si deduce che  $a_i = 0$ , per  $i = 1, \dots, n$ . Quindi, in uno spazio di Hilbert di dimensione finita  $N$ , un sistema ortonormale è costituito da non più di  $N$  elementi.

Vogliamo adesso chiarire quali requisiti deve avere un sistema ortonormale per essere l'analogo infinito-dimensionale di una *base* ortonormale, concetto che si assume noto per gli spazi di dimensione finita. In primo luogo, osserviamo che una scrittura del tipo

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \quad (17.9)$$

va intesa nel senso della convergenza in norma della serie a secondo membro, significa cioè

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{e}_n \right\| = 0.$$

In secondo luogo, osserviamo che se la serie converge al vettore  $\mathbf{u}$ , allora

$$c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.10)$$

Questo si verifica moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{e}_n$  ambo i membri della (17.9) e sfruttando le condizioni di ortogonalità dei vettori della base:<sup>2</sup>

$$\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{e}_m | \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_n \rangle = c_m$$

I coefficienti  $c_n$  sono dunque le *coordinate* di  $\mathbf{u}$  rispetto al sistema ortogonale  $\{\mathbf{e}_n\}$ , nello stesso senso in cui questo vale per uno spazio di dimensione finita. Questo fatto può essere espresso in forma compatta riscrivendo la (17.9) con la notazione di Dirac:

$$|\mathbf{u}\rangle = \sum_n |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad (17.11)$$

È importante osservare che la precedente relazione vale sotto l'ipotesi che  $|\mathbf{u}\rangle$  sia uguale alla serie a secondo membro, ma non sempre questo è vero. Per esempio, i vettori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  dello spazio euclideo tridimensionale formano un sistema ortogonale, ma se decomponiamo rispetto a questo sistema un vettore  $\mathbf{u}$  che non giace nel piano da essi generato, la somma  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$  (cioè il secondo membro della

<sup>2</sup> A rigore, si dovrebbe procedere con cautela e scrivere

$$\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{u} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathbf{e}_m | \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{e}_n \rangle.$$

Per il teorema di continuità del prodotto scalare (sezione 17.2), il limite può essere scambiato con la somma, quindi

$$\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{u} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \langle \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_n \rangle = c_m$$

(17.11), non ci restituisce il vettore  $\mathbf{u}$ , ma la sua proiezione ortogonale sul piano generato da  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ .

Nel caso finito-dimensionale, un sistema ortonormale è una base, quando “non si perde niente”, cioè quando l’operatore  $\sum_n |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n|$  non proietta il vettore su un sottospazio, ma è l’identità su tutto lo spazio. Questa caratterizzazione si estende in modo naturale al caso infinito-dimensionale<sup>3</sup>

Un sistema ortogonale  $\{\mathbf{e}_n\}$  è completo in  $\mathcal{H}$  o, equivalentemente, è una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ , quando QUALUNQUE vettore  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  può essere espresso come

$$\mathbf{u} = \sum_n |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle. \quad (17.12)$$

Abbiamo detto che l’uguaglianza (17.11) va intesa come convergenza in norma,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \right\| = 0.$$

Calcoliamo adesso il quadrato della norma della differenza tra il vettore  $\mathbf{u}$  e la somma parziale  $N$ -esima della serie:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \right\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle | \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - 2 \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 + \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \end{aligned} \quad (17.13)$$

Da cui segue che si ha convergenza in norma per  $N \rightarrow \infty$  se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2. \quad (17.14)$$

Questa uguaglianza è nota come *identità di Parseval*. Perciò

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  in  $\mathcal{H}$  sia una base, è che l’identità di Parseval sia soddisfatta da ogni vettore  $\mathbf{u}$  in  $\mathcal{H}$ .

(17.15)

Si osservi che, indipendentemente dal fatto che la serie converga a  $\mathbf{u}$ , il secondo membro della (17.13) è sempre positivo. Passando al limite  $N \rightarrow \infty$  della (17.13), si ottiene la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2, \quad (17.16)$$

<sup>3</sup> In uno spazio di dimensione finita, decidere che un sistema ortogonale è una base è una semplice questione di conteggio: se lo spazio ha dimensione  $N$ , un sistema ortogonale di  $N$  elementi è automaticamente una base. Nel caso infinito il conteggio non funziona. Non basta infatti che un sistema abbia infiniti elementi per essere una base. Per esempio, le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos nx$$

per  $-\pi < x \leq \pi$ , sono un sistema ortonormale, per la (16.3), ma non formano una base. Questo sistema non è completo (“si perde qualcosa”): con combinazioni lineari, anche infinite, di queste funzioni, si possono formare solo funzioni pari (“si perdono le funzioni dispari”).

nota come *disuguaglianza di Bessel*, che vale dunque sotto la sola ipotesi che il sistema  $\{\mathbf{e}_n\}$  sia ortonormale (e non necessariamente una base).

AVVERTENZA. L'esistenza di un sistema ortonormale completo *numerabile* non può essere data per scontata. In effetti, non è conseguenza delle proprietà del prodotto scalare e della completezza della norma da esso indotta. Se uno spazio di Hilbert ha una base ortogonale completa numerabile è detto *separabile*. Nel seguito assumeremo tacitamente che questa condizione sia soddisfatta e identificheremo la nozione di spazio di Hilbert con quella di spazio di Hilbert separabile.

SISTEMA ORTOGONALE CHIUSO. Un'altra nozione importante è la nozione di sistema ortogonale *chiuso*, condizione che si realizza quando non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema. In altre parole, un sistema  $\{\mathbf{e}_n\}$  è chiuso se dalle relazioni

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

segue che  $\mathbf{u} = 0$ .

Chiusura e completezza di un sistema ortonormale sono identificate dal seguente teorema (si veda la dimostrazione 7 dei complementi 17.11.2):

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale sia una base è che sia chiuso.	(17.17)
--	---------

### 17.6 Teorema di Riesz-Fisher

Abbiamo visto che, fissato un sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$ , ad un vettore  $\mathbf{u}$  è associata la successione delle sue coordinate

$$c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.18)$$

Questa successione è tale, per la disuguaglianza di Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2,$$

che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (17.19)$$

è convergente.

Consideriamo ora una successione  $c_1, c_2, c_3, \dots$  tale che la serie (17.19) sia convergente. Esiste un vettore  $\mathbf{u}$  per cui valgono le (17.18)? La risposta è affermativa ed è data dal seguente teorema:

**TEOREMA DI RIESZ-FISHER.** Sia  $\{\mathbf{e}_n\}$  una base ortonormale in un spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se  $\{c_n\}$  è una successione di numeri tale che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge, allora esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  tale che

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \quad e \quad c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

(Si veda la dimostrazione 8 dei complementi 17.11.2.)

### 17.7 Universalità dello spazio $\ell^2$

Una conseguenza importante del teorema di Riesz-Fisher è che tutti gli spazi di Hilbert infinito dimensionali<sup>4</sup> sono *unitariamente equivalenti* allo spazio  $\ell^2$  delle successioni a quadrato sommabile.

<sup>4</sup> Occorrerebbe aggiungere “separabili”, ma nella sezione precedente abbiamo convenuto di identificare la nozione di spazio di Hilbert con quella di spazio di Hilbert separabile.

Prima di tutto, chiariamo la terminologia. Due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  sono detti unitariamente equivalenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori  $\mathbf{u}$  di  $\mathcal{H}$  e i vettori  $\mathbf{u}'$  di  $\mathcal{H}'$  tale che:

- (1) se a  $\mathbf{u}$  corrisponde  $\mathbf{u}'$  e a  $\mathbf{v}$  corrisponde  $\mathbf{v}'$ , al vettore  $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$  di  $\mathcal{H}$  corrisponde il vettore  $\alpha \mathbf{u}' + \beta \mathbf{v}'$  di  $\mathcal{H}'$  qualunque siano i numeri  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- (2) se a  $\mathbf{u}$  corrisponde  $\mathbf{u}'$ , allora

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{u}'\|_{\mathcal{H}'}$$

Adesso rendiamo esplicito il senso dell'affermazione iniziale. Nella sezione 17.3 abbiamo mostrato che lo spazio  $\ell^2$  delle successioni a quadrato sommabile è uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Una sistema ortonormale in  $\ell^2$  è dato dai vettori  $\hat{\mathbf{e}}_n, n = 1, 2, 3, \dots$  le cui componenti sono tutte 0 eccetto per l' $n$ -esima, che vale 1:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad \dots$$

Tale sistema è ovviamente chiuso e quindi completo; dunque  $\{\hat{\mathbf{e}}_n\}$  è una base ortonormale in  $\ell^2$ . Se  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $\{\mathbf{e}_n\}$  una base ortonormale in esso, si consideri la corrispondenza

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \dots$$

e la si estenda per linearità

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \leftrightarrow \hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)$$

Allora a  $\mathbf{u}$  in  $\mathcal{H}$  è associato il vettore in  $\ell^2$

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots), \quad c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

e

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\ell^2}^2$$

segue dall'identità di Parseval. Viceversa, per il teorema di Riesz-Fisher, a

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)$$

in  $\ell^2$  è associato il vettore  $\mathbf{u}$  in  $\mathcal{H}$ . La corrispondenza tra  $\mathcal{H}$  e  $\ell^2$  è dunque biunivoca e isometrica, che è quanto si voleva dimostrare.

L'ovvio corollario di questo è che *tutti gli spazi di Hilbert sono unitariamente equivalenti*. Questo fatto risulta meno misterioso di quanto sembri se si tiene conto della seguente analogia. Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , astrattamente definito, è l'analogo infinito-dimensionale dello spazio euclideo tri-dimensionale  $E^3$  della geometria elementare. Fissare una base ortormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  in  $\mathcal{H}$  è come fissare il sistema di versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  in  $E^3$ . Lo spazio  $\ell^2$  è come lo spazio  $\mathbb{R}^3$  delle coordinate  $(x, y, z)$  dei vettori rispetto al sistema di riferimento individuato dai versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Inoltre, la corrispondenza tra  $\mathcal{H}$  e  $\ell^2$  è analoga alla corrispondenza tra vettori e terne di coordinate,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \leftrightarrow (x, y, z).$$

Infine, l'identità di Parseval è la versione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora  $\|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

### 17.8 Proiezioni ortogonali

Un sottospazio  $\mathcal{M}$  di  $\mathcal{H}$  è detto *chiuso* se è un sottospazio vettoriale *completo* nella norma, cioè tale che se  $\{\mathbf{u}_n\}$  è una successione convergente di elementi di  $\mathcal{M}$ , anche il suo limite in norma è in  $\mathcal{M}$ . In altre parole,

$$\text{se } \mathbf{u}_n \in \mathcal{M} \text{ e } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\| \rightarrow 0 \text{ allora } \mathbf{u} \in \mathcal{M}$$

Dunque, un sottospazio chiuso è, esso stesso, uno spazio di Hilbert.

Concordemente con le nozioni usuali di geometria elementare, due elementi di uno spazio con prodotto scalare sono detto *ortogonali*,  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ , se  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$ . Si dimostra facilmente che il *complemento ortogonale*

$$\mathcal{M}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \text{ tale che } \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ per qualunque } \mathbf{v} \in \mathcal{M}\}$$

di un qualunque sottoinsieme  $\mathcal{M}$  di  $\mathcal{H}$  è un sottospazio chiuso. Il seguente teorema è particolarmente importante:

**TEOREMA DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE.** *Se  $\mathcal{M}$  è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , allora ciascun  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$  può essere unicamente rappresentato come*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \quad (17.20)$$

dove  $\mathbf{v}_{\parallel} \in \mathcal{M}$  e  $\mathbf{v}_{\perp} \in \mathcal{M}^{\perp}$ . Inoltre,  $\mathbf{v}_{\parallel}$  (che è chiamato la proiezione ortogonale di  $\mathbf{v}$  su  $\mathcal{M}$ ) soddisfa

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \quad (17.21)$$

per qualunque altro elemento  $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$

Il contenuto del teorema è rappresentato nella figura 17.1. Questo fatto è geometricamente ovvio in uno spazio euclideo, sia per quel che riguarda la (17.20) sia per la (17.21), che esprime il fatto che la distanza minima tra il punto  $Q$  individuato da  $\mathbf{v}$  e il sottospazio  $\mathcal{M}$  è quella che si percorre partendo da  $Q$  e muovendosi nella direzione ortogonale a  $\mathcal{M}$ . La cosa interessante è che questo teorema è vero, pari pari in uno spazio di Hilbert qualunque. Non ne daremo la dimostrazione generale, ma, nel seguito, in un caso particolare.

Dato  $\mathcal{M}$ , l'operatore  $P$  che proietta un qualunque vettore  $\mathbf{v}$  nel vettore  $\mathbf{v}_{\parallel}$ ,

$$P\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel},$$

è chiamato proiettore ortogonale di  $\mathcal{H}$  su  $\mathcal{M}$ . Soddisfa le ovvie proprietà geometriche di una proiezione ortogonale, in particolare è idempotente

$$P^2 = P.$$

Inoltre è continuo: se  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| \rightarrow 0$ , allora  $\|P(\mathbf{u}_n) - P(\mathbf{u})\| \rightarrow 0$ . Si osservi che il proiettore su  $\mathcal{M}^{\perp}$  è  $I - P$ , dove  $I$  è l'operatore identità.

Il teorema della proiezione garantisce l'unicità della decomposizione di  $\mathcal{H}$  in somma ortogonale di un suo sottospazio chiuso  $\mathcal{M}$  e del suo complemento ortogonale  $\mathcal{M}^{\perp}$ . Per esprimere questo fatto, di solito si scrive

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$$

### 17.9 Approssimazione in media quadratica

Sia  $\{\mathbf{e}_n\}$  una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ , si fissi un numero  $N$  (ad esempio  $N = 10$ ) e si consideri l'insieme di tutti i vettori

$$\sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \quad (17.22)$$

per tutte le successioni  $(z_1, z_2, \dots, z_N)$  di numeri complessi. L'insieme  $\mathcal{M}$  così ottenuto è un sottospazio finito-dimensionale di  $\mathcal{H}$  (e quindi chiuso), di dimensione  $N$  (e quindi isometricamente isomorfo a  $\mathbb{C}^N$ ).

Sia  $\mathbf{u}$  un qualunque vettore di  $\mathcal{H}$ . Si osservi che in notazione di Dirac, l'operatore di proiezione  $P$  su  $\mathcal{M}$  può essere espresso come

$$P = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n|.$$

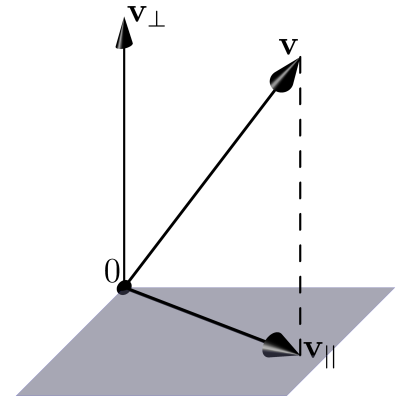


Figura 17.1: Decomposizione ortogonale di un vettore  $\mathbf{v}$  come somma della sua componente  $\mathbf{v}_{\parallel}$  in  $\mathcal{M}$  (il piano orizzontale in figura) e la sua componente verticale  $\mathbf{v}_{\perp}$  nello spazio  $\mathcal{M}^{\perp}$  (la direzione verticale in figura). La lunghezza della linea tratteggiata è la norma di  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$ . Il vettore  $\mathbf{v}_{\parallel}$  è il vettore nel piano  $\mathcal{M}$  che si trova alla distanza minima da  $\mathbf{v}$ . Qualunque altro vettore nel piano si trova ad una distanza maggiore da  $\mathbf{v}$ .

Infatti la proiezione ortogonale di  $\mathbf{u}$  su  $\mathcal{M}$  è

$$P\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

Adesso ci domandiamo quale sia il vettore in  $\mathcal{M}$  che meglio approssima  $\mathbf{u}$ . Per rispondere a questa domanda usiamo il metodo dei minimi quadrati. Consideriamo la norma al quadrato della differenza  $D$  tra  $\mathbf{u}$  e un generico vettore di  $\mathcal{M}$ , cioè del tipo (17.22),

$$D^2 = \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \right\|^2$$

e determiniamo quali siano i valori dei coefficienti  $z_n$  tale che  $D^2$  sia minimo. Si ha

$$\begin{aligned} D^2 &= \langle \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n | \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N \bar{z}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle - \sum_{n=1}^N z_n \langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_n \rangle + \sum_{n=1}^N |z_n|^2 \end{aligned}$$

Il minimo di  $D^2$  (se esiste) è in corrispondenza dell'annullarsi delle derivate prime  $\partial D^2 / \partial z_k = 0$  e  $\partial D^2 / \partial \bar{z}_k = 0$  (trattando le  $z$  e le  $\bar{z}$  come variabili indipendenti). Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2}{\partial z_k} &= -\langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_k \rangle + \bar{z}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_k = \langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_k \rangle \\ \frac{\partial D^2}{\partial \bar{z}_k} &= -\langle \mathbf{e}_k | \mathbf{u} \rangle + z_k = 0 \quad \Rightarrow \quad z_k = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

Si può verificare che per i valori così ottenuti si ha davvero un minimo e non un massimo o un punto sella (esercizio a casa). Il vettore in  $\mathcal{M}$  a distanza minima da  $\mathbf{u}$  è proprio

$$P\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

in accordo con (17.21). La miglior approssimazione di un vettore in uno spazio più piccolo di quello in cui vive il vettore è dunque la proiezione del vettore stesso in quel sottospazio!

Ogni qual volta confrontiamo le nostre teorie con l'esperienza, o facciamo simulazioni al computer, siamo sempre costretti a lavorare con spazi piccoli, cioè finiti, anche se le nostre teorie fisiche sono formulate in spazi infiniti. Non dovrebbe quindi sorprendere che il teorema della proiezione sia alla base di molti metodi di approssimazione che si utilizzano in fisica e nelle scienze applicate.



## 17.10 PROBLEMI

PROBLEMA 17.1.  $\square$

Determinare quali dei seguenti insiemi è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare e se è uno spazio vettoriale reale o complesso.

- (i) Lo spazio  $\mathcal{P}_n(I)$  dei polinomi in un intervallo  $I$  della retta reale che sono: di grado minore o uguale a  $n$ , con coefficienti complessi e su  $\mathbb{C}$  (cioè sono permesse moltiplicazioni con numeri complessi).
- (ii) Lo spazio  $\mathcal{P}(I)$  dei polinomi in un intervallo  $I$  della retta reale che sono: con coefficienti immaginari e su  $\mathbb{R}$  (cioè sono permesse

moltiplicazioni solo con numeri reali).

- (iii) L'insieme dei numeri reali su  $\mathbb{C}$ .
- (iv) L'insieme delle funzioni a valori complessi di classe  $C^p(I)$  su  $\mathbb{R}$ .

PROBLEMA 17.2.  $\square$

Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Dimostrare che se  $\{e_n\}$  e  $\{f_n\}$  sono basi di  $X$  e una di esse è finita, cioè, con un numero finito di elementi, allora anche l'altra lo è e il numero di elementi è lo stesso.

PROBLEMA 17.3.  $\square$

Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  in uno spazio con prodotto scalare, sotto quali condizioni vale l'uguaglianza  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ ? Può questa uguaglianza valere anche se i vettori non sono ortogonali?

## 17.11 COMPLEMENTI

### 17.11.1 Schema riassuntivo

**SPAZIO VETTORIALE** Sui reali o sui complessi. Si assume sia noto tutto al riguardo. In particolare, che la dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua base.

**SPAZIO METRICO** Insieme equipaggiato con una nozione di distanza, o metrica, tra coppie di suoi elementi, avente le seguenti proprietà

1.  $d(x, y) \geq 0$  (positività)
2.  $d(x, y) = 0$  sse  $x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (simmetria)
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (disuguaglianza triangolare)

[Si osservi che (1) segue da (2,3,4).]

**SUCCESSIONE DI CAUCHY** Successione  $(x_n)$  di punti in un spazio metrico con la seguente proprietà: per ogni  $\epsilon > 0$  esiste intero positivo  $N$  tale che per tutti  $m, n > N$ ,  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ .

**SPAZIO METRICO COMPLETO** Spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy di suoi elementi converge a un suo elemento.

**SPAZIO VETTORIALE NORMATO** Spazio vettoriale equipaggiato con una nozione di lunghezza, o norma, avente le seguenti proprietà

1.  $\|v\| > 0$  se  $v \neq 0$
2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio vettoriale normato è automaticamente metrico, con distanza indotta dalla norma,  $d(u, v) = \|u - v\|$ .

**SPAZIO VETTORIALE NORMATO COMPLETO, ALIAS "SPAZIO DI BANACH"** Spazio metrico vettoriale normato, completo rispetto alla metrica  $d(u, v) = \|u - v\|$  indotta dalla norma.

**CRITERIO DI COMPLETEZZA PER UNO VETTORIALE SPAZIO NORMATO** Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente nello spazio è convergente. In altre parole, il criterio di completezza è

$$\text{Se } \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} v_k \text{ converge} \quad (17.23)$$

Si veda la dimostrazione 6 nella sezione 17.11.2.

**SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE, ALIAS "SPAZIO PRE-HILBERTIANO"** Spazio vettoriale equipaggiato con nozioni di angolo (tra vettori) e lunghezza (di vettori), compattamente riassunte dalla nozione di prodotto scalare  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , avente le seguenti proprietà

1.  $\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$  (simmetria coniugata)
2.  $\langle \phi | \alpha\psi + \beta\chi \rangle = \alpha\langle \phi | \psi \rangle + \beta\langle \phi | \chi \rangle$  (linearità nel secondo argomento)
3.  $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$  (=0 sse  $\psi = 0$ ) (positività)

Si osservi che (1) e (2) implicano  $\langle \alpha\psi + \beta\chi | \phi \rangle = \bar{\alpha}\langle \psi | \phi \rangle + \bar{\beta}\langle \chi | \phi \rangle$  (il prodotto scalare è dunque una forma detta hermitiana o sesquilineare, cioè una forma definita su coppie di vettori di uno spazio vettoriale complesso che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro).

#### PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE DI UNO SPAZIO PRE-HILBERTIANO

(1) Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \phi | \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\| .$$

dove

$$\|\phi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}, \quad \|\psi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

(2) Uno spazio pre-hilbertiano è normato, con norma

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

ed è quindi uno spazio metrico, con distanza indotta dalla norma

$$d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\| = \sqrt{\langle \psi - \phi | \psi - \phi \rangle} .$$

**SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE COMPLETO, ALIAS "SPAZIO DI HILBERT"** Spazio vettoriale con prodotto scalare completo nella metrica indotta dal prodotto scalare. Dunque, uno spazio di Hilbert è automaticamente uno spazio di Banach.

**SISTEMA ORTONORMALE IN UNO SPAZIO DI HILBERT** Una successione (limitata o infinita) di vettori  $\{\mathbf{e}_n\}$  per cui  $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_m \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle = \|\mathbf{e}_n\| = 1$ .

**CRITERIO DI CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FOURIER GENERALIZZATA** Per un vettore  $\mathbf{u}$  in uno spazio di Hilbert e sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$ :

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

**DISUGUAGLIANZA DI BESSEL** Vettore  $\mathbf{u}$  e sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  in uno spazio di Hilbert. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2$$

**DEFINIZIONE DI SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO O BASE ORTONORMALE**  $\{\mathbf{e}_n\}$  Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{identità di Parseval})$$

per *qualsunque* vettore  $\mathbf{u}$  nello spazio di Hilbert.

**SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE** Quando ammette un sistema ortonormale completo *numerabile*.

**SISTEMA ORTOGONALE CHIUSO** Quando non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema.

**CRITERIO DI COMPLETEZZA DI UNA BASE ORTONORMALE** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale sia completo è che sia chiuso.

### 17.11.2 Dimostrazioni di alcuni teoremi

**Dimostrazione 1** (Convergenza nella norma uniforme = convergenza uniforme). Se  $(f_n)$  è una successione di funzioni continue in  $[a, b]$ , allora

$$f_n \xrightarrow{\text{uniforme}} f \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (17.24)$$

A questo proposito, ricordiamo che convergenza uniforme significa che per ogni  $\epsilon$  positivo esiste un  $N$ , lo stesso per tutti gli  $x$  in  $[a, b]$  tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

per tutti gli  $n \geq N$  e tutti gli  $x$  in  $[a, b]$ . È quindi facile vedere la direzione  $\Rightarrow$  della (17.24): se  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  per tutti gli  $x$  in  $[a, b]$ , lo stesso vale quando si passa a sup, e viceversa. La direzione  $\Leftarrow$  è altrettanto facile ed è lasciata come esercizio.  $\square$

**Dimostrazione 2** (Completezza di  $C[a, b]$  rispetto alla norma uniforme). Si osservi che per  $x$  fissato,  $(f_n(x))$  è una successione di Cauchy di numeri reali e quindi esiste il limite  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (convergenza puntuale). Ma la convergenza è anche uniforme. Infatti, essendo  $(f_n)$  è una successione di Cauchy allora c'è un  $N$ , indipendente da  $x$ , tale che  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ , per tutti gli  $n$  e  $m$  maggiori di  $N$ . Il che implica che  $|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$  per tutti gli  $m \geq N$  e gli  $x \in [a, b]$ . Ergo,  $f_m$  converge a  $f$  uniformemente. Poiché  $f$  è il limite uniforme di funzioni continue,  $f$  stessa è continua e quindi  $(f_n)$  converge a  $f$  in  $C[a, b]$ .  $\square$

**Dimostrazione 3** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Dimostriamo la (17.5),

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Se  $\mathbf{v} = 0$  la disuguaglianza è banalmente verificata. Assumiamo  $\mathbf{v} \neq 0$  e consideriamo  $\|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\| \geq 0$ , dove  $t$  è un qualunque numero reale. Sviluppamo la norma sulla base della (17.4),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 t + |\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 \|\mathbf{v}\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Si scelga il valore di  $t$  che minimizza la forma quadratica a secondo membro: derivando rispetto al tempo si ottiene  $t = 1 / \|\mathbf{v}\|^2$ . Allora

$$0 \leq \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$$

che è vera sse  $|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ . La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta così verificata.  $\square$

**Dimostrazione 4** (Disuguaglianza triangolare). *Dimostriamo la disuguaglianza triangolare per la norma indotta dal prodotto scalare. Si ha*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{per Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

□

**Dimostrazione 5** (Completezza di  $\ell^2$ ). *Dimostriamo che ogni successione di Cauchy in  $\ell^2$  converge ad un elemento di  $\ell^2$ . Sia  $(\mathbf{z}^{(n)})$  una qualunque successione di Cauchy in  $\ell^2$ , cioè tale che*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\| = 0$$

e dimostriamo che esiste un elemento  $\mathbf{z} \in \ell^2$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}\| = 0 \quad (17.25)$$

Osserviamo che, essendo per ogni indice  $k$

$$|z_k^{(n)} - z_k^{(m)}| \leq \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\|,$$

esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} z_k.$$

Proviamo ora che la successione  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$  è in  $\ell^2$ . Infatti, fissato un generico  $N$ , tronchiamo le successioni fino a  $N$ , ottenendo così vettori nello spazio vettoriale finito dimensionale  $\mathbb{C}^N$ . Denotiamo con un pedice  $N$  i vettori così ottenuti e consideriamo la disuguaglianza triangolare in  $\mathbb{C}^N$

$$\|\mathbf{z}_N^{(n)}\| \leq \|\mathbf{z}_N^{(n)} - \mathbf{z}_N^{(m)}\| + \|\mathbf{z}_N^{(m)}\|$$

cioè

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)} - z_k^{(m)}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(m)}|^2}$$

L'osservazione importante è che il primo membro è limitato da una costante indipendente da  $n$  e da  $N$ , possiamo quindi passare al limite  $n \rightarrow \infty$  a primo membro e stabilire così la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^N |z_k|^2$$

Per provare ora la (17.25), osserviamo che, fissato  $\epsilon > 0$ , esiste  $N_\epsilon$  tale che per tutti gli  $n$  e  $m$  maggiori di  $N_\epsilon$ , si ha (essendo  $(\mathbf{z}^{(n)})$  una successione di Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(m)} - z_k^{(n)}|^2 < \epsilon^2$$

da qui, passando al limite per  $m \rightarrow \infty$ , segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_k^{(n)}|^2 < \epsilon^2,$$

cioè la (17.25). □

**Dimostrazione 6** (Criterio di completezza per uno spazio vettoriale normato). Se lo spazio è completo e  $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$ , si consideri le somme parziali  $s_n = \sum_{k=1}^n v_k$ . Dalla disuguaglianza triangolare, per  $m < n$  si ha

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|v_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|v_k\| < \epsilon$$

se  $m$  è abbastanza grande, il che mostra che  $(s_n)$  è una successione di Cauchy. Viceversa, si assuma che ogni serie assolutamente convergente sia convergente e si consideri una successione di Cauchy  $(u_n)$ . Si prenda successivamente  $k_1 < k_2 < \dots$  in modo tale che  $\|u_m - u_n\| < 2^{-j}$  quando  $m, n \geq k_j$ . Si ponga  $v_1 = u_{k_1}$  e  $v_{k_j} = u_{k_{j+1}} - u_{k_j}$ . Allora  $\|v_j\| < 2^{-j}$  per  $j > 2$  e quindi  $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$  è assolutamente convergente e quindi convergente. Poiché  $u_{k_j} = v_1 + v_2 + \dots + v_{k_j}$ , la successione  $(u_{k_j})$  è convergente. Abbiamo mostrato che ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, che è abbastanza per dimostrare la completezza. □

**Dimostrazione 7** (Se un sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  è completo è anche chiuso e viceversa). Supponiamo che il sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  sia completo. Se non fosse anche chiuso esisterebbe un vettore  $\mathbf{v}$  con  $\|\mathbf{v}\| > 0$  tale  $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{v} \rangle = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . In tal caso avremmo

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\| ,$$

contro l'ipotesi che il sistema sia completo. Viceversa, se  $\{\mathbf{e}_n\}$  fosse chiuso ma non completo, esisterebbe un vettore  $\mathbf{u}$  tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n \rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \neq \mathbf{u}$$

e per il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n \rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

risulterebbe

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

contro l'ipotesi che  $\{\mathbf{e}_n\}$  sia chiuso. □

**Dimostrazione 8** (Riesz-Fisher). Per  $\{\mathbf{e}_n\}$  fissato, vogliamo dimostrare che se  $\{c_n\}$  è una successione di numeri tale che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge, allora esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$  e

$$c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.26)$$

Incominciamo col dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

è convergente. Infatti, posto

$$\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$$

si ha per  $n > m$

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n c_i \mathbf{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |c_i|^2$$

Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge per ipotesi, ne segue che

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = 0$$

e quindi, essendo lo spazio di Hilbert completo (ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio), esiste un vettore  $\mathbf{u}$  nello spazio di Hilbert tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{u}$ , cioè

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Il vettore  $\mathbf{u}$  ora trovato, per la (17.10), soddisfa le (17.26). Si osservi che nell'ottenere questo risultato non abbiamo sfruttato la completezza del sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$ . Se adesso assumiamo che  $\{\mathbf{e}_n\}$  sia completo, e quindi chiuso, è facile mostrare che il vettore  $\mathbf{u}$  trovato deve essere unico. Infatti, se esistessero due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  che soddisfano le (17.26), allora

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}' | \mathbf{e}_n \rangle = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ed essendo il sistema chiuso deve essere  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ .





## 18

# Analisi di Fourier di funzioni $L^2$ in un intervallo limitato

### 18.1 Lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile

Consideriamo la forma

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (18.1)$$

definita per coppie di funzioni  $f$  e  $g$  in  $C[a, b]$ . Questa forma definisce un prodotto scalare su  $C[a, b]$  con norma indotta

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (18.2)$$

Infatti, si verifica facilmente, per calcolo diretto, che vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*,  $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ , cioè

$$\int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}. \quad (18.3)$$

da cui segue la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

La proprietà della norma  $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$  è banalmente verificata. Pure la prima proprietà della norma è verificata, infatti

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

se e solo se  $f = 0$  (si osservi quanto è essenziale che la funzione sia continua). Nel seguito, chiameremo la norma (18.2) "norma  $L^2$ " e la convergenza nella norma  $L^2$  semplicemente "convergenza  $L^2$ ".

La convergenza  $L^2$  è usualmente anche chiamata convergenza in media quadratica. Se  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  è una successione di funzioni, si dice che converge in media quadratica a  $f(x)$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0,$$

che è proprio la convergenza  $L^2$ .

Da un punto di vista pratico, la convergenza  $L^2$  fornisce una nozione molto utile nelle applicazioni. Come mostrato nella figura 18.1, la media quadratica stima la distanza tra due funzioni in termini dell'area del quadrato della loro differenza (la regione in grigio) e quindi media le differenze tra le due funzioni su tutto l'intervallo; fornisce, per così dire, una stima globale media di quanto due funzioni siano vicine. In effetti, abbiamo già discusso questo fatto nell'ultima sezione del capitolo 16: si veda la figura 16.5 (C).

Al contrario, la convergenza uniforme, e quindi la norma uniforme, è molto più sensibile alle differenze locali in quanto stima la distanza tra le funzioni in termini del massimo della loro differenza (in figura 18.1, il segmento  $E_{max}$ ). Dovrebbe essere intuitivamente chiaro che si può avere convergenza in media quadratica senza che ci sia convergenza uniforme (ad esempio, può succedere che il massimo della differenza tra le due funzioni continua a fluttuare senza assestarsi su un valore limite, ma la media quadratica della differenza vada a zero). Anche in questo caso, si ritorni alla sezione 16.8 e si veda la figura 16.5 (B). Viceversa, se c'è convergenza uniforme, c'è convergenza  $L^2$ : la convergenza uniforme è più forte di quella in media quadratica. Se infatti si ha una successione di funzioni continue  $f_n$  che converge a  $f$  nella norma uniforme di  $C[a, b]$ , questo significa che per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $M$  tale che per tutti gli  $n > M$ ,

$$\sup |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

ma allora

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx < \epsilon^2(b - a) \tag{18.4}$$

Quindi:

*Se  $f_n$  è una successione di funzioni continue che converge a  $f$  nella norma uniforme di  $C[a, b]$ , allora converge a  $f$  anche nella norma  $L^2$ .*

(18.5)

Un fatto di notevole importanza è che lo spazio vettoriale  $C[a, b]$ , con il prodotto scalare (18.1) e norma  $L^2$ , non è uno spazio completo: è uno spazio *pre-hilbertiano*, ma NON uno spazio di Hilbert. Questo si verifica facilmente con un controesempio.

ESEMPPIO 18.1. In  $C[-1, 1]$ , sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

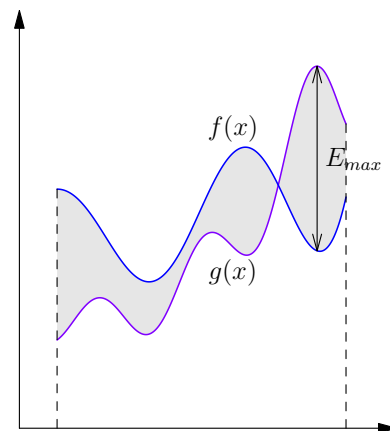


Figura 18.1: Distanze tra due funzioni  $f$  e  $g$ ,  $E_{max} = \sup |f(x) - g(x)|$  è la distanza nella norma uniforme. L'area della regione in grigio è la distanza in norma  $L^1$ . La norma  $L^2$  è  $\int |f(x) - g(x)|^2 dx$ .

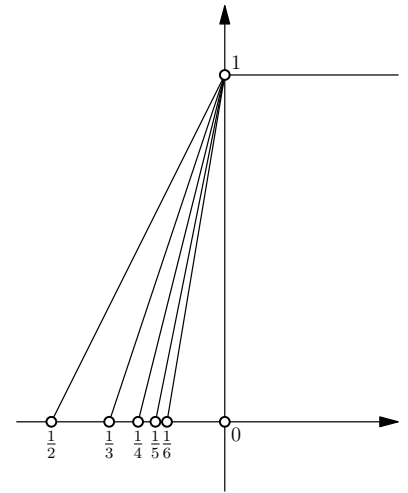
e si consideri la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq -1/n \\ nx + 1 & \text{se } -1/n < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1/n}^0 (nx + 1)^2 dx} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt{3n} = 0 \end{aligned}$$

Si ha quindi una successione di funzioni continue che nella norma  $L^2$  converge ad un funzione che non è continua.



Essendo  $C[a, b]$  non completo rispetto alla norma  $L^2$ , solo una parte dei risultati ottenuti per gli spazi di Hilbert si estende ad esso. Continuano a valere:

- (1) Il teorema di continuità del prodotto scalare presentato alla fine della sezione 17.2: se due successioni di funzioni continue  $\{f_n(x)\}$  e  $\{g_n(x)\}$  convergono in media alle funzioni continue  $f(x)$  e  $g(x)$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \overline{f_n(x)} g_n(x) dx = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

- (2) La nozione di *sistema ortonormale* di funzioni continue  $e_n(x)$  per cui vale

(i) Ortonormalità:

$$\int_a^b \overline{e_n(x)} e_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

(ii) Decomposizione ortonormale di una funzione continua  $f$ :

$$\text{Se } f(x) = \sum c_n e_n \text{ allora } c_n = \int_a^b \overline{e_n(x)} f(x) dx \quad (18.6)$$

- (3) La nozione di *sistema ortogonale completo* o *base ortonormale* di funzioni continue  $e_n(x)$  per cui si ha:

(iii) Completezza (identità di Parseval):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Si dimostra che sistemi di questo tipo effettivamente esistono (seni e coseni, per esempio, come vedremo in questo capitolo, e le funzioni di Hermite, nel prossimo capitolo).

NON VALE invece il teorema di Riesz-Fisher, perché in questo teorema si presuppone la completezza dello spazio, e lo spazio  $C[a, b]$  non è completo rispetto alla norma  $L^2$ . Questo fatto ha ripercussioni importanti. Significa che non esiste un isomorfismo tra gli elementi di  $C[a, b]$  e gli elementi di  $\ell^2$ . Più precisamente, fissata in  $C[a, b]$  una base ortonormale  $\{e_n(x)\}$ , mediante le (18.6), si può associare a ogni funzione continua un elemento di  $\ell^2$ , ma viceversa, fissato un elemento di  $\ell^2$  non è detto che esista una funzione continua la cui successione delle coordinate (18.6) coincide con l'elemento fissato di  $\ell^2$ .

Si è detto che per avere spazi isometricamente isomorfi a  $\ell^2$  occorre considerare spazi di Hilbert, cioè spazi con prodotto scalare completi. Nel nostro caso, ciò si ottiene completando  $C[a, b]$  con la norma  $L^2$ . Analogamente a quel che succede quando si passa dai razionali ai reali, si ottiene in questo modo uno spazio più ampio, lo spazio di tutte le successioni di Cauchy di  $C[a, b]$  rispetto alla norma  $L^2$ .

Questo spazio è usualmente denotato  $L^2[a, b]$  ed è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in  $[a, b]$ , cioè delle funzioni  $f$  su  $[a, b]$  tali che

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (18.7)$$

Per costruzione,

- $L^2[a, b]$  è uno spazio di Hilbert,
- $C[a, b]$  è denso in  $L^2[a, b]$ .

NOTA. Abbiamo usato il simbolo  $L^2[a, b]$  per denotare lo spazio delle funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ . Ma poiché questo integrale non è modificato dalla sostituzione dell'intervallo chiuso  $[a, b]$  con quello aperto  $(a, b)$  o con i semiaperti  $(a, b]$  e  $[a, b)$ ,  $L^2[a, b]$  coincide con  $L^2(a, b)$ ,  $L^2(a, b]$  e  $L^2[a, b)$ . Inoltre, non è richiesto che l'intervallo  $(a, b)$  sia limitato da una parte, dall'altra o da entrambe, e così abbiamo  $L^2(a, \infty)$ ,  $L^2(-\infty, b)$  e  $L^2(-\infty, \infty) = L^2(\mathbb{R})$ . In questi casi, così come nel caso in cui la funzione è illimitata, interpretiamo l'integrale di  $|f|^2$  come un integrale improprio di Riemann. Talvolta scriveremo semplicemente  $L^2$  quando l'intervallo sottostante non è specificato o quando è irrilevante specificarlo per la discussione.

## 18.2 Uno sguardo a problemi più avanzati

A proposito di quanto è stato detto nella sezione precedente, si possono sollevare delle domande, le cui risposte richiederebbero approfondimenti d'analisi che vanno al di là dei limiti della presente trattazione.

Un primo problema è questo: passando al completamento di  $C$  in  $L^2$ , inevitabilmente si introducono funzioni discontinue. Ad esempio, la  $f(x)$  dell'esempio 18.1 è discontinua, ma essendo ottenuta come limite nella norma  $L^2$  di una successione di funzioni continue è in  $L^2(-1, 1)$ .

Tuttavia, se si permettono funzioni discontinue nello spazio, allora viene meno la proprietà della norma che stabilisce che la norma è zero se e solo se la funzione è zero. Per convincersi di questo, si considerino le seguenti due funzioni: (i) la funzione che vale zero per tutti i punti di  $[a, b]$  e (ii) la funzione che vale zero eccetto che per un insieme numerabile di punti in  $[a, b]$  dove vale 1. La funzione (ii) ha norma  $L^2$  zero (in quanto l'integrale non vede un insieme numerabile di punti), ma non è (i), la funzione identicamente zero. Esiste una funzione diversa da 0 che ha norma 0.

Un altro problema è il seguente: la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz  $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$  assicura che il prodotto scalare di  $f$  e  $g$  è ben definito se le norme  $\|f\|_2$  e  $\|g\|_2$  esistono, cioè se  $|f|^2$  e  $|g|^2$  sono integrabili. Tuttavia, l'integrabilità secondo Riemann di  $|f|^2$  e  $|g|^2$  non garantisce l'integrabilità di  $\bar{f}g$ .

Questi problemi sollevano temi profondi di analisi di cui non possiamo occuparci approfonditamente in questa sede. Ad esempio, per rispondere alla prima domanda, occorre introdurre la nozione di misura di Lebesgue, il che esula dai limiti di questo corso. Rozzamente, l'idea è questa: i sottoinsiemi di  $[a, b]$  a cui è assegnata una misura sono tutti gli insiemi che si costruiscono facendo unioni e intersezioni numerabili di segmenti (ovviamente, segmenti contenuti in  $[a, b]$ ); la misura di un segmento è la sua lunghezza, e la misura di insiemi più complicati costruiti con segmenti è assegnata tenendo conto della proprietà essenziale della misura: *la misura di una collezione di insiemi disgiunti è la somma delle misure degli insiemi*. Fatto questo, si ha una nozione di *insieme di misura nulla*; per esempio, un insieme numerabile di punti ha misura nulla. In effetti, e più propriamente,  $L^2(a, b)$  non va inteso come uno spazio di funzioni, ma come uno spazio di *classi di equivalenza di funzioni*: appartengono alla stessa classe tutte le funzioni che differiscono al più su un insieme di misura nulla. In questo modo, la proprietà di positività della norma viene ristabilita (per le classi di equivalenza di funzioni).

Il secondo problema è solo uno dei segnali che la nozione di integrale di Riemann può dare dei problemi per le funzioni che si ottengono passando al completamento in norma  $L^2$  di  $C[a, b]$ . In effetti, la nozione adeguata per esprimere tutti gli integrali che possono intervenire nell'analisi (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier) è quella di integrale di Lebesgue, ma questo, come dicevamo, esula dai nostri scopi.

Fortunatamente, per gli integrali che si incontrano nella maggior parte delle applicazioni alla fisica (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier), l'integrale di Riemann è sufficiente.

### 18.3 Ortogonalità del sistema trigonometrico

Si consideri il prodotto scalare tra funzioni nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (18.8)$$

Lo spazio di Hilbert così ottenuto, di solito, lo si denota  $L^2([-\pi, \pi], \frac{d\theta}{2\pi})$  o  $L^2(\frac{d\theta}{2\pi})$ , essendo sottinteso l'intervallo  $[-\pi, \pi]$ ; un'altra notazione comune presso i matematici è  $L^2(\mathbb{T})$  e nel seguito useremo questa.

Incominciamo con l'osservare che le funzioni

$$e_n(\theta) = e^{in\theta} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.9)$$

formano un sistema ortonormale in  $L^2(\mathbb{T})$ . Infatti,

$$\langle e_n | e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{mn}.$$

Questo sistema è detto "trigonometrico".

Dalla teoria generale della sezione 17.5 (o per semplice calcolo diretto) traiamo le seguenti conclusioni

(1) Se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{cioè} \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

allora

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (18.10)$$

Si ritrova così, da un punto di vista diverso, la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier: la funzione da analizzare è un vettore, e l'analisi di Fourier di questa funzione la si reinterpreta geometricamente come la decomposizione del vettore rispetto al sistema ortonormale formato dalle funzioni  $e^{in\theta}$ .

(2) Vale la disuguaglianza di Bessel (17.16), che in questo caso assume la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

NOTA. Una scelta equivalente per il sistema trigonometrico è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Allora le (16.2), (16.3) e (16.4) diventano le relazioni fondamentali di ortonormalità per i vettori di questo sistema in  $L^2[-\pi, \pi]$ . Questa scelta comporta il seguente ricalibramento delle coordinate di Fourier:

$$c'_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \quad (18.11)$$

$$a'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (18.12)$$

$$b'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (18.13)$$

#### 18.4 Significato geometrico delle somme parziali

È tempo di collegare il trattamento “astratto” delle sezioni 17.8 e 17.9 riguardante le proiezioni ortogonali e l'approssimazione in media quadratica con il calcolo “concreto” della sezione 16.8 basato sul metodo dei minimi quadrati. Non sarà sfuggito che il contenuto delle sezioni 17.9 e sezione 16.8 è, “moralmente”, identico. In questa sezione vogliamo evidenziare il significato geometrico semplice di questo contenuto.

In primo luogo, osserviamo che i polinomi trigonometrici

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta] = \sum_{n=-N}^N d_n e^{in\theta}$$

formano un sottospazio finito-dimensionale, con dimensione  $2N + 1$ , di  $L^2(\mathbb{T})$ , lo spazio  $\mathcal{M}_N$  dei polinomi trigonometrici di grado  $N$ . Data una funzione  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , la sua somma parziale di Fourier

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

è un elemento di questo spazio.

Ridotto al nocciolo, il contenuto delle sezioni 16.8 e 17.9 è

- (1)  $S_N f$  è la proiezione ortogonale di  $f$  su  $\mathcal{M}_N$ .
- (2) Come conseguenza di (1), il vettore  $S_N f$  è, tra tutti i polinomi trigonometrici di grado  $N$ , cioè tra tutti i vettori in  $\mathcal{M}_N$ , quello più “vicino” a  $f$ , nel senso di “vicinanza” espresso dalla norma  $L^2$ . Questo fatto è rappresentato in figura 18.2.

#### 18.5 Completezza del sistema trigonometrico

Sulla base della (17.12), che il sistema trigonometrico sia completo significa che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_2 = 0 \quad (18.14)$$

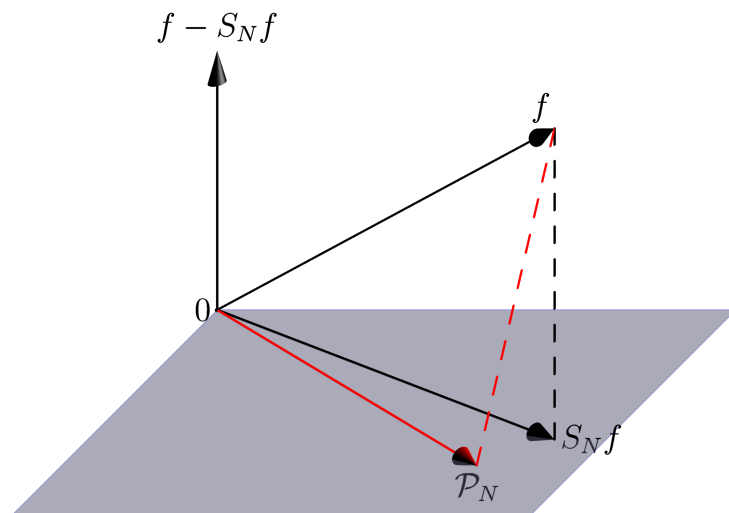


Figura 18.2: Decomposizione ortogonale

$$f = S_N f + (f - S_N f)$$

$S_N f$  è la proiezione ortogonale di  $f$  sullo spazio dei polinomi trigonometrici di grado  $N$ . È dunque il polinomio trigonometrico più vicino a  $f$ , qualunque altro polinomio  $\mathcal{P}_N$  si trova ad una distanza maggiore.

per QUALUNQUE  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , il che significa, con riferimento alla figura 18.2, che la lunghezza del vettore verticale tende a zero per  $N$  che tende all'infinito. Questo fatto è facile da dimostrare nel caso in cui  $f$  è una funzione continua.

Dalla sezione 16.6, ricordiamo la definizione di somma parziale regolarizzata

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

e che in quella sezione si era stabilito che la “vicinanza”<sup>1</sup> in norma uniforme di  $\mathcal{S}_N^{(r)} f$  a  $f$ . Poiché la norma uniforme è più forte della norma  $L^2$  (cfr. il teorema (18.5)), per ogni  $\epsilon$ , possiamo scegliere  $N$  e  $r$  tali che

$$\|f - \mathcal{S}_N^{(r)} f\|_2 < \epsilon$$

Ma  $\mathcal{S}_N^{(r)} f$  è un polinomio trigonometrico diverso da  $S_N f$ , quindi più lontano da  $f$  di quanto lo sia  $S_N f$  (si veda la figura 18.2). Allora

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - \mathcal{S}_N^{(r)} f\|_2 < \epsilon$$

Per il metodo del confronto dei limiti, si ottiene la (18.14) per  $f$  continua. Ma le funzioni continue sono dense in  $L^2$  (per costruzione), dunque la (18.14) risulta stabilita per QUALUNQUE funzione in  $L^2$ , che è quello che si voleva dimostrare.

<sup>1</sup> Più precisamente, si era stabilito che per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $r < 1$  e un intero  $M$  tali che per  $N \geq M$  si ha

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon$$

quando  $f$  è continua.



### 18.6 Analisi di Fourier in $L^2(\mathbb{T})$

Una conseguenza immediata della completezza del sistema trigonometrico è che l'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \tag{18.15}$$

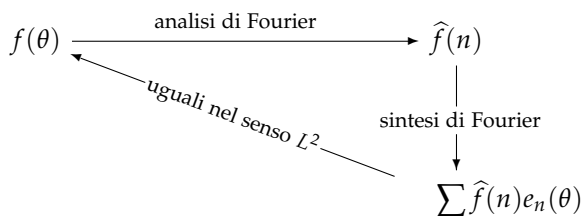
è verificata: la norma  $L^2$  della funzione è uguale alla norma  $\ell^2$  delle sue coordinate di Fourier.

L'analisi di Fourier in  $L^2(\mathbb{T})$ , dunque, non è altro che una realizzazione dell'equivalenza unitaria di  $L^2(\mathbb{T})$  e  $\ell^2$  rispetto alla base ortonormale  $\{e_n = e^{in\theta}\}$ . Se denotiamo con tale  $U_e$  la trasformazione da  $L^2(\mathbb{T})$  a  $\ell^2$  che realizza tale equivalenza unitaria, allora

$$\begin{array}{ccc} f(\theta) & \xrightarrow{U_e} & \hat{f}(n) = \langle e_n | f \rangle \\ \sum c_n e_n(\theta) & \xleftarrow{U_e^{-1}} & c_n \end{array}$$

La prima freccia, da sinistra a destra, associa a una funzione a quadrato integrabile, cioè in  $L^2(\mathbb{T})$ , le sue coordinate di Fourier  $\hat{f}(n)$ , che formano una successione a quadrato sommabile, cioè un vettore in  $\ell^2$ . La seconda freccia, da destra a sinistra, è la trasformazione inversa che ad ogni successione a quadrato sommabile associa una funzione a quadrato integrabile. Se  $c_n = \hat{f}(n)$ , si "chiude il cerchio" dell'analisi di Fourier

Si osservi che tutti gli esempi della sezione 16 sono inclusi in questo schema (se  $|c_n| \sim 1/n$ ,  $(c_n)$  è in  $\ell^2$  e  $f$  in  $L^2$ ).



### 18.7 Funzioni assolutamente integrabili

Una funzione è assolutamente integrabile se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty, \tag{18.16}$$

un fatto che si esprime scrivendo  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (18.3), per  $f(\theta) = 1$  e  $g(\theta) = |f(\theta)|$ , segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta}.$$

Quindi, se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , allora  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , ma non è detto che sia vero l'inverso (per esercizio, si trovi un esempio di funzione  $L^1$  che non è  $L^2$ ).

Se una funzione è assolutamente integrabile, le sue coordinate di Fourier decadono a zero. Questo è il contenuto di un famoso lemma, che è l'analogo per le serie di Fourier di quanto già visto per gli integrali di Fourier:

LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , la dimostrazione è immediata, poiché in tal caso  $\widehat{f}$  è in  $\ell^2$ . Per la dimostrazione completa si deve mostrare che  $L^2(\mathbb{T})$  è denso in  $L^1(\mathbb{T})$  nella norma definita da (18.16). Non intendiamo entrare nei dettagli di questo fatto (né ci aspettiamo che lo faccia lo studente).

### 18.8 Teorema di convoluzione

Date due funzioni  $f$  e  $g$  integrabili, periodiche di periodo  $2\pi$ , la loro convoluzione su  $\mathbb{T}$  è la nuova funzione  $f \star g$  data da

$$f \star g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)g(\theta - \phi)d\phi,$$

Il punto  $\theta - \phi$  non sarà sempre in  $[-\pi, \pi)$ , ma poiché l'integrando è periodico di periodo  $2\pi$ , conosciamo i valori della funzione integranda dappertutto sulla retta reale.

Si osservi che se la funzione periodica  $g$  è assolutamente integrabile su  $\mathbb{T}$ , allora lo è anche la nuova funzione periodica  $h(\phi) = g(\theta - \phi)$ . Inoltre il prodotto di due funzioni periodiche e integrabili su  $\mathbb{T}$  è ancora periodico e assolutamente integrabile. Inoltre, se  $f$  e  $g$  sono in  $L^2(\mathbb{T})$  anche il loro prodotto di convoluzione lo è.

Il prodotto di convoluzione di funzioni su  $\mathbb{T}$  ha proprietà analoghe all'analogo prodotto di funzioni su  $\mathbb{R}$  che abbiamo studiato nella sezione 11.4. Più precisamente, siano  $f$  e  $g$  integrabili, periodiche di periodo  $2\pi$  e sia  $c$  una costante. Allora

- (i)  $f \star g = g \star f$  (commutativo)
- (ii)  $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$  (distributivo)
- (iii)  $(cf) \star g = cf \star g$  (omogeneo)
- (iv)  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$  (associativo)
- (v)  $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$  (l'analisi di Fourier trasforma la convoluzione nella moltiplicazione)

Le prime quattro proprietà sono immediate. Per funzioni continue la quinta proprietà è conseguenza di un semplice calcolo (vedi sotto). Una volta che questa proprietà è stabilita per funzioni continue, può essere estesa a funzioni integrabili mediante approssimazione di funzioni integrabili con successioni di funzioni continue, e questo non lo faremo. Ecco il calcolo per funzioni continue  $f$  e  $g$ :

$$\begin{aligned}
 \widehat{f \star g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \star g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) g(\theta - \phi) d\phi \right] e^{-in\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in\theta} d\theta \right] d\phi \quad (\text{scambio dell'ord. d'integr.: OK funz. cont.}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in\theta} e^{in\phi} d\theta \right] d\phi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in(\theta - \phi)} d\theta \right] d\phi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') e^{-in\theta'} d\theta' \right] d\phi \quad (\text{cambio di variabili } \theta' = \theta - \phi) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \widehat{g}(n) d\phi \\
 &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)
 \end{aligned}$$

Si osservi che al cambiamento di variabili  $\theta' = \theta - \phi$  non corrisponde alcun cambiamento del dominio di integrazione perché l'integrando è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

Diamo adesso una lista di proprietà che si dimostrano facilmente sulla base di quanto visto finora (la loro dimostrazione è lasciata per esercizio).

- (i) Se  $f$  e  $g$  sono continue anche  $f \star g$  lo è.
- (ii) La convoluzione di due funzioni integrabili e limitate è continua.
- (iii) Se una funzione è derivabile  $n$  volte e l'altra  $m$  volte, la loro convoluzione è derivabile  $n + m$  volte.
- (iv) La convoluzione con un polinomio trigonometrico è un polinomio trigonometrico.

### 18.9 Analisi di Fourier in un intervallo limitato

Per funzioni  $f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$  della retta reale, tutto ciò che abbiamo visto finora continua a valere, a patto di fare le seguenti sostituzioni. Adesso  $[a, b]$  è l'intervallo fondamentale di funzioni

periodiche sulla retta reale, di periodo  $2L = b - a$  (anziché  $2\pi$ ).

Invece di (18.8) si prenda allora il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_a^{a+2L} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2L}. \quad (18.17)$$

Come si verifica facilmente, le funzioni  $e_n(x) = e^{i\frac{\pi}{L}nx}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare (18.17).

Allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{L}nx}, \quad c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) e^{-i\frac{\pi}{L}nx} dx, \quad (18.18)$$

che è l'analogo della formula (18.10).

In vista delle applicazioni, è utile avere sotto mano gli sviluppi in serie di seni e coseni, che si ottengono dalle equazioni precedenti, ricordando le formule della sezione 16.1 (in particolare, la (16.9)):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \right], \quad (18.19)$$

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) dx, \quad (18.20)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.21)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (18.22)$$

Queste formule sono di solito usate scegliendo le coordinate in modo che l'intervallo  $[a, b]$  sia centrato nell'origine, cioè per  $a = -L$  (e quindi  $b = L$ ). A costo di essere prolissi, riscriviamo le formule fondamentali per l'analisi di Fourier per questo caso:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{\pi}{L}nx} dx, \quad (18.23)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.25)$$

Un'altra formula utile è l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \quad (18.26)$$

Osserviamo infine che è utile disporre di un dizionario per tradurre proprietà di funzioni periodiche di periodo  $2L$  nel dominio temporale (o spaziale) nelle corrispondenti proprietà nel dominio delle frequenze (o dei numeri d'onda). Sia  $\omega = 2\pi/2L$  la frequenza angolare fondamentale (che è chiaramente pari a 1 per  $2L = 2\pi$ ), allora

TEMPO/SPAZIO	FREQUENZA TEMPORALE/ SPAZIALE
derivate $f^{(p)}(x)$	potenze $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in\omega)^p \widehat{f}(n)$
convoluzione circolare $f \star g(x)$	prodotto $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$
traslazione $f_h(x) = f(x-h)$	modulazione $\widehat{f}_h(n) = e^{-in\omega h} \widehat{f}(n)$

La dimostrazione dell'ultima proprietà (che una traslazione diventa una modulazione) è lasciata come (facile) esercizio.

### 18.10 Serie di Fourier ad intervallo dimezzato

Le funzioni dispari,  $f(-x) = -f(x)$ , formano un sottospazio  $\mathcal{D}$  dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  delle funzioni in  $[-L, L]$  con prodotto scalare (18.17) il cui complemento ortogonale, nel senso della sezione 17.8, è lo spazio  $\mathcal{P}$  delle funzioni pari,  $f(-x) = f(x)$ . Vale quindi l'ultima equazione della sezione 17.8,  $\mathcal{H} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$ , che, in termini terra-terra, significa che ogni funzione può essere unicamente decomposta nella somma di un funzione pari e di una dispari.

I seni formano una base completa per le funzioni dispari e i coseni, insieme alla funzione 1, per le pari: se  $f$  è dispari, allora

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right),$$

se è pari

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right),$$

Per "serie di Fourier a intervallo dimezzato" si intende la serie di una funzione definita nell'intervallo  $[0, L]$  ed estesa a  $[-L, L]$  nei due modi possibili: come funzione pari o come funzione dispari. Per un'estensione dispari, la serie è solo di seni, mentre per l'estensione pari, nello sviluppo sono presenti solo coseni e la funzione 1. Ovviamente, nell'intervallo  $[0, L]$  le due serie convergono agli stessi valori, ma sulla retta reale definiscono differenti funzioni periodiche di periodo  $2L$ .

Per l'estensione dispari (serie di seni ad intervallo dimezzato), si ha:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \\
 c_0 &= 0 \quad a_n = 0 \\
 b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx.
 \end{aligned}$$

Si osservi il fattore 2 nei coefficienti  $b_n$ : la funzione è estesa a  $[-L, 0]$  secondo la regola  $f(-x) = -f(x)$ , il che raddoppia il peso dei coefficienti calcolati in  $[0, L]$ .

Analogo discorso vale per l'estensione pari (serie di coseni ad intervallo dimezzato):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

$$b_n = 0.$$

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx$$

ESEMPIO 18.2. Sviluppare  $f(x) = \sin(x), 0 < x < \pi$ , in serie di Fourier di coseni.

Occorre trovare la serie di Fourier dell'estensione pari del seno in  $[0, \pi]$ . Questa estensione è mostrata nella figura 18.3.

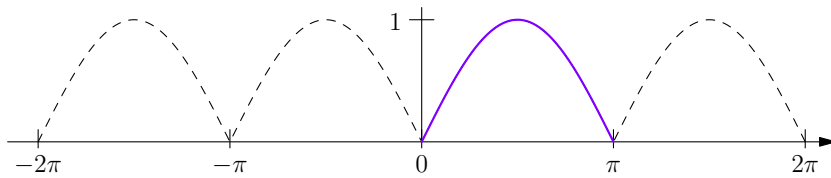


Figura 18.3: Estensione pari del seno in  $[0, \pi]$ .

Dalle formule sopra si ricava (si lascia come esercizio lo svolgimento dei calcoli):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

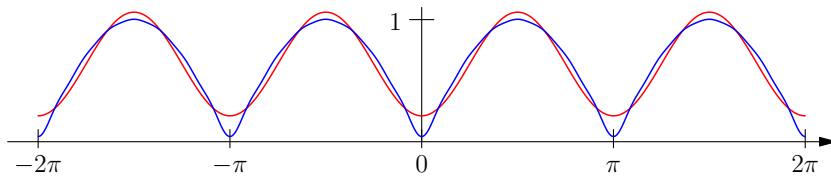


Figura 18.4: Somme parziali

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

per  $N = 8$  (linea rossa) e  $N = 16$  (linea blu).

## 18.11 PROBLEMI

PROBLEMA 18.1.  $\square$ 

Siano  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$  in  $L^2(-1, 1)$ . Calcolare

- (a)  $\langle f_1 | f_2 \rangle$
- (b)  $\langle f_1 | f_3 \rangle$
- (c)  $\|f_1 - f_2\|^2$
- (d)  $\|2f_1 + 3f_2\|$

PROBLEMA 18.2.  $\square$ 

Calcolare la proiezione di  $f(x) = \cos^2 x$  su ciascuna delle funzioni  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = \cos x$ ,  $f_3(x) = \cos 2x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  (si chiede il valore numerico della proiezione, non il vettore proiettato).

PROBLEMA 18.3.  $\square$ 

Dimostrare che l'insieme di funzioni  $\{1, x, |x|\}$  è linearmente indipendente in  $L^2[-1, 1]$  e costruire il corrispondente sistema ortogonale. Il dato insieme è linearmente indipendente su  $L^2[0, 1]$ ?

PROBLEMA 18.4.  $\square$ 

Determinare i valori reali di  $\alpha$  per cui  $x^\alpha$  è in  $L^2(0, 1)$ .

PROBLEMA 18.5.  $\square$ 

Determinare i valori reali di  $\alpha$  per cui  $x^\alpha$  è in  $L^2(1, \infty)$ .

PROBLEMA 18.6.  $\square$ 

Assumendo che l'intervallo  $(a, b)$  sia finito, dimostrare che se  $f \in L^2(a, b)$  allora l'integrale  $\int_a^b |f(x)| dx$  esiste. Mostrare che l'inverso è falso dando l'esempio di una funzione  $f$  tale che  $|f|$  è integrabile su  $(a, b)$ , ma  $f \notin L^2(a, b)$ .

PROBLEMA 18.7.  $\square$ 

In  $L^2(-\pi, \pi)$  esprimere la funzione  $\sin^3(x)$  come combinazione lineare delle funzioni del sistema trigonometrico  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$

PROBLEMA 18.8.  $\square$ 

Dato  $\rho(x) = e^{-x}$ , dimostrare che ogni polinomio in  $x$  appartiene a  $L^2_\rho(0, \infty) \equiv L^2((0, \infty), \rho dx)$ , cioè lo spazio delle funzioni tali che

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$$

PROBLEMA 18.9.  $\square$ 

Determinare, se esiste, il limite in  $L^2$  delle seguenti successioni

- (i)  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ , per  $0 \leq x \leq 1$
- (ii)  $f_n(x) = nx$ , per  $0 \leq x < 1/n$ ,  $f_n(x) = 1$  per  $1/n \leq x \leq 1$
- (iii)  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ , per  $0 \leq x \leq 1$ .

PROBLEMA 18.10.  $\square$ 

Determinare i coefficienti  $c_i$  nella combinazione lineare

$$c_1 + c_2 \sin \pi x + c_3 \sin 2\pi x$$

che danno la migliore approssimazione in  $L^2(0, 2)$  della funzione  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2$ .

PROBLEMA 18.11.  $\square$ 

Determinare i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  nella combinazione lineare

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in  $L^2(-\pi, \pi)$  di  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

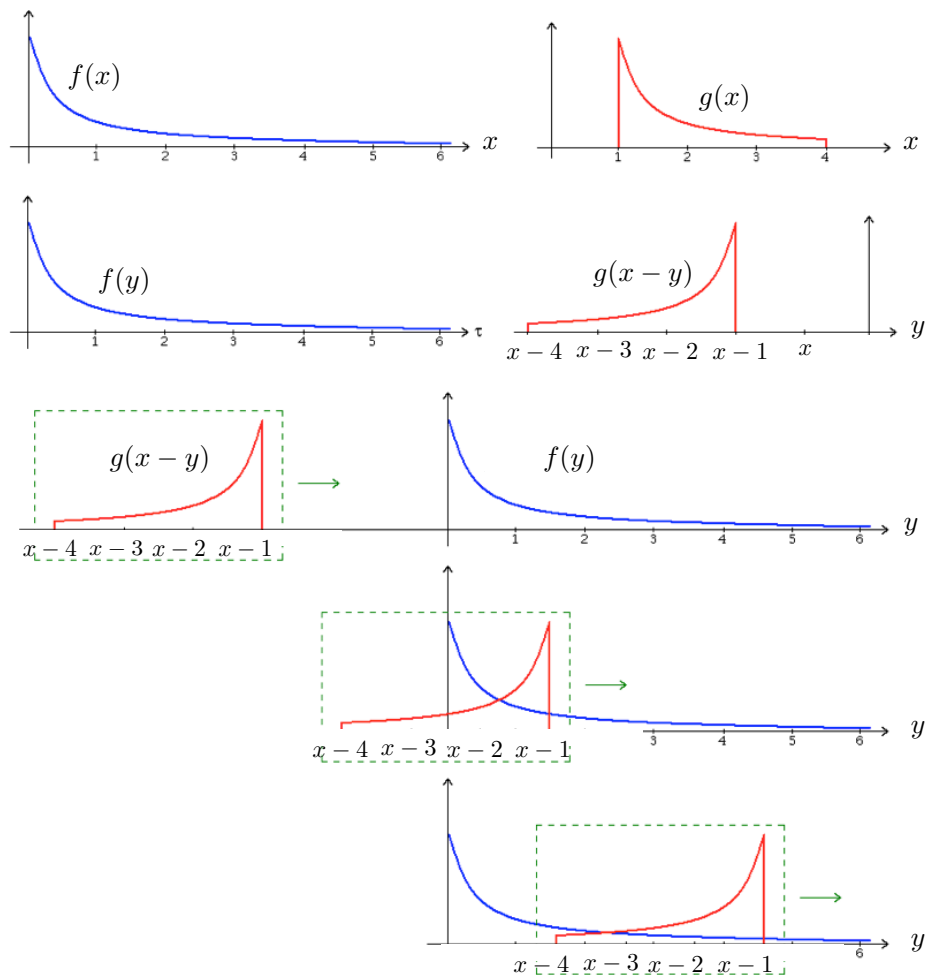
PROBLEMA 18.12.  $\square$ 

Si definisca una successione  $\{a_n\}$  di numeri reali tali che  $\sum_n a_n^2$  converge ma  $\sum_n a_n$  diverge. Che tipo di convergenza può avere la serie  $\sum_n a_n \cos nx$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ?

## 18.12 COMPLEMENTI

## 18.12.1 Calcolo grafico del prodotto di convoluzione

Graficamente, possiamo calcolare  $f \star g$  in un punto  $x$  riflettendo il grafico di  $g(y)$  rispetto all'asse verticale e traslandolo a sinistra di una distanza  $x$  per ottenere  $g(x-y)$ ; lo si moltiplichi adesso per  $f(y)$  e si calcoli l'area sotto il grafico del prodotto risultante  $f(y)g(x-y)$  per  $y \in [-\pi, \pi]$ ; infine si divida per  $2\pi$ . Questo procedimento è illustrato nella figura sotto.



## 18.12.2 Qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?

L'analisi di Fourier che abbiamo visto finora può essere "trasformata" in due direzioni opposte: ristretta verso il discreto, cioè rivolta alle funzioni ottenute per discretizzazione finita dell'intervallo  $[-L/2, L/2]$ , oppure estesa al caso in cui il periodo  $L$  aumenta a dismisura fino a che  $[-L/2, L/2]$  diventa l'intera retta reale. Naturalmente, si potrà parlare ancora di analisi di Fourier, seppure in un senso generalizzato, se queste "trasformazioni" preservano in qualche modo la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier. Ma qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?



L'essenza dell'analisi di Fourier classica è quella di decomporre un segnale periodico in una somma pesata di armoniche, dove ciascuna armonica ha una frequenza che è un multiplo intero della frequenza fondamentale. In effetti, l'analisi di Fourier è comunemente chiamata anche *analisi armonica*.

È importante sottolineare che tutte le armoniche sono generate dall'armonica fondamentale  $e(x) = e^{i\omega x}$ , di frequenza angolare  $\omega$ , nel seguente modo

$$e_1(x) = e(x), e_2(x) = e(x)^2 = e^{i\omega 2x}, \dots, e_n(x) = e(x)^n = e^{i\omega nx}, \dots$$

(Quando, per semplicità, lavoriamo in  $\mathbb{T}$ , come torneremo a fare tra poco,  $\omega = 1$ .) Le potenze negative danno le frequenze negative (cioè moti circolari nella direzione opposta),

$$e_{-n}(x) = e(x)^{-n} = e^{-i\omega nx}$$

e, naturalmente,

$$e_{-n}(x)e_n(x) = 1$$

cioè il modo zero. In breve, l'insieme delle armoniche  $e_n(x) = e^{inx}$  forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi  $\mathbb{Z}$ , nel senso che

$$\begin{aligned} e_{n+m}(x) &= e_n(x)e_m(x) \\ e_{-n}(x) &= e_n(x)^{-1} \end{aligned}$$

L'armonica fondamentale  $e^{i\omega x}$  è chiamata generatore del gruppo.

È questa proprietà di gruppo, tutto sommato abbastanza astratta, che rende conto matematicamente del significato concreto dell'analisi di Fourier. Quando combiniamo questa proprietà con l'altro aspetto fondamentale dell'analisi di Fourier, che è la decomposizione di un vettore rispetto ad una base ortonormale, otteniamo tutto quello che c'è da dire sull'analisi di Fourier. E tutto questo può essere riassunto in 6 punti:

- (I) Ad ogni funzione  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  è associata una *successione*  $\{c_n\} = \{\widehat{f}(n)\}$  di numeri complessi. Questi numeri sono noti come *coordinate* (o coefficienti) *di Fourier* di  $f$ .
- (II) La coordinate di Fourier sono date dalla formula

$$c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

- (III) I mattoni di base delle serie di Fourier sono le *funzioni trigonometriche*  $e_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  date da

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad \text{dove } n \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{T}$$

(sono chiamate trigonometriche piuttosto che esponenziali per sottolineare il legame con seni e coseni dato dalla formula di Eulero). L' $n$ -esima coordinata di Fourier può essere scritta in termini di prodotto scalare  $L^2$  come

$$c_n = \widehat{f}(n) = \langle e_n | f \rangle.$$

- (IV) L'insieme delle *funzioni trigonometriche*  $e_n(x) = e^{inx}$  forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi  $\mathbb{Z}$ , nel senso che

$$\begin{aligned} e_{n+m}(x) &= e_n(x)e_m(x) \\ e_{-n}(x) &= e_n(x)^{-1} \end{aligned}$$

(V) La serie associata a  $f$  è

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Usiamo il simbolo  $\sim$  invece del simbolo  $=$  per mettere in evidenza che per un dato punto  $x$ , la serie di Fourier non necessariamente si somma al valore  $f(x)$ , in verità, nel punto  $x$ , la serie di Fourier può non convergere del tutto.

(VI) L'insieme  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma una *base ortonormale* per lo spazio vettoriale  $L^2(\mathbb{T})$  delle funzioni a quadrato integrabile su  $\mathbb{T}$ . In particolare, questo significa che per  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , le somme parziali di  $f$  convergono a  $f$  nel senso  $L^2$ , cioè

$$\left\| f - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx} \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

e vale l'identità di Parseval (cioè il teorema di Pitagora infinito-dimensionale)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2$$

### 18.12.3 Analisi armonica nel discreto

Consideriamo la seguente situazione: nel suo intervallo fondamentale, il segnale è un vettore  $v$  con un numero finito di componenti complesse, diciamo  $N$ . Quindi è un vettore in  $\mathbb{C}^N$ . Poi è ripetuto con periodicità a destra e a sinistra. Quale analisi armonica è appropriata per una situazione come questa?

Incominciamo col fissare le notazioni. Si consideri la base standard in  $\mathbb{C}^N$ , che conveniamo di denotare con dei ket,

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad |N-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(La ragione di questa notazione non convenzionale, sia per i ket sia per partire da 0 anziché da 1, apparirà chiara tra poco.) Denotiamo un generico vettore di questa base con

$$|\alpha\rangle, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N-1$$

Il prodotto scalare in  $\mathbb{C}^N$  è

$$\langle v | u \rangle = \sum \overline{v(\alpha)} u(\alpha) = \sum \langle v | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle$$

e

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

dove  $\delta_{\alpha\beta}$  è la delta di Kronecker. Allora, per un vettore  $v \in \mathbb{C}^N$  possiamo scrivere

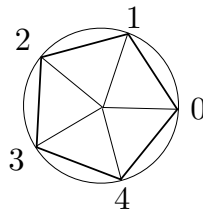
$$|v\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle \alpha | v \rangle$$

sottintendendo che tutte le somme d'ora in avanti corrono da 0 a  $N - 1$ . Si osservi che  $\langle \alpha | v \rangle$  è la  $\alpha$ -esima componente del vettore. Possiamo, per comodità, pensare a  $v$  come ad una funzione definita sull'insieme finito di punti  $\alpha = 0, 1, \dots, N - 1$ , e a valori in  $\mathbb{C}$ , e scrivere

$$v(\alpha) = \langle \alpha | v \rangle$$

Adesso torniamo al problema di partenza. Vogliamo analizzare il segnale discreto  $v(\alpha)$  in termine di armoniche: è chiaro che non possiamo aspettarcene più di  $N$ . Se vogliamo mantenere la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier, dobbiamo cercare un analogo della proprietà (IV) per un insieme discreto.

L'insieme  $C_N$  delle radici n-esime dell'unità,  $C_N = \{z \in \mathbb{C} | z^N = 1\}$  è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione con  $N$  elementi ed è il gruppo ciclico di ordine  $N$ . In effetti, è una rappresentazione del gruppo additivo modulo  $N$ . Per esempio, per  $N = 5$  il gruppo additivo si rappresenta con i vertici di un pentagono regolare



e le addizioni sono costruite per ciclicità, per esempio:  $1 + 2 = 3, 1 + 4 = 0, 2 + 4 = 1$  etc.. La sua rappresentazione moltiplicativa è data dalle radici quinte complesse:  $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$  e si verifica facilmente che si tratta proprio di una rappresentazione: si consideri, per esempio,  $1 + 2 = 3$ , questo è rappresentato in  $e^{i2\pi/5} e^{i4\pi/5} = e^{i6\pi/5}$ , oppure  $1 + 4 = 0 \rightarrow e^{i2\pi/5} e^{i8\pi/5} = 1$ , cioè l'elemento neutro rispetto all'addizione (o) è trasformato nell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione. E così via.

Per l'analisi armonica in uno spazio a  $N$  dimensioni, considereremo allora

$$e(\alpha) = e^{i2\pi\alpha/N}$$

come armonica fondamentale. Il sistema di armoniche generato da  $e(\alpha)$  consiste dunque negli  $N$  vettori  $\tilde{e}_n$ , con componenti  $e(\alpha)^n$  rispetto alla base  $|\alpha\rangle, n = 0, 1, \dots, N - 1$  (per  $n = N$  si ritorna a  $n = 0$ ), cioè

$$\langle \alpha | \tilde{e}_n \rangle = e(\alpha)^n = e^{i2\pi n\alpha/N}, \quad \text{dove } \alpha = 0, 1, \dots, N - 1 \quad \text{e } n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Si verifica facilmente che i vettori  $\tilde{e}_n$  sono ortogonali tra loro e hanno tutti norma uguale a  $\sqrt{N}$  (esercizio):

$$\langle \tilde{e}_n | \tilde{e}_m \rangle = N\delta_{nm}.$$

È quindi conveniente passare alla base ortonormale

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{e}_n, \quad \langle \alpha | e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi n\alpha/N} = e_n(\alpha)$$

La trasformata di Fourier discreta del segnale discreto  $v(\alpha)$  è definita come

$$\hat{v}(n) = \langle e_n | v \rangle = \sum_{\alpha} v(\alpha) \overline{e_n(\alpha)} \quad \text{ovvero} \quad \hat{v}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N}$$

Poichè  $\{e_n\}$  è una base ortonormale, la trasformata di Fourier discreta è una trasformazione unitaria e si ha

$$v(\alpha) = \langle \alpha | v \rangle = \sum_n \langle \alpha | e_n \rangle \langle e_n | v \rangle = \sum_n \hat{v}(n) e_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N}$$

e vale l'analogo finito dell'identità di Parseval (che è proprio il teorema di Pitagora finito-dimensionale).

Si osservi che avremmo potuto convenire di assorbire il fattore di normalizzazione nel prodotto scalare e definire in  $\mathbb{C}^N$  il nuovo prodotto scalare

$$\langle v | u \rangle = \frac{1}{N} \sum f(\alpha) \overline{u(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum \langle f | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle$$

(che, con abuso di notazione, denotiamo nello stesso modo di prima) e utilizzare come armoniche le  $\tilde{e}_n \sim e^{i2\pi n\alpha/N}$ , che nel nuovo prodotto scalare sono automaticamente normalizzate. Allora, con questo nuovo prodotto scalare, le formule per la trasformata di Fourier discreta e la sua inversa diventano

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \langle \tilde{e}_n | v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} && \text{("analisi")} \\ v(\alpha) &= \langle \alpha | v \rangle = \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} && \text{("sintesi")} \end{aligned}$$

ESEMPIO 18.3.  $N=5$ . Posto  $e^{i2\pi/5} = \varepsilon$ , si ha (rispetto al prodotto scalare usuale) la seguente base ortonormale di Fourier:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

La matrice della trasformata di Fourier discreta è ottenuta come la matrice le cui colonne sono i vettori testé trovati (che è la regola generale per la matrice di cambiamento di base).

A questo punto, ecco una domanda su cui riflettere: in che modo i sei punti indicati all'inizio della lezione come caratterizzanti dell'analisi di Fourier si sono trasformati nel passaggio dal continuo al discreto? Chiaramente, tutti i problemi di convergenza sono evaporati, ma che dire del resto? È ragionevole dire che la struttura di base è preservata? Comunque si risponda a questa domanda, c'è un senso preciso in cui l'analisi di Fourier discreta approssima quella continua, che è quello di cui ci vogliamo occupare adesso.

Prima un'osservazione di cosmetica. L'analisi di Fourier nel discreto può essere resa ancora più simile a quella nel continuo se consideriamo un numero  $N$  dispari. Se  $N$  è dispari è naturale scegliere una numerazione simmetrica dello spazio delle  $\alpha$ :

$$-(N-1)/2, -(N-2)/2, \dots, -2-1, 0, 1, 2, \dots, (N-2)/2, (N-1)/2$$

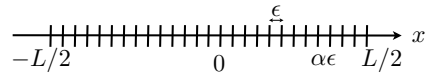
e analogamente per i vettori  $|\alpha\rangle$  e i vettori  $e_n$ . Le formule per la trasformata di Fourier e la sua inversa (le ultime che abbiamo ricavato), restano inalterate

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} && \text{("analisi")} \\ v(\alpha) &= \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} && \text{("sintesi")} \end{aligned}$$

ma le somme adesso sono da  $-(N-1)/2$  a  $(N-1)/2$ .

Adesso mostriamo che l'analisi di Fourier nel discreto è in effetti un'approssimazione di quella nel continuo. Poiché consideriamo  $N \gg 1$ , trascureremo la differenza tra  $N$  e  $N-1$ .

Siamo interessati al caso in cui i valori discreti del segnale  $v(\alpha)$  sono stati ottenuti campionando un segnale continuo  $f(x)$  di periodo  $L$ , ad intervalli di ampiezza  $\epsilon$ . Dunque,  $N = L/\epsilon$  e  $v(\alpha) = f(x)$  per  $x = \alpha\epsilon$ , al variare di  $\alpha$  da  $-N/2$  a  $N/2$ . Abbiamo cioè la discretizzazione dell'intervallo reale  $[-L/2, L/2]$  in blocchi di ampiezza  $\epsilon = L/N$  come mostrato in figura:



Consideriamo la formula per le coordinate di Fourier discrete

$$\hat{v}(n) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} = \frac{\epsilon}{L} \sum_{\alpha} f(\alpha\epsilon) e^{-i2\pi n\alpha\epsilon/L} = \frac{\epsilon}{L} \sum_{\alpha} f(x) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  riconosciamo a secondo membro il limite della somma di Riemann dell'integrale

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} dx,$$

cioè

$$\hat{v}(n) \rightarrow \hat{f}(n).$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$  si ha  $N \rightarrow \infty$  e quindi la formula per la "sintesi" diventa

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{v}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

In breve, abbiamo mostrato euristicamente (cioè senza preoccuparci troppo dell'esistenza dei limiti) che nel limite continuo l'analisi di Fourier discreta diventa l'usuale analisi di Fourier, basata sulle relazioni

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} dx \quad (18.27)$$

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} \quad (18.28)$$

#### 18.12.4 Analisi armonica in un intervallo infinito

Vogliamo adesso capire che cosa succede alle relazioni (18.27) e (18.28) quando l'intervallo  $[-L/2, L/2]$  aumenta a dismisura fino a ricoprire l'intera retta reale.

Se assumiamo che la funzione  $f(x)$  sia "buona", l'integrale a secondo membro della (18.27) convergerà nel limite di grandi  $L$ , ma il fattore  $1/L$  davanti farà tendere a zero le coordinate di Fourier. È dunque utile passare a coordinate dimensionate per le coordinate e riscalarle con un fattore  $L$  in modo da garantire che si abbia un limite finito non nullo. A tal fine, definiamo

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \quad (18.29)$$

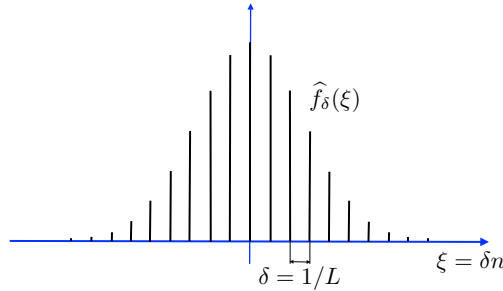
$$y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{L} = \delta n \quad (18.30)$$

$$\hat{f}_{\delta}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} \hat{f}(n) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (18.31)$$

e sostituiamo nella (18.27). Si ottiene

$$\widehat{f}_\delta(y) = \frac{1}{\delta} \widehat{f}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i2\pi yx} dx$$

Consideriamo un possibile grafico delle coordinate di Fourier riscalate  $\widehat{f}_\delta$  (assumendole per semplicità reali). Il grafico mostra chiaramente che nel limite, quando la distanza tra due punti sulle ascisse si avvicina sempre più, si dovrebbe ottenere, almeno euristicamente, una funzione limite  $\widehat{f}(y)$  definita su tutti i punti dell'asse delle  $y$ .



Possiamo aspettarci un limite finito e non nullo per  $\delta$  arbitrariamente piccolo o, equivalentemente, per  $L$  arbitrariamente grande, se  $f(x)$  è “buona”: deve essere non solo regolare, ma anche con decrescenza abbastanza rapida al crescere di  $|x|$  in modo tale che l’integrale improprio

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi yx} dx,$$

che si ottiene nel limite  $\delta = 1/L \rightarrow 0$ , sia finito.

Consideriamo adesso la somma parziale della serie di Fourier in (18.28):

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

Tenuto conto della (18.31), possiamo riscrivere la somma parziale come

$$S_N = \delta \sum_{n=-N}^N \widehat{f}_\delta(y) e^{i2\pi yx} \quad (18.32)$$

Se adesso facciamo crescere  $N$  come  $1/\delta = L$ , riconosciamo in  $S_N$  la somma di Riemann che nel limite  $N \rightarrow \infty$  diventa l’integrale (improprio)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{i2\pi yx} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

Le argomentazioni euristiche precedenti possono essere rese rigorose, ma fare questo esula dai nostri scopi. Ci limitiamo ad osservare che se  $f(x)$  è buona, nel limite del periodo  $L$  che va all’infinito — e tenuto conto del riscaldamento (18.31) — i processi di analisi e sintesi dell’analisi di Fourier diventano

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi yx} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{i2\pi yx} dy \end{aligned}$$

Nel capitolo 21 ne verrà studiata l’estensione a  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 19

### Problemi al contorno

#### 19.1 Equazioni alle derivate parziali

Una trattazione completa delle equazioni alle derivate parziali (“PDE”, da adesso in poi<sup>1</sup>) esula dagli scopi di questo corso. Qui ci limiteremo a inquadrare quanto già visto in uno schema un po’ più generale. Per lo più, l’esposizione sarà non sistematica e si procederà per esempi.

Ecco alcune PDE interessanti:

(A) Equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

(B) Equazione di d’Alembert (o delle onde)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

(C) Equazione di Fourier (o del calore)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u$$

(D) Equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + Vu$$

Come sempre quando si parla di un’equazione, sia essa un’equazione algebrica come  $x^2 = 1$  o una PDE, una sua soluzione è quella “cosa” che se inserita nell’equazione dà luogo ad un’identità. Nel caso delle PDE, il problema matematico sta nell’individuare eventuali condizioni supplementari che permettano di stabilire se, in presenza di queste condizioni, la soluzione esiste ed è unica. Le condizioni sui valori della  $u$  (e/o le sue derivate) sul bordo della regione, dentro cui si vuole determinare la soluzione, sono dette *condizioni al contorno* (CC). La condizione spesso implicita, ma non per questo meno

<sup>1</sup> PDE, cioè “partial differential equation” è il termine standard nella letteratura in inglese.

importante, è che la soluzione sia una *funzione limitata*. Se una delle variabili è il tempo, i valori della  $u$  (e/o delle sue derivate) sulla ipersuperficie (nello spazio-tempo)  $t = \text{costante}$  sono dette *condizioni iniziali* (CI)<sup>2</sup>. Il problema così posto è detto *problema al contorno*.

Le equazioni (A)–(D) sono lineari e le abbreviamo così

$$\mathcal{D}u = 0,$$

dove  $\mathcal{D}$  è un operatore differenziale lineare (che può contenere anche un termine di ordine zero, cioè la moltiplicazione per una funzione, come nell'equazione di Schrödinger). Un'equazione di questo tipo è detta *omogenea*. Se invece l'equazione è

$$\mathcal{D}u = \rho,$$

dove  $\rho$  è una funzione nota (sorgente o forzante, a seconda dell'interpretazione fisica dell'equazione), l'equazione è detta *non omogenea*.

Un problema al contorno (PC) può dunque essere così schematizzato

$$PC = \left\{ \begin{array}{l} PDE \text{ (omogenea o non omogenea)} \\ CC \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{limitatezza della soluzione} \\ CI \text{ (tempo)} \\ CC \text{ (spazio)} \end{array} \right.$$

L'equazione di Laplace fornisce due esempi importanti di problemi al contorno con condizioni al contorno puramente spaziali:

*Problema di Dirichlet* Valore di  $u$  assegnato sul bordo di una regione  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ u &= f & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{aligned}$$

*Problema di Neumann* Valore della derivata normale di  $u$  assegnato sul bordo

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ \nabla_{\mathbf{n}} u &= f & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{aligned}$$

Dimostrare l'unicità è facile, si veda i complementi 5.8.1; l'esistenza è, in generale, difficile. Nel capitolo 15 è stato risolto in maniera completa il problema di Dirichlet nel piano.

## 19.2 Problemi al contorno sulla retta reale

EQUAZIONE DEL CALORE. Nella sezione 8.5 abbiamo risolto l'equazione del calore sulla retta reale. Più precisamente, abbiamo risolto il

<sup>2</sup> Tipicamente si sceglie la costante uguale a zero, cioè si fa coincidere il tempo iniziale con il momento in cui si fa partire il cronometro.



seguinte problema al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.1)$$

Abbiamo risolto questo problema usando il *metodo della trasformata di Fourier*, secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dx \\ \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\ \frac{d\hat{u}(k,t)}{dt} = -Dk^2 \hat{u}(k,t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) e^{-Dk^2 t} \end{array}$$

La caratteristica principale di questo schema è che una PDE lineare viene trasformata in una ODE (equazione alle derivate ordinarie, “ODE”= ordinary differential equation) lineare e quindi di facile soluzione. Questo schema si applica pari pari ad altre PDE per problemi al contorno analoghi a (19.1) (si vedano i problemi alla fine del capitolo).

Dalla sezione 11.5 ricordiamo che  $u(x,t)$ , essendo l’anti-trasformata di Fourier del prodotto delle trasformate di Fourier di due funzioni, può essere espresso come il prodotto di convoluzione tra  $f(x)$  (l’anti-trasformata di  $\hat{f}(k)$ ) e il nucleo del calore  $K_t$  (che è l’antitrasformata di  $e^{-Dk^2 t}$ ):

$$u(x,t) = K_t \star f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y) dy \quad (19.2)$$

Osserviamo che per quanto questa soluzione sia stata trovata con metodo di Fourier, e richiesto l’annullamento della funzione all’infinito, la formula (19.2) continua a essere tale anche per dati iniziali  $f(x)$  più generali (ma sempre limitati). Ad esempio, se prendiamo  $f(x) = 1$ , la (19.2) restituisce  $u(x,t) = 1$ , il che è molto ragionevole: se i punti della sbarra infinita sono inizialmente tutti alla stessa temperatura, la loro temperatura non varierà nel corso del tempo.

**PROPRIETÀ DELL’EQUAZIONE DEL CALORE:**

- o Dalla formula (19.2) segue che questa equazione rende lisci dati iniziali singolari: ad esempio se come CI a  $t = 0$  si considera una delta di Dirac  $\delta(x - x_0)$ , come effetto della convoluzione con  $K_t$ , questa è trasformata per  $t > 0$  (non importa quanto prossimo a 0) in una gaussiana centrata in  $x_0$ , che è infinitamente differenziabile.

- Propaga il dato iniziale con velocità infinita (per la stesse ragioni del punto precedente).
- Rende lisce le irregolarità del dato iniziale, nel corso del tempo lo “spalma” su tutta la retta reale e le sue soluzioni decadono a zero per  $t \rightarrow \infty$ .
- Non è reversibile: se  $u(x, t)$  è soluzione,  $u^*(x, t) = u(x, -t)$  non è soluzione.

EQUAZIONE DELLE ONDE. Il problema analogo a (19.1) per l'equazione omogenea delle onde in una dimensione è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = a(x) \quad \partial_t u(x, 0) = b(x) \quad \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.3)$$

Anche in questo caso, abbiamo trovato la soluzione con il metodo della trasformata di Fourier. Nel capitolo 12, usando questo metodo, abbiamo trovato

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy \quad (19.4)$$

Per trovare la soluzione (19.4) dell'equazione delle onde abbiamo usato il metodo della trasformata di Fourier, e abbiamo richiesto che i dati iniziali andassero a zero all'infinito. Adesso osserviamo che, come per la formula risolutiva dell'equazione del calore, la formula (19.4) continua a fornire la soluzione dell'equazione delle onde anche per condizioni iniziali (limitate) più generali. Se ad esempio prendiamo  $a(x) = A \cos(kx)$   $b(x) = \omega A \sin(kx)$ , dove  $\omega = kc$ , la (19.4) è l'onda progressiva

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

di lunghezza d'onda  $2\pi/k$  e frequenza  $\nu = \omega/2\pi$ , che si muove verso destra a velocità  $c$ , che, come è noto, è soluzione dell'equazione delle onde.

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE:

- È *reversibile*: se  $u(x, t)$  è soluzione dell'equazione delle onde, anche  $u^*(x, t) = u(x, -t)$  è soluzione.
- La propagazione di  $u$  avviene a *velocità finita*; si veda la discussione sui “coni causali e “domini di influenza” del capitolo 12.
- La sua soluzione (19.4) ha la forma generale di d' Alembert (12.3).

### 19.3 Problemi al contorno sulla semi-retta reale

Passiamo adesso a discutere degli esempi concreti di condizioni al contorno vere e proprie.

**ONDE IN UNA CORDA SEMI-INFINITA.** Incominciamo con il considerare una corda che si estende dal suo punto di origine in  $x = 0$  a  $x = \infty$ . Adesso occorre specificare come la corda si comporta nell'origine e questa è la *condizione al contorno*  $u(0, t) = h(t)$ .

La funzione  $h(t)$  descrive come l'estremo della corda si muove e se assumiamo che è tenuto fermo, cioè  $h = 0$ , abbiamo il problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = a(x), \quad \partial_t u(x, 0) = b(x) & \text{CI} \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.5)$$

Troviamo la soluzione di (19.5). Poichè  $u$  risolve l'equazione delle onde in una dimensione, deve avere la forma generale di d'Alembert (12.3). Devono cioè esistere funzioni  $\phi$  e  $\psi$  tali che  $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ . Assumiamo per semplicità che sia  $b(x) = 0$ , allora dalla (19.4), per  $x > ct$  si ha  $u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)]$ . Quindi, per  $x > ct$ ,  $\phi = \psi = a$ . Per convincersi di questo e dei commenti successivi, si consideri la figura 19.1 e si legga la didascalia a lato.

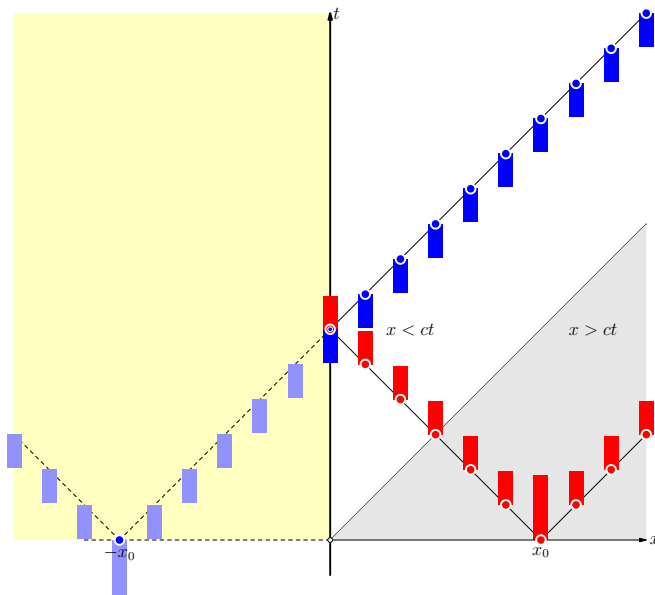


Figura 19.1: Il profilo rettangolare (in rosso) nell'intorno di un punto  $x_0$  è la condizione iniziale  $a(x)$  dell'onda ( $b(x) = 0$ ). Nella regione  $x > ct$  (in grigio) la propagazione avviene come se non ci fosse alcuna CC in  $x = 0$ : il rettangolo iniziale si dimezza: metà viaggia verso destra e metà verso sinistra. Nella regione  $x < ct$ , l'onda è sotto l'influenza della CC in  $x = 0$ . La soluzione in questa regione è ottenuta introducendo una condizione iniziale nell'intorno di  $-x_0$  (rettangolo blu), di ampiezza uguale in modulo, ma opposta in segno a quella iniziale in  $x_0$  (estensione dispari della condizione iniziale). Quando l'onda virtuale esce dalla regione non fisica (in giallo) diventa reale: nella regione  $x < ct$  la soluzione è la sovrapposizione dell'onda blu e dell'onda rossa. Questa costruzione fornisce la *riflessione* dell'onda in  $x = 0$ .

Deve valere la condizione al contorno di annullamento della  $u$  nello zero per tutti i tempi. Dunque,  $\phi(ct) + \psi(-ct) = 0$ . Ne segue che, posto  $ct = -\xi$ , deve valere  $\psi(\xi) = -\phi(-\xi)$  e dunque che, per  $x < ct$ ,  $\psi(\xi) = -a(-\xi)$ . Quindi per  $x < ct$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) - a(-x + ct)] .$$

Se denotiamo con  $a^*$  l'estensione dispari di  $a$  a  $x < 0$ , allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a^*(x + ct) + a^*(x - ct)] .$$

È come se si risolvesse il problema senza CC con l'onda reale iniziale a destra e un'onda virtuale a sinistra che ha configurazione iniziale  $-a(-x)$ . Si vedano le figure 19.1 e 19.2. Se si considera anche il contributo di  $b$ , la sostanza non cambia e si arriva alla soluzione completa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a^*(x + ct) + a^*(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b^*(y) dy, \quad (19.6)$$

dove  $b^*$  è l'estensione dispari di  $b$ .

Supponiamo adesso che l'estremo della corda non sia tenuto fermo, ma vari nel tempo secondo la legge  $h(t)$ . Possiamo sfruttare la linearità del problema al contorno e risolvere separatamente il problema con dati iniziali nulli,  $a = b = 0$  e condizione iniziale  $u(0, t) = h(t)$ . La soluzione cercata sarà la somma della soluzione di questo problema e della (19.6). Consideriamo dunque il PC:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = 0, & \partial_t u(x, 0) = 0 \quad \text{CI} \\ u(0, t) = h(t) & t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.7)$$

Ragionando come prima,  $u$  deve avere la forma generale di d'Alembert (12.3)  $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ . Essendo il dato iniziale nullo, per  $x > ct$ , deve essere  $u(x, t) = 0$ . In  $x = 0$  si deve avere  $h(t) = \psi(-ct)$ . Quindi, per  $x < ct$ ,

$$u(x, t) = \psi(x - ct) = h\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

dunque, per ogni  $x > 0$

$$u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

dove  $\Theta$  è la la funzione di Heaveside.

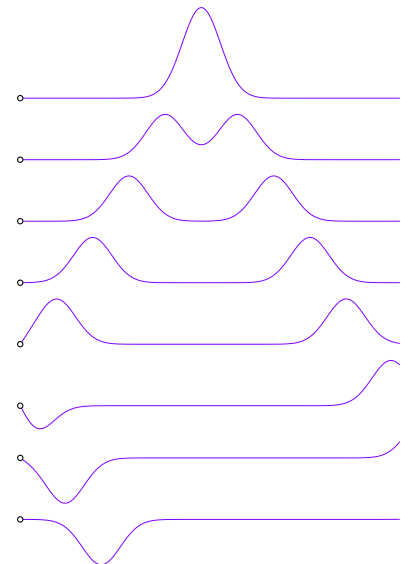


Figura 19.2: Al tempo  $t = 0$  una corda semi-infinita tenuta ferma nell'origine è portata nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. L'onda verso destra si allontana all'infinito, quella verso sinistra si riflette nell'origine. I fotogrammi sono stati ottenuti con la regola dell'onda virtuale per  $x < 0$  discussa nel testo.

Si può arrivare alla stessa conclusione con il metodo della trasformata di Laplace, come è stato fatto per il problema 14.4. Sia

$$\mathcal{L}u(x, s) = \tilde{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-st} ds \quad \mathcal{L}h(s) = \tilde{h}(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st} ds$$

Allora il metodo di soluzione esposto in S.14.4 può essere così schematizzato:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{4} \quad u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) h\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \downarrow \mathcal{L} & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\ \textcircled{2} \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \tilde{u} = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} \quad \tilde{u}(x, s) = \tilde{h}(s)e^{-(s/c)x} \end{array}$$

Nel passaggio da ① a ②, abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace:  $s^2 \tilde{u}(x, s) - su(x, 0) - \partial_t u(x, 0) = c^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$  e le condizioni iniziali  $u(x, 0) = a(x) = 0$  e  $\partial_t u(x, 0) = b(x) = 0$ . Nel passaggio da ② a ③, abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplose, imposto la CC (che in trasformata di Laplace diventa la “condizione iniziale per  $x = 0$ ”). Il passaggio da ③ a ④, usa quella proprietà della trasformata di Laplace che nella sezione 14.3 è stata chiamata “seconda proprietà della traslazione” .

**PROBLEMI DI DIRICHLET.** Un problema come (19.5), con CC  $u(0, t) = 0$ , è detto *problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee*; un problema con CC  $u(0, t) = h(t) \neq 0$  è detto *problema di Dirichlet con condizioni al contorno non omogenee*.

**CONDUZIONE DEL CALORE IN UNA SBARRETTA SEMI-INFINITA.** Il problema al contorno per la conduzione del calore, analogo a (19.5), è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = f(x), \quad \text{CI} \\ u(0, t) = 0 \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.8)$$

Si tratta di un problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee. Anche per questo problema, la soluzione è ottenuta mediante prolungamento dispari di  $f$  a sinistra di 0: la soluzione di (19.8) è la soluzione del problema sulla retta reale, senza condizioni al contorno in zero, con dato iniziale  $f^*(x)$ , dove  $f^*(x) = f(x)$ , per

$x > 0$  e  $f^*(x) = -f(-x)$  per  $x < 0$ . In breve,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^*(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(x-y)^2/(4Dt)} - e^{-(x+y)^2/(4Dt)} \right] f(y) dy \end{aligned}$$

La formula precedente per  $u$  può essere ottenuta risolvendo (19.8) mediante il metodo della trasforma di Laplace (esercizio).

Un esempio di problema di Dirichlet per la conduzione del calore, con condizioni al contorno non omogenee, è già stato considerato nel capitolo 8, esempio 8.5:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = 0 & \text{CI} \\ u(0, t) = \theta_0 & \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.9)$$

La procedura mediante cui abbiamo trovato la soluzione di questo è riassunta dal seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{4} \quad u(x, t) = \theta_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \\ \downarrow \mathcal{L} & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\ \textcircled{2} \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \frac{s}{D} \tilde{u} = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} \quad \tilde{u}(x, s) = \frac{\theta_0}{s} e^{-\sqrt{s/D}x} \end{array}$$

Nel passaggio da  $\textcircled{1}$  a  $\textcircled{2}$ , abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace:  $s\tilde{u} - f(x) = D \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$  e la condizione iniziale  $f(x) = 0$ . Nel passaggio da  $\textcircled{2}$  a  $\textcircled{3}$ , abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplose, imposto la CC, tenuto conto che la trasformata di Laplace della funzione costante  $\theta_0$  è  $\theta_0/s$ . Il passaggio da  $\textcircled{3}$  a  $\textcircled{4}$ , ha richiesto l'integrazione nel piano complesso per determinare l'anti-trasformata di Laplace di  $\tilde{u}(k, s)$ .

**PROBLEMI DI NEUMANN.** In un problema di Neumann, la CC è data dalla derivata spaziale della funzione. Più precisamente, in un problema di Neumann sulla semiretta reale si assegna  $\partial_x u(0, t) = h(t)$ . Per esempio, il seguente problema di conduzione del calore

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = f(x), & \text{CI} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.10)$$

è un problema con condizione al contorno di Neumann omogenee. Fisicamente, questo significa che la conduzione del calore avviene in condizioni completamente adiabatiche, incluso l'estremo della sbarretta:  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$  significa che non c'è flusso di calore uscente dalla sbarretta nell'origine.

Procedendo in maniera analoga a prima, si può dimostrare che problemi di questo tipo si risolvono mediante *estensione pari* del dato iniziale:  $f^\#(x) = f(x)$  per  $x > 0$  e  $f^\#(x) = f(-x)$ , per  $x < 0$ . In particolare, si dimostra che la soluzione di (19.10) è

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^\#(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(x-y)^2/(4Dt)} + e^{-(x+y)^2/(4Dt)} \right] f(y) dy \end{aligned}$$

### 19.4 Oscillazioni di temperatura nel suolo

In questa sezione vogliamo studiare le soluzioni stazionarie della propagazione del calore nel suolo in presenza di una CC periodica in  $x = 0$  ( $x = 0$  è il livello del suolo,  $x > 0$  misura la profondità). Il problema al contorno è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(0, t) = Ae^{i\omega t} \quad \text{(parte reale del secondo membro se } u \text{ temperatura) CC} \end{array} \right. \quad (19.11)$$

Si osservi che non abbiamo imposto CI: cerchiamo una soluzione stazionaria del tipo

$$u = v(x)e^{i\omega t}.$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione del calore si ottiene

$$i\omega v(x) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

che ha soluzione

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x}.$$

per

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

Le costanti  $c_1$  e  $c_2$  si determinano imponendo la condizione che  $u$  sia limitata per  $x \rightarrow \infty$  e che  $u(0, t) = Ae^{i\omega t}$ , quindi deve essere  $v(0) = A$ . Si ha così  $c_1 = 0$  e  $c_2 = A$  e quindi

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}e^{i\omega\left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)}$$

Passando alla parte reale (poiché  $u$  è una temperatura)

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos \omega \left( t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x \right)$$

Ne risulta che la temperatura  $u$  ad una qualsiasi profondità  $x$  è una funzione sinusoidale di  $t$  con ampiezza  $Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$  minore dell'ampiezza  $A$  in superficie, e la riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità e quanto maggiore è la frequenza delle oscillazioni. La fase varia da punto a punto e, precisamente, le oscillazioni si risentono verso l'interno con un ritardo  $x/(\sqrt{2D\omega})$  proporzionale alla distanza  $x$  dalla superficie, cosa che si può esprimere dicendo che *le oscillazioni di temperatura si propagano nell'interno con una velocità  $\sqrt{2D\omega}$  (tanto maggiore quindi quanto maggiore è la frequenza  $\omega$ )*. Ne deriva, in particolare che per  $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$  le oscillazioni sono in opposizione di fase con quelle in superficie.

Poiché il problema è lineare, se al suolo sono presenti due oscillazioni di frequenza  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , la temperatura sarà la sovrapposizione lineare delle temperature per le due oscillazioni. Questo permette di confrontare le variazioni diurne e stagionali. Si trova così che l'assorbimento e la velocità di propagazione delle oscillazioni diurne sono maggiori di quelle annue. Ad esempio, per un ordinario terreno umido ( $D = 0.0049 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) un'escursione diurna di  $20^\circ$ , si riduce a  $0.86^\circ$  a soli 36 cm di profondità (dove le oscillazioni sono opposte a quelle superficiali) e a  $0.004^\circ$  ad un metro. Un'escursione annua di  $20^\circ$ , invece, si ridurrebbe a  $17.5^\circ$  a 30 cm, a  $12.7^\circ$  ad un metro e a  $0.2^\circ$  a 10 metri (a tale profondità si può dunque ritenere che la temperatura resti costante nel passaggio dall'estate all'inverno). È interessante osservare che la teoria (già sviluppata da Fourier) predice che ad una certa profondità di qualche metro (dipende dal valore di  $D$  del terreno) le oscillazioni della temperatura sono in completa opposizione di fase di circa sei mesi (la temperatura nel terreno sarà più calda in inverno e più fredda in estate). Il che spiega perchè conviene avere la cantina di qualche metro sotto il livello del suolo.



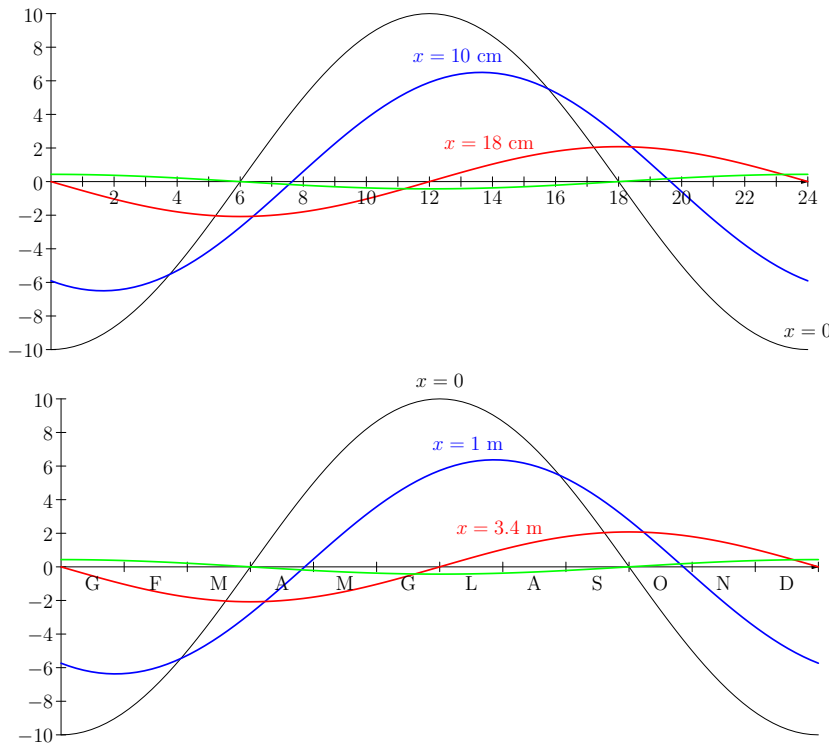


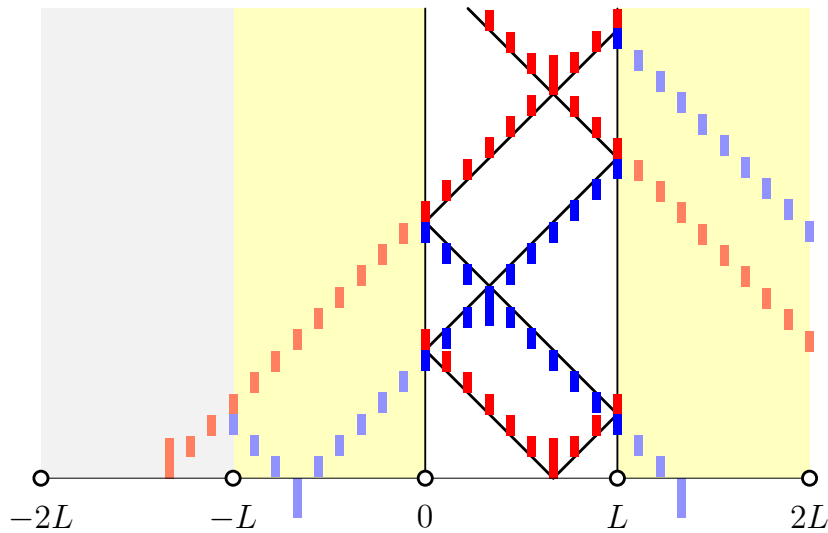
Figura 19.3: Variazioni di temperatura rispetto alla media (posta uguale a zero): giornaliera (in alto) e annua (in basso). La linea in verde corrisponde a  $x = \pi\sqrt{2D}/\omega$  in entrambi i grafici (circa 36 cm per il primo e circa 8 m nel secondo). A questa profondità la variazione esterna di  $20^0$  si è ridotta ad una frazione di grado. In entrambi i grafici la linea in rosso corrisponde a  $x = \pi\sqrt{2D}/\omega/2$ . A questa profondità c'è opposizione di fase di circa 6 ore nel caso giornaliero e di 3 mesi in quello annuo.

19.5 Problemi al contorno in un intervallo limitato

Ecco un esempio di problema al contorno in un intervallo limitato  $[0, L]$  con condizioni di Dirichlet omogenee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = a(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = b(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ |u(x, t)| \leq M \end{array} \right. \quad (19.12)$$

Si consideri preliminarmente il caso semplice di  $b(x) = 0$ , avendo presente quanto visto precedentemente per la stessa equazione sulla semi-retta. Allora, ragionando sulla figura sotto, non dovrebbe essere difficile convincersi che la soluzione è ancora della forma (19.6), dove adesso  $a^*$  e  $b^*$  sono le estensioni periodiche dispari di  $a(x)$  e  $b(x)$  alla retta reale, nel senso indicato nella sezione 18.10. Si veda anche la figura 19.4.



Condizioni al contorno di Neumann omogenee

$$\partial_x u(0, t) = 0 = \partial_x u(L, t)$$

richiedono invece un'estensione periodica pari dei dati iniziali, sempre nel senso precisato nella sezione 18.10.

Osserviamo infine che quando si hanno condizioni di Dirichlet non omogenee

$$u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b$$

basta porre

$$u = a + \frac{b-a}{L}x + v$$

e risolvere per  $v$ .

### 19.6 Metodo delle separazioni delle variabili

Discutiamo adesso un metodo che permette di giungere alle stesse conclusioni a cui siamo arrivati poc'anzi. Si tratta del metodo di Bernoulli di separazione delle variabili, che esporremo facendo riferimento al seguente problema al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ |u(x, t)| \leq M \end{array} \right. \quad (19.13)$$

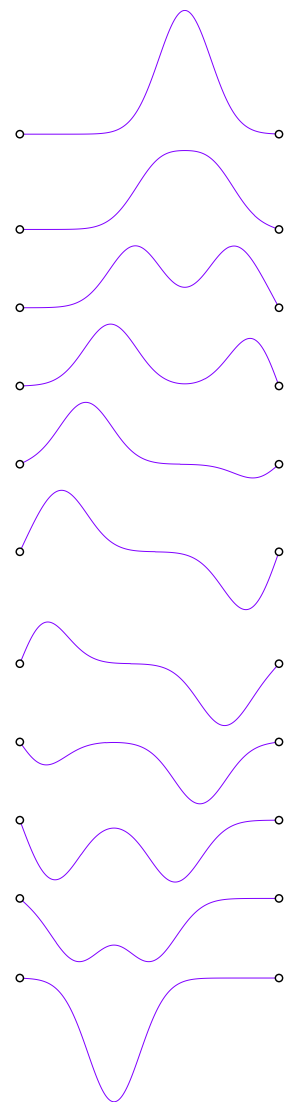


Figura 19.4: Corda di violino. La corda, tenuta ferma ai suoi estremi, è portata inizialmente nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. I fotogrammi sono stati ottenuti con la regola dell'estensione periodica dispari del dato iniziale.

L'EQUAZIONE E LE CC SONO LINEARI E OMOGENEE. Si cerca allora una soluzione  $u(x, t)$  che possa essere espressa come il prodotto di una funzione solo di  $x$  per una funzione solo di  $t$ ,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Una soluzione di questo tipo è certamente molto particolare, tuttavia, questa mancanza di generalità del metodo all'inizio è compensata alla fine dal prendere tutte le combinazioni lineari di soluzioni della forma  $X(x)T(t)$ . Si vedano i commenti alla fine.

SI SOSTITUISCA  $u(x, t) = X(x)T(t)$  nell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si trova

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t)$$

Dividendo per  $DX(x)T(t)$ , si ottiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)}$$

Questa equazione non può essere verificata a meno che ciascun membro dell'equazione sia una costante indipendente da  $x$  e  $t$ . Chiamiamo  $-\lambda^2$  questa costante. La ragione per scegliere la costante  $-\lambda^2$  invece di  $\lambda$  verrà chiarita sotto.

L'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI si separa in due equazioni ordinarie

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 DT = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} X = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \\ T = ce^{-\lambda^2 Dt} \end{cases}$$

dove  $a, b, c$  sono costanti di integrazione. Risulta chiarito perché abbiamo scelto  $-\lambda^2$ : una costante positiva avrebbe implicato una crescita esponenziale nel tempo della soluzione, che non vogliamo (la scelta del quadrato invece è pura comodità: non volevamo scrivere ogni volta una radice quadrata). Poiché le soluzioni dipendono dal parametro  $\lambda$  (per il momento arbitrario), mettiamo in evidenza questo fatto e scriviamo

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 Dt},$$

avendo assorbito, senza perdita di generalità, la costante  $c$  in  $a$  e  $b$ .

IMPONIAMO LE CONDIZIONI AL CONTORNO. La condizione al contorno  $u(0, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 D t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

da cui concludiamo che  $a_\lambda = 0$ . La condizione al contorno  $u(L, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(L, t) = b_\lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 D t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

$b_\lambda = 0$  fornisce la soluzione banale  $u = 0$ , che è poco interessante. Altre soluzioni (più interessanti) sono ottenute richiedendo che

$$\sin(\lambda L) = 0$$

per cui  $\lambda L$  deve essere un multiplo intero di  $\pi$ , cioè

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si osservi che abbiamo tenuto solo i valori positivi di  $n$ , perché i valori negativi hanno l'effetto di cambiare il segno di  $\sin \lambda_n x$  e possono quindi essere accomodati dalle costanti  $b_{\lambda_n} = b_n$ . Il caso  $n = 0$  fornisce la soluzione banale  $u = 0$ .

Eravamo partiti col cercare una soluzione, ne troviamo una successione

$$u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L)^2 D t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

USO DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE. Le equazioni

$$(\star) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

sono lineari e omogenee, quindi una sovrapposizione lineare delle soluzioni  $u_n$  è ancora una soluzione. In altre parole, la somma formale

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L)^2 D t}$$

è una soluzione delle equazioni  $(\star)$  più generale delle singole soluzioni  $u_n$ .

IMPONIAMO CHE SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE INIZIALE.

Richiediamo che valga  $u(x, 0) = f(x)$ :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Riconosciamo lo sviluppo di Fourier dell'estensione dispari di  $f(x)$  a  $[-L, L]$ . A seconda di quali siano le proprietà di  $f(x)$  possiamo dare un senso preciso all'uguaglianza precedente. Per esempio, se  $f(x)$  è continua con derivata prima continua, abbiamo convergenza uniforme. Se la funzione è liscia, eccetto per un numero finito di discontinuità, possiamo applicare il teorema di Dirichelet e concludere che si ha convergenza puntuale (e uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene le discontinuità) e convergenza alla media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità. Queste proprietà sono conservate nel corso del tempo, in quanto le coordinate di Fourier di  $u = u(x, t)$  sono

$$\hat{u}(n) = b_n e^{-(n\pi/L)^2 Dt}$$

MORALE. La soluzione di (19.13) è dunque

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (19.14)$$

È la soluzione più generale? Sì, per la completezza  $L^2$  del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno). In altre parole, per quanto l'assunzione iniziale  $u(x, t) = X(x)T(t)$  fosse molto particolare, recuperiamo completa generalità in quanto il sistema ortonormale  $\{\sin(\frac{n\pi}{L}x)\}$  è una base ortonormale in  $L^2(0, L)$  e quindi genera tutto lo spazio. Che (19.14) fosse la soluzione completa di (19.13) era anche la convinzione di Fourier, anche se non sapeva che cosa volesse dire completezza  $L^2$  e non disponeva di una dimostrazione conclusiva (la commissione che doveva giudicare la memoria scritta da Fourier ritenne che le sue conclusioni lasciavano a desiderare sia per la generalità sia per il rigore).

### 19.7 Da Fourier a Schrödinger

Consideriamo adesso il nucleo del calore

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

come funzione della variabile complessa  $t$ . Per rotazione  $t \rightarrow it$  nel piano complesso si ottiene

$$K_{it}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dit}} e^{ix^2/4Dt} \stackrel{\text{def}}{=} G_t(x)$$

che, posto  $D = \hbar/2m$ , diventa

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t} \quad (19.15)$$

Sia  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . Allora si verifica facilmente per sostituzione che

$$u(x, t) = G_t \star f(x)$$

è soluzione dell'equazione libera di Schrödinger (cioè con energia potenziale  $V = 0$ ) in una dimensione spaziale. Si può dimostrare (ma non lo faremo) che (in norma  $L^2$ )

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-y)f(y)dy = f(x).$$

Assodato questo, siamo nella stessa situazione dell'equazione del calore:  $u(x, t) = G_t \star f(x)$  è soluzione dell'equazione libera di Schrödinger per la CI  $f(x)$ . In altre parole, è soluzione del PC:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.16)$$

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

- Analogamente all'equazione del calore, l'equazione di Schrödinger propaga il dato iniziale con velocità infinita (per ragioni analoghe a quelle per l'equazione del calore).
- Analogamente all'equazione delle onde, è reversibile: se  $u(x, t)$  è soluzione,  $u^*(x, t) = \overline{u(x, -t)}$  è soluzione.
- Conserva la norma  $L^2$  del dato iniziale.

CONDIZIONI DI DIRICHLET OMOGENEE PER L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER. Prendiamo adesso la funzione (19.14) e consideriamola come funzione della variabile complessa  $t$ . Facciamo una rotazione nel piano complesso  $t \rightarrow it$  e poniamo

$$\psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, it) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iDn^2\pi^2 t/L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (19.17)$$

Si verifica per sostituzione che questa funzione è soluzione del seguente problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ \psi(x, 0) = f(x) & \text{per } 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (19.18)$$

Posto  $D = \hbar/2m$ , si riconosce l'equazione di Schrödinger per la buca unidimensionale infinita. È (19.17) la soluzione più generale? Sì, sempre per la completezza  $L^2$  del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno). Naturalmente adesso possiamo permettere che le coordinate di Fourier  $b_n$  della funzione d'onda iniziale siano numeri complessi, in quanto la funzione d'onda iniziale (a differenza della temperatura) non è vincolata ad essere reale.

Nel linguaggio quantistico, i modi di Fourier

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

sono le autofunzioni dell'hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo e  $E_n = \hbar\omega_n$ ,  $\omega_n = \hbar n^2/m$ , sono i suoi autovalori. Sia  $\mathcal{H}$  lo spazio delle funzioni che si annullano in 0 e  $L$  e che sono a quadrato integrabile e sia  $\langle | \rangle$  l'usuale prodotto scalare  $L^2$ . Allora (19.17) può essere riscritta come

$$\psi_t(x) = \sum_n e^{-i\omega_n t} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle \tag{19.19}$$

Si osservi quanto sia cruciale la completezza del sistema ortonormale  $\{\phi_n\}$ . Deve infatti valere

$$f = \sum_n \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

per qualunque funzione iniziale  $f \in L^2$ . Si osservi inoltre che, data la forma esplicita (19.19) di  $\psi_t$ , si ha

$$\|\psi_t\|^2 = \langle \psi_t | \psi_t \rangle = \langle f | f \rangle = \|f\|^2. \tag{19.20}$$

La normalizzazione dello stato è dunque preservata dall'evoluzione di Schrödinger (sarebbe un disastro, altrimenti!). Detto in altri termini, l'operatore  $U_t$  che trasforma il dato iniziale  $f$  nella funzione d'onda al tempo  $t$ ,

$$U_t f = \sum_n e^{-i\omega_n t} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

è un operatore lineare e *unitario* in  $L^2$  (si veda il prossimo capitolo).

Si può dimostrare che una formula come la (19.20) vale in generale per hamiltoniane con spettro discreto. Il problema dinamico di trovare la soluzione dell'equazione di Schrödinger è dunque risolto automaticamente una volta che sono stati trovati gli autovalori  $E_n$  e gli autovettori associati  $\phi_n$  dell'hamiltoniana, vale a dire, sono state risolte le equazioni

$$H\phi_n = E_n\phi_n,$$

e si è dimostrato che il sistema ortonormale  $\phi_n$  è completo. Allora la soluzione dell'equazione di Schrödinger è automaticamente data da (19.19).



19.8 PROBLEMI

PROBLEMA 19.1. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.2. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

(la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0$  significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore).

PROBLEMA 19.3. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = \sin \frac{3\pi}{2} x \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.4. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.5. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.6. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.7. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.8. □ Si assuma che  $f(x)$  abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona).

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K \frac{\partial u}{\partial x} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Questo problema fornisce un modello del trasferimento di calore in una sbarra lunga e sottile che scambia calore con l'ambiente esterno. Questo fenomeno è chiamato *convezione* e  $K$  è una costante positiva chiamata *coefficiente di convezione*.

PROBLEMA 19.9. □ Si assuma che  $f(x)$  abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona).

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Questa equazione è nota come *equazione di Korteweg—de Vries linearizzata*.

PROBLEMA 19.10. □ *Equazione del calore con diffusività termica non costante*. Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = at \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Esprimere la soluzione come una convoluzione.

PROBLEMA 19.11.  $\square$  Risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

PROBLEMA 19.12.  $\square$  Si risolva l'equazione del calore per una sbarra sottile infinitamente lunga di diffusività termica costante  $D$  e con distribuzione iniziale di temperatura  $f(x) = T_0$  per  $x > 0$  e 0 altrimenti. Si mostri che la temperatura  $u$  è data da

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

PROBLEMA 19.13.  $\square$  Equazione del calore per una sbarra semi-infinita. Risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

## Unitarietà della trasformata di Fourier

### 20.1 La trasformata di Fourier di funzioni buone

Sia  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni buone, nel senso tecnico del termine introdotto nel capitolo 10: una funzione  $f(x)$ , sui reali e a valori reali o complessi, è in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se è infinitamente differenziabile e se è tale che  $f(x)$  e le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di  $|x|$ .

Nel capitolo 11 abbiamo dimostrato il teorema di Fourier per funzioni buone: se  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  allora anche la sua trasformata

$$Ff(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx \quad (20.1)$$

è in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e, inoltre,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ff(y)e^{ixy} dy, \quad (20.2)$$

Inoltre, nel capitolo 11, abbiamo visto che la (20.1) definisce un operatore lineare  $F$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e la (20.2) il suo inverso  $F^{-1}$ . Dalla (20.2) segue quel che nella sezione 11.1 abbiamo chiamato *relazione di reciprocità*:

$$F^{-1} = \mathcal{S}F, \quad (20.3)$$

dove  $\mathcal{S}$  è l'inversione di parità,  $\mathcal{S}f(x) = f(-x)$ . Da questa relazione, seguono due identità interessanti

$$F^2 = \mathcal{S}, \quad F^4 = I \quad (20.4)$$

Dove  $I$  è l'operatore identità.

Nel capitolo 11 abbiamo inoltre dimostrato l'identità di Parseval-Plancherel. Se in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si introduce il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx, \quad (20.5)$$

In questo capitolo lavoriamo con la convenzione ③ per la trasformata di Fourier.

Un operatore  $A$  è detto lineare se

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag.$$

l'identità di Parseval-Plancherel (11.4) può essere riscritta come

$$\langle f | g \rangle = \langle Ff | Fg \rangle . \quad (20.6)$$

Questa equazione stabilisce che  $F$  conserva gli "angoli" tra vettori e, poiché per  $f = g$  diventa

$$\langle f | f \rangle = \|f\|^2 = \langle Ff | Ff \rangle = \|Ff\|^2 , \quad (20.7)$$

stabilisce anche che la lunghezza dei vettori in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è conservata. In breve,  $F$  è un operatore unitario in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

È importante sottolineare che  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  con prodotto scalare (20.5) NON è uno spazio di Hilbert, ma soltanto uno spazio pre-hilbertiano: ci sono successioni di Cauchy nella norma indotta da (20.5) che non convergono in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Uno degli scopi di questo capitolo è mostrare che  $F$  si estende univocamente ad un operatore unitario in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Questo obiettivo può essere raggiunto direttamente, dimostrando il teorema noto come *teorema di Plancherel*, che stabilisce appunto questo fatto, oppure indirettamente, seguendo una strada più tortuosa, ma, per molti versi più illuminante. Questo è quello che faremo. Seguendo questa strada avremo modo di incontrare alcuni metodi matematici della meccanica quantistica.

In primo luogo, vogliamo chiarire che  $F$  è unitario nello stesso senso in cui lo sono gli operatori nel caso finito-dimensionale, vale cioè l'uguaglianza

$$F^* = F^{-1} , \quad (20.8)$$

dove  $F^*$  è l'aggiunto di  $F$ . Ma che cos'è l'aggiunto di un operatore?

Nel caso finito-dimensionale, l'aggiunto di un operatore  $A$  può essere caratterizzato in termini della matrice  $[A]$  che rappresenta  $A$  (rispetto ad una base ortonormale arbitrariamente scelta) nel seguente modo: gli elementi di matrice di  $A^*$  sono ottenuti da quelli di  $A$ , trasponendo la matrice e prendendone il complesso coniugato:

$$[A^*]_{ij} = \overline{[A]_{ji}} .$$

Una caratterizzazione equivalente, ma indipendente dalla scelta di una base, è la seguente:  $A^*$  è quell'operatore tale che

$$\langle A^* \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} | A \mathbf{u} \rangle$$

per tutti i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  in  $\mathcal{H}$ . È questa la caratterizzazione che si estende naturalmente al caso infinito-dimensionale.

Nel nostro caso,  $F^*$  è dunque definito dal requisito che

$$\langle F^* f | g \rangle = \langle f | Fg \rangle , \quad (20.9)$$

valga per tutte le funzioni  $f$  e  $g$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Sviluppriamo il secondo membro della (20.9):

$$\begin{aligned}\langle f | Fg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-ixy} dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx \right]} g(y) dy,\end{aligned}$$

da cui

$$F^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ixy} dy = (Ff)(-x) = \mathcal{S}Ff(x). \quad (20.10)$$

Dunque,  $F^* = \mathcal{S}F$ . Perciò, ricordando la (20.3), risulta verificato che  $F^* = F^{-1}$ .

## 20.2 Operatori su funzioni buone

Consideriamo l'operatore  $Q$  che moltiplica una funzione  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  per il suo argomento,

$$Qf(x) = xf(x). \quad (20.11)$$

Per esempio, se  $f(x) = e^{-x^2}$ , allora  $Qf = xe^{-x^2}$  o se  $g(k) = e^{-k^4}$ , allora  $Qg(k) = ke^{-k^4}$ . Poiché le funzioni buone sono a decrescenza rapida (decregono più rapidamente di qualunque potenza negativa di  $x$ ), se  $f$  è buona, anche  $Qf$  lo è. Chiaramente,  $Q$  è un operatore lineare.

La (20.11) permette di definire gli operatori "potenza  $n$ -esima di  $Q$ " nel modo seguente:

$$Q^n f(x) = x^n f(x). \quad (20.12)$$

Si osservi che  $Q^n$  è ben definito in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , sempre in virtù della decrescenza rapida delle funzioni buone. Con la stessa regola e per la stessa ragione, risulta ben definito  $P_N(Q)$ , dove  $P_N(x)$  è un polinomio di grado  $N$ . Anche  $h(Q)$ , dove  $h$  è una funzione *abbastanza buona* è ben definito, infatti se si definisce

$$\phi(Q)f(x) = \phi(x)f(x) \quad (20.13)$$

$\phi(x)f(x)$  è ancora in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  perché, come si è visto nel capitolo 10, il prodotto di una funzione buona con una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona. Ricordiamo che  $\phi(x)$  è abbastanza buona se  $\phi(x)$  e le sue derivate crescono all'infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di  $|x|$ . Per esempio  $\phi(x) = e^{iax}$  è abbastanza buona, quindi l'operatore  $e^{iaQ}$  è ben definito in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Quando un operatore  $B$  è nella forma (20.13), si dice che è in *forma diagonale*. Questo è l'analogo infinito-dimensionale dell'operatore

finito-dimensionale  $B$  definito da una matrice diagonale  $[B]_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ , la cui azione su un generico vettore  $\mathbf{u} = (u_i)$  è

$$[B\mathbf{u}]_i = \lambda_i u_i \quad (20.14)$$

Un operatore  $A$  è detto *hermitiano* se  $A^* = A$ . Si verifica facilmente che  $Q$  è hermitiano:

$$\langle f | Qg \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} x g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} g(x) dx = \langle Qf | g \rangle.$$

UN ALTRO OPERATORE IMPORTANTE è l'operatore di derivazione rispetto all'argomento della funzione:

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x). \quad (20.15)$$

Poichè le funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sono infinitamente differenziabili con derivate a decrescenza rapida, se  $f$  è in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , anche  $Df$  è in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Un operatore  $A$  è detto *anti-hermitiano* se  $A^* = -A$ . Si verifica facilmente che  $D$  è anti-hermitiano: mediante integrazione per parti e tenendo conto dell'annullamento all'infinito delle funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si ottiene

$$\begin{aligned} \langle f | Dg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g'(x) dx = f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f'(x)} g(x) dx \\ &= -\langle Df | g \rangle. \end{aligned}$$

Se  $A$  è anti-hermitiano, allora  $iA$  e  $-iA$  sono hermitiani, infatti:  $(iA)^* = -iA^* = iA$ . Poiché è comodo lavorare con operatori hermitiani, si introduce l'operatore  $P = -iD$ , che fornisce una rappresentazione equivalente dell'operazione di derivazione  $D$ .

Quando un operatore hermitiano finito-dimensionale  $A$ , rappresentato dalla matrice  $[A]_{ij}$ , non è in forma diagonale, esiste sempre, per il teorema spettrale, un operatore unitario  $U$  che lo trasforma in un operatore  $B$  nella forma diagonale (20.14),

$$B = UAU^{-1}.$$

L'operatore hermitiano  $P$  non è in forma diagonale, ma è facilmente diagonalizzabile. In effetti, abbiamo già ottenuto questo risultato, anche se non abbiamo usato questa terminologia. Nella sezione 11.7 abbiamo visto che la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nella moltiplicazione per l'argomento. Riproduciamo qui il digramma usato in quella sezione con le notazioni e convenzioni di questo capitolo:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{D} & Df \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ Ff & \xrightarrow{iQ} & iQf \end{array}$$

Questo significa  $FD = iQF$ , cioè  $FD F^{-1} = iQ$ . In termini dell'operatore  $P = -iD$ , questa identità diventa

$$F P F^{-1} = Q \quad (20.16)$$

La trasformata di Fourier è dunque l'operatore unitario che diagonalizza l'operatore  $P$ .

Dalla (20.16) segue che  $P = F^{-1}QF$ . Si può allora definire  $\phi(P)$ , per  $\phi$  buona, nel seguente modo:

$$\phi(P) = F^{-1}\phi(Q)F,$$

avendo già chiarito che cosa è una funzione di  $Q$ . Questa definizione è consistente con le potenze intere di  $P$ , che sono direttamente definite in termini di  $P$ : ad esempio, per  $\phi(P) = P^2$  si ha

$$P^2 = F^{-1}Q^2F = F^{-1}QFF^{-1}QF = P^2$$

Si osservi che, dalla relazione di reciprocità (20.3) si ottiene  $FQF^{-1} = -P$ , il che rende la coppia  $Q, P$  una sorta di "coppia canonica" nel senso della meccanica Hamiltoniana, per cui valgono le relazioni

$$Q = F P F^{-1} \quad (20.17)$$

$$P = -F Q F^{-1} \quad (20.18)$$

Verifichiamone la consistenza:  $Q = F P F^{-1} = -F F Q F^{-1} F^{-1} = -F^2 Q (F^2)^{-1} = -\mathcal{I} Q \mathcal{I} = Q$ , avendo usato la (20.4).<sup>1</sup>

GLI OPERATORI  $P$  E  $Q$  sono i mattoni di base per costruire operatori più complicati come

$$QPQ, \quad PQ, \quad P^2 + Q^2, \quad Q^3 + PQ^2, \dots$$

Alcuni di questi sono hermitiani e altri no. Per esempio,  $QPQ$  è hermitiano in quanto  $(QPQ)^* = Q^*P^*Q^* = QPQ$ , ma  $PQ$  non lo è, essendo  $(PQ)^* = Q^*P^* = QP \neq PQ$ . Nella manipolazione algebrica di questi prodotti, è utile usare la *relazione di commutazione*

$$QP - PQ = iI \quad (20.19)$$

dove  $I$  è l'operatore identità in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Nell'ambiente quantistico, la (20.19) è nota come *relazione di commutazione* e si dimostra facilmente a partire dalle definizioni di  $Q$  e  $P$  come operatori in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (esercizio).

UNA SCELTA EQUIVALENTE di mattoni di base per costruire operatori più complicati è data dagli operatori

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q + iP] = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q + D] \quad (20.20)$$

$$a^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q - iP] = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q - D] \quad (20.21)$$

Intendiamo la trasformazione in meccanica hamiltoniana

$$p \rightarrow q \quad q \rightarrow -p,$$

che lascia invariata la forma delle equazioni di Hamilton, ed è quindi canonica.

<sup>1</sup> Esplicitamente:  $\mathcal{I} Q \mathcal{I}$  applicato a  $f$  significa: 1) trasforma  $f$  in  $f(-x)$ , 2) applica  $Q$  a  $f(-x)$  e ottieni  $xf(-x)$ , 3) applica  $\mathcal{I}$  e ottieni  $-xf(x)$ . Il risultato finale è  $-Qf$ . Poichè davanti c'era un segno meno, si ottiene  $Q$ .

Si osservi che:

$$(ABC\dots)^* = \dots C^* B^* A^*$$

Si verifica facilmente che per questi operatori vale la relazione di commutazione

$$aa^* - a^*a = 1 \quad (20.22)$$

e che la trasformata di Fourier agisce moltiplicativamente su di essi:

$$FaF^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [FQF^{-1} + iFPF^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-P + iQ] = ia \quad (20.23)$$

$$Fa^*F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [FQF^{-1} - iFPF^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-P - iQ] = -ia^* \quad (20.24)$$

### 20.3 Le funzioni di Hermite

La funzione  $e^{-x^2/2}$  è particolarmente interessante perché è una funzione buona che è autovettore di  $a$  con autovalore 0. Infatti,

$$a[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [xe^{-x^2/2} + (e^{-x^2/2})'] = \frac{1}{\sqrt{2}} [xe^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}] = 0$$

La funzione  $e^{-x^2/2}$  non ha norma 1, ma il quadrato della sua norma è

$$\int_{-\infty}^{\infty} [e^{-x^2/2}]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

e quindi la corrispondente funzione normalizzata è

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2} \quad (20.25)$$

e, per quanto visto sopra,

$$a\phi_0 = 0. \quad (20.26)$$

Consideriamo adesso

$$\phi_n(x) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.27)$$

Queste funzioni sono dette *funzioni di Hermite*. Dal corso di meccanica quantistica dovrebbe essere noto che queste funzioni formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare (20.5).

Per calcolo esplicito si mostra che la caratterizzazione (20.27) delle funzioni di Hermite è equivalente alla definizione tradizionale:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (20.28)$$

dove  $H_n(x)$  sono i polinomi di Hermite, così definiti

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left( x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}$$



Ecco i primi cinque:

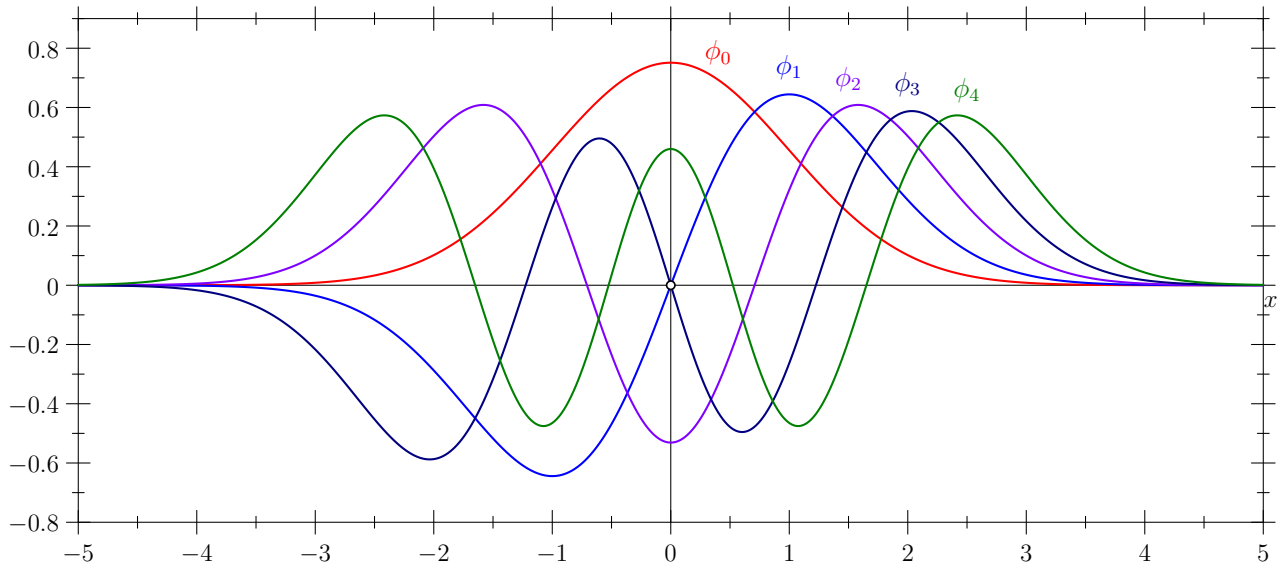
$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 4x^2 - 2$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x$$

$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$$



Studiamo adesso le proprietà delle funzioni di Hermite rispetto alla trasformata di Fourier. Essendo lisce, ed avendo un decadimento esponenziale all'infinito, le  $\phi_n$  sono funzioni buone; essendo buone, la loro trasformata di Fourier è ben definita.

Incominciamo con l'osservare che  $\phi_0$  è un autovettore di  $F$  con autovalore 1, cioè  $F\phi_0 = \phi_0$ . Infatti,

$$F[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} e^{-x^2/(4(1/2))} = e^{-x^2/2}$$

Ricordando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-y^2/(4a)}$$

Anche le funzioni  $\phi_n$  per  $n \geq 1$  sono autovettori di  $F$ . Poiché  $F^4 = I$  ci aspettiamo che gli autovalori di  $F$  siano radici quarte dell'unità, cioè  $1, i = e^{i\pi/2}, -1 = e^{i2\pi/2}, -i = e^{i3\pi/2}$ .

Per verificare questo fatto, calcoliamo  $F\phi_n$ :

$$F \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} F a^*{}^n F^{-1} F \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} F a^*{}^n F^{-1} \phi_0$$

Nel primo passaggio abbiamo inserito l'identità  $I = F^{-1}F$  e nel secondo abbiamo usato il fatto che  $F\phi_0 = \phi_0$ . Osserviamo adesso che

$$F a^*{}^n F^{-1} = F a^* F^{-1} F a^* F^{-1} \dots = (F a^* F^{-1})^n$$

e che, per la (20.24),  $Fa^*F^{-1} = (-i)a^*$ , Ne concludiamo che

$$Fa^{*n}F^{-1}\phi_0 = (-i)^n a^{*n}\phi_0,$$

da cui

$$F\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(-i)^n a^{*n}\phi_0 = (-i)^n \phi_n \quad (20.29)$$

Abbiamo così dimostrato che le funzioni  $\phi_n$  sono autovettori di  $F$  con autovalori  $(-i)^n = e^{-in\pi/2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

#### 20.4 Completezza del sistema delle funzioni di Hermite

Stabilire che un insieme di vettori forma un sistema ortonormale non vuol dire stabilire che è una base. Perché sia una base occorre che il sistema sia completo. In effetti è così, e vale il teorema: *Le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale completo in  $L^2(\mathbb{R})$ .*

La dimostrazione di questo teorema è particolarmente istruttiva perché è un punto d'incontro tra analisi complessa, spazi funzionali e trasformata di Fourier.

La proposizione (17.17) del capitolo 17 stabilisce che un sistema ortogonale è completo se e solo se è chiuso. E un sistema ortogonale è chiuso se non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema. In altre parole, un sistema  $\{\mathbf{e}_n\}$  è chiuso se dalle relazioni

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

segue che  $\mathbf{u} = 0$ . Adesso vogliamo mostrare che le funzioni di Hermite sono un sistema ortogonale chiuso in  $L^2(\mathbb{R})$ . A tal fine, data la (20.28), è sufficiente mostrare che se

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

allora  $f(x)$  deve essere la funzione nulla.

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x) e^{-izx} dx$$

come funzione della variabile complessa  $z$ . L'integrale converge assolutamente e uniformemente in ogni regione finita del piano complesso. Quindi  $F(z)$  non ha singolarità e deve essere una funzione intera. In altre parole, possiamo rappresentare  $F(z)$  in serie di potenze,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

e il raggio di convergenza della serie deve essere infinito. Allora

$$c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = \frac{(-i)^n}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0$$

per ipotesi. Ne segue che

$$F(z) = 0$$

Poiché in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  la trasformata di Fourier inversa della funzione nulla è nulla si ha

$$e^{-x^2/2} x^n f(x) = 0 \implies f(x) = 0,$$

che è proprio quel che occorre dimostrare per dimostrare che le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale chiuso.

In conclusione, le funzioni di Hermite formano una *base ortonormale* in  $L^2(\mathbb{R})$ . Risulta così stabilita l'equivalenza unitaria di  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\ell^2$  nello stesso senso in cui nella sezione 18.6 si era stabilita l'equivalenza unitaria tra  $L^2(\mathbb{T})$  e  $\ell^2$ . Come conseguenza di questo, vale un diagramma analogo a quello visto in quella sezione:

$$\begin{array}{ccc} f \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{U_\phi} & \{\langle \phi_n | f \rangle\} \in \ell^2 \\ \sum c_n \phi_n \in L^2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{U_\phi^{-1}} & \{c_n\} \in \ell^2 \end{array}$$

Le funzioni di Hermite sono dunque una base per un'analisi di Fourier generalizzata di una funzione  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$ ; i coefficienti  $c_n = \langle \phi_n | f \rangle$  sono le *coordinate di Hermite* della funzione  $f$ .

## 20.5 Trasformata di Fourier di funzioni a quadrato integrabile

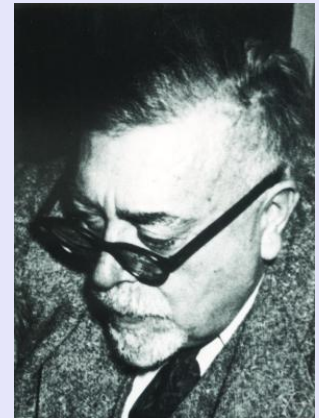
La trasformata di Fourier  $F$  si estende da  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ad un operatore unitario in  $L^2(\mathbb{R})$ . Questo è un risultato che Norbert Wiener ottenne negli anni 30 del secolo scorso (finalmente un po' di matematica del 900!). Ecco le tappe della dimostrazione:

- Il sistema delle funzioni di Hermite  $\{\phi_n\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$  è una base ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$  (dimostrato nella sezione precedente).
- Quindi qualunque funzione in  $L^2(\mathbb{R})$  può essere decomposta nella base  $\{\phi_n\}$ :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

- La (20.29) fornisce l'azione di  $F$  sui vettori della base  $\{\phi_n\}$ :

$$F\phi_n = (-i)^n \phi_n = e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n$$



Norbert Wiener (1894–1964) è stato un matematico americano. Bambino prodigo, divenne poi un matematico che contribuì significativamente allo sviluppo della matematica applicata nel XX secolo (dalla teoria dei processi stocastici all'ingegneria elettronica e delle telecomunicazioni). È il padre della cibernetica e della teoria del controllo; è sua la formalizzazione della nozione di feed-back. In fisica teorica è noto per la misura di Wiener, che si applica alla teoria del moto browniano e alla integrazione lungo cammini di Feynman.

(d) Quindi  $F$  può essere estesa per linearità a tutto lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$Ff = F \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (F\phi_n) \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

Fine. (La dimostrazione appare molto semplice perché tutti i passi sono già stati fatti nelle sezioni precedenti).

Risulta così stabilita l'identità di Parseval-Plancherel per tutte le funzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ . E risulta così anche stabilito il seguente sviluppo in serie dell'integrale di Fourier:

$$Ff(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(k) e^{-ni\frac{\pi}{2}} \quad \text{dove } c_n = \langle \phi_n | f \rangle$$

### 20.6 L'oscillatore armonico quantistico

Consideriamo l'azione dell'operatore  $N = a^*a$  sulle funzioni di Hermite  $\phi_n = (1/\sqrt{n!})(a^*)^n \phi_0$ . Usando la relazione di commutazione, si dimostra che (esercizio)

$$N\phi_n = a^*a\phi_n = n\phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Quindi, ricordando il caso finito dimensionale,  $N$  risulta diagonale nella base formata dalle funzioni di Hermite e quindi possiamo scrivere

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

È importante aver chiaro che  $N$  NON è definito su tutto  $L^2(\mathbb{R})$ : la sua azione su una funzione  $f$  con coordinate di Hermite  $c_n = \langle \phi_n | f \rangle$  è

$$Nf = \sum_{n=0}^{\infty} n \phi_n \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \phi_n,$$

da cui si vede che se i  $c_n$  formano una successione in  $\ell^2$ , non è detto la successione  $\{n c_n\}$  delle coordinate di Hermite di  $Nf$  sia in  $\ell^2$ , perché non è detto che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

converga. La sua convergenza dipende dall'andamento all'infinito delle coordinate  $c_n$ . Analogamente a quanto visto per le serie di Fourier, si può mostrare che se  $f$  è buona, cioè è a decrescenza rapida, le sue coordinate di Hermite decadono esponenzialmente. Quindi  $N$  è sicuramente ben definito per funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (naturalmente, basta molto meno: è sufficiente un decadimento che bilanci  $n^2$ , ad esempio  $|c_n| \sim 1/n^2$  va bene).

Così come non sono definiti su  $L^2(\mathbb{R})$  né  $Q$  né  $P$ . Gli operatori  $N$ ,  $P$  e  $Q$  sono esempi di operatori non continui o illimitati, che possono essere definiti solo su un dominio strettamente contenuto in  $L^2$ . La teoria degli operatori di questo tipo, in particolare lo studio della loro hermiticità (o auto-aggiuntezza) è particolarmente difficile e richiede molta cura e competenza matematica.

Abbiamo già ricordato che nel caso finito-dimensionale, quando una matrice hermitiana è in forma diagonale  $A = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ , la funzione  $h(A)$  della matrice è definita da  $h(A) = \sum_n h(\lambda_n) |e_n\rangle\langle e_n|$ . La stessa definizione si applica al caso infinito-dimensionale. Possiamo quindi considerare  $h(N)$ , ad esempio per  $h(x) = e^{-itx}$ , dove  $t$  è un numero reale. Allora risulta definito

$$U_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-itN} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} |\phi_n\rangle\langle \phi_n|. \quad (20.30)$$

Questo operatore è estendibile a tutto  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti,

$$U_t f = e^{-itN} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle \quad (20.31)$$

e la successione  $\{e^{-int} \langle \phi_n | f \rangle\}$  è in  $\ell_2$  se la successione delle coordinate di Hermite  $c_n = \langle \phi_n | f \rangle$  è in  $\ell_2$  perchè  $|e^{-int} c_n| = |c_n|$ .

In conclusione, osserviamo che la (20.31) fornisce la soluzione  $f(x, t)$  dell'equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico quantistico per condizione iniziale  $f(x, 0) = f(x)$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti, sviluppando  $N = a^*a$  si ottiene

$$N = \frac{1}{2} \left( x - \frac{d}{dx} \right) \left( x + \frac{d}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right]$$

che è proprio l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico quantistico, con tutte le costanti fisiche poste uguali a 1 e a cui è stata sottratta l'energia  $1/2$  dello stato fondamentale (che può quindi essere facilmente aggiunta). Inoltre, per  $t = \pi/2$ , la (20.31) fornisce la trasformata di Fourier di  $f$ .

ESERCIZIO. Dimostrare che  $U_t = e^{-itN}$  è un operatore unitario in  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 20.7 La trasformata di Fourier frazionaria

Alla fine della sezione precedente siamo giunti ad una conclusione inaspettata: la trasformata di Fourier  $F$  non è altro che l'evoluzione temporale dell'oscillatore armonico quantistico calcolata dopo un quarto di periodo:

$$U_{\frac{\pi}{2}} f = e^{-i\frac{\pi}{2}N} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle = Ff$$

Se potessimo superare tutti i problemi legati alla difficoltà di codificare, manipolare e recuperare l'informazione contenuta nello stato di un sistema quantistico (oggetto di studio della computazione quantistica), avremmo un sistema fisico concreto per fare trasformate

di Fourier: basterebbe preparare un oscillatore armonico nello stato iniziale  $f$  e leggere lo stato del sistema dopo un tempo pari ad un quarto di periodo e avere così la trasformata di Fourier di  $f$ . Tutto ciò è molto irrealistico. Inoltre, abbiamo già molti sistemi fisici (ottici soprattutto) che come effetto della loro evoluzione temporale producono la trasformata di Fourier del dato iniziale. Sia come sia, questo legame tra oscillatore armonico quantistico e trasformata di Fourier è interessante. Nasce spontanea la domanda: *che cosa ha di speciale un quarto di periodo? Perché non un ottavo o tre quinti?*

Motivati da questa domanda (a cui, peraltro, non saprei come rispondere), alcuni ricercatori, nelle ultime decine d'anni (finalmente matematica del 2000!), si sono posti il problema di studiare trasformate di Fourier frazionarie

$$F^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\alpha} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle.$$

dove  $\alpha$  è un numero reale, e di applicare tali trasformate allo studio dei segnali per migliorare le tecniche tradizionali di analisi. Non conosco abbastanza la materia per dire se questo sia uno sviluppo interessante e utile dell'analisi armonica classica. La letteratura al riguardo (articoli e libri) è in crescita (ma questo al giorno d'oggi non vuol dire, di per sé, un granché). Sia come sia, l'analisi frazionaria dà una descrizione del segnale in domini intermedi tra il puro dominio temporale e quello in frequenza. La figura 20.1 (presa da Wikipedia) riproduce l'analisi frazionaria di Fourier della funzione di "scatola" per diversi valori di  $\alpha$ .

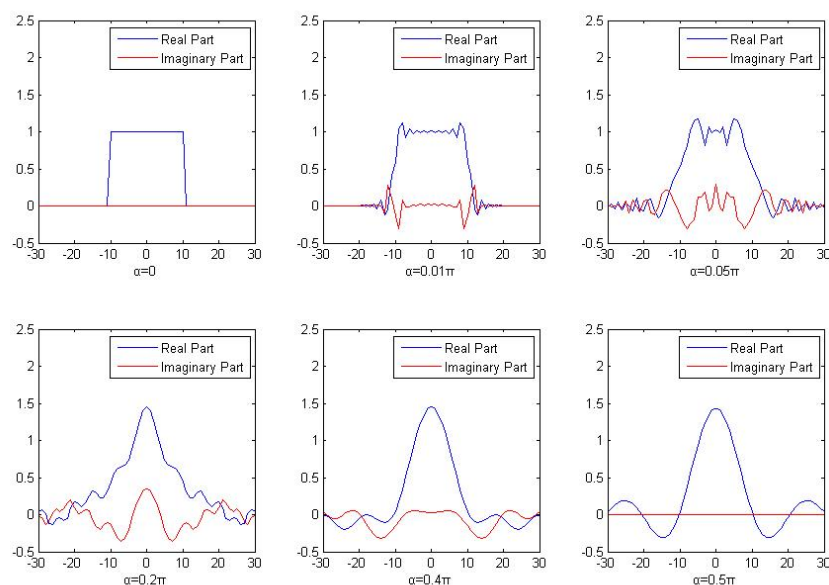


Figura 20.1: Trasformata di Fourier frazionaria per diversi valori di  $\alpha$ . La prima figura è la scatola, ( $\alpha = 0$ ), l'ultima è la sinc ( $\alpha = \pi/2$ ), che è la trasformata di Fourier tradizionale della scatola; per valori di  $\alpha$  tra 0 e  $\pi/2$ , ci sono rappresentazioni intermedie del segnale tra la scatola e la sinc. Si osservi che la figura può anche essere vista come una successione di fotogrammi dell'evoluzione temporale della funzione d'onda dell'oscillatore armonico quantistico, con funzione d'onda iniziale "scatola", tra il tempo  $t = 0$  e il tempo uguale a  $\pi/2$  (un quarto di periodo).

## 21

### Complementi sulla trasformata di Fourier\*

\* Non in programma.

#### 21.1 Proprietà di analiticità della trasformata di Fourier

Vogliamo occuparci delle proprietà di analiticità della trasformata di Fourier, approfondendo alcuni temi introdotti nella sezione 13.5. Come nella sezione 13.5, in questo capitolo useremo la convenzione ② per la trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (21.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (21.2)$$

Si osservi anche lo scambio di segni degli esponenziali nella definizione della trasformata e nella formula di inversione, nonché l'uso delle variabili  $\omega$  e  $t$ . Abbiamo in mente applicazioni a segnali dipendenti dal tempo e ad analisi in frequenza degli stessi.

Consideriamo il continuamento analitico di  $\hat{f}(\omega)$  nel piano complesso  $z = \omega + i\sigma$  ad una funzione

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt} dt$$

tale che

$$g(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

Frequentemente,  $\hat{f}(\omega)$  può essere estesa ad una funzione che è analitica in una certa regione del piano. Per esempio, se  $f(t) = e^{-|t|}$  allora

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

che si estende alla funzione meromorfa

$$g(z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Questo non dovrebbe sorprendere più di tanto: per ogni reale  $t$ , la funzione  $e^{itz}$  che compare sotto il segno di integrale è una funzione

intera, e quindi ci sia aspetta che ci siano delle condizioni su  $f$  per cui  $\widehat{f}$  sarà analitica in certe regioni del piano complesso. Considereremo due classi di funzioni analitiche che emergono in questo modo e che giocano un ruolo importante in fisica.

Una funzione causale  $f(t)$  è una qualunque funzione in  $L^2(-\infty, \infty)$  che si annulla in  $(-\infty, 0)$ . Sia

$$\widehat{g}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad \text{per } z \in \Pi^+ \quad (21.3)$$

dove  $\Pi^+$  è il semipiano superiore del piano delle frequenze complesse, cioè l'insieme di tutte le  $z = \omega + i\sigma$  tali che  $\sigma > 0$ . Se  $z \in \Pi^+$  allora

$$|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$$

il che mostra che l'integrale (21.3) è convergente. La continuità di  $\widehat{g}(z)$  è facilmente verificata. E altrettanto facilmente si verifica l'analiticità, fatto che abbiamo già stabilito nella sezione 13.5.

Riscriviamo (21.3) nella forma

$$\widehat{g}(\omega + i\sigma) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt \quad (21.4)$$

e consideriamo  $\sigma$  come fissato. Allora  $\widehat{g}(z)$  è la trasformata di Fourier della funzione  $f_{\sigma}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ , cioè

$$\widehat{g}(z) = \widehat{f}_{\sigma}(\omega) \quad \text{per } f_{\sigma}(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad \text{e } z = \omega + i\sigma \quad (21.5)$$

Applichiamo l'identità di Parseval-Plancherel a  $f_{\sigma}(t)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

per ogni  $\sigma > 0$ . Questo mostra

**Proposizione 21.1.** *Se*

$$\widehat{g}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad \text{per } z \in \Pi^+$$

*allora  $\widehat{g}(z)$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e le sue restrizioni a linee orizzontali in  $\Pi^+$  formano un insieme limitato in  $L^2(-\infty, \infty)$ .*

La seconda classe di trasformate di Fourier analitiche consiste in tutte le funzioni della forma

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

dove  $0 < T < \infty$  e  $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ . Queste funzioni sono intere (stessa dimostrazione di prima) e soddisfano la condizione di crescita

$$|\widehat{g}(z)| \leq \int_{-T}^T |f(t)| e^{-\sigma} dt \leq e^{T|\sigma|} \int_{-T}^T |f(t)| dt$$



Funzioni intere che soddisfano questa condizione di crescita sono dette di *ordine esponenziale*. Se  $C$  è la costante che denota l'ultimo integrale dell'equazione precedente, la condizione di crescita implica che

$$|\widehat{g}(z)| \leq Ce^{T|z|}. \quad (21.6)$$

**Proposizione 21.2.** *Se  $\widehat{g}(z)$  è una funzione della forma*

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

*allora è una funzione intera che soddisfa (21.6) e le sue restrizioni a linee orizzontali nel piano complesso sono in  $L^2(-\infty, \infty)$  (per il teorema di Plancherel).*

### 21.2 Teoremi di Paley-Wiener

È un fatto notevole che valgono gli inversi delle proposizioni 1 e 2. I teoremi che stabiliscono questo fatto sono noti come teoremi di Paley-Wiener. Ci limitiamo ad enunciare questi teoremi senza darne una dimostrazione.

**Teorema 1.** *Si supponga che  $\widehat{g}(z)$  sia una funzione analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e che*

$$\sup_{0 < \sigma < \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = C < \infty$$

*Allora esiste una funzione  $f(t)$  in  $L^2(0, \infty)$  tale che*

$$f(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt$$

e

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = C$$

**Teorema 2.** *Si supponga che  $T$  e  $C$  siano costanti positive e che  $\widehat{g}(z)$  sia una funzione intera tale che*

$$|\widehat{g}(z)| \leq Ce^{T|z|}$$

*per tutti  $z = \omega + i\sigma \in \mathbb{C}$  e che*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

*Allora esiste una funzione  $f(t)$  in  $L^2(0, \infty)$  tale che*

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

## 21.3 Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon

Un segnale è detto a *banda limitata* se  $\widehat{f}(\omega)$  è assolutamente integrabile e se esiste una frequenza  $\Omega > 0$  tale che  $\widehat{f}(\omega) = 0$  per tutti gli  $|\omega| > \Omega$ . La frequenza  $\Omega$  è chiamata *larghezza di banda*. Un segnale di questo tipo è allora dato da

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

Naturalmente, poiché non importano i nomi delle variabili, si applicano le stesse considerazioni che abbiamo fatto prima. La funzione  $f(t)$  può essere estesa ad una funzione  $f(\zeta)$  nel piano complesso (adesso del tempo) che è analitica e intera (per le stesse ragioni di prima). Anche  $f(\zeta)$  è di ordine esponenziale, nel senso che la sua condizione di crescita è

$$|f(\zeta)| \leq e^{\Omega |\operatorname{Im}\zeta|} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\widehat{f}(\omega)| d\omega$$

per tutti  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

L'analiticità dei segnali a banda limitata ha conseguenze singolari. Una è il risultato contro-intuitivo che la conoscenza del segnale  $f(t)$  in un breve intervallo di tempo  $[a, b]$ , *arbitrariamente piccolo*, sull'asse reale, determina i suoi valori a tutti i tempi. Questa è una conseguenza dell'unicità del prolungamento analitico delle funzioni analitiche.

Ecco un paradosso. È una pratica sperimentale standard che non si possono generare onde di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola. Quindi tutti i segnali generati in laboratorio sono a banda limitata. È altresì una pratica sperimentale standard che non ci sono segnali che si estendono infinitamente lontano nel passato. Quindi c'è un  $T > 0$  tale che  $f(t) = 0$  quando  $t$  è reale e  $t < -T$ . Queste due pratiche sperimentali standard implicano che i segnali sono funzioni analitiche intere che si annullano nell'intervallo  $(-\infty, -T) \subset \mathbb{R}$ . L'unicità del continuamento analitico implica che tutti i segnali di questo tipo debbano essere identicamente nulli. Perciò il solo segnale che soddisfa la pratica sperimentale standard è  $f(t) = 0$ ! La risoluzione di questo paradosso è che mentre è vero che in laboratorio si può controllare lo spettro in una banda limitata  $-\Omega < \omega < \Omega$ , si creano in ogni caso, indipendentemente dal nostro controllo, frequenze fuori da questa banda.

Uno dei teoremi più interessanti e antichi per i segnali a banda limitata stabilisce che il segnale può essere recuperato progressivamente mediante un campionamento ad intervalli di tempo regolari. Questo fatto fu scoperto da Whittaker nel 1915 e riscoperto da Shannon nel 1949. Enunciamo (una versione di) questo teorema senza

darne la dimostrazione. Prima ricordiamo la definizione della sinc.

Sia

$$\operatorname{sinc}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

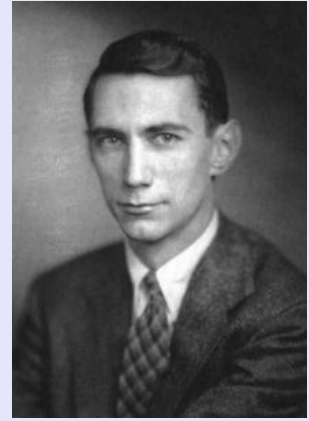
la funzione *sinc*. Per  $t = 0$  il valore della *sinc* è definito pari a 1. Ed ecco il teorema:

**Teorema 3** (Whittaker, Shannon). *Sia  $f(t)$  un segnale a banda limitata con larghezza di banda  $\Omega$  e sia*

$$L < \frac{\pi}{\Omega}.$$

*Allora  $f$  può essere ricostruita da un campionamento dei suoi valori ai tempi  $\{nL, n \in \mathbb{Z}\}$  come la serie convergente*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nL}{L}\right) f(nL)$$



Claude Shannon (1916–2001) è stato un matematico americano. È riconosciuto come il padre della teoria dell'informazione, dove, importandola dalla fisica, introdusse la nozione di entropia come misura della quantità di informazione. Nella sua tesi del 1937, a 21 anni, gettò le basi per la costruzione di un computer digitale, dimostrando che con l'implementazione elettrica dell'algebra booleana si poteva risolvere qualunque relazione logica e numerica. Durante la seconda guerra mondiale, contribuì anche notevolmente allo sviluppo della crittografia. In questo, il suo lavoro fu parallelo a quello svolto nello stesso periodo dal matematico inglese Alan Turing sull'altra sponda dell'oceano Atlantico.



## 22

### *Analisi asintotica\**

\* Non in programma.

#### 22.1 Notazioni standard dell'analisi asintotica

I simboli  $O$ ,  $o$  e  $\sim$  sono definiti nel modo seguente. Supponiamo che  $f(z)$  e  $g(z)$  siano funzioni complesse definite in qualche regione  $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$  del piano complesso e che abbiano un limite quando  $z \rightarrow z_0$  in  $\mathcal{R}$ . Allora si considera le seguenti notazioni abbreviate per descrivere le proprietà relative di queste funzioni nel limite  $z \rightarrow z_0$ .

*Asintoticamente limitata*

$$f(z) = O(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

se il rapporto  $|f(z)/g(z)|$  è limitato quando  $z \rightarrow z_0$ . Diciamo allora che  $f(z)$  è asintoticamente limitata da  $g(z)$  quando  $z \rightarrow z_0$ .

*Asintoticamente più piccola*

$$f(z) = o(g(z)) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che  $f(z)/g(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow z_0$ . Vale a dire,  $f(z)$  è asintoticamente più piccola di  $g(z)$  quando  $z \rightarrow z_0$ .

*Asintoticamente uguale*

$$f(z) \sim g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

significa che (assumendo  $g(z)$  non nulla in un intorno di  $z_0$ )

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Equivalentemente, questo significa che per  $z \rightarrow z_0$

$$f(z) = g(z) + o(g(z))$$

Esempi:

- $f(t) = O(1)$  quando  $t \rightarrow t_0$  significa che  $f(t)$  è limitata quando  $t \rightarrow t_0$  (si dice che  $f \in O(1)$  quando è limitata ovunque).
- Se  $f(t) = 5t^2 + t + 3$ , allora, per  $t \rightarrow \infty$ ,  $f(t) = o(t^3)$ ,  $f(t) = O(t^2)$  e  $f(t) \sim 5t^2$ . Per  $t \rightarrow 0$ ,  $f(t) \sim 3$ .
- Per  $t \rightarrow \infty$ ,  $t^{1000} = o(e^t)$ .

Osservazioni:

- La funzione  $g(z)$  nelle definizioni precedenti è usualmente detta *funzione di calibro*, in quanto è la funzione rispetto a cui si calibra il comportamento limite di  $f(z)$ .
- Come notazione alternativa a  $f(z) = o(g(z))$ , spesso (specialmente in fisica) si usa

$$f(z) \ll g(z) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

## 22.2 Integrali di Fourier e lemma di Riemann-Lebesgue

Vogliamo studiare il comportamento asintotico dell'*integrale di Fourier generalizzato*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \quad (22.1)$$

nel limite  $\lambda \rightarrow \infty$ . Intuitivamente, ci aspettiamo che l'integrale sia pari a zero nel limite: se  $\lambda$  è grande, la funzione integranda oscilla molto rapidamente e ci aspettiamo che ci sia una cancellazione tra contributi positivi e negativi di intervalli adiacenti, e quindi un valore dell'integrale prossimo allo zero. In effetti, vale il seguente teorema:

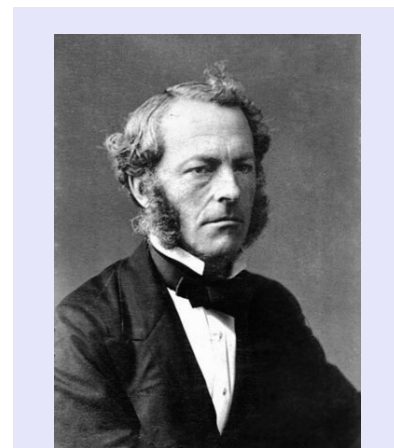
**LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE.** *Se  $f(x)$  è integrabile e  $S(x)$  è continuamente differenziabile in  $a \leq x \leq b$  e, inoltre, non è costante in nessun sotto-intervallo di  $a \leq x \leq b$ , allora, per  $\lambda \rightarrow \infty$*

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \rightarrow 0$$

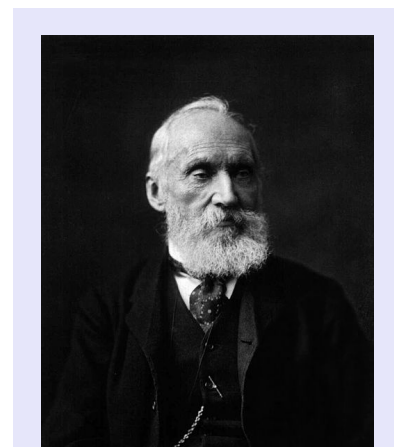
## 22.3 Metodo della fase stazionaria

Stabilito che  $F(\lambda)$  tende a 0, si vuole determinare il suo ordine di infinitesimo per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Nella seconda metà dell'800 Stokes e Kelvin, principalmente interessati ad applicazioni all'idrodinamica, svilupparono un metodo, noto come *metodo della fase stazionaria*, che è proprio mirato a raggiungere questo scopo.

Consideriamo prima il caso in cui  $S'(x) \neq 0$ . Moltiplichiamo e dividiamo per  $S'(x)$  sotto il segno di integrale a secondo membro



Sir George Stokes (1819–1903), è stato un matematico e fisico irlandese che diede importanti contributi alla dinamica dei fluidi (noto per le equazioni di Navier-Stokes), all'ottica e alla fisica-matematica



William Thomson, primo Barone Kelvin (1824–1907) è stato uno scienziato e ingegnere britannico. Fu tra i fisici più influenti del XIX secolo.

della (22.1), quindi integriamo per parti:

$$\int_a^b \underbrace{e^{i\lambda S(x)} S'(x)}_{\text{int}} \underbrace{\frac{f(x)}{S'(x)}}_{\text{der}} dx = e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx$$

Allora

$$F(\lambda) = \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} - \underbrace{\frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx}_{\text{termine integrale}}$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue, il termine integrale è  $o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  e quindi, per  $\lambda \rightarrow \infty$

$$F(\lambda) \sim \underbrace{e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine al bordo}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (22.2)$$

Tuttavia, se nell'intervallo  $[a, b]$  la funzione  $S(x)$  ha un *punto critico* o *stazionario*, cioè un punto  $c$  in cui si annulla la sua derivata,  $S'(c) = 0$ , dobbiamo cambiare strategia: non possiamo integrare per parti ed avere un  $S'$  a denominatore.

L'idea centrale del metodo della fase stazionaria è che in presenza di un punto critico  $c$  di  $S$ , il contributo dominante allo sviluppo asintotico di  $F(\lambda)$  proviene proprio dall'intorno di  $t = c$ . Intuitivamente, l'idea del metodo è chiara: nell'intorno di un punto in cui la fase è stazionaria non c'è cancellazione, come si può verificare con un esempio. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^3 x \cos \left[ \lambda \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx \quad (22.3)$$

e riportiamo in figura 22.1 la funzione integranda per diversi valori di  $\lambda$ . La figura dimostra perché è la regione intorno al punto stazionario della cubica  $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ , cioè intorno a  $x = 1$ , che contribuisce maggiormente all'integrale (22.3). In figura sono mostrati i grafici di  $x \cos \left[ \lambda \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$  per valori successivamente crescenti di  $\lambda$  (curve solide in rosso); la curva blu tratteggiata è la cubica  $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$  (che un minimo in  $x = 1$ ). Vediamo che, fuori da un intorno del punto stazionario di  $S(x)$ , le aree tra l'asse delle  $x$  e la curva  $x \cos \left[ \lambda \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$  si cancellano approssimativamente, in completo accordo con il lemma di Riemann-Lebesgue.

Spieghiamo il metodo della fase stazionaria in 3 passi.

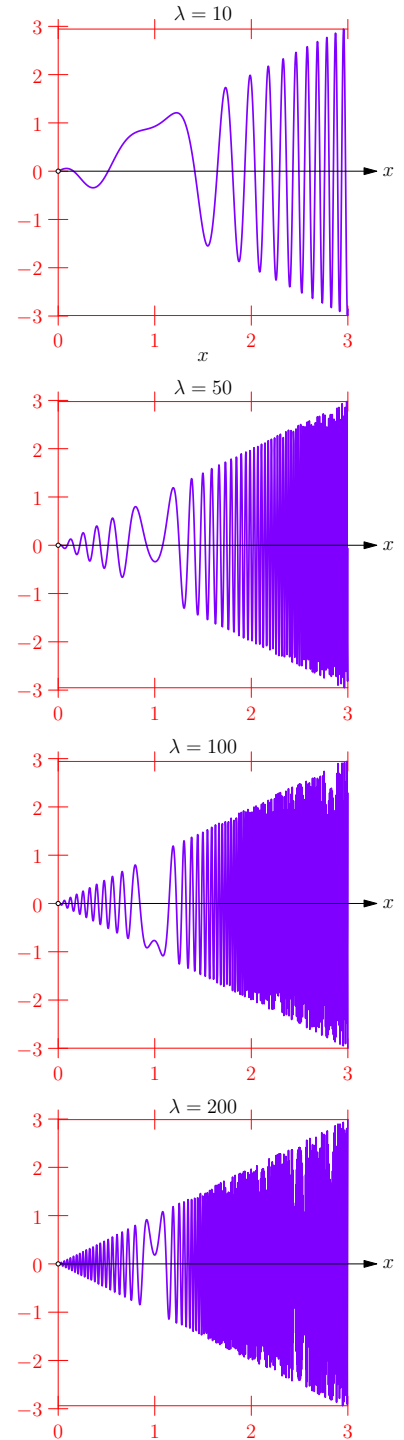


Figura 22.1: Grafici della funzione

$$S(x) = x \cos \left[ \lambda \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]$$

per diversi valori di  $\lambda$ .

*Primo passo.* Sia  $c$  un punto stazionario di  $S$  (assumiamo per semplicità che ce ne sia uno solo) e sia  $\epsilon > 0$  piccolo. Allora

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \left[ \int_a^{c-\epsilon} + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^b \right] e^{i\lambda S(x)} f(x) dx \\ &= \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Infatti, per i due integrali che non contengono il punto critico possiamo integrare per parti, applicare Riemann-Lebesgue e arrivare ad un'equazione simile alla (22.2). Poiché, come vedremo, il contributo nell'intorno di  $c$  è dominante, d'ora in poi trascureremo questa correzione di ordine  $1/\lambda$  e scriveremo

$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{i\lambda S(x)} f(x) dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

*Secondo passo.* Se  $\epsilon$  è abbastanza piccolo, per ottenere il comportamento dell'ordine dominante dell'integrale, le seguenti approssimazioni sono giustificate:

$$\begin{aligned} S(x) &\approx S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2 \\ f(x) &\approx f(c) \end{aligned}$$

Naturalmente, nello sviluppo di Taylor di  $S(x)$  manca il termine del prim'ordine in quanto  $S'(c) = 0$ . Abbiamo inoltre assunto che  $S''(c) \neq 0$ : se così non fosse, dovremmo considerare termini di ordine superiore (e fermarci al primo termine non nullo). Sia come sia, otteniamo

$$F(\lambda) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{i\lambda(S(c) + \frac{1}{2} S''(c)(x-c)^2)} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

*Terzo passo.* Adesso estendiamo il dominio di integrazione da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Per quanto apparentemente bizzarro, questo è legittimo perché in questo modo introduciamo correzioni di ordine  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , che possono essere trascurate. Allora (portando anche fuori dall'integrale le costanti)

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\lambda}{2} S''(c)(x-c)^2} dx, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Con il cambiamento di variabili (dovuto a Morse)

$$u = +\sqrt{\frac{\lambda}{2} |S''(c)|} (x-c)$$

si ottiene

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c)} \sqrt{\frac{2}{\lambda |S''(c)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \operatorname{sgn}[S''(c)] u^2} du,$$



dove

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

(vedi appendice). Quindi, l'asintotica di  $F(\lambda)$  è

$$F(\lambda) \sim f(c) e^{i\lambda S(c) + i\operatorname{sgn}[S''(c)]\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty \quad (22.4)$$

Fine della descrizione del metodo della fase stazionaria. Adesso alcune osservazioni.

1. Se  $c = a$  o  $c = b$ , il contributo all'integrale, che adesso è solo su un intervallo semi-infinito, è metà del risultato asintotico trovato. In questo caso occorre dunque moltiplicare per  $\frac{1}{2}$  il risultato che abbiamo trovato.
2. Se  $S(x)$  ha molti punti stazionari in  $[a, b]$ , allora spezziamo l'integrale in intervalli che contengono solo un punto stazionario, li trattiamo indipendentemente usando il metodo appena descritto e poi sommiamo tutti i contributi.
3. Se il punto stazionario è tale che tutte le derivate di  $S$  sono nulle fino alla derivata  $m$ -esima, che è non nulla, allora lo sviluppo in serie della fase sarà  $S(x) \approx S(c) + \frac{1}{m!} S^{(m)}(c)(x-c)^m$ .

ESEMPIO 22.1. Calcoliamo il termine dominante dello sviluppo asintotico dell'integrale (22.3), che scriviamo nella forma

$$\operatorname{Re}\{F(\lambda)\}, \quad F(\lambda) = \int_0^3 x e^{i\lambda(\frac{1}{3}x^3 - x)} dx$$

Riconosciamo  $f(x) = x$  e  $S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ . Si ha  $S'(x) = x^2 - 1$ , e solo una delle due radici,  $x = 1$  è dentro l'intervallo di integrazione. Poiché  $S''(x) = 2x > 0$  per  $x \geq 0$ , il punto  $x = 1$  è un minimo locale e globale. Allora

$$f(1) = 1, \quad S(1) = -\frac{2}{3}, \quad S''(1) = 2$$

e dunque, applicando la (22.4),

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3})}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

Prendendone la parte reale, otteniamo l'asintotica cercata:

$$\int_0^3 x \cos \left[ \lambda \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2\lambda}{3} \right), \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty$$

22.4 *Asintotica a onde corte in meccanica quantistica*

Applichiamo il metodo della fase stazionaria per risolvere un esercizio di interesse fisico.

**Esercizio 1.** *Determinare l'andamento asintotico  $\hbar \rightarrow 0$  della soluzione del seguente problema al contorno*

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(x, 0) = f_0(x) = r(x)e^{\frac{i}{\hbar}s(x)} \end{array} \right.$$

per  $s(x) = mv_0x$ , essendo  $v_0$  una costante positiva, e per  $r(x)$  funzione reale positiva.

Sol. Per quanto visto nella lezione 19, la soluzione di

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

è

$$f(x, t) = G \star f_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f_0(y) dy$$

dove

$$G(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t}$$

L'andamento asintotico di  $f(x, t)$  è ottenuto ponendo  $\lambda = 1/\hbar$  e studiandone l'asintotica per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Dopo aver inserito  $G$  nel prodotto di convoluzione, tenuto conto della condizione iniziale, e posto  $\lambda = 1/\hbar$ , si ottiene

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy = \sqrt{\frac{m\lambda}{2\pi it}} F(\lambda) \quad (22.5)$$

dove

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m(x-y)^2/2t} e^{i\lambda m v_0 y} r(y) dy.$$

Possiamo riscrivere questo integrale come

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S(y)} r(y) dy$$

dove

$$S(y) = \frac{m(x-y)^2}{2t} + m v_0 y.$$

Determiniamo i punti stazionari di  $S(y)$ :

$$S'(y) = \frac{m(y-x)}{t} + m v_0 = 0 \implies y = x - v_0 t \stackrel{\text{def}}{=} c$$

Il valore della fase in  $c$  è

$$S(c) = \frac{m(v_0 t)^2}{2t} + mv_0(x - v_0 t) = mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t.$$

Per l'asintotica ci serve anche la derivata seconda di  $S$  calcolata in  $c$ .  
Si ha

$$S''(y) = \frac{m}{t} > 0$$

Applichiamo la (22.4),

$$F(\lambda) \sim f(c)e^{i\lambda S(c) + i\text{sgn}[S''(c)]\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}, \quad \text{per } \lambda \rightarrow \infty.$$

Otteniamo

$$F(\lambda) \sim r(x - v_0 t)e^{i\lambda(mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t) + i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi t}{\lambda m}}$$

Sostituendo il valore di  $F(\lambda)$  nella (22.5) e ripristinando  $\hbar = 1/\lambda$  si ottiene l'asintotica cercata (osservando che le radici si cancellano a vicenda e che la radice di  $i$  a denominatore si cancella con  $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ). Si ha

$$f(x, t) \sim r(x - v_0 t)e^{\frac{i}{\hbar}(mv_0 x - \frac{1}{2}mv_0^2 t)}$$

che descrive un pacchetto d'onde con numero d'onda

$$k = \frac{mv_0}{\hbar}$$

e frequenza

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

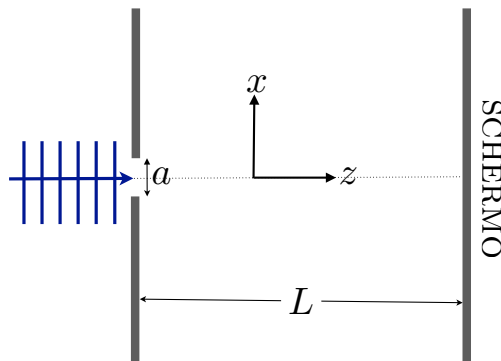
il cui profilo iniziale  $r(x)$  si propaga nel corso del tempo lungo la traiettoria classica  $x(t) = x + v_0 t$  senza cambiare di forma.

## 22.5 Diffrazione in ottica

Perché le trasformate di Fourier spuntano fuori da tutte le parti? Succintamente, la risposta è: *perché le trasformate di Fourier sono naturalmente prodotte dall'evoluzione temporale a grandi tempi, o a grandi distanze, di onde di vario tipo (sonore, elettromagnetiche, quantistiche etc.)*. Chiariamo questo, considerando degli esempi.

Consideriamo la situazione descritta in figura, con ovvio significato dei simboli: un'onda di luce monocromatica con vettore numero d'onda  $\mathbf{k} = K\mathbf{e}_z$  passa attraverso un fenditura di apertura  $a$  e poi

incide su uno schermo a distanza  $L \gg a$  dal piano della fenditura.



Si vuole determinare il profilo dell'onda allo schermo (il cui quadrato è l'intensità dell'onda che viene rilevata allo schermo).

Per semplicità, trattiamo l'onda come uno scalare  $\Psi = \Psi(x, z, t)$  e vista la geometria del problema, non ci occupiamo della variabile  $y$  ortogonale al piano della figura. Queste non sono assunzioni cruciali, ma servono solo a semplificare l'esposizione. Dopo che la studente ha compreso tutti i passaggi, non è difficile riformulare il tutto in termini di campo elettrico  $\mathbf{E}$ , invece dello scalare  $\Psi$ , includendo la variabile  $y$ .

Assumiamo che la propagazione dell'onda avvenga nel vuoto, per cui  $\Psi$  evolve secondo l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

dove  $\omega/K = c$ . Poiché l'onda è monocromatica, in regime stazionario, possiamo scrivere

$$\Psi(x, z, t) = \psi(x, z)e^{i\omega t}$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione delle onde, si arriva all'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -K^2 \psi$$

Poniamo

$$\psi = f(x, z)e^{iKz}$$

(si osservi che questa non è un'assunzione, ma semplicemente una definizione della funzione  $f$ ) e sostituiamo nell'equazione di Helmholtz. Si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2iK \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (22.6)$$

Per tenere conto delle scale fisiche del problema e della condizione  $L \gg a$ , conviene passare a variabili adimensionate. La presenza

dell'apertura di ampiezza  $a$ , che restringe il fascio monocromatica ad una larghezza  $a$  quando passa attraverso la fenditura, fissa una scala naturale sull'asse delle  $x$ . Poniamo allora  $X = x/a$ .

A questo punto, la scala  $a$  longitudinale e il numero d'onde  $K$  (fissato, essendo una caratteristica del fascio monocromatico incidente), determinano  $Ka^2$  come scala nella direzione trasversale  $z$ . Poniamo allora  $Z = z/(Ka^2)$ . In termini di queste nuove coordinate adimensionate l'equazione (22.7) diventa

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^4} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2iK \frac{1}{Ka^2} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2i \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

cioè,

$$2i \frac{\partial f}{\partial Z} = - \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

dove  $\epsilon = 1/(Ka)$ . Quindi, se la scala trasversale (l'apertura delle fenditura) è molto più grande della lunghezza d'onda incidente ( $= 2\pi/K$ ), la derivata seconda a secondo membro può essere trascurata e si ha

$$i \frac{\partial f}{\partial Z} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (22.7)$$

L'approssimazione appena descritta è nota come *approssimazione parassiale* (nei libri di ottica non è sempre descritta in una forma comprensibile). L'equazione (22.7) è un'equazione di "tipo-Schrödinger" con  $Z$  che gioca il ruolo del tempo. Risolviamola per il dato "iniziale", cioè per  $Z = 0$ , che corrisponde alla fenditura di apertura  $a$ . Ricordando che  $X$  è in unità di  $a$ , cioè  $X = x/a$ , il dato iniziale è

$$f_0(X) = \begin{cases} A_0 & \text{se } -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quanto visto nella lezione precedente (e nella lezione 19), si ottiene

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(X-X')^2/(2Z)} f_0(X') dX' \quad (22.8)$$

cioè

$$f(X, Z) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX' \quad (22.9)$$

La funzione  $f(X, Z)$  può essere espressa in termini di integrali di Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(y^2) dy$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(y^2) dy$$

mediante un cambiamento di variabili nell'integrale (22.9) (e ovviamente usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso). Procedendo in questo modo si ottiene

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2i}} A_0 \left\{ C \left( \frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}} \right) - C \left( \frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}} \right) + iS \left( \frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}} \right) - iS \left( \frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}} \right) \right\}$$

che è il profilo di diffrazione di Fresnel, detto anche "a campo vicino" o "near field". Il profilo di diffrazione "far field", cioè a "campo lontano" può essere ottenuto direttamente dalla (22.9) per  $Z \gg 1$ .

Consideriamo l'argomento dell'esponenziale complesso nella (22.9):

$$\frac{(X - X')^2}{2Z} = \frac{(X^2 - 2X'X + X'^2)}{2Z} \approx \frac{(X^2 - 2X'X)}{2Z}$$

per  $X'^2/2Z \ll 1$ , che è proprio la condizione di campo lontano (regime di Fraunhofer). Infatti, osservando che al massimo  $X' = 1/2$  e detta  $z = L$  la distanza tra fenditura e schermo, la condizione diventa l'approssimazione di Fraunhofer

$$Ka^2 \ll 2L.$$

Dunque se questa condizione di campo lontano vale, la (22.9) diventa

$$\begin{aligned} f(X, Z) &= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX' \\ &\sim A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-(i/Z)XX'} dX' \\ &= A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \operatorname{sinc} \left( \frac{X}{2Z} \right) \end{aligned}$$

Morale: sullo schermo lontano si forma un profilo di diffrazione proporzionale alla trasformata di Fourier del campo "iniziale". Naturalmente, cioè che si misura in un esperimento (o si vede con gli occhi) è il quadrato del campo, cioè l'intensità luminosa.

Questo fenomeno è del tutto generale: in una modellizzazione più realistica tri-dimensionale, in cui, per esempio, si considera come fenditura un'apertura circolare, il profilo che si forma sullo schermo risulta essere proporzionale alla trasformata di Fourier dell'apertura circolare.

## 22.6 Asintotica a grandi tempi in meccanica quantistica

In maniera analoga a quanto visto per l'ottica, possiamo studiare il comportamento a grandi tempi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. I passaggi sono del tutto simili, anche se adesso non assumeremo una funzione d'onda iniziale particolare come prima. Adesso la condizione iniziale è  $f(x, 0) = f_0(x)$ , senza ulteriore specificazione.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger è ottenuta dalla (22.8) per  $Z = t$  e  $X = \sqrt{\frac{m}{\hbar}}x$ :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im(x-y)^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} e^{imy^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &\sim \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} f_0(y) dy \quad (\text{perché } e^{imy^2/(2\hbar t)} \sim 1 \text{ per } t \rightarrow \infty) \\ &= \sqrt{\frac{m}{i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \widehat{f}_0\left(\frac{mx}{\hbar t}\right) \end{aligned}$$

Consideriamo la distribuzione di probabilità  $\rho(p)$  di  $p = \frac{mx}{t}$  a grandi tempi:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{t}{m} \left| f\left(\frac{t}{m}p\right) \right|^2 \\ &= \frac{t}{m} \frac{m}{\hbar t} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

Risulta così dimostrato che la distribuzione di probabilità dell'impulso asintotico (a grandi tempi)

$$p = \frac{mx}{t}$$

è data dalla trasformata di Fourier della funzione d'onda iniziale. A volte questo fatto è assunto come un assioma della meccanica quantistica, ma è, in effetti, un teorema.

L'asintotica a grandi tempi è anche un'asintotica a grandi distanze. Infatti, nel caso quantistico  $x/t = O(1)$  e nel caso della diffrazione  $X/Z = O(1)$ . Chiarito questo, possiamo ottenere l'asintotica direttamente con il metodo della fase stazionaria partendo dalla soluzione  $f(x, t)$  espressa in trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t} e^{ikx} \widehat{f}_0(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \widehat{f}_0(k) dk \end{aligned}$$

La fase è

$$S(k) = k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}$$

e la sua derivata

$$S'(k) = \frac{x}{t} - \frac{k}{m\hbar}$$

si annulla per

$$k_* = \frac{mx}{\hbar t}$$

Applicando il metodo della fase stazionaria per  $t \rightarrow \infty$ ,  $x/t = O(1)$ , a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \widehat{f}_0(k) dk$$

arriviamo allo stesso risultato per l'asintotica di  $f(x, t)$  che abbiamo ottenuto precedentemente.

## 22.7 Integrali di Laplace

Un integrale di Laplace ha la forma

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx \quad (22.10)$$

dove assumiamo che  $\lambda > 0$ . Tipicamente,  $\lambda$  è un parametro grande e siamo interessati nell'andamento asintotico dell'integrale quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Osserviamo che (analogamente a quanto visto per gli integrali di Fourier), possiamo scrivere  $F(\lambda)$  nella forma

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)} \left( \frac{d}{dx} e^{\lambda S(x)} \right) dx \quad (22.11)$$

Integrando per parti

$$F(\lambda) = \underbrace{e^{\lambda S(x)} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine di bordo}} - \underbrace{\frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{\lambda S(x)} dx}_{\text{termine integrale}}$$

Se il termine integrale è asintoticamente più piccolo del termine di bordo, cioè

$$\text{termine integrale} = o(\text{termine di bordo})$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , allora

$$F(\lambda) \sim \underbrace{e^{\lambda S(x)} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b}_{\text{termine di bordo}}$$

e abbiamo così un'utile approssimazione dell'integrale quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Tuttavia, in generale, questo metodo non funziona perché la precedente approssimazione vale solo se  $S'(x)$  non si annulla.

La situazione è simile a quella degli integrali generalizzati di Fourier. Adesso la situazione è la seguente: se  $S(x)$  ha un massimo globale per  $x = c$ , con  $a \leq c \leq b$ , allora è soltanto l'intorno di  $c$  che fornisce il contributo dominante all'integrale quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .



Questo fenomeno può essere illustrato considerando l'integrale

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\ln r - r)} dr$$

dove  $S(r) = (\ln r - r)$  ha un massimo per  $r = 1$ . Se riportiamo in figura la funzione integranda per valori crescenti di  $\lambda$ , vediamo che è la regione intorno a  $r = 1$  che contribuisce maggiormente all'integrale. Si veda la figura 22.2.

### 22.8 Metodo di Laplace

Il metodo può essere descritto in maniera analoga al metodo della fase stazionaria.

*Primo passo.* Possiamo approssimare  $F(\lambda)$  con  $F(\lambda; \epsilon)$  dove

$$F(\lambda; \epsilon) = \begin{cases} \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } a < c < b \\ \int_a^{a+\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } c = a \\ \int_{b-\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx, & \text{se } c = b \end{cases}$$

dove  $\epsilon$  è *arbitrario* (solo soggetto al vincolo che ciascuno dei sotto-intervalli di integrazione sia contenuto in  $[a, b]$ ). Questo passo è giustificato se l'asintotica di  $F(\lambda; \epsilon)$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , non dipende da  $\epsilon$  ed è identica all'asintotica di  $F(\lambda)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Queste due condizioni sono in effetti verificate. Consideriamo per esempio il caso  $a < c < b$ . I termini

$$\left| \int_a^{c-\epsilon} e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right| + \left| \int_{c+\epsilon}^b e^{\lambda S(x)} f(x) dx \right|$$

sono dominati da  $F(\lambda)$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , perché  $e^{\lambda S(x)}$  è esponenzialmente piccolo quando è confrontato con  $e^{\lambda S(c)}$  in  $a \leq x \leq c - \epsilon$  e  $c + \epsilon \leq x \leq b$ . In altre parole, cambiare i limiti di integrazione e passare da  $F(\lambda)$  a  $F(\lambda; \epsilon)$  introduce *errori esponenzialmente piccoli*.

*Secondo passo.* Analogamente al caso della fase stazionaria, consideriamo  $F(\lambda) \sim F(\lambda; \epsilon)$  e facciamo le approssimazioni:

- Se  $S'(c) = 0$  per  $a \leq c \leq b$  e  $S''(c) \neq 0$  allora

$$f(x) \approx f(c)$$

$$S(x) \approx S(c) + \frac{1}{2} S''(c) (x - c)^2$$

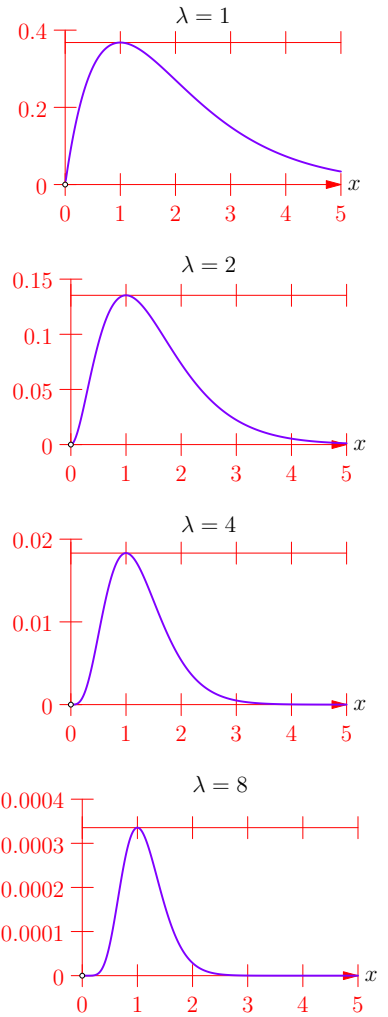


Figura 22.2: Grafici della funzione

$$S(r) = e^{\lambda(\ln r - r)}$$

per diversi valori di  $\lambda$ .

- Se  $c = a$  o  $c = b$  e  $S'(c) \neq 0$ , facciamo le approssimazioni

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(c) \neq 0 \\ S(x) &\approx S(c) + S'(c)(x - c) \end{aligned}$$

*Terzo passo.* Dopo aver fatto le approssimazioni precedenti, estendiamo gli estremi di integrazione da  $-\infty$  a  $\infty$  per valutare gli integrali (questa operazione è legittima perché introduce soltanto errori esponenzialmente piccoli).

- Se  $S'(c) = 0$  per  $a < c < b$ , dobbiamo avere  $S''(c) < 0$  ( $x = c$  è un massimo) e quindi, per  $\lambda \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{\lambda[S(c) + \frac{1}{2}S''(c)(x-c)^2]} f(c) dx \\ &\sim f(c) e^{\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \frac{S''(c)}{2}(x-c)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Quindi, poiché l'integrale è uguale a  $\sqrt{\pi}$ , per  $\lambda \rightarrow \infty$  si ha

$$F(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{\lambda S(c)}}{\sqrt{-\lambda S''(c)}} \quad (22.12)$$

Se  $S'(c) = 0$  e  $c = a$  o  $c = b$ , allora l'andamento asintotico dell'integrale è lo stesso di quello in (22.12), a parte la moltiplicazione per un fattore 1/2.

- Se  $c = a$  e  $S'(c) \neq 0$ , dobbiamo avere  $S'(c) < 0$ , e quando  $\lambda \rightarrow \infty$  si ha

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\approx \int_a^{a+\epsilon} e^{\lambda[S(a) + S'(a)(x-c)]} f(a) dx \\ &\sim f(a) e^{\lambda S(a)} \int_0^{\infty} e^{\lambda S'(c)(x-c)} dx \end{aligned}$$

Quindi

$$F(\lambda) \sim -\frac{f(a) e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}$$

Se  $c = b$  e  $S'(c) \neq 0$ , dobbiamo avere  $S'(c) < 0$ , e un argomento simile al precedente implica che quando  $\lambda \rightarrow \infty$  si ha

$$F(\lambda) \sim \frac{f(b) e^{\lambda S(b)}}{\lambda S'(b)}$$

Fine della descrizione del metodo di Laplace. Adesso due osservazioni.

1. Se  $S(x)$  raggiunge il suo massimo globale in diversi punti in  $[a, b]$ , allora spezziamo l'integrale in intervalli che contengono solo un punto, li trattiamo indipendentemente usando il metodo appena descritto e poi sommiamo tutti i contributi.
2. Se il massimo globale è tale che tutte le derivate di  $S$  sono nulle fino alla derivata  $m$ -esima, che è non nulla, allora lo sviluppo in serie sarà  $S(x) \approx S(c) + \frac{1}{m!} S^{(m)}(c)(x - c)^m$ .

ESEMPIO: LA FORMULA DI STIRLING Vogliamo determinare l'andamento asintotico della funzione Gamma

$$\Gamma(z+1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt,$$

quando  $z \rightarrow \infty$ . In primo luogo, notiamo che possiamo scrivere

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t+z \ln t} dt.$$

In secondo luogo, ci riconduciamo ad un integrale di Laplace standard, facendo la sostituzione  $t = zr$  (questo ha in effetti lo scopo di creare un massimo globale per  $S$ ),

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-zr+z \ln z+z \ln r} z dr \\ &= z^{z+1} \int_0^{\infty} e^{z(-r+\ln r)} dr \end{aligned}$$

Quindi  $f(r) = 1$  e  $S(r) = -r + \ln r$ . Si ha  $S'(r) = -1 + \frac{1}{r}$  e  $S''(r) = -\frac{1}{r^2}$ , per  $r > 0$ . Ne concludiamo che  $S$  ha un massimo globale per  $r = 1$  e che  $S''(1) = -1$ . Applichiamo la (22.12):

$$\Gamma(z+1) \sim z^{z+1} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-z}}{\sqrt{z}} = \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z}$$

Poiché  $\Gamma(n+1) = n!$  per  $n$  intero positivo<sup>1</sup>, la formula precedente, per  $n$  intero positivo, diventa l'usuale formula di Stirling per il fattoriale:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

LEMMA DI WATSON Basandosi sulle idee esposte fin qui si può dimostrare un risultato più sofisticato per un integrale di Laplace più semplice. Per ragioni di tempo non lo dimostriamo, ma chi volesse cimentarsi dovrebbe riuscirci anche da solo: l'esercizio non è facile, ma neanche eccessivamente difficile.

<sup>1</sup>(1) Dalla definizione della funzione Gamma, mediante integrazione per parti, si dimostra che  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ; (2)  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ . da queste due proprietà segue, per induzione, che  $\Gamma(n+1) = n!$ .

LEMMA DI WATSON. Per qualche  $b > 0$  (eventualmente infinito), si consideri l'integrale di Laplace

$$I(\lambda) = \int_0^b f(t)e^{-\lambda t} dt$$

Si supponga che  $f(t)$  sia continua in  $[0, b]$  e che abbia

$$f(t) \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}$$

come espansione asintotica<sup>2</sup> quando  $t \downarrow 0$ . Si assuma che  $\alpha > -1$  e  $\beta > 0$ , cosicché l'integrale è limitato vicino a  $t = 0$ . Se  $b = \infty$ , si richiede anche che  $f(t)$  sia di ordine esponenziale  $c$  per qualche  $c > 0$  (ovvero  $f(t) = o(e^{ct})$ ) per garantire che l'integrale sia limitato per grandi  $t$ . Allora, per  $\lambda \rightarrow \infty$ ,

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{\lambda^{\alpha + \beta n + 1}}$$

<sup>2</sup> Per la nozione di espansione asintotica si veda la prossima lezione.

## 22.9 Transizioni di fase magnetiche

Vogliamo adesso applicare il metodo di Laplace ad un problema di fisica. Calcoleremo l'asintotica per  $N \rightarrow \infty$  dell'energia libera per spin di un sistema magnetico di  $N$  spin.

Un modello matematico di sistema magnetico è tipicamente basato su un insieme di  $N$  spin  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , che possono essere vettori, scalari, o, nel caso quantistico, operatori di spin. Noi considereremo il modello più semplice basato su spin scalari  $\mu_i = +1$  o  $-1$  corrispondenti a spin su o spin giù rispettivamente. Si assume che l'energia di interazione tra due spin  $\mu_i$  e  $\mu_j$  collocati nei punti fissati  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$  nello spazio (per esempio nei vertici di un reticolo regolare) sia  $+\phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  se gli spin sono paralleli ( $\mu_i \mu_j = +1$ ) e  $-\phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  se gli spin sono anti-paralleli ( $\mu_i \mu_j = -1$ ). In altre parole, l'energia totale di interazione del sistema in una data configurazione  $\{\mu\} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  degli spin è

$$E(\{\mu\}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \mu_i \mu_j - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

dove il primo termine proviene dall'interazione tra gli spin e il secondo termine dall'interazione di ciascun spin con un campo magnetico esterno.

La funzione di partizione del sistema è

$$Z(N, \beta) = \sum_{\{\mu\}} e^{-\beta E(\{\mu\})}$$

Dove la somma è su tutte le configurazioni (in totale  $2^N$ ),  $\mu_1 = \pm 1, \mu_2 = \pm 1 \dots \mu_N = \pm 1$ ,  $T$  è la temperatura,  $\beta = 1/\kappa_B T$  è la temperatura inversa e  $\kappa_B$  è la costante di Boltzmann. Tutte le proprietà termodinamiche del sistema sono ottenute a partire dall'energia libera per spin che è determinata dalla funzione di partizione del seguente modo

$$f = \frac{F}{N} = -\kappa_B T \frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

Occorre quindi determinare—in questo problema, e più in generale in tutti i problemi di meccanica statistica dell'equilibrio—l'andamento asintotico di

$$\frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

per  $N \rightarrow \infty$ . Questo è in generale, anche per il caso di spin scalari che stiamo considerando, un problema di notevole complessità matematica. In molti casi non disponiamo ad oggi di una soluzione analitica.

La teoria classica dei sistemi magnetici si basa su una drastica semplificazione del problema, utilizzando l'approssimazione di *campo medio*: si assume cioè che ciascun spin interagisce con un campo medio prodotto da tutti gli altri spin. In questa approssimazione

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \mu_i \mu_j \approx -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j$$

dove

$$J = - \int \phi(r) d^3 \mathbf{r}$$

( $\phi$  negativo, e quindi  $J$  positivo, caratterizza un sistema ferromagnetico). Il problema diventa dunque quello di determinare la funzione di partizione per un'energia d'interazione data da

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

Per valutare la funzione di partizione, per prima cosa riscriviamo l'energia d'interazione in una forma simmetrica:

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{2N} \left( \sum_{i=1}^N \mu_i \right)^2 + \frac{J}{2} - H \sum_{i=1}^N \mu_i$$

Questa formula segue da  $\mu_i^2 = 1$ . Adesso, semplifichiamo le notazioni: poniamo

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mu_i$$

e quindi

$$E(\{\mu\}) = -\frac{J}{2N}\mathcal{A}^2 + \frac{J}{2} - H\mathcal{A}$$

La funzione di partizione diventa

$$Z(N, \beta) = \sum_{\{\mu\}} e^{-\beta E(\{\mu\})} = e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2 + (\beta H)\mathcal{A}} \sum_{\{\mu\}} e^{\left[\frac{(\beta J)}{2N}\mathcal{A}^2 + (\beta H)\mathcal{A}\right]} \quad (22.13)$$

Se non ci fosse termine quadratico in  $\mathcal{A}$ , sarebbe facile eseguire la somma. Infatti, in tal caso si avrebbe

$$\sum_{\{\mu\}} e^{L\mathcal{A}} = \sum_{\{\mu\}} e^{L\sum_{i=1}^N \mu_i} = (e^L + e^{-L})^N = (2 \cosh L)^N \quad (22.14)$$

Possiamo ricondurci ad un termine lineare con un trucco basato su integrali gaussiani: si ha

$$e^{\mathcal{A}^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + Ax} dx$$

(l'identità è ottenuta completando i quadrati). Se poniamo

$$A = \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}\mathcal{A}$$

nella somma a secondo membro della (22.13), otteniamo

$$\begin{aligned} Z(N, \beta) &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \sum_{\{\mu\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}\mathcal{A}x} dx e^{(\beta H)\mathcal{A}} \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\{\mu\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}\mathcal{A}x + (\beta H)\mathcal{A}} dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\{\mu\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + \left[\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}x + (\beta H)\right]\mathcal{A}} dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left\{ \sum_{\{\mu\}} e^{\left[\sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}x + (\beta H)\right]\mathcal{A}} \right\} dx \end{aligned}$$

Usando la (22.14), si ha

$$\begin{aligned} Z(N, \beta) &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \left[ 2 \cosh \left( \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}x + (\beta H) \right) \right]^N dx \\ &= e^{-\frac{(\beta J)}{2}\mathcal{A}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + N \log \left[ 2 \cosh \left( \sqrt{\frac{(\beta J)}{N}}x + (\beta H) \right) \right]} dx \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabili

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{(\beta J)N}}$$

possiamo ricondurre  $Z(N, \beta)$  ad un integrale di Laplace standard:

$$Z(N, \beta) = \sqrt{\frac{(\beta J)N}{2\pi}} e^{-\frac{(\beta J)N}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-N[(\beta J)/2]\xi^2 + N \log\{2 \cosh[(\beta J)\xi + (\beta H)]\}} d\xi$$

Abbiamo cioè

$$Z(N, \beta) = \sqrt{\frac{(\beta J)N}{2\pi}} e^{-\frac{(\beta J)N}{2}} I(N)$$

dove

$$I(N) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{NS(\xi)}$$

e

$$S(\xi) = -\frac{1}{2}(\beta J)\xi^2 + \log\{2 \cosh[(\beta J)\xi + \beta H]\}$$

Facciamo un grafico della funzione  $S(\xi)$ : fissiamo  $\beta H$  abbastanza piccolo (abbiamo scelto  $\beta H = 0.2$ ) e consideriamo diversi valori di  $\beta J$ . Si veda la figura 22.3. Osserviamo che le curve per  $\beta J = 0.1$  e  $\beta J = 0.4$  hanno un solo massimo per  $\xi = 0$ , mentre le altre due curve, per  $\beta J = 2$  e per  $\beta J = 3.5$ , hanno due massimi, uno negativo e uno positivo, ma un solo massimo globale per  $\xi = m_0$  positivo: da osservare che è soltanto questo che contribuisce all'asintotica dell'integrale. Secondo il metodo di Laplace è l'andamento nell'intorno del massimo globale che domina l'integrale: gli altri massimi danno contributi esponenzialmente piccoli nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

Uno studio grafico più accurato permette di determinare che per  $\beta J = 1$  si ha una *biforcazione*<sup>3</sup> nel senso che per valori di  $\beta J < 1$ , la funzione  $S(\xi)$  ha un solo massimo per  $\xi = 0$ , mentre per  $\beta J > 1$ ,  $\xi = 0$  cessa di essere il punto di massimo assoluto della funzione: appena  $\beta J$  diventa maggiore di 1, il massimo assoluto si sposta a destra. In figura 22.4 sono riprodotti i grafici della  $S(\xi)$  per  $\beta J = 1$  e per altri due valori di  $\beta J$  di poco sopra e di poco sotto 1.

L'andamento della funzione  $S$  può essere reso più preciso studiando gli zeri della derivata

$$S'(\xi) = -(\beta J)\xi + (\beta J) \tanh((\beta J)\xi + \beta H).$$

Il punto di massimo globale è dunque soluzione dell'equazione

$$m = \tanh((\beta J)m + \beta H)$$

(assumiamo  $\beta H$  positivo ma di entità trascurabile). Il grafico della figura 22.5 mostra che se  $(\beta J) < 1$  le due curve si intersecano nello 0 e  $m = 0$  è la sola soluzione, mentre per  $(\beta J) > 1$ , si hanno tre soluzioni. Non è difficile mostrare analiticamente che il massimo assoluto è per  $m = m_0 > 0$  (l'altra soluzione è  $-m_0$  nel limite di  $\beta H$  trascurabile).

Applichiamo infine a  $I(N)$  la (22.12), per  $\lambda = N$  e  $f(x) = 1$ . Allora

$$I(N) \sim \frac{\sqrt{2\pi e} e^{NS(m)}}{\sqrt{-NS''(m)}}$$

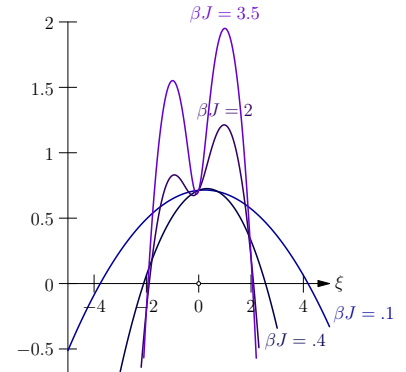


Figura 22.3: Grafici della funzione  $S(\xi)$  per diversi valori di  $\beta J$ .

<sup>3</sup> In effetti, nel senso tecnico della teoria delle biforcazioni, ma per ragioni di tempo (e di natura di questo corso) non possiamo sviluppare questo aspetto.

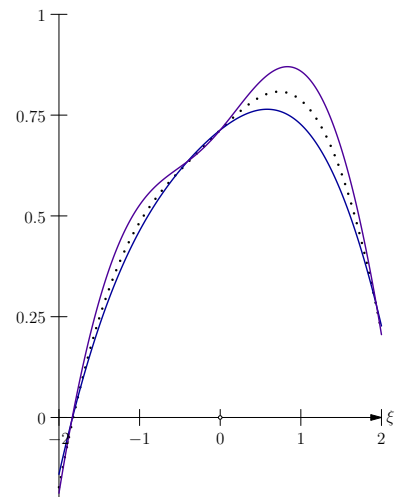


Figura 22.4: Grafici della funzione  $S(\xi)$  per diversi valori di  $\beta J = 1$  (linea punteggiata), .9 (linea blu), 1.1 (linea viola).

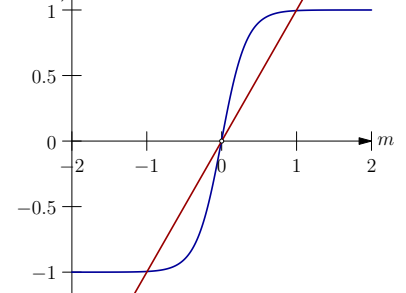


Figura 22.5: Grafici delle funzioni  $y = m$  e  $y = \tanh((\beta J)m + \beta H)$  ( $\beta H \ll 1$ ).

da cui

$$Z(N, \beta) \sim \sqrt{\frac{(\beta J)}{-S''(m)}} e^{-\frac{(\beta J)}{2}} e^{NS(m)}$$

Dall'andamento asintotico della funzione di partizione risaliamo a quello dell'energia libera per spin

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{N} \log Z(N, \beta)$$

per  $N \rightarrow \infty$ . Quindi si ha

$$f = -\frac{1}{\beta} S(m)$$

vale a dire, la funzione  $S$  non è altro che l'energia libera per particella cambiata di segno (a meno di una costante moltiplicativa). Ricordiamo che

$$\text{magnetizzazione media per particella} = -\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial H}$$

Ma

$$\frac{\partial S}{\partial H} = \beta \tanh((\beta J)m + \beta H) = \beta m$$

Quindi

$$m = \text{magnetizzazione media per particella}$$

Dunque, il massimo globale per la valutazione asintotica dell'integrale con il metodo di Laplace è, nel linguaggio della termodinamica, lo stato di equilibrio termodinamico, cioè lo stato di magnetizzazione media che rende minima l'energia libera (massimo di  $S \rightarrow$  minimo di  $f$ ). Rovesciando le curve di  $S$  (ad esempio per  $\beta J > 1$ ) si ottengono i grafici tipici dell'energia libera (al variare della magnetizzazione):

Per ultimo, ma non per importanza, osserviamo che la biforcazione di cui abbiamo parlato prima non è altro che una *transizione di fase*: per  $\beta J < 1$  lo stato di equilibrio è quello di una magnetizzazione media nulla, mentre per  $\beta J > 1$  si ha una magnetizzazione spontanea anche in assenza di campo magnetico esterno. La temperatura critica corrisponde a  $J/\kappa_B T_c = 1$ , cioè a  $T_c = J/\kappa_B$ .

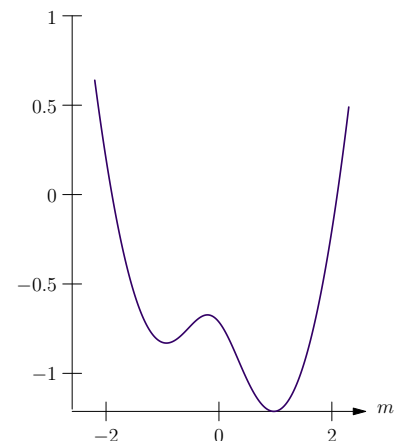


Figura 22.6: Grafico dell'energia libera in funzione della magnetizzazione.

### 22.10 Serie asintotiche e serie convergenti

Consideriamo la funzione *esponenziale integrale* definita per  $\lambda > 0$  da

$$\text{Ei}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

e cerchiamo una sua approssimazione analitica per  $\lambda \gg 1$ . Integrazione per parti ripetuta, a partire da

$$\int_{\lambda}^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\text{int}} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{der}} dt$$



ci fornisce

$$\begin{aligned}
 \text{Ei}(\lambda) &= \left[ -\frac{e^{-t}}{t} \right]_{\lambda}^{\infty} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \left[ \frac{e^{-t}}{t^2} \right]_{\lambda}^{\infty} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\
 &\vdots \\
 &= e^{-\lambda} \underbrace{\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)}_{S_N(\lambda)} + \underbrace{(-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt}_{R_N(\lambda)}
 \end{aligned}$$

dove  $S_N(\lambda)$  è la somma parziale dei primi  $N$  termini,

$$S_N(\lambda) = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)$$

e  $R_N(\lambda)$  il resto dopo  $N$  termini,

$$R_N(\lambda) = (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt$$

La serie di cui  $S_N(\lambda)$  è la somma parziale è divergente per ogni  $\lambda$ . Si osservi che per  $N$  grande la grandezza dell' $N$ -esimo termine aumenta al crescere di  $N$ . Naturalmente, anche  $R_N(\lambda)$  aumenta al crescere di  $N$  poiché  $S_N(\lambda) + R_N(\lambda)$  deve rimanere limitato, essendo  $\text{Ei}(\lambda)$  definita e limitata per tutti i  $\lambda > 0$ .

Supponiamo di considerare  $N$  fissato e di lasciar diventare  $\lambda$  arbitrariamente grande. Allora

$$\begin{aligned}
 |R_N(\lambda)| &= \left| (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \right| \\
 &= |(-1)^N| N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\
 &= N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\
 &< \frac{N!}{\lambda^{N+1}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} dt \\
 &= \frac{N!}{\lambda^{N+1}} e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

che tende a zero rapidamente (esponenzialmente) quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Si

osservi che il rapporto tra  $R_N(\lambda)$  e l'ultimo termine di  $S_N(\lambda)$  è

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| &= \frac{|R_N(\lambda)|}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &< \frac{N!e^{-\lambda}\lambda^{-(N+1)}}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &= \frac{N}{\lambda} \end{aligned}$$

e che anch'esso tende a 0 quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Perciò, per  $\lambda \rightarrow \infty$ ,

$$\text{Ei}(\lambda) = S_N(\lambda) + o(\text{ULTIMO TERMINE IN } S_N(\lambda))$$

Questo significa, in particolare, che se  $\lambda$  è sufficientemente grande e  $N$  è fissato,  $S_N(\lambda)$  fornisce una buona approssimazione a  $\text{Ei}(\lambda)$ . L'accuratezza dell'approssimazione aumenta quando  $\lambda$  aumenta per  $N$  fissato.

Questo significa che possiamo scrivere

$$\text{Ei}(\lambda) \sim e^{-\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots \right)$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Si osservi che per  $\lambda$  sufficientemente grande, i termini in  $S_N(\lambda)$  diminuiranno successivamente: per esempio,

$$\frac{2!}{\lambda^3} < \frac{1}{\lambda^2}$$

per  $\lambda$  abbastanza grande. Tuttavia, per un certo valore  $N = N_*(\lambda)$ , in termini in  $S_N(\lambda)$  incominceranno successivamente ad aumentare per un dato  $\lambda$  (non importa quanto grande), perché l' $N$ -esimo termine

$$(-1)^{N-1} e^{-\lambda} \frac{(N-1)!}{\lambda^N}$$

è illimitato quando  $N \rightarrow \infty$ . Quindi, per un dato  $\lambda$ , c'è un valore ottimale di  $N = N_*(\lambda)$  per cui si ottiene la migliore approssimazione.

La stima precedente del rapporto tra il resto e l'ultimo termine della somma parziale,

$$\left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| < \frac{N}{\lambda},$$

suggerisce di prendere per  $N_*$  la parte intera più grande di  $\lambda$ .

Da un punto di vista pratico, uno sviluppo asintotico di questo tipo può essere molto più utile di un'espansione convergente ma lenta. Uno sviluppo asintotico può essere straordinariamente accurato: per  $\text{Ei}(\lambda)$  con  $\lambda = 10$ ,  $N_* = 10$ , ma  $S_4(10)$  approssima  $\text{Ei}(10)$  con un errore che è meno dello 0.003%.

Chiariamo l'idea che sta alla base delle serie asintotiche confrontandole con le serie convergenti. Consideriamo la serie di potenze intorno a  $z = z_0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Questa serie di potenze è *convergente* ad una funzione  $f(z)$  per  $|z - z_0| < R$ , per qualche  $R \geq 0$ , se il resto

$$R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$  *per ogni*  $z$  *fissato che soddisfa*  $|z - z_0| < R$ . Diciamo invece che una funzione  $f(z)$  ha uno sviluppo asintotico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

se

$$R_N(z) = o\left((z - z_0)^N\right)$$

quando  $z \rightarrow z_0$ , *per ogni*  $N$  *fissato*. Detto in altri termini, per una serie convergente, *dati*  $\epsilon$  e  $z$ ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon$$

per  $N$  sufficientemente grande, mentre per una serie asintotica, *dati*  $\epsilon$  e  $N$ ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon|z - z_0|^N$$

per  $z$  sufficientemente prossimo a  $z_0$ .

### 22.11 Sviluppi asintotici

**Definizione 22.1.** Si dice che una successione di funzioni di calibro  $\{\phi_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  forma una successione asintotica quando  $x \rightarrow x_0$  se,  $\forall n$ ,

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x))$$

quando  $x \rightarrow x_0$ .

Esempi:  $(x - x_0)^n$ , quando  $x \rightarrow x_0$ ;  $x^{-n}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ ;  $(\sin x)^n$ , quando  $x \rightarrow 0$ .

**Definizione 22.2.** Se  $\{\phi_n(x)\}$  è una successione asintotica di funzioni quando  $x \rightarrow x_0$ , diciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

dove le  $a_n$  sono costanti, è uno sviluppo asintotico (o un'approssimazione asintotica) di  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se per ogni  $N$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x))$$

quando  $x \rightarrow x_0$ , cioè, l'errore è asintoticamente più piccolo dell'ultimo termine dello sviluppo.

Notazione: lo sviluppo asintotico è denotato

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

**Definizione 22.3.** Se le funzioni di calibro  $\{\phi_n(x)\}$  formano una successione di potenze (positive o negative), lo sviluppo asintotico è detto serie di potenze asintotica.

**Esercizio 2.** (1) Mediante manipolazioni formali si mostri che la serie formale divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è una soluzione formale dell'equazione

$$x^2 y''(x) + (1 + 3x)y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) Osservando che

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

(vedere lezione 23.1.2), ottenere, mediante manipolazioni formali della serie divergente,

$$y(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt$$

come soluzione (rigorosa) dell'equazione di partenza (la funzione  $y(x)$  è ben definita e soddisfa l'equazione differenziale). (3) Dimostrare (rigorosamente!) che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è lo sviluppo asintotico di  $y(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . (Aiuto: usare l'integrazione per parti come per l'esempio all'inizio di questa lezione.)

#### PROPRIETÀ DEGLI SVILUPPI ASINTOTICI

**Unicità.** Per una data successione  $\{\phi_n(x)\}$  lo sviluppo asintotico di  $f(x)$  è unico, cioè i coefficienti  $a_n$  dello sviluppo sono unicamente determinati come segue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi_1(x)} \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_1 \phi_1(x)}{\phi_2(x)} \\ &\vdots \\ a_N &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x)}{\phi_N(x)} \end{aligned}$$

*Non unicità (per una data funzione).* Una data funzione può avere differenti sviluppi asintotici. Per esempio, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}\tan x &\sim x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ &\sim \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^3 + \frac{3}{8}(\sin x)^5 + \dots\end{aligned}$$

*Sottodominanza.* Questo è l'aspetto più spinoso. Uno sviluppo asintotico può essere lo sviluppo asintotico *di più di una* funzione. Per esempio, se quando  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

allora anche

$$f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando  $x \rightarrow x_0$  perché

$$e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} = o((x - x_0)^n) \quad \forall n.$$

In effetti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando  $x \rightarrow x_0$ , è asintotica a ogni funzione che differisce da  $f(x)$  per una funzione  $g(x)$  che va a 0 più rapidamente di qualunque potenza di  $x - x_0$ , quando  $x \rightarrow x_0$ . Tale funzione  $g(x)$  è detta *sottodominante* alla serie di potenze; la sua serie asintotica sarebbe

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 0 \times (x - x_0)^n.$$

Quindi uno sviluppo asintotico è asintotico ad una *intera classe di funzioni* che differiscono l'una rispetto all'altra per una funzione sottodominante.

*Esempio (errori esponenzialmente piccoli):* la funzione  $e^{-x}$  è sottodominante a ogni serie asintotica della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Quindi se una funzione  $f(x)$  ha un tale sviluppo asintotico, lo stesso sviluppo lo ha anche  $f(x) + e^{-x}$ , vale a dire,  $f(x)$  ha un tale sviluppo asintotico a meno di errori esponenzialmente piccoli.

Operazioni aritmetiche: Se

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)$$

allora

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \phi_n(x)$$

Integrazione termine a termine: OK. Se  $f(x)$  è integrabile in un intorno di  $x_0$  e

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

allora

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

Derivazione termine a termine: cautela! Gli sviluppi asintotici non possono in generale essere derivati termine a termine. Il problema con la derivazione è collegato alla sottodominanza. Per esempio, le due funzioni

$$f(x) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right)$$

differiscono per una funzione sottodominante e hanno quindi lo stesso sviluppo asintotico quando  $x \rightarrow x_0$ . Tuttavia  $f'(x)$  e

$$g'(x) = f'(x) - 2(x - x_0)^{-3} \cos\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right) + 2(x - x_0)^3 e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right)$$

non hanno lo stesso sviluppo asintotico quando  $x \rightarrow x_0$ .

Tuttavia, se  $f'(x)$  esiste, ed è integrabile vicino a  $x_0$ , allora

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

implica che

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

**Esercizio 3.** Dimostrare il lemma di Watson.

# Appendici





A

*Soluzioni dei problemi*

S.1

S.1.1. □

(a) & (b).  $C \equiv \cos \theta$ ,  $S \equiv \sin \theta$ , per brevità.

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = (C + iS)^3 = (C^3 - 3CS^2) + i(3C^2S - S^3)$$

Usando  $C^2 + S^2 = 1$  e uguagliando parte reale e parte immaginaria,

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 4C^3 - 3C \\ \sin 3\theta &= -4S^3 + 3S \end{aligned}$$

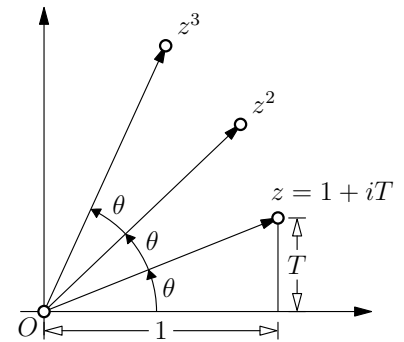
(c)  $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ , da cui

$$\begin{aligned} 2^4 \cos^4 \theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\ &= (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\ &= 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6 \\ \implies \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \end{aligned}$$

(d)  $T \equiv \tan \theta$ . Si rappresenti  $z = 1 + iT$  come nella figura a lato. Poiché  $z$  ha angolo  $\theta$ ,  $z^3$  ha angolo  $3\theta$ . Quindi,

$$\tan 3\theta = \frac{\operatorname{Im} z^3}{\operatorname{Re} z^3}$$

$$z^3 = (1 + iT)^3 = (1 - 3T^2) + i(3T - T^3) \implies \tan 3\theta = \frac{3T^2 - T^3}{1 - 3T^2}.$$



S.1.2. □

$x = s + t$  nella cubica  $x^3 = 3px + 2q = 0$ :

$$\implies (s + t)^3 = 3p(s + t) + 2q \implies s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = 3ps + 3pt + 2q$$

Se

$$\begin{cases} st = p \\ s^3 + t^3 = 2q \end{cases}$$

allora  $x$  risolve la cubica. Eliminando  $t$  dal sistema

$$s^3 + \frac{p^3}{s^3} = 2q \implies (s^3)^2 - 2q(s^3) + p^3 = 0 \implies s^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Per simmetria

$$t^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Dato che  $s^3 + t^3 = 2q$ , se  $s^3$  è la radice di sopra,  $t^3$  è quella di sotto.

Quindi,

$$x = s + t = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

S.1.3.  $\square$ 

$$|(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)|^2 |(c+id)|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv MN$$

ma si ha anche

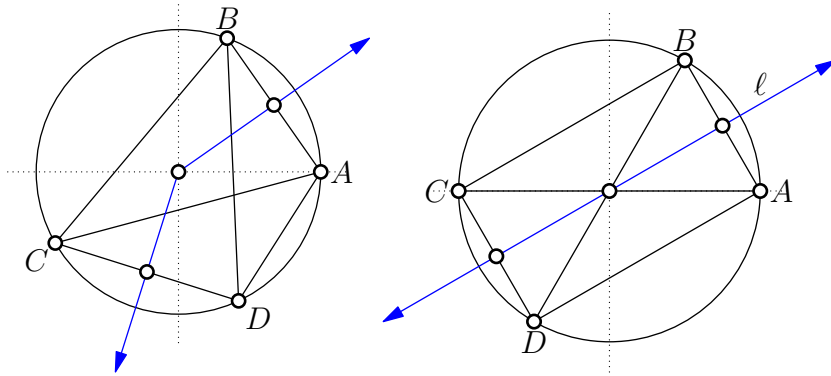
$$MN = |(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)(c+id)|^2 = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2 = p^2 + q^2.$$

S.1.4.  $\square$ 

Ci sono molti modi per risolvere questo problema. Si vuole mostrare che se i punti sono sul cerchio unitario e

$$A + B + C + D = 0 \quad (\text{S.1})$$

allora non si ha la configurazione a sinistra, ma quella a destra, della figura sotto:



La condizione (S.1) può essere riscritta come  $A + B = -(C + D)$  e significa, geometricamente, che i vettori congiungenti l'origine con i punti medi delle corde  $AB$  e  $CD$  stanno sulla stessa retta  $\ell$  (i vettori formano tra loro un angolo di  $180^\circ$ ). Poiché questi vettori sono sempre perpendicolari alle corde  $AB$  e  $CD$  (figura a sinistra), ne segue che, quando (S.1) è soddisfatta,  $AB$  e  $CD$  sono paralleli tra loro, perché ortogonali alla retta  $\ell$ . Il caso di un trapezio isoscele non può presentarsi perché (S.1) implica la stessa condizione per la congiungente le mediane di  $BC$  e  $DA$ , in quanto (S.1) può essere anche riscritta come  $B + C = -(A + D)$ .

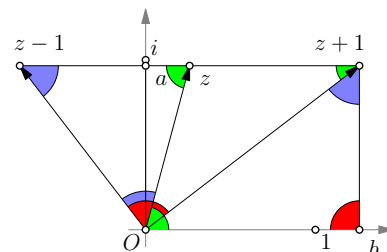
Naturalmente, è possibile anche una soluzione completamente algebrica. Qual è più facile?

Si osservi che, da un punto di vista fisico, (S.1) significa che il centro di massa dei punti (di massa uguale) è nell'origine. E se i punti stanno su un cerchio e inizialmente formano un rettangolo, come nella figura sopra a destra, non possono essere spostati lungo il cerchio e formare una configurazione come quella a sinistra, *se si*

vuole mantenere il centro di massa nell'origine. Con questo vincolo, i punti possono formare un altro rettangolo, ma non il quadrilatero irregolare della figura a sinistra.

**S.1.5.** □

Per una soluzione geometrica, si veda la figura a lato. Si osservi che il triangolo  $[O, z + 1, z]$  è isoscele perché i lati  $[O, z]$  e  $[z + 1, z]$  sono di lunghezza 1 (essendo  $z$  sul cerchio unitario). Allora per il teorema di una retta che interseca due parallele, l'angolo  $[1, O, z + 1]$  è metà dell'angolo  $\theta = \arg(z)$ . Anche il triangolo  $[O, z - 1, z]$  è isoscele; ragionando sugli angoli si conclude che l'angolo  $[z, O, z + 1]$  è retto. Allora  $z - 1 = i\alpha(z + 1)$ . Si tratta adesso di determinare  $\alpha$ . Ragionando sui triangoli rettangoli simili  $[z - 1, O, z + 1]$  e  $[z + 1, b, O]$ , si ha la proporzione



$$|z - 1| : |z + 1| = |z + 1| \sin(\theta/2) : |z + 1| \cos \theta/2,$$

da cui  $|z - 1|/|z + 1| = \tan \theta/2$ . Dunque,

$$z - 1 = i \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) (z + 1).$$

Il calcolo algebrico è immediato

$$\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = i \tan \frac{\theta}{2}.$$

**S.1.6.** □

$$s_n \equiv 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}, \quad z s_n = z + z^2 + \dots + z^n = s_n - 1 + z^n$$

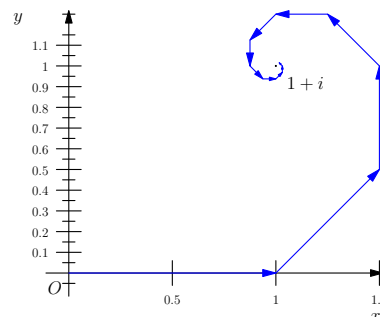
$$\implies 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

(a)  $|z| < 1$  (b)

$$\frac{-1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

(c)

$$\frac{1}{1 - z} \Big|_{z=(1/2)(1+i)} = 1 + i$$

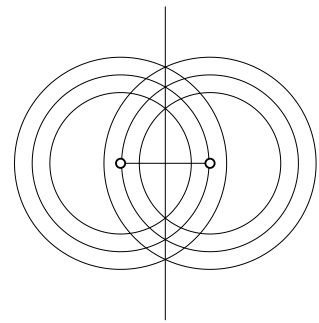


S.1.7. □

$$\begin{aligned}
 S &= \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} + e^{i3\theta} + e^{i5\theta} + \dots + e^{i(2n-1)\theta} \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ 1 + (e^{i2\theta}) + (e^{i2\theta})^2 + \dots + (e^{i2\theta})^{n-1} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ \frac{e^{i2n\theta} - 1}{e^{i2\theta} - 1} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ \frac{e^{in\theta} (e^{in\theta} - e^{-in\theta})}{e^{i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{in\theta} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right\} \\
 &= \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}
 \end{aligned}$$

S.1.8. □

Luogo dei punti equidistanti da due punti dati. Vedere la figura a lato.



S.1.9. □

(a) Sulla retta perpendicolare al segmento tra  $(0,0)$  e  $(1,0)$  e passa a metà (vedere problema precedente, l'identità deve vale anche per i moduli). Nove radici perchè  $z^{10}$  compare da ambo i membri e l'equazione si abbassa il grado.

(b)  $w^{10} = 1 \implies w_1 = 1, w_2 = e^{2\pi i \frac{1}{10}}, \dots, w_{10} = e^{2\pi i \frac{9}{10}}$

$$z_n = \frac{1}{1 - w_n}, \quad n = 2, 3, \dots, 10 \quad (\text{N.B. } w_1 \text{ va esclusa}).$$

S.1.10. □

L'effetto della trasformazione  $z \mapsto z^2$  sul cerchio unitario centrato in  $(1,0)$  (in nero) è mostrato nella figura a lato. Le equazioni della cardioide (in rosso), sono

$$|z^2 - 1| = 1$$

Poiché le equazioni parametriche del cerchio di partenza sono

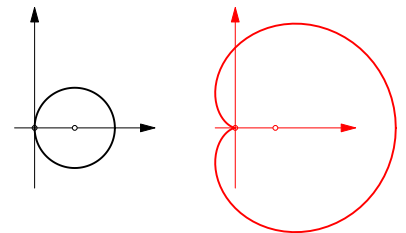
$$z = 1 + e^{it}$$

quelle della cardioide saranno

$$z = (1 + e^{it})^2 = 1 + 2e^{it} + e^{i2t}$$

Raccongiungendo  $e^{it}$  a secondo membro,

$$z = e^{it}(e^{-it} + 2 + e^{it}) = 2e^{it}(1 + \cos t),$$



da cui segue immediatamente l'equazione in coordinate polari:

$$r = 2(1 + \cos \theta).$$

**S.1.11.**  $\square$

(i) Sia

$$w = M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

L'idempotenza segue dal calcolo algebrico elementare:

$$\begin{aligned} M_a(M_a(z)) &= M_a(w) = \frac{w - a}{\bar{a}w - 1} = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} \\ &= \frac{z - a - a\bar{a}z + a}{\bar{a}z - \bar{a}a - \bar{a}z + 1} = \frac{z(1 - a\bar{a})}{1 - \bar{a}a} \\ &= z \end{aligned}$$

(ii) Consideriamo il modulo di  $M_a(z)$

$$|M_a(z)| = \left| \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \right| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|}$$

Per i quadrati di numeratore e denominatore si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - \bar{a}z - \bar{z}a + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

Se  $|z| = 1$ , queste due quantità sono uguali e quindi  $|M_a(z)| = 1$ . Il cerchio  $|z| = 1$  è trasformato in sè stesso.

(iii) Si verifica infine che se  $|a| < 1$ ,  $M_a$  rappresenta il disco unitario in sè stesso. Sottraendo membro a membro i quadrati di numeratore e denominatore, si ottiene

$$|z - a|^2 - |\bar{a}z - 1|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

Quindi  $|z - a| < |\bar{a}z - 1|$ , da cui

$$|M_a(z)| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

e quindi  $M_a(z)$  sta dentro il disco unitario.

**S.1.12.**  $\square$

Le trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

svolgono un ruolo importante in geometria e analisi complessa e sono dette *trasformazioni di Möbius* (che ne studiò per primo le proprietà). Nel seguito, per brevità, ometteremo di indicare i quattro parametri reali e scriveremo semplicemente  $M$ .

Per dimostrare che

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi, facciamo il calcolo per un caso particolare e poi argomentiamo che fare questo è sufficiente.

Se  $c = 0$  allora

$$z \mapsto (a/d)z + (b/d)$$

è la moltiplicazione per un numero complesso,

$$z \mapsto w = (a/d)z,$$

(una *stiro-rotazione*, secondo la terminologia introdotta nella sezione 1.3) seguita da una traslazione

$$w \mapsto w + (b/d).$$

È quindi geometricamente chiaro che linee e cerchi vanno in linee e cerchi.

Se  $c \neq 0$ , scriviamo

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Questa trasformazione è la composizione di 5 trasformazioni:

$$z \xrightarrow{(1)} w_1 = cz \xrightarrow{(2)} w_2 = w_1 + d \xrightarrow{(3)} w_3 = \frac{1}{w_2} \xrightarrow{(4)} w_4 = -\frac{ad - bc}{c} w_3 \xrightarrow{(5)} w_5 = w_4 + \frac{a}{c}$$

- (1) stiro-rotazione
- (2) traslazione
- (3) inversione complessa
- (4) stiro-rotazione
- (5) traslazione

Le stiro-rotazioni e le traslazioni trasformano linee e cerchi in linee e cerchi, se mostriamo che lo stesso vale per l'inversione complessa siamo a posto.

L'equazione di un cerchio è

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta x - 2\gamma y + \delta = 0$$

e per  $\alpha = 0$  si ha l'equazione di una linea retta. In notazione complessa l'equazione diventa

$$\alpha |z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$$

Poniamo  $w = 1/z$  e sostituiamo

$$\alpha \frac{1}{|w|^2} + \beta \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + i\gamma \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + \delta = 0$$

Moltiplichiamo per  $|w|^2 = \bar{w}w$  e otteniamo

$$\alpha + \beta(w + \bar{w}) - i\gamma(w - \bar{w}) + \delta|w|^2 = 0$$

che è ancora l'equazione di un cerchio (dove si è spostato il centro? come è variato il raggio?).

Facciamo il punto sulle trasformazioni di Möbius

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Ciascuna di esse è la composizione delle seguenti trasformazioni:

- (i) stiro-rotazione = moltiplicazione per il numero complesso  $a$ ,  
 $S_a(z) = az$
- (ii) traslazione = somma del numero complesso  $b$ ,  $T_b(z) = z + b$
- (iii) inversione complessa  $I(z) = 1/z$

Allora

$$M = T_{(a/c)} \circ S_{[-(ad-bc)/c]} \circ I \circ T_d \circ S_c$$

dove, come di consueto, "o" denota la composizione di funzioni.

*Nota* La trasformazione

$$\mathcal{I} : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

è usualmente detta *inversione geometrica* o *trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano* o semplicemente *inversione*. Come si vede facilmente, anch'essa trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.



## S.2

## S.2.1. □

Per prima cosa si osservi che lo sviluppo in serie di di  $1/(a-x)$ , visto nella sezione 2.3, si estende a  $1/(a-z)$ , per  $z$  complesso, cioè

$$\frac{1}{a-z} = \sum_k \frac{Z^k}{(a-u)^{k+1}} \quad \text{sse } |Z| < |a-u| \quad \text{e } Z \equiv z-u \quad (\text{S.2})$$

Procedendo come per  $1/(1-x^2)$ , si ottiene

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right]$$

Applicando (S.2) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] Z^k \quad (\text{S.3})$$

Siamo interessati a  $u$  e  $x$  reali:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] (x-u)^k \quad (\text{S.4})$$

Poiché  $u$  è reale,  $|i-u| = \sqrt{1+u^2}$  e possiamo scrivere  $i-u = \sqrt{1+u^2}e^{i\phi}$  dove  $\phi = \arg(i-u)$ . Similmente, essendo  $u$  reale, abbiamo  $-i-u = \sqrt{1+u^2}e^{-i\phi}$ . Quindi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin(k+1)\phi}{(\sqrt{1+u^2})^{k+1}} \right] (x-u)^k. \quad (\text{S.5})$$

da cui segue che il raggio di convergenza è

$$R = \sqrt{1+u^2}.$$

## S.2.2. □

(i) La serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge a  $\frac{1}{1-z}$  per  $|z| < 1$ . Sul cerchio  $|z| = 1$  diverge (i termini della serie non vanno a zero). (Per approfondimenti sulla serie geometrica, si veda il complemento alla fine del capitolo 2).

(ii) La serie

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge per  $|z| < 1$ . Sul cerchio  $|z| = 1$ , per alcuni punti converge e per altri no; ad esempio, diverge per  $z = 1$  (serie armonica); converge per  $z = -1$  (infatti,  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \ln 2$ ).

(iii) La serie

$$z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

converge *assolutamente* per  $|z| \leq 1$  (quindi anche sul disco unitario).

Per quel che riguarda (ii), non era richiesto uno studio della convergenza per tutti i punti del cerchio e la risposta data sopra è considerata sufficiente (da chi ha assegnato il problema!). Tuttavia, per completezza, facciamo questo studio.

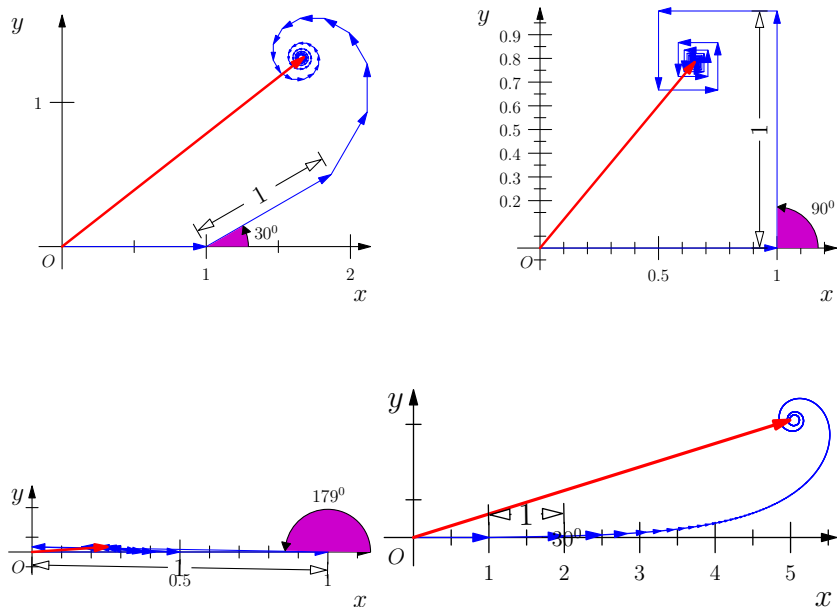
Per  $z$  sul cerchio,  $z = e^{i\theta}$  e la serie diventa

$$e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \frac{1}{4}e^{4i\theta} + \dots \tag{S.6}$$

Non sembra azzardato scommettere sulla convergenza di questa serie. Poichè  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$  converge, lo stesso potrebbe essere vero per (S.6): dopo tutto, al variare di  $n$ , i termini

$$e^{ni\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

hanno anch'essi alternanze di segno che potrebbero essere tali da produrre le compensazioni giuste e quindi la convergenza. Ma questa è pura speculazione! Un'evidenza ben più solida proviene dall'analisi numerica della convergenza della serie. Ecco quattro grafici che si ottengono studiando numericamente la serie per diversi valori dell'angolo:



Il primo in alto a sinistra è per  $\theta = 30^\circ$ , il secondo in alto per  $\theta = 90^\circ$ . L'analisi numerica di  $\theta = 180^\circ$  non dà buoni frutti: la convergenza è estremamente lenta. Comunque, teoricamente, sappiamo che la serie converge a  $\ln 2$ . La prima figura sotto a sinistra illustra il caso  $\theta = 179^\circ$ , quella a destra,  $\theta = 1^\circ$ ; per  $\theta = 0$  sappiamo che la serie diverge (serie armonica). Le serie sono state troncate al grado  $n$  del polinomio per cui si ha stabilità numerica della somma (vettore rosso).

La congettura che la serie (S.6) converga ha dunque solide basi numeriche. Tuttavia, i criteri usuali, applicati ciecamente, falliscono, in quanto coinvolgono il modulo dell' $n$ -esimo termine della serie, e il modulo non distingue tra la serie (S.6) e la serie armonica, che diverge.

Quando si è in difficoltà conviene *sempre* ragionare partendo dai principi primi. In questo caso dalla definizione stessa di serie convergente—la serie converge se la successione delle somme parziali converge—e dal criterio di base di convergenza, il criterio di Cauchy.

Consideriamo le somme parziali  $n$ -esima e  $m$ -esima ( $n > m$ ).

$$S_m = e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \dots + \frac{1}{m}e^{mi\theta} \quad (\text{S.7})$$

$$S_n = S_m + \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \dots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \quad (\text{S.8})$$

Se prendiamo la differenza delle sue somme

$$S_n - S_m = \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \dots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \quad (\text{S.9})$$

e poi stimiamo il modulo, siamo punto e daccapo perché *l'unico modo* che abbiamo per stimare il modulo di una somma (a meno che non siamo in grado di calcolarla esplicitamente, come è il caso per la progressione geometrica!) è

$$|z_1 + \dots + z_p| \leq |z_1| + \dots + |z_p| \quad (\text{S.10})$$

Possiamo tuttavia sfruttare la possibilità di moltiplicare (S.7) e (S.8) per un numero  $\alpha$  dipendente da  $\theta$ , in modo che

$$|\alpha S_n - \alpha S_m|$$

dia qualcosa che, stimato con la (S.10), possa essere reso più piccolo di un qualunque  $\epsilon$ , per  $n$  e  $m$  sufficientemente grandi. Dopo vari tentativi ed errori, si scopre che  $\alpha = (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$  fornisce proprio

quello che si vuole. Infatti,

$$\begin{aligned} \alpha(S_n - S_m) &= \frac{1}{m+1} e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{m+2} e^{(m+2+\frac{1}{2})i\theta} + \dots + \frac{1}{n-1} e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{n} e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} \\ &\quad \searrow \qquad \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\ &= \frac{1}{m+1} e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+2} e^{(m+2-\frac{1}{2})i\theta} - \dots - \frac{1}{m-1} e^{(m-1+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{n} e^{(n-\frac{1}{2})i\theta} \\ &= e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta} \left[ \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right] + \dots + e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta} \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+1} e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta} \end{aligned}$$

da cui, applicando la (S.10),

$$\begin{aligned} |\alpha(S_n - S_m)| &\leq \left[ \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right] + \dots + \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{2}{m+1} \end{aligned}$$

quindi, per  $n$  e  $m$  sufficientemente grandi,  $|S_n - S_m|$  è più piccolo di un qualunque  $\epsilon$ . Risulta così dimostrato che la serie (S.6) converge nell'intervallo aperto  $\theta \in (0, 2\pi)$  [che in  $\theta = 0$  diverge, era già stato stabilito].

### S.2.3. $\square$

Polinomio approssimante

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^m z^k$$

(a) Errore:  $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |z^{m+1} + z^{m+2} + \dots| = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(perché per  $S \equiv z^{m+1} + z^{m+2} + \dots$  si ha  $S = z(z^m + S)$ )

(b) Per  $|z| < 1$ ,  $E_m(z) \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow \infty$ .

(c) Per  $m$  fissato  $E_m(z) \rightarrow \infty$  per  $z \rightarrow 1$ . Per  $|z| \rightarrow 1$ ,  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \neq 0$  si ha

$$E_m(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

(d) Per  $|z| \leq r = 0.9$

$$E_m(z) \leq \frac{r^{m+1}}{1-r} = \frac{0.9^{m+1}}{0.1} = \epsilon = 0.01 \quad \Rightarrow \quad m \approx 67$$

[Nota. Risulta così dimostrato che la serie geometrica converge *uniformemente* nel disco di raggio  $r$ . La nozione di convergenza uniforme è trattata nel capitolo 3.]

S.2.4. □ (2.13) Dalla trigonometria (o dalla formula di Eulero):

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m - n)\theta + \sin(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2n\theta \, d\theta = 0 \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m - n)\theta + \cos(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2n\theta] \, d\theta = \pi \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m - n)\theta - \cos(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2n\theta] \, d\theta = \pi \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

Adesso, tenuto conto di queste uguaglianze, integriamo ambo i membri della (2.13) tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Otterremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta = 2\pi a_0$$

Moltiplichiamo poi ambo i membri della (2.13) per  $\cos m\theta$  e integriamo ancora tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Otterremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \pi a_m.$$

Questo perché l'integrale  $\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos m\theta \, d\theta$  è nullo e sono pure nulli gli integrali  $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta$  ( $n \neq m$ ) e  $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n\theta \cos m\theta \, d\theta$ .

Moltiplichiamo infine ambo i membri della (2.13) per  $\sin m\theta$  e integriamo tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Otterremo analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta = \pi b_m.$$

## S.3

## S.3.1. □

Poiché la somma dei primi  $n$  termini della serie è

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \dots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1} \end{aligned}$$

dal problema 1.6 segue che

$$S(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z| < 1$$

(incluso  $z = 0$ , dove la serie vale 0). Alternativamente, una dimostrazione autosufficiente è la seguente:  $|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon$  per  $(n+1) \ln |z| < \ln \epsilon$ , cioè

$$n+1 > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} - 1 \quad \text{se } z \neq 0$$

Se  $z = 0$ ,  $S_n(0) = 0$  e  $|S_n(0) - 0| < \epsilon$  per ogni  $n$ . Quindi, la somma della serie è

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z| < 1 \text{ (incluso } z = 0\text{)}$$

## S.3.2. □

La serie converge per  $\operatorname{Re}(z) > -1/2$ . Infatti, è una serie geometrica e converge quando

$$\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$$

cioè quando

$$|z| < |1+z|.$$

Passando alle usuali coordinate cartesiane  $z = x + iy$ , la condizione diventa

$$x^2 + y^2 < 1 + 2x + x^2 + y^2,$$

da cui

$$x = \operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}.$$

Si osservi che in questo caso la serie, non essendo una serie di potenze, non ha necessariamente un dominio di convergenza rappresentato da un cerchio. Infatti, il dominio di convergenza è il semipiano limitato a sinistra dalla retta  $\operatorname{Re}(z) = -1/2$ .

## S.3.3. □

(a) Nel problema 3.1 si è dimostrato che

$$|S_n(z) - z| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} - 1 \quad \text{se } |z| < 1.$$

Quindi, a fortiori, la serie converge per  $z \leq 1/2$ . Ora, se  $z \leq 1/2$  il massimo valore dell'errore si ha quando  $|z| = 1/2$  ed è dato da

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1/2)} - 1$$

Ne segue che  $|S_n(z) - z| < \epsilon$  per ogni  $n > N^*$ , dove  $N^*$  dipende solo da  $\epsilon$  e non dal particolare valore di  $z$  dentro  $|z| \leq 1/2$ .

(b). La stessa argomentazione fatta in (a) serve a dimostrare che la serie converge alla somma  $z$  per  $|z| \leq 0.9$  o  $|z| \leq 0.99$ , usando rispettivamente

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.9)} - 1 \quad \text{e} \quad N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.99)} - 1$$

È chiaro che non si può estendere la dimostrazione a  $|z| \leq 1$ , perché ciò richiederebbe

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1)} - 1,$$

che è infinito, non esiste cioè un valore finito di  $N^*$  che possa essere impiegato in questo caso. Quindi per  $|z| \leq 1$  la serie non converge uniformemente.

### S.3.4. □

(a) Si ha

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{per} \quad \frac{1}{|1+nz|} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |1+nz| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ora,

$$|1+nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z| \quad \text{e} \quad 1 + n|z| \geq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{per} \quad n > \frac{1/\epsilon - 1}{|z|}$$

Quindi per  $|z| > 2$  la successione converge a 0.

Per dimostrare che converge uniformemente a 0, si osservi che il massimo valore di

$$\frac{1}{|z|} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

in  $|z| > 2$  si ha per  $|z| = 2$  ed è dato da

$$N^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

ne segue che

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon$$

per ogni  $n > N^*$ , dove  $N^*$  dipende solo da  $\epsilon$  e non dal particolare  $z$  in  $|z| > 2$ . Quindi la successione è uniformemente convergente a zero in questa regione.

(b) Se  $\delta$  è un numero positivo qualsiasi, il massimo di

$$\frac{1}{|z|} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

in  $z \leq \delta$  si ha per  $|z| \geq \delta$  ed è

$$\frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

Come in (a) ne segue che la successione converge uniformemente a zero per ogni  $z$  per cui  $|z| \geq \delta$ , cioè in ogni regione che non comprenda punti di un intorno di  $z = 0$ . Poiché  $\delta$  è arbitrario, questa regione può essere arbitrariamente piccola (ma non ridursi ad un punto).

**S.3.5.** □

Dal problema 3.1,

(a)  $S_n(z) = z - z^{n+1}$ ,  $S(z) = \lim S_n(z)$ . Se  $|z| < 1$ ,  $S(z) = z$ . Se  $z = 1$ ,  $S_n(z) = S_n(1) = 0$  e  $\lim S_n(1) = 0$ . Quindi  $S(z)$  è discontinua in  $z = 1$ .

(b) Dal problema 3.4, se si scrive

$$u_n(z) = \frac{1}{1+nz} \quad \text{e} \quad U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z),$$

si ha  $U(z) = 0$  se  $z \neq 0$  e  $U(0) = 1$ . Quindi  $U(z)$  è discontinua in  $z = 0$ .

**S.3.6.** □

La serie non è di potenze. Forniamo una dimostrazione diretta. Sia

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(z) &= |z(1-z)| + |z^2(1-z)| + \dots + |z^n(1-z)| \\ &= |1-z| \left[ |z| + |z|^2 + \dots + |z|^n \right] \\ &= |1-z||z| \left[ \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \right]. \end{aligned}$$

Se  $|z| < 1$ ,  $|z|^n$  tende a zero per  $n$  che va all'infinito: il limite di  $\tilde{S}_n(z)$  esiste e la serie è assolutamente convergente. (Si osservi che la serie dei valori assoluti converge a  $(|z||1-z|)/(1-|z|)$ .)

**S.3.7.** □

Se  $|z| \leq 1$ ,

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché  $\sum (1/n^2)$  converge, per confronto segue l'assoluta convergenza della serie.



**S.3.8.** □

Poiché

$$\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

per  $|z| \leq 1$ , la serie data converge uniformemente (e assolutamente) per il criterio  $M$  di Weirstrass.

**S.3.9.** □

La serie data è

$$\frac{1}{1^2 + z^2} + \frac{1}{2^2 + z^2} + \frac{1}{3^2 + z^2} + \dots$$

I primi due termini possono essere omessi senza influenza sulla convergenza uniforme della serie. Per  $n \geq 3$  e  $1 < |z| < 2$ , si ha

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| \geq n^2 - 4 \geq \frac{1}{2}n^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

Allora la serie data converge uniformemente (e assolutamente) in  $1 < |z| < 2$  per il criterio  $M$  di Weirstrass.

Si noti che la convergenza, e quindi anche l'uniforme convergenza, viene meno per  $|z| = 1$  o  $|z| = 2$  (precisamente in  $z = \pm i$  e  $z = \pm 2i$ ).

**S.3.10.** □

La funzione  $\cos nz$  è ovunque limitata sull'asse reale, ma non sull'asse immaginario:

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{1}{2} [e^{inz} - e^{-inz}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-ny}e^{inx} - e^{ny}e^{-inx}] \end{aligned}$$

Quindi, per  $n \rightarrow \infty$ ,  $\cos nz$  esplode esponenzialmente sia sull'asse immaginario positivo sia su quello negativo, fatta eccezione per  $y = 0$ . Se ne conclude che la serie data non converge in  $|z| \leq 1$  (on in qualunque disco  $|z| \leq r < 1$ ). La serie converge solo sull'asse reale ( $y = 0$ ), e vi converge uniformemente (criterio  $M$  di Weirstrass).

**S.3.11.** □

La serie è geometrica (non di potenze) con primo termine  $1/(1-z)$  e ragione  $2z/(1-z)$ . Converte quando

$$|2z| < |1-z|,$$

cioè quando  $z$  è dentro al cerchio d'equazione

$$3x^2 + 3y^2 + 2x - 1 = 0.$$

**S.3.12.** □

Lasciato alla fantasia.

**S.3.13.** □

La serie binomiale è

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} z^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Con il metodo del rapporto si ottiene

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|n-k|} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{\left|1 - \frac{n}{k}\right|} = 1$$

S.4

S.4.1. □ La multifunzione

$$f(z) = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i}$$

è il prodotto di 2 multifunzioni  $Z \mapsto \sqrt{Z}$  e  $W \mapsto \sqrt[3]{W}$ . È quindi ragionevole supporre che  $Z = 0$ , cioè  $z = -1$  e  $W = 0$ , cioè  $z = i$  siano punti di diramazione di  $f$ .

Con riferimento alla figura a lato, e tenuto conto dell'esempio analogo della sezione 4.2), poniamo

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2}$$

da cui

$$f(z) = w = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i(\theta_1/2 + \theta_2/3)} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/3}$$

questo corrisponde alla scelta di uno dei valori di  $f$  in  $z$ . Per dimostrare che  $i$  è un punto di diramazione, consideriamo un cammino chiuso attorno a  $i$ . I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio rosso della figura). Dopo un giro completo si ha

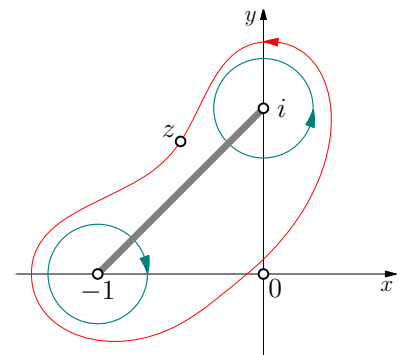
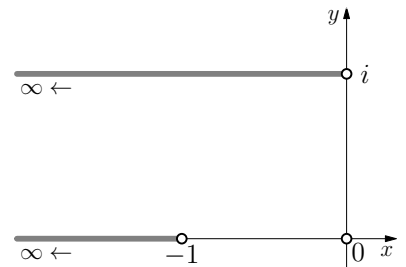
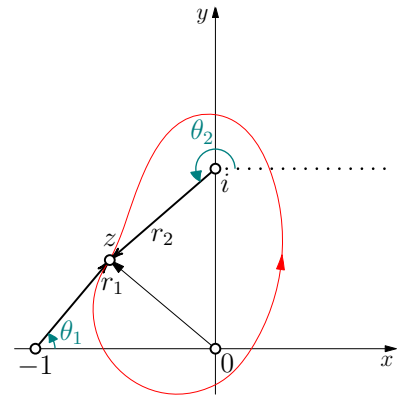
$$e^{i\theta_2/3} \rightsquigarrow e^{i(\theta_2/3 + 2\pi/3)},$$

cioè la radice ha cambiato valore ed è passata nel suo secondo ramo. Mentre  $z$  compie un giro attorno a  $i$ , l'angolo  $\theta_1$  va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando  $z$  ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale. Quindi complessivamente  $f(z)$  varia in un giro completo per la sola variazione dovuta alla sola radice cubica. Fine della dimostrazione che  $i$  è un punto di diramazione. Analogo ragionamento per  $-1$  porta alla conclusione che anche  $-1$  è un punto di diramazione. Poiché ci vogliono due giri per tornare al valore iniziale,  $z = -1$  è un punto di diramazione semplice; per  $i$  ce ne vogliono tre e dunque è di ordine 2.

I tagli standard per ottenere rami ad un sol valore dalla funzione di partenza sono mostrati nella figura a lato. Non è possibile ottenere rami ad un sol valore con il solo taglio congiungente i punti di diramazione perchè pur essendo le "velocità angolari" opposte in senso di rotazione sono di diverso modulo (una è  $1/2$  e l'altra è  $1/3$ ), e non ci può essere compensazione dopo un giro completo. Si veda la figura a lato.

S.4.2. □  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}$ , al finito, ha due punti di diramazione semplici in  $z = \pm 1$ . Per valutare se  $f(z)$  ha un punto di diramazione all'infinito, si considera  $F(z) = f(1/z)$  per  $z = 0$ . Ma

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2}.$$



Quindi  $z = 0$  non è un punto di diramazione di  $F$  e di conseguenza  $z = \infty$  non è un punto di diramazione di  $f$ .

**S.4.3.** □ (a)  $f(z) = \sin \sqrt{z}$ . Se si considera un giro attorno a 0 lungo il cerchio unitario  $|z| = 1$ , partendo, per esempio, da  $\theta = 0$ , si ha:

$$\sin e^{i(\theta=0)/2} = \sin(1) \implies \sin e^{i(\theta=2\pi)/2} = \sin e^{i\pi} = \sin(-1) = -\sin(1)$$

Quindi  $\sin \sqrt{z}$  ha un punto di diramazione semplice nello zero. Poiché un giro lungo  $|z| = 1$  è anche un giro attorno all'infinito, anche l'infinito è un punto di diramazione della funzione.

(b)  $f(z) = \sqrt{\sin z}$ . Il seno si annulla per  $z = n\pi$  ed è singolare all'infinito. Ci potrebbero essere dei punti di diramazione in questi punti. Consideriamo il punto  $z = n\pi$ . Possiamo scrivere

$$\sin z = (z - n\pi) \frac{\sin z}{z - n\pi}.$$

La funzione

$$g(z) = \frac{\sin z}{z - n\pi}$$

è non nulla e non ha una "vera" singolarità in  $z = n\pi$ , in quanto<sup>1</sup>

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\sin z}{z - n\pi} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\cos z}{1} = (-1)^n$$

<sup>1</sup> Quando la singolarità è solo apparente e può essere "eliminata" si dice appunto *singolarità eliminabile*.

Allora, in un piccolo intorno di  $n\pi$  si ha

$$\sin z = (z - n\pi)(-1)^n$$

Quindi, poiché  $\sqrt{z - n\pi}$  ha un punto di diramazione semplice per  $z = n\pi$  anche  $\sqrt{\sin z}$  avrà un punto di diramazione semplice per  $z = n\pi$ .

Poiché tutti i punti di diramazione  $z = n\pi$  vanno fino all'infinito, l'infinito non è una singolarità isolata, ma un punto di accumulazione di singolarità. Un punto di diramazione deve essere una singolarità isolata e quindi l'infinito non è un punto di diramazione.

(c)  $f(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ . La funzione è a un sol valore. Dimostrazione veloce:

$$\begin{aligned} z^{1/2} \sin z^{1/2} &= \pm \sqrt{z} \sin(\pm \sqrt{z}) \\ &= \pm \sqrt{z} (\pm \sin(\sqrt{z})) \\ &= \sqrt{z} \sin \sqrt{z} \end{aligned}$$

(d)  $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$ . Poiché  $\sin z^2 = 0$  per  $z = (n\pi)^{1/2}$ , questi potrebbero essere punti di diramazione. Possiamo scrivere

$$\sin z^2 = z^2 \frac{\sin z^2}{z^2}$$

dove la funzione  $\sin z^2/z^2$  è non nulla e ha una singolarità eliminabile per  $z = 0$ : per  $z \rightarrow 0$  la funzione tende a 1. Poichè  $\sqrt{z^2}$  non ha un punto di diramazione in 0, lo stesso vale per  $f(z)$ . Consideriamo adesso il punto  $z = (n\pi)^{1/2}$ ,

$$\sin z^2 = (z - \sqrt{n\pi}) \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}}$$

$\sin z^2/(z - \sqrt{n\pi})$  è non nulla e ha una singolarità eliminabile per  $z = \sqrt{n\pi}$

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{2z \cos z^2}{1} = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n$$

Poiché  $(z - \sqrt{n\pi})^{1/2}$  ha un punto di diramazione in  $z = \sqrt{n\pi}$ , anche  $\sqrt{\sin z^2}$  lo avrà. Quindi  $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$  ha punti di diramazione semplici in  $z = \sqrt{n\pi}$  per  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Il punto all'infinito non è una singolarità isolata.<sup>2</sup>

**S.4.4.** □ Per trovare i punti di diramazione di

$$f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$$

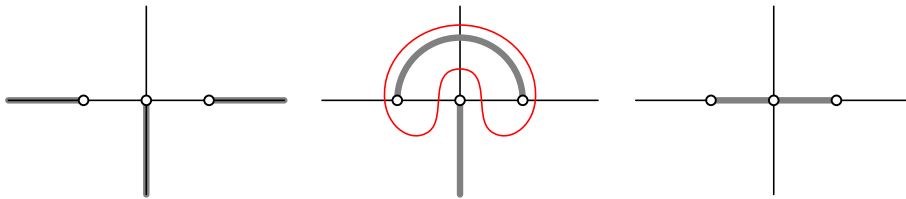
espandiamo  $f(z)$ ,

$$f(z) = z^{1/3}(z - 1)^{1/3}(z + 1)^{1/3}$$

Ci sono punti di diramazione di ordine 2 in  $z = -1, 0, 1$ . Facendo la sostituzione  $z \mapsto 1/z$  si vede che non ci sono punti di diramazione all'infinito in quanto

$$F(z) = f(1/z) = \frac{1}{z}(1 - z)^{1/3}(1 + z)^{1/3}$$

Ci sono tre possibili tagli:



Si vede facilmente che il primo taglio va bene e trasforma la multifunzione in una funzione a un solo valore. Il secondo taglio NON va bene perché permette un giro intorno ai punti  $\pm 1$ . Un giro intorno a questi due punti fa variare il valore di partenza della funzione di un fattore  $e^{i4\pi/3}$ , quindi la funzione così ottenuta non è a un sol valore. Il terzo taglio va bene: girando intorno ai tre punti la funzione non cambia ( $e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1$ ); si osservi che questo è anche conseguenza diretta del fatto che l'infinito non è un punto di diramazione.

<sup>2</sup> E poichè non è neanche un polo, è una singolarità essenziale (le definizioni di polo e di singolarità essenziale saranno date in una lezione successiva).

S.4.5. □ Per prima cosa fattorizziamo  $f(z)$ ,

$$f(z) = (z - i)^{1/3}(z + i)^{1/3}.$$

Ci sono punti di diramazione (di ordine 2) in  $z = \pm i$ . Scegliamo in tagli secondo la convenzione standard, come nella figura a lato. Si ha

$$f(z) = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/3} (r_2 e^{i\theta_2})^{1/3} = \sqrt[3]{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/3}$$

Si vuole determinare il ramo in cui

$$f(0) = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

cioè il ramo in cui gli angoli  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  che individuano  $z = 0$  (vedere figura a lato) soddisfano

$$\sqrt[3]{1} e^{i(\theta_1^* + \theta_2^*)/3} = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

dunque, per avere il ramo richiesto, deve valere la relazione

$$\theta_1^* + \theta_2^* = 2\pi + 6\pi n$$

Il ramo suggerito dalla figura con  $\theta_1^* = -\pi/2$  e  $\theta_2^* = \pi/2$  non va bene. Una scelta possibile è

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi, \quad 5\pi < \theta_2 < 7\pi$$

che corrisponde a  $n = 1$ . Naturalmente, altre scelte sono possibili.

È possibile anche fare una differente scelta dei tagli. Per esempio, per la scelta di tagli della figura a lato, si può scegliere il ramo

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}$$

che corrisponde a  $n = 0$ .

S.4.6. □

(a)  $f(z) = \log(z^2 - 1) = \log(z - 1) + \log(z + 1)$

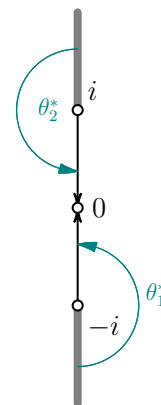
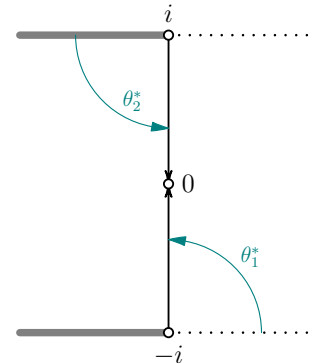
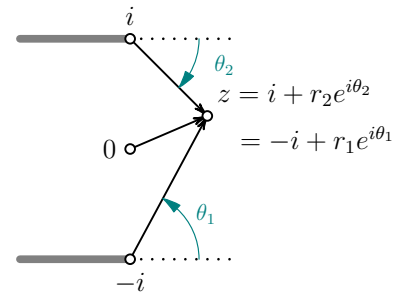
Ci sono punti di diramazione in  $z = \pm 1$ . Per sapere che cosa succede all'infinito, consideriamo il comportamento nello zero di

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \log(z^{-2}) + \log(1 - z^2)$$

$\log(z^{-2})$  ha un punto di diramazione in  $z = 0$ ,

$$\log(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| + i \arg(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| - i2 \arg(z)$$

Ogni volta che giriamo intorno allo zero il valore della funzione  $F(z)$  cambia di  $-4\pi i$ . Allora  $z = \infty$  è un punto di diramazione di  $f(z)$ .



Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da  $z = \pm 1$  e vanno all'infinito.

$$(b) \quad f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log(z+1) - \log(z-1)$$

Ci sono punti di diramazione in  $z = \pm 1$ .

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$F(z)$  non ha punti di diramazione nello zero, quindi  $f(z)$  non ha punti di diramazione all'infinito.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da  $z = \pm 1$  e vanno all'infinito. Possiamo anche rendere la funzione ad un sol valore introducendo un solo taglio che collega i punti  $z = \pm 1$ . Questo perché  $\log(z+1)$  e  $-\log(z-1)$  cambiano rispettivamente di  $2\pi i$  e  $-2\pi i$  quando si percorre un giro completo intorno ai due punti di diramazione nella direzione positiva.

## S.5

S.5.1. □ Vedere sezione 5.8.2.

S.5.2. □ Perché composizione di due trasformazioni anti-conformi.

S.5.3. □ Vedere sezione 5.8.3.

S.5.4. □ METODO 1. Richiedendo che le equazioni di Cauchy-Riemann siano soddisfatte per

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad u = x^2 + y^2$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_y v &= \partial_x u = 2x \\ \partial_x v &= -\partial_y u = -2y. \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} v &= 2xy + g(x) \\ v &= -2yx + h(y). \end{aligned}$$

È chiaro che queste identità non possono essere verificate per nessuna scelta di  $g$  e  $h$ .

METODO 2. Per essere analitica, la funzione  $f = u + iv$  deve soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

E se queste sono soddisfatte le funzioni  $u$  e  $v$  devono essere *funzioni armoniche*, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x u &= \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \\ \partial_x \partial_x v &= -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \Delta v \equiv \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

La funzione  $u = x^2 + y^2$ , non è armonica in quanto  $\Delta u = 4$ . Quindi non esiste alcuna scelta di  $v$  che renda la funzione  $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$  analitica.



**S.5.5.** □ Preliminarmente, richiamiamo che i limiti di funzioni complesse si comportano esattamente come i limiti di funzioni reali. In particolare, se  $\{z_n\}$  è una successione di punti nel piano complesso che converge al numero complesso  $a$  e se

$$\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A, \quad \lim_{z_n \rightarrow a} g(z_n) = B,$$

allora

$$\begin{aligned} \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n) + g(z_n)] &= A + B \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)g(z_n)] &= AB \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)/g(z_n)] &= A/B \quad \text{se } B \neq 0 \end{aligned}$$

(a) Oggetto di questo esercizio è la funzione (per  $z \neq 0$ )

$$f(z) \equiv f(x + iy) = \frac{xy}{\bar{z}}$$

Viene chiesto di mostrare che  $f(z)$  tende a 0 quando  $z$  tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine. Si devono quindi determinare i limiti

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}}, \quad \lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}}$$

dove  $s$  è reale e, come di consueto,  $z = x + iy$ . In primo luogo, riscriviamo la funzione  $f$  in notazione complessa,

$$\frac{xy}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \left[ \frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right]$$

Allora

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{4i} \left[ \frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right] = \frac{1}{4i} \left[ \lim_{z \rightarrow s} \frac{z^2}{\bar{z}} - \lim_{z \rightarrow s} \bar{z} \right] = s - s = 0.$$

Analogamente si trova

$$\lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}} = 0.$$

Risulta così verificato che  $f(z)$  tende a 0 quando  $z$  tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.

(b) Poiché lungo gli assi  $f = u + iv = 0$ , sono nulli gli incrementi lungo  $x$  e lungo  $y$  di  $u$  e  $v$  a partire dall'origine, e quindi le loro derivate parziali in  $z = 0$ : le equazioni di Cauchy-Riemann sono banalmente soddisfatte.

(c) Consideriamo l'azione della trasformazione su un vettore  $\delta z$  (infinitesimo) applicato nell'origine, di lunghezza  $\delta\rho$  e angolo  $\phi$ .

Allora

$$\begin{aligned}\delta z \mapsto \delta f &= f(\delta z) = \frac{1}{4i} \left[ \frac{(\delta z)^2}{\delta z} - \overline{\delta z} \right] = \frac{1}{4i} [\delta \rho e^{i3\phi} - \delta \rho e^{-i\phi}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i2\phi} - e^{-i2\phi}}{2i} \right] \delta \rho e^{i\phi} = \frac{1}{2} \sin(2\phi) \delta \rho e^{i\phi}\end{aligned}$$

Questa non è una stiro-rotazione, non tanto per la rotazione, che c'è ed è l'identità, ma per lo stiramento  $\frac{1}{2} \sin(2\phi)$ , che non è uniforme. Si osservi che per  $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ ,  $\delta f = 0$ , in accordo con (b).

S.5.6.  $\square$  Banale.

S.5.7.  $\square$  Inversione complessa:

$$I(z = x + iy) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

(a) Allora 2

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

(b) Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y u &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y v &= \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$ , si ha  $\partial_x u = \partial_y v$  e  $\partial_y u = -\partial_x v$ , che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann. Per  $(x, y) = (0, 0)$  le derivate parziali sono discontinue (verificare!): le equazioni di Cauchy-Riemann non valgono.

(c)

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

In coordinate polari  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  si ha

$$y^2 - x^2 = \rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\rho^2 \cos(2\theta), \quad 2xy = \rho^2 \sin(2\theta)$$

e quindi

$$J = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \cos(\pi - 2\theta) & -\sin(\pi - 2\theta) \\ \sin(\pi - 2\theta) & \cos(\pi - 2\theta) \end{pmatrix}$$

che descrive uno stiramento di  $1/\rho^2$  e una rotazione dell'angolo  $\pi - 2\theta$ .

(d)

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\rho^2 [-\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]}{\rho^4} = -\frac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\rho^2}$$

da cui

$$\partial_x f = -\frac{1}{\rho^2} e^{-i2\theta} = -\frac{1}{\rho^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

che, naturalmente, coincide, con quanto si ottiene con le regole del calcolo

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2}.$$

## S.6

## S.6.1. □

I passaggi sono esattamente gli stessi di quelli per la formula di Cauchy data nella sezione 6.6.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = - \oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z} = \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} dz.$$

dove  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  centrato in  $O$ . Calcoliamo l'integrale a secondo membro, tenuto conto che  $z = \epsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon d e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Il valore non dipende da  $\epsilon$ , che possiamo quindi far tendere a 0. Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

dove  $C$  è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a  $C$ ; questo era proprio quello che si voleva dimostrare.

## S.6.2. □

Poichè

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

$f(z)$  rappresenta il campo magnetico generato da due correnti puntiformi in  $+i$  e  $-i$  di uguale intensità ma di segno opposto. Quindi, per il teorema di Ampère,

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 0$$

per qualunque curva chiusa  $C$  che racchiuda le due correnti.

Consideriamo due cerchi di raggio  $\epsilon$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , centrati rispettivamente in  $i$  e  $-i$  e applichiamo ad essi la formula di Cauchy (vedere figura S.2). Incominciamo con  $C_1$ .

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} + (1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z+i}.$$

Poiché  $1/(z+i)$  è analitica nella regione delimitata da  $C_1$ , il secondo integrale a secondo membro è nullo, per cui, applicando la formula di Cauchy al primo, si ottiene

$$I_{C_1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i(2\pi i) + 0 = \pi.$$

Procedendo in maniera analoga per  $C_2$ , si trova

$$I_{C_2} = \oint_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = 0 + (1/2)i(2\pi i) = -\pi.$$

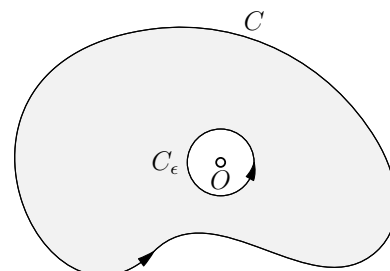


Figura S.1:  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda l'origine  $O$ .

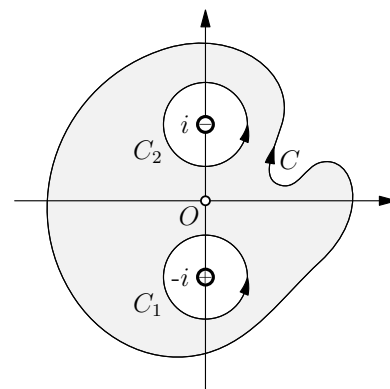


Figura S.2:  $f(z)$  rappresenta il campo generato da due correnti di uguale intensità, ma di segno opposto.

Applichiamo adesso il teorema di Cauchy alla curva  $C = C_1 - C_2$  (che delimita la regione molteplicemente connessa colorata in grigio nella figura):

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \pi - \pi = 0,$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare.

**S.6.3.** □

È chiesto di calcolare

$$I_{J_R} = \int_{J_R} \frac{dz}{z^2 + 1},$$

dove  $C$  è la curva mostrata nella figura a lato. Facendo la sostituzione  $z = Re^{i\theta}$ , si ottiene

$$I_{J_R} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta} + 1} = \frac{i}{R} \int_0^\pi \frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{2i\theta} + 1/R^2} \quad (\text{S.11})$$

Al prim'ordine in  $1/R$ , possiamo trascurare  $1/R^2$  a denominatore, per cui

$$I_{J_R} = \frac{i}{R} \int_0^\pi e^{-i\theta}d\theta = \frac{i}{R} \left[ \frac{e^{-i\theta}}{-i} \right]_0^\pi + o(1/R) = \frac{2}{R} + o(1/R)$$

**S.6.4.** □ Gli integrali reali sono un caso particolare di integrali di linea complessi.

$$I_{L_R} = \int_{L_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \arctan(R)$$

Ora,

$$\arctan(R) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{R} + o(1/R)$$

Quindi

$$I_{L_R} = \pi - \frac{2}{R} + o(1/R)$$

**S.6.5.** □

Nella regione racchiusa da  $C_R = J_R + L_R - C_1$  (vedere la figura a lato) la funzione  $1/(1 + z^2)$  è analitica, quindi, per il teorema di Cauchy (vedere S.6.2)

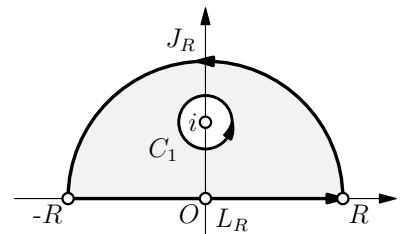
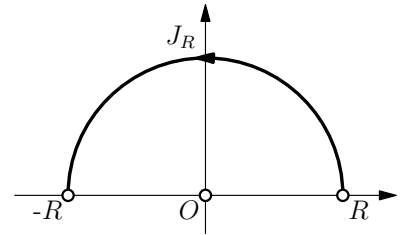
$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = (-1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z - i} = \pi$$

D'altro canto, da S.6.3 e S.6.4 si ha

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \frac{2}{R} + o(1/R) + \pi - \frac{2}{R} + o(1/R) = \pi + o(1/R)$$

Quindi il teorema di Cauchy risulta verificato all'ordine  $1/R$ . Dal calcolo esatto dell'integrale (S.11) (un po' laborioso, ma utile esercizio) risulta in effetti che

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \pi$$



**S.6.6.** □

(a) I passaggi sono esattamente gli stessi di quelli per la formula di Cauchy data nella sezione 6.6.

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} + \oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} = 0.$$

dove  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  centrato in  $O$ . Calcoliamo il secondo integrale, tenuto conto che  $z = \epsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = i \epsilon^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{e^{i(1-n)2\pi} - 1}{\epsilon^{n-1}(1-n)} = 0, \quad \text{per } n \neq 1$$

in quanto  $e^{i\theta}$  è periodica di periodo  $2\pi$  (per  $n = 1$ , l'integrale vale chiaramente  $2\pi i$ , come peraltro già calcolato nel problema S.6.1).

Analogo risultato per  $n = -1, -2, \dots$ . Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 2\pi i, \quad n \neq 1$$

dove  $C$  è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a  $C$ , che era proprio quello che si voleva dimostrare.

(b) Il campo

$$\frac{-q}{z+d} + \frac{q}{z-d} = \frac{2qd}{z^2 - d^2}$$

è quello generato da due cariche  $q$  di segno opposto poste in  $+d$  e  $-d$  sull'asse reale. Facendo tendere  $d$  a zero e tenendo costante  $2qd \equiv p$  si ottiene il campo

$$\frac{p}{z^2}$$

di un dipolo ideale. Scegliendo per  $p$  un numero complesso si ottiene un dipolo avente  $p$  come asse.

Fondendo due dipoli di momento opposto e centrati in  $\pm\epsilon$ ,

$$\frac{p}{(z-\epsilon)^2} - \frac{p}{(z+\epsilon)^2} = p \frac{z^2 + 2z\epsilon + \epsilon^2 - z^2 + 2z\epsilon - \epsilon^2}{(z^2 - \epsilon^2)^2} = \frac{4p\epsilon z}{(z^2 - \epsilon^2)^2}.$$

Passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenendo  $Q = 4p\epsilon$  costante, si ottiene il campo di quadrupolo

$$\frac{Q}{z^3}$$

e così via. Per i ritratti di fase di questi campi si vedano i complementi del capitolo 6.

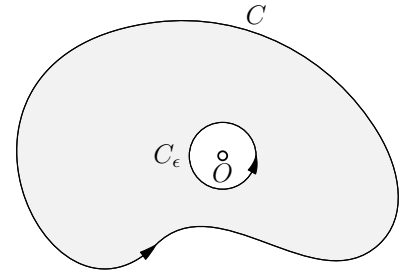


Figura S.3:  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda l'origine  $O$ .

## S.7

S.7.1. □

Per determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz,$$

dove  $C$  è la linea  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  che congiunge i punti  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$  si può: (i) calcolare l'integrale di linea lungo la curva data separando parte reale e parte immaginaria e applicando le regole di calcolo degli integrali di linea reali; (ii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, il valore dell'integrale non dipende dalla linea, quindi, invece di quella assegnata, si prende una linea molto più semplice che congiunge i due punti, per esempio una retta; fatto questo si calcola l'integrale di linea lungo il segmento di retta tra  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$ ; (iii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, valgono le usuali regole del calcolo: la primitiva della funzione integranda è  $4z^3 - 2iz^2$  e quindi

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = (4z^3 - 2iz^2) \Big|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Chiaramente, (iii) è il metodo più furbo!

S.7.2. □

(a)  $C: |z| = 1$ . Si ponga  $z = e^{i\theta}$ . Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} de^{i\theta} = e^{i2\pi} - 1 = 0$$

(b)  $|z - 1| = 1$ . Si ponga  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta = (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta$ . Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = 2i\pi$$

S.7.3. □

Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva  $C$  definita da  $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$  tra il punto  $z = 1$  e  $z = 2 + 2i$ .

Risposta:  $248/15$ .

S.7.4. □

(a)

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{z}{[(z + 2i)(z - 2i)]^2}$$

È chiaro "a vista" che  $2i$  e  $-2i$  sono poli di ordine 2 (i poli sono gli zeri della funzione inversa). Questi due poli sono le sole singolarità e dunque la  $f(z)$  è meromorfa.

(b)

$$f(z) = \sec(1/z) \equiv \frac{1}{\cos(1/z)}$$

Si hanno singolarità quando  $\cos(1/z) = 0$ , cioè in  $1/z = (2n+1)\pi/2$   
o

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Poiché  $f(z)$  non è definita in  $z = 0$  anche  $z = 0$  è una singolarità.

Sulla base di quanto visto a lezione, usiamo la regola che permette di decidere in generale se una singolarità è un polo di ordine  $m$  per una funzione analitica con singolarità in  $z = a$ . Partiamo con  $k = 1$ :

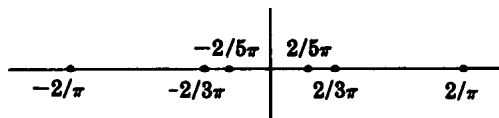
$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \left[ z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{z - 2/[(2n+1)\pi]}{\cos(1/z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{1}{-\sin(1/z)(-1/z^2)} \quad (\text{Hospital}) \\ &= \frac{\{2/[(2n+1)\pi]\}^2}{\sin[(2n+1)\pi/2]} \\ &= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi le singolarità

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

sono *poli di ordine uno*, cioè *poli semplici*. Si osservi che questi poli sono sull'asse reale in

$$z = \pm \frac{2}{\pi}, \pm \frac{2}{3\pi}, \pm \frac{2}{5\pi} \dots$$



Ciascuno di questi può essere circondato da un cerchio di raggio  $\delta$ , e quindi questi punti sono singolarità isolate (come deve essere per un polo); naturalmente,  $\delta$  diventa sempre più piccolo man mano che ci si avvicina allo zero. Ma lo zero non ha questa proprietà: non esiste alcun cerchio di raggio  $\delta$ , centrato nello zero, all'interno del quale non ci siano singolarità della funzione. Lo zero non è una singolarità isolata, è una *singolarità essenziale*. Equivalentemente, potremmo applicare la regola nel quadro sopra e verificare che non esiste alcun  $k$  tale  $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = c$ ,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \frac{1}{\cos(1/z)} = \infty, \quad \forall k$$



(c)

$$f(z) = \frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

Il punto  $z = 2$  è un punto di diramazione ed è una singolarità isolata. Le radici di  $(z^2+2z+2)$  sono  $z = -1 \pm i$ , da cui  $z^2+2z+2 = (z+1+i)(z+1-i)$ . Quindi  $z = -1 \pm i$  sono poli di ordine 2 (che sono singolarità isolate).

(d)

$$f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

A prima vista, sembra che  $z = 0$  sia un punto di diramazione. Per verifica, sia  $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)}$ , dove  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Se  $z = re^{i\theta}$ , si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Se  $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ , si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi}} = \frac{\sin -(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{-\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Quindi, in realtà, la funzione è a un sol valore e  $z = 0$  non può quindi essere un punto di diramazione. Poiché

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1,$$

ne segue che  $z = 0$  è una singolarità eliminabile.

**S.7.5.** □ Si deve calcolare

$$\oint_C f(z) dz$$

dove

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2}$$

e  $C$  è il cerchio  $|z| = 4$ . La funzione  $f(z)$  ha due poli  $z = \pm i\pi$  di ordine  $m = 2$  nel cerchio  $C$ . Quindi

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, +i\pi) + \text{Res}(f, -i\pi)]$$

Ricordiamo la formula generale per il residuo in un polo  $a$  di ordine  $m$ ,

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z-a)^m f(z)] \Big|_{z=a}$$

Per  $a = i\pi$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i\pi) &= \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{dz} \right] \left[ (z - i\pi)^2 \frac{e^z}{(z - i\pi)^2 (z + i\pi)^2} \right] \Big|_{z=i\pi} = \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z + i\pi)^2} \Big|_{z=i\pi} \\ &= \frac{e^z (z + i\pi)^2 - e^z [2(z + i\pi)]}{(z + i\pi)^4} \Big|_{z=i\pi} = \frac{e^z (z + i\pi) - 2e^z}{(z + i\pi)^3} \Big|_{z=i\pi} = \frac{\pi + i}{4\pi^3} \end{aligned}$$

Analogamente, si trova

$$\operatorname{Res}(f, -i\pi) = \frac{\pi - i}{4\pi^3}$$

Allora

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + \pi^2)^2} = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, +i\pi) + \operatorname{Res}(f, -i\pi)] = 2\pi i \left[ \frac{\pi + i}{4\pi^3} + \frac{\pi - i}{4\pi^3} \right] = \frac{i}{\pi}$$

**S.7.6.** □

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove  $C$  è il cerchio  $|z| = 2$ . Capito il metodo, non è necessario essere sempre pedanti:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz = 2\pi i \times \frac{1}{2} (e^{iz})'' \Big|_{z=0} = -\pi i$$

**S.7.7.** □ Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per  $t > 0$  e  $C$  il cerchio  $|z| = 3$ .

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{(z + i)(z - i)} dz = \frac{e^{-it}}{-2i} + \frac{e^{it}}{2i} = \sin t$$

**S.7.8.** □

Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a)  $2 \pm i, -2 \pm i$ ; (b)  $-i, 2 - i, 2 + i, i$ .

Risposta: (a) 0, (b)  $-1/2$ .

**S.7.9.** □

Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di  $P$ ,  $Q$  e  $R$  e il loro ordine.

Risposta: se siete arrivati sin qui, non avete problemi a trovarla.

S.8

S.8.1. □

(I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$$

Polo triplo in  $i$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Stesso contorno della figura 8.1.

$$\oint f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^3} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{(1+z^2)^3} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \frac{3\pi}{8}$$

Nel limite  $R \rightarrow \infty$  l'integrale lungo  $C_R^+$  dà contributo nullo, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

(II)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}, \quad a, b > 0$$

Polo di quart'ordine in  $i\sqrt{a/b}$ .

(III)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1$$

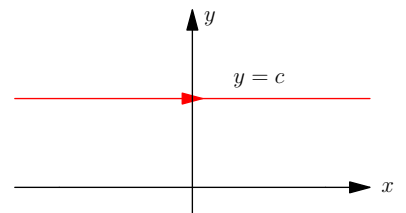
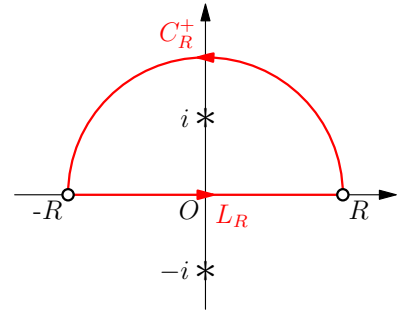
La funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

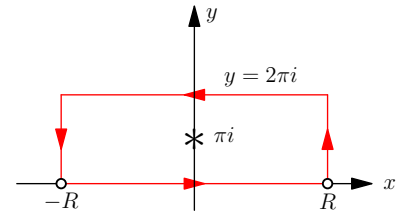
ha poli per  $z = (2n+1)\pi i$ . È dunque impossibile usare il contorno della della figura 8.1. L'idea per risolvere questo integrale (e integrali simili) è di trovare un cammino chiuso tale che su una parte del cammino l'integrale sia riconducibile a quello sull'asse reale che si vuole calcolare, e tale che le altre parti del cammino chiuso diano contributo nullo in un limite opportuno.

Consideriamo l'integrale lungo la retta di equazione  $y = c$  nel piano complesso, dove  $c$  è una costante, diciamo positiva. Allora  $z = x + ic$  e quindi

$$\int_{y=c} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iac} e^{ax}}{1+e^{ic} e^{ax}} dx = e^{iac} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{ic} e^{ax}} dx$$



Ci siamo quasi! Basta infatti scegliere  $c = 2\pi$ , e la funzione integranda diventa identica alla funzione  $f(z)$  in quanto  $e^{i2\pi} = 1$ . Possiamo allora scegliere il cammino della figura a lato e ottenere



$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} + \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} i dy - e^{ia2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} - \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{-aR} e^{iy}}{1 + e^{-R} e^{iy}} i dy = 2\pi i \text{Res}(f, \pi i) \tag{S.12}$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice  $\pi i$ ,

$$\text{Res}(f, \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = \frac{1}{e^{\pi i}} e^{a\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

Consideriamo il modulo della funzione integranda del primo integrale in  $dy$

$$\left| \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} \right| = \frac{e^{aR}}{|1 + e^R e^{iy}|} \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1}$$

$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ , cioè la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre maggiore o uguale alla differenza degli altri due.

e quindi tende a zero per  $R \rightarrow \infty$  essendo  $a < 1$ . Analogamente, il modulo della funzione integranda del secondo integrale in  $dy$  è minore di

$$\frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}}$$

e quindi tende a zero per  $R \rightarrow \infty$ . Allora, passando al limite  $R \rightarrow \infty$  nella (S.12),

$$(1 - e^{ia2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = 2\pi i (-e^{a\pi i}),$$

da cui

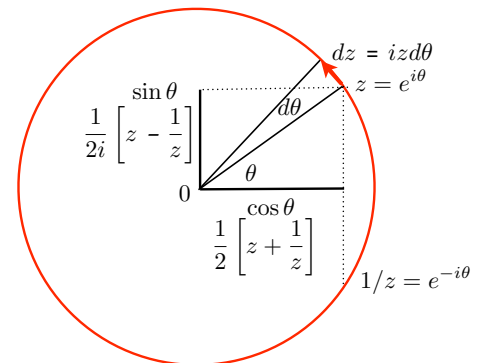
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = \pi \frac{-2ie^{a\pi i}}{1 - e^{ia2\pi}} = \frac{2i\pi}{e^{a\pi i} - e^{-i2\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

(IV)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

Integrali di questo tipo si riconducono a integrali nel piano complesso mediante le sostituzioni riassunte dalla figura 8.6.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} &= \oint_C \frac{dz/iz}{3 - 2(z + z^{-1})/2 + (z - z^{-1})/2i} \\ &= \oint_C \frac{2dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \end{aligned}$$



I poli di

$$f(z) = \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

sono poli semplici,  $z = 2 - i$  e  $z = (2 - i)/5$ . Solo  $(2 - i)/5$  è all'interno di  $C$ . Il residuo in  $(2 - i)/5$  è  $1/(2i)$ , quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi$$

S.8.2.  $\square$

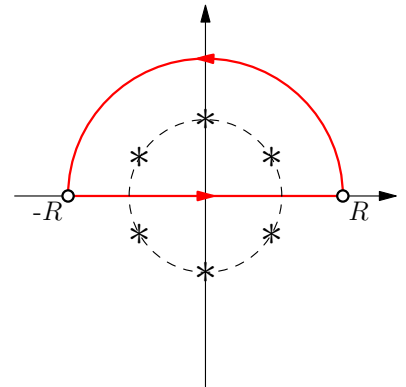
(I) Per il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

si si osservi che, essendo la funzione integranda pari,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Per il calcolo di questo integrale si considera il contorno della figura a lato. Zeri di  $1+x^6=0$ :  $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$ . Poli semplici di  $f(z) = 1/(1+z^6)$ . Solo i poli  $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}$  si trovano dentro  $C$ . Usando la regola dell'Hospital si trova



$$\text{Res}(e^{\pi i/6}) = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left[ (z - e^{\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6}$$

$$\text{Res}(e^{3\pi i/6}) = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left[ (z - e^{3\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2}$$

$$\text{Res}(e^{5\pi i/6}) = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left[ (z - e^{5\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \frac{1}{6} \left( e^{-5\pi i/6} + e^{-5\pi i/2} + e^{-25\pi i/6} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Quindi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$$

(II) Per dimostrare che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx = 2\pi e^{-a}$$

scomponiamo  $I$  nella somma di due integrali

$$I = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \equiv I_1 + I_2$$

Consideriamo il primo integrale

$$I_1 = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Non possiamo direttamente chiudere sul contorno della a lato perché

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

diverge lungo la direzione positiva dell'asse immaginario (a causa di  $e^{-iz}$ ). Consideriamo invece lungo lo stesso contorno, l'integrale

$$J_1 = \oint \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = \oint \frac{\cos z}{z^2 + a^2} dz + i \oint \frac{\sin z}{z^2 + a^2} dz$$

Essendo il seno una funzione dispari, il secondo integrale dà contributo nullo quando è integrato lungo l'asse reale. Quindi  $I_1 = aJ_1$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$ , in quanto l'integrale lungo  $C_R^+$  si annulla, nel limite  $R \rightarrow \infty$ , come si può verificare direttamente, oppure utilizzando il Lemma di Jordan.

Calcoliamo  $J_1$ . Polo in  $ia$ . Residuo:

$$\frac{e^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Quindi  $J_1 = (2\pi i)e^{-a}/(2ia) = \pi e^{-a}/a$ , da cui

$$I_1 = aJ_1 = \pi e^{-a}$$

Per il secondo integrale possiamo procedere in modo analogo oppure osservare che

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \Big|_{\lambda=1}$$

Ma l'integrale

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

è completamente analogo a  $J_1$ , calcolato poc'anzi e vale quindi

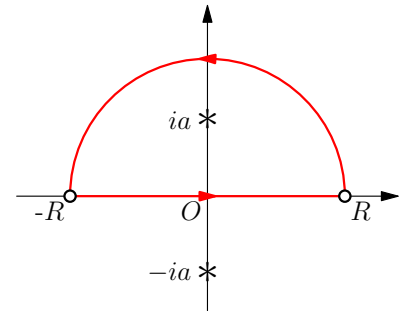
$$F(\lambda) = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$$

Allora

$$I_2 = -F'(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \pi e^{-a}$$

In conclusione

$$I = I_1 + I_2 = \pi e^{-a} + \pi e^{-a} = 2\pi e^{-a}$$



(III) Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

si procede alla sostituzione usuale per integrali di questo tipo (figura 8.6):  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = izd\theta$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ . Si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}$$

Polo di ordine 3 in  $z = 0$  e polo semplice in  $z = 1/2$ . Risultato  $\pi/12$ .

(IV) Per quel che riguarda

$$I(n, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad n \text{ intero positivo}, \quad a \text{ reale positivo}$$

bastano i primi della lista, ottenuti per derivazione sotto il segno di integrale, poi si indovina facilmente lo schema

$$\begin{aligned} I(0, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ I(1, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ I(2, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \\ I(3, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \\ I(n, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n - 1)}{2^n a^n} \end{aligned}$$

(V) Poiché

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

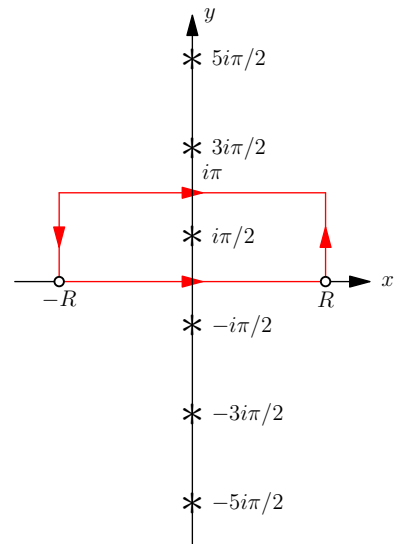
ha infiniti poli nei punti

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi i$$

per calcolare

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

conviene prendere il cammino di integrazione della figura a lato. Si osservi la scelta di far passare il cammino per  $\pi$ . Si arriva a questa scelta per tentativi ed errori, come la scelta che meglio facilita il calcolo (sfruttando la periodicit  della funzione).



Il residuo della funzione integranda per  $z = i\pi/2$  è  $-ie^{\omega\pi/2}$  e quello per  $z = -i\pi/2$  è  $+ie^{-\omega\pi/2}$ . Quindi,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi i) \text{Res} = e^{\omega\pi/2}$$

Adesso sviluppiamo il primo membro

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx + \frac{e^{\omega\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

(si osservi il cambiamento di segno  $\cosh(x+i\pi) = -\cosh(x)$ ).

Raccogliamo a secondo membro l'integrale cercato,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = (1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

Si è così determinato che

$$(1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = e^{\omega\pi/2}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = \frac{e^{\omega\pi/2}}{1 + e^{\omega\pi}}$$

(VI) Si vuole mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2}$$

Un trucco simile a quello del problema precedente: sfortunatamente, il cammino  $y = \pi i$  incontra il polo  $z = \pi i$ . Ma questo non è un problema: basta prendere un cammino semicircolare che lo aggiri e poi far tendere a zero il suo raggio. (Con il senno di lezioni successive, possiamo evitare questo, perché impareremo che un polo lungo il cammino contribuisce con metà residuo). Il residuo della funzione nel polo è  $-i \sinh a$ .

Dopo aver dimostrato che i contributi verticali tendono a zero, possiamo allora integrare lungo il rettangolo e ottenere

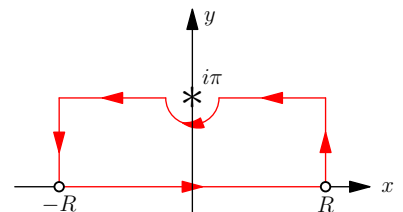
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x + \pi i)}{\sinh(x + \pi i)} dx = \pi \sinh a$$

$$(1 + \cosh a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax \sinh a}{\sinh x} dx = \pi \sinh a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \pi \frac{\sinh a}{1 + \cosh a\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh a}{(1 + \cosh a\pi)}$$

(anche se non sembra è quello che si voleva dimostrare).





(VII) Si vuole dimostrare che

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

La funzione integranda è singolare in  $-1$  e  $+1$  (figura a lato).  
 Passando alla multifunzione complessa

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+z)^2(1-z)}}$$

si vede che essa ha punti di diramazione in  $-1$  e  $1$ . Con riferimento alla figura a lato, sia

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} = 1 + r_2 e^{i\theta_2}$$

e scegliamo un ramo in cui

$$f(z) = r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} e^{-i(2/3)\theta_1} e^{-i(1/3)\theta_2}.$$

Osserviamo che un giro intorno ad entrambi i punti di diramazione non fa cambiare ramo (perché  $(2/3)(\theta_1 + 2\pi) + (1/3)(\theta_2 + 2\pi) = (2/3)\theta_1 + (1/3)\theta_2 + 2\pi$ ). Possiamo quindi scegliere come taglio il segmento tra  $-1$  e  $1$ , con  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$  e  $-\pi < \theta_2 \leq \pi$ . In questo ramo, nel limite da sopra a  $x \in (-1, 1)$ , si ha  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$  e quindi

$$f(x + i\epsilon) = r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} e^{-i\pi/3} = \frac{e^{-i\pi/3}}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Nel limite da sotto, si ha  $\theta_1 = 2\pi$  e  $\theta_2 = -\pi$  e quindi

$$f(x - i\epsilon) = e^{-i4\pi/3} e^{i\pi/3} r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} = e^{-i\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Possiamo allora integrare la funzione  $f(z)$  lungo il cammino  $L$  della figura 8.11, riportata qui a lato.

Osserviamo che, pur essendo la funzione singolare, non ci sono residui nei punti di diramazione: questo segue dal fatto generale che

$$\oint \frac{1}{z^p} dz$$

è nullo per  $p < 1$ . Infatti, per un cammino circolare di raggio  $\epsilon$

$$\oint \frac{1}{z^p} dz = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \epsilon^{-p} \epsilon e^{i\theta} d\theta \propto \epsilon^{1-p} \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

Essendo nulli gli integrali lungo i piccoli cerchi, si ha

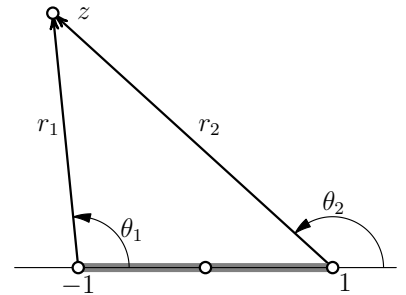
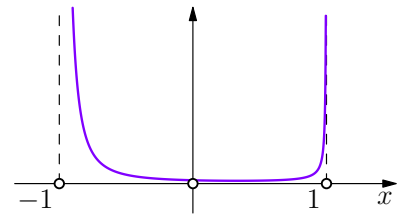
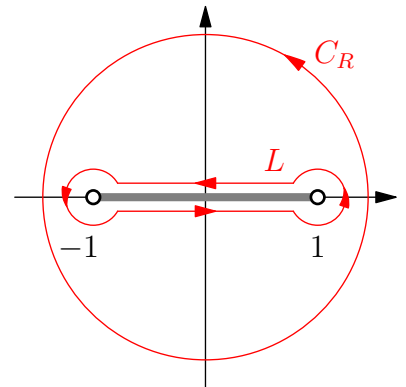


Figura S.4: Punti di diramazione e taglio.



**N. B.** Si tenga presente questo fatto anche per altri problemi.

$$\begin{aligned}\oint_L f(z)dz &= -e^{-i\pi/3}I + e^{-i\pi}I = e^{-i\pi}(-e^{i2\pi/3} + 1)I \\ &= (e^{i2\pi/3} - 1)I,\end{aligned}$$

(i segni sono dovuti all'orientazione di  $L$ : sopra il taglio, il cammino da 1 a  $-1$ , sotto il taglio, da  $-1$  a 1). Ne segue che

$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \oint_L f(z)dz.$$

Poiché non ci sono singolarità tra  $L$  e  $C_R$ , possiamo deformare il contorno d'integrazione da  $L$  a  $C_R$ , un cerchio di raggio  $R > 1$ , come mostrato in figura, e ottenere

$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \oint_{C_R} f(z)dz.$$

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla sezione 7.8,

$$I = (2\pi i) \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \operatorname{Res} \left[ 0, \frac{1}{w^2} f \left( \frac{1}{w} \right) \right].$$

Ma

$$\begin{aligned}\frac{1}{w^2} f \left( \frac{1}{w} \right) &= \frac{1}{w^2} \left( 1 + \frac{1}{w} \right)^{-2/3} \left( 1 - \frac{1}{w} \right)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w^2} w^{2/3} w^{1/3} (1+w)^{-2/3} (1-w)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w} (w+1)^{-2/3} (w-1)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{2}{3}w + \dots \right) (-1)^{-1/3} \left( 1 + \frac{1}{3}w + \dots \right)\end{aligned}$$

Poiché il coefficiente di  $1/w$  è  $(-1)^{-1/3}$ , questo è il residuo cercato. Dalla figura S.4,  $z - 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ , da cui  $(-1)^{-1/3} = e^{-i\pi/3}$  nel piano  $z$ . Nel piano  $w = 1/z$ , si avrà  $(-1)^{-1/3} = e^{i\pi/3}$ . Quindi

$$I = (2\pi i) \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} e^{i\pi/3} = \pi \frac{2i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

**S.8.3.** □

- (I)  $\pi/2$
- (II)  $2\pi/\sqrt{5}$
- (III)  $-4\pi/3$
- (IV)  $\pi/6$

**N. B.** Calcolare il residuo in un polo  $a$  significa *sempre* estrarre il coefficiente di  $1/(z-a)$ .

(V) Dal problema 8.2 (V), l'integrale richiesto è  $2\pi g(0) = 2\pi 1/2 = \pi$ .

(VI) Si consideri

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz,$$

dove  $C$  è il contorno della figura a lato.

L'integrando ha poli semplici in  $-1 \pm 2i$ , ma solo  $-1 + 2i$  è all'interno di  $C$ .

$$\text{Res} = \frac{(-1 + 2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1 + 2i) + 2} = (-1 + 2i) \frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i}.$$

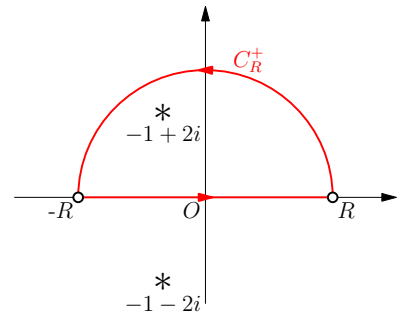
Allora

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = 2\pi i(-1 + 2i) \frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1 - 2i)e^{-2\pi}.$$

La funzione tende a zero per  $z$  che va all'infinito, quindi il contributo del semicerchio  $C_R^+$  è nullo nel limite  $R \rightarrow \infty$  e quindi

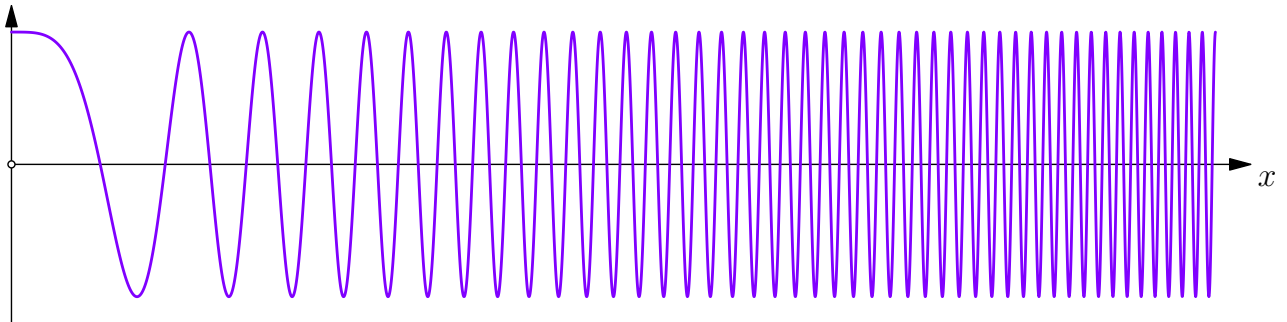
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

L'integrale richiesto è  $-\pi e^{-2\pi}$  e, come bonus, si è ottenuto anche il valore di un altro integrale.



**S.8.4.** □

(I) In un certo senso, c'è del miracoloso nel fatto che l'integrale di  $\cos(x^2)$  converga. Infatti,  $\cos(x^2)$ , il cui grafico è riportato sotto, non va a zero quando  $x$  va all'infinito.



Ci deve essere quindi essere un'esatta cancellazione tra parti positive e negative che produce un valore finito dell'area.

Un modo per valutare l'integrale di  $\cos(x^2)$  e di  $\sin(x^2)$  è di incominciare con la formula di Eulero,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx,$$

che è l'integrale della funzione complessa  $e^{iz^2}$  lungo l'asse reale positivo. Si tratta adesso di vedere se esistono modi di chiudere il cammino e usare il teorema dei residui. Consideriamo il contorno nel piano complesso illustrato nella figura a lato.

Questo contorno ha tre caratteristiche che lo rendono speciale. Primo, l'integrale lungo  $C_3$  è una fase che moltiplica l'integrale della gaussiana. Infatti, posto  $z = re^{i\pi/4}$  lungo questo cammino,

$$\begin{aligned}\int_{C_3} e^{iz^2} dz &= \int_{r=R}^0 e^{i(re^{i\pi/4})^2} d(re^{i\pi/4}) \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{i(r^2i)} dr \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr\end{aligned}$$

Quindi nel limite  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_3} e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Secondo, l'integrale di  $e^{iz^2}$  lungo  $C_2$ , l'arco di cerchio da  $R$  a  $Re^{i\pi/4}$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$ , è nullo. Infatti,  $z = Re^{i\pi/4}$  lungo questo cammino,

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{i\theta})^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{perché } \cos 2\theta > 0 \text{ per } 0 < \theta < \pi/4)\end{aligned}$$

Terzo, la funzione  $e^{iz^2}$  è analitica nella regione delimitata da  $C_1 + C_2 + C_3$ . Allora

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} = -\int_{C_3}$$

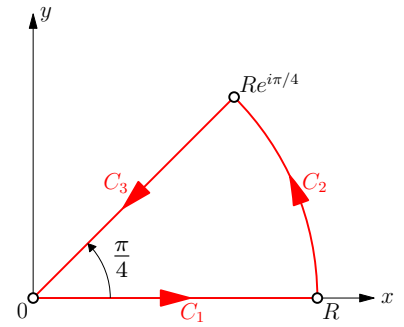
e quindi

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

equivalentemente,

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare.



**N. B.** L'integrale

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

è detto *integrale di Fresnel*. Si osservi che, procedendo in modo analogo a sopra, si perviene alla formula

$$\int_{-\infty}^\infty e^{iax^2} dx = e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^\infty e^{-ay^2} dy = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{(-ia)'}}$$

che può essere compresa come risultante dal cambiamento di variabili

$$x = e^{i\pi/4} y,$$

corrispondente ad una rotazione del contorno di  $\pi/4$ . Questo giustifica il passaggio da certi integrali reali che coinvolgono gaussiane, ad altri complessi, mediante la sostituzione  $a \rightarrow -ia$ .

(II) Si consideri

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz.$$

Poichè  $z = 0$  è un punto di diramazione, consideriamo il contorno  $C$  nella figura a lato. L'integrando ha un polo semplice in  $z = -1 = e^{i\pi}$ , il cui residuo è  $e^{i(p-1)\pi}$ . Quindi

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}$$

Gli integrali  $\oint_{C_2}$  e  $\oint_{C_4}$ , rispettivamente lungo cerchi di raggi  $\epsilon$  e  $R$  vanno a zero per  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $p$  tra 0 e 1) e  $R \rightarrow \infty$  (poichè  $p$  è strettamente tra 0 e 1). Detta  $z = x$  la variabile lungo  $C_1$ , la variabile lungo  $C_3$  sarà  $z = e^{2\pi i} x$ , dato che l'argomento di  $z$  cresce di  $2\pi$  dopo un giro completo. Allora, detto

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

l'integrale che si vuole calcolare, nel limite si ha

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = I - e^{2\pi i(p-1)} I = 2\pi i e^{i(p-1)\pi},$$

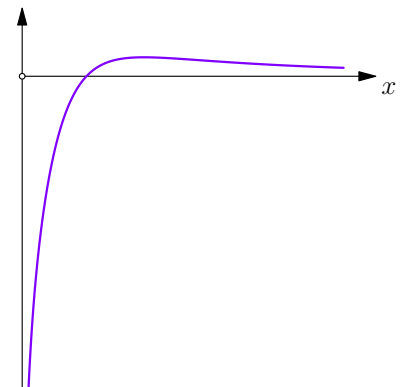
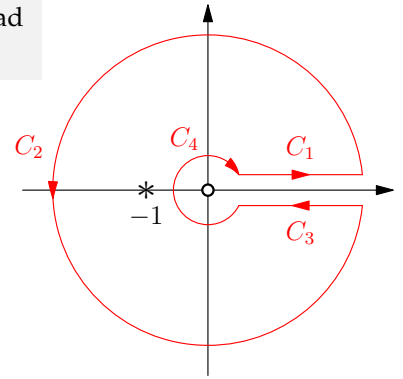
da cui

$$I = \frac{2\pi i e^{i(p-1)\pi}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{\pi}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

(III) Il grafico della funzione  $\ln x / (1 + x^2)$  è riportato a lato. Viene chiesto di mostrare che c'è esatta cancellazione tra contributo positivo e negativo all'area.

Un modo (un po' indiretto) di calcolare l'integrale è di considerare

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z)^2}{1+z^2} dz$$



per il percorso in figura a lato. La ragione è che l'integrazione lungo  $C_3$  coinvolge un  $(\text{Log}x + i2\pi)^2$ , da cui, sviluppando il quadrato si ottiene il termine  $\text{Log}$  che si vuole calcolare.

Più precisamente, dopo aver calcolato i residui in  $i$  e  $-i$ , che sono rispettivamente

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2i} \left(\frac{3i\pi}{2}\right)^2,$$

e aver valutato che gli integrali lungo il cerchio piccolo e quello grande non contribuiscono nei limiti  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , per l'integrale di contorno si ottiene

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z)^2}{1+z^2} dz = \int_0^\infty \frac{\text{Log}(x)^2}{1+x^2} dx - \int_0^\infty \frac{(\text{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi^3.$$

Ma

$$\int_0^\infty \frac{(\text{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{(\text{Log}x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{i2\pi \text{Log}x}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{-4\pi^2}{1+x^2} dx$$

Quindi,

$$-\int_0^\infty \frac{i2\pi \text{Log}x}{1+x^2} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi^3.$$

L'integrale reale vale  $\pi/2$ , quindi l'uguaglianza risulta verificata se la parte immaginaria a primo membro è nulla, cioè se

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log}x}{1+x^2} dx = 0$$

(IV) È tempo di fare mente locale sul seguente fatto:

Mente il logaritmo, come multifunzione, preserva la proprietà fondamentale del logaritmo reale

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$

la sua parte principale

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$$

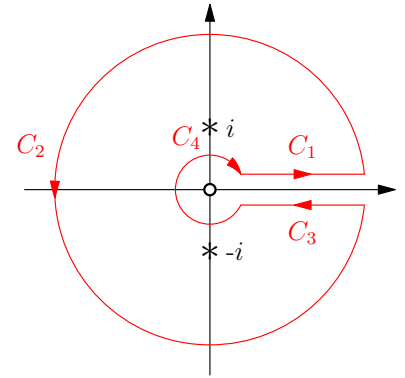
non gode in generale di questa proprietà,

$$\text{Log}(ab) \neq \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$$

( $a = -1$  e  $b = i$  fornisce un controesempio).

Tuttavia, si ha

$$\text{Log}(i-x) + \text{Log}(i+x) = \text{Log}(i^2 - x^2) = \text{Log}(x^2 + 1) + \pi i \tag{S.13}$$



Questa identità suggerisce di considerare l'integrale di contorno

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz$$

per il contorno  $C$  in figura a lato. Il residuo in  $i$  è

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} = \frac{\text{Log}(2i)}{2i}$$

e dunque

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{\text{Log}(2i)}{2i} = \pi \left[ \text{Log}2 + i \frac{\pi}{2} \right] = \pi \text{Log}2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

L'integrale su  $C_{R^+}$  tende a zero quando  $R$  va all'infinito. Quindi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \text{Log}2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

cambiando  $x$  in  $-x$  nel primo integrale, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \text{Log}2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

tenuto conto della (S.13),

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} + i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi \text{Log}2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

Poiché il secondo integrale a primo membro è pari a  $\pi/2$ , uguagliando parti reale e immaginaria della precedente equazione, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x^2+1)}{x^2+1} = \pi \text{Log}2$$

S.8.5. □

(I)

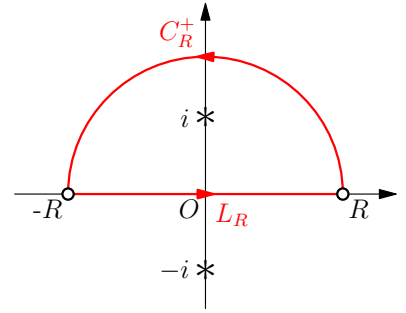
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} (t) = \sum \text{Res} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}$$

$s = -1$  polo semplice,

$$\text{Res} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$s = 2$ , polo doppio

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s-2)^2 \left[ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{st}}{s+1} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s+1)te^{st} - e^{st}}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \end{aligned}$$



Allora

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} (t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

(II) Dobbiamo calcolare

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

Si ha

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}.$$

La trasformata di Laplace inversa è la somma dei residui di

$$\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}$$

nei poli  $\pm i$  che sono ciascuno di ordine 2. Il residuo in  $s = i$  è

$$\lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \left[ (s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} \right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}.$$

Il residuo in  $s = -i$  è

$$\lim_{s \rightarrow -i} \frac{d}{ds} \left[ (s+i)^2 \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} \right] = -\frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it}.$$

(che si sarebbe potuto anche ottenere direttamente dal residuo in  $s = i$ , sostituendo  $i$  con  $-i$ ). Allora

$$\begin{aligned} \sum \text{Res} &= -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it} - \frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it} \\ &= \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

(III) Essendo  $s = 0$  un punto di diramazione, si può applicare la formula di inversione

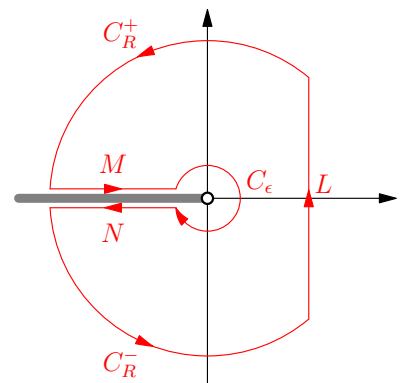
$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz,$$

a patto di usare il contorno della figura 8.12, che riportiamo a lato.

Si osservi che il taglio per la radice è tra  $-\infty$  e  $0$ : appena sopra il taglio, lungo  $M$ ,  $z = e^{i\pi}|x|$  e  $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$ ; appena sotto il taglio, lungo  $N$ ,  $z = e^{-i\pi}|x|$  e  $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$ .

Poiché la funzione è analitica all'interno del contorno, si ha

$$\oint_L = - \left[ \int_{C_R^+} + \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N + \int_{C_R^-} \right]$$





Nel limite  $R \rightarrow \infty$  i due integrali  $\int_{C_R^+}$  e  $\int_{C_R^-}$  danno contributo nullo. Valutiamo i tre integrali rimanenti, nel limite  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}\int_M \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= \int_0^0 \frac{e^{xe^{i\pi}-a(xe^{i\pi})^{1/2}}}{x} dx = - \int_\infty^0 \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx \\ \int_N \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= \int_0^0 \frac{e^{xe^{-i\pi}-a(xe^{-i\pi})^{1/2}}}{x} dx = \int_\infty^0 \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x} dx \\ \int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= i \int_\pi^{-\pi} e^{(\epsilon e^{i\theta})t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}} d\theta \rightarrow -2\pi i \text{ per } \epsilon \rightarrow 0\end{aligned}$$

Ne segue che

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L = \frac{-1}{2\pi i} \left[ \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N \right] = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx.$$

Poniamo

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx.$$

Mediante sostituzione  $x = u^2$ ,  $I$  diventa

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t} \sin au}{u} du.$$

Derivando rispetto a  $a$ , otteniamo

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos audu = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-a^2/4t} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}.$$

Quindi, usando la condizione  $I = 0$  per  $a = 0$ ,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/(2\sqrt{t})} e^{-u^2} du = \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right).$$

Allora

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) = \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$

## S.9

## S.9.1. □

Se  $\oint_C f(z)dz = 0$  indipendentemente da  $C$ , allora ne segue che

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

è indipendente dal percorso che unisce  $a$  e  $z$ , purché tale percorso si trovi tutto dentro la regione  $\mathcal{R}$  semplicemente connessa dove vale  $\oint_C f(z)dz = 0$ . Ma allora

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Quindi  $F(z)$  è analitica e  $F'(z) = f(z)$ . Poiché se una funzione è analitica lo sono anche le sue derivate (sezione 9.2), anche  $f(z)$  è analitica, che è quello che si voleva dimostrare.

## S.9.2. □

Consideriamo  $\oint_C F(z)dz$  per una qualunque curva semplice chiusa contenuta in  $\mathcal{R}$ . Poiché la serie che definisce  $F(z)$  è uniformemente convergente possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\oint_C F(z)dz = \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz = 0$$

perché le funzioni  $f_n$  sono analitiche. Per il teorema di Morera, concludiamo che  $F(z)$  è analitica, che è quanto si voleva dimostrare.

## S.9.3. □

Dalla (9.6) si ha

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Mediante cambiamento di variabili  $z - a = e^{it}$ , si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

che è quanto si voleva dimostrare.

## S.9.4. □

(a) Scomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3}.$$

Se  $|z| > 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+1} &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{1}{1+z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[ 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots \end{aligned}$$

Se  $|z| < 3$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{1+z/3} \right] = \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{z}{6 \times 3} + \frac{z^2}{6 \times 3^2} - \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots\end{aligned}$$

La serie di Laurent richiesta è dunque

$$\dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{6 \times 3} - \frac{z^2}{6 \times 3^2} + \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots$$

(b) Se  $|z| > 1$ , si ha, come prima

$$\frac{1/2}{z+1} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Naturalmente, questa serie vale, *a fortiori*, per  $|z| > 3$ . Per l'altro tratto semplice, per  $z > 3$  si ha Se  $|z| > 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{1}{1+3z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[ 1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} - \frac{3^3}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3^2}{2z^3} - \frac{3^3}{2z^4} + \dots\end{aligned}$$

Quindi, per sottrazione delle singole serie,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

(c) Sia  $z+1 = u$ . Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} \\ &= \frac{1}{2u} \left[ 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots\end{aligned}$$

valevole per  $|u| < 2$ , cioè  $0 < |z+1| < 2$ .

(d) Per  $|z| < 1$ , si ha la serie di Taylor ottenuta sottraendo dalla serie di Taylor per  $(1/2)/(z+1)$  quella per  $(1/2)/(z+3)$  già ottenuta al punto (a). Il risultato è

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

**S.9.5.** □ Osserviamo che

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + z^{32} \dots = z + \left[ 1 + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} \dots \right].$$

Allora

$$\begin{aligned} F(z) &= z + F(z^2) \\ F(z) &= z + z^2 + F(z^4) \\ F(z) &= z + z^2 + z^4 + F(z^8) \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Da queste relazioni risulta che i valori di  $z$  tali che  $z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, \dots$  sono tutti singolarità di  $F(z)$  in quanto  $F(1) = \infty$ . Ma queste singolarità riempiono densamente il cerchio unitario  $|z| = 1$  e impediscono il prolungamento analitico oltre di esso della funzione.

**S.9.6.**  $\square$

(i) Integrando per parti (trasformata di Laplace), si ottiene

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt = \frac{6}{z^4} \quad \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0$$

(ii) La funzione  $F_2(z) = 6/z^4$  è analitica ovunque eccetto in  $z = 0$  e coincide con  $F_1(z)$  per  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Quindi è il prolungamento analitico di  $F_1$ .

## S.11

S.11.1. □ Usiamo la convenzione ③

$$Ff(k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$$F^{-1}\widehat{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} dk$$

Allora

$$Ff(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{-iyx} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{iy(-x)} dy$$

$$= F^{-1}f(-x)$$

Quindi

$$F^2f = FF^{-1}f(-x) = f(-x)$$

S.11.2. □

(a)  $f$  pari significa  $f(-x) = f(x)$ . Se  $f$  è pari allora  $F^2f = f(-x) = f(x)$ . Se  $F^2f(x) = f(x)$  allora  $f(x) = f(-x)$ .

(b)  $f$  dispari significa  $f(-x) = -f(x)$ . Come prima,  $F^2f(x) = -f(x)$ .

(c)  $f = f_P + f_D$  (qualunque funzione è decomponibile nella somma di una funzione pari e una dispari). Allora

$$F^4f = F^4(f_P + f_D) = F^2(F^2f_P + F^2f_D) = F^2(f_P - f_D) = f_P + f_D = f$$

(d)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

(e)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{ikx} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

(f)

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx \\ &= \widehat{f}(-k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ikx} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx \\ &= -\widehat{f}(-k)\end{aligned}$$

S.11.3.  $\square$ 

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \left. \frac{e^{-ix}}{-ik} \right|_{-1}^1 = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{ik} = 2 \frac{\sin k}{k}$$

da cui ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin k}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}$$

S.11.4.  $\square$ 

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \xrightarrow{F} \quad \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$$

allora, per la relazione di reciprocità,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} \quad \xrightarrow{F} \quad \widehat{f}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

S.11.5.  $\square$   $k = 1$  è una discontinuità: regola dell' $1/2$  della somma di limite destro e sinistro (sezione 11.8).

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} (\cos kx + i \sin kx) dx \Big|_{k=1} &= \frac{1+0}{2} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{1}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

S.11.6. □ Si usi integrazione per parti e esercizio precedente:

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\omega^2}}_{\text{int}} \underbrace{\sin^2 \omega}_{\text{der}} d\omega = - \underbrace{\frac{\sin^2 \omega}{\omega}}_{=0} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

S.11.7. □ Già svolto con il calcolo dei residui:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

S.11.8. □ Dall'esercizio precedente segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2a}{a^2 + k^2} e^{ikx} dk = e^{-a|x|}$$

ovvero

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk, \quad x > 0$$

che è quanto si chiedeva di dimostrare.

S.11.9. □

In primo luogo si osservi che

$$\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2}.$$

Questo integrale può essere calcolato con i metodi dell'analisi complessa oppure essere ottenuto come conseguenza del fatto che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ponendo  $x = 0$  si ottiene

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin k}{k} = 1$$

da cui segue il risultato desiderato. Adesso si effettui nell'integrale il cambiamento di variabili  $xt = u$  e si osservi che, per  $x > 0$ ,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = 1$$

e per  $x < 0$ ,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = -1$$

che è quanto si voleva dimostrare.

S.11.10. □

(I) ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{1 - ik}{\sqrt{2\pi}(1 + k^2)}$$

(II) ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi k^2}$$

S.11.11. □

(a) ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi k^2}$$

(b) Vedere esercizio precedente.

S.11.12. □

(I) Esercizio svolto col metodo dei residui (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}$$

Dunque, con la convenzione ③

$$\widehat{f}(k) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

(II)

$$g(x) = \frac{a-ix}{a^2+x^2} = \frac{a-ix}{(a+ix)(a-ix)} = \frac{1}{a+ix} = \frac{-i}{x-ia}$$

$$F\left(\frac{1}{a+ix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ie^{-ikx}}{x-ia} dx$$

Metodo dei residui: polo semplice in  $x = ia$ . Per  $k > 0$ , chiusura nel semipiano inferiore,

$$F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Per  $k < 0$ , chiusura nel semipiano superiore,

$$\widehat{g}(k) = F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi i)(-i)e^{ak} = \sqrt{2\pi} e^{ak}$$

Quindi

$$\frac{a-ix}{a^2+x^2} \xrightarrow{F} \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{ak} & \text{se } k < 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Per  $k = 0$ , regola dell'1/2:

$$\widehat{g}(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(III)



(IV) Integrale di Fourier della gaussiana (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Completare i quadrati

$$e^{-2x^2+2x} = e^{-2(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}} = e^{-2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

e usare la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier.

(V) Simile.

(VI) Si derivi membro a membro rispetto a  $k$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

Allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2k}{4}\right) e^{-\frac{k^2}{4}},$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2\sqrt{2}} k e^{-\frac{k^2}{4}}$$

(VII) Come nell'esercizio precedente, usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

(VIII)

$$(1 - ik) e^{-\left(\frac{k^2}{2} + ik\right)}$$

**S.11.13.** □

Con la convenzione ③, risulta comodo definire il prodotto di convoluzione nel come

$$f \star g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

(l'esercizio è inteso con questa convenzione).

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(ax - au) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i(ax-au)} - e^{-i(ax-au)}}{2i} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[ e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iax} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iax} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[ e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iax} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iax} du \right] \quad (f \text{ è pari}) \\ &= \sin ax \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iax} du \end{aligned}$$

S.11.14. □ Richiamiamo il dizionario di traduzione:

$$\begin{aligned}
 Y(x) &\xrightarrow{F} \hat{Y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) e^{-ikx} dx \\
 \frac{d}{dx} Y(x) &\xrightarrow{F} ik\hat{Y}(k) && (D \rightarrow iQ) \\
 \frac{d^2}{dx^2} Y(x) &\xrightarrow{F} -k^2\hat{Y}(k) && (D^2 \rightarrow -Q^2) \\
 xY(x) &\xrightarrow{F} i\frac{d}{dk}\hat{Y}(k) && (Q \rightarrow iD) \\
 \hat{Y}(k) &\xrightarrow{F^{-1}} Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}(k) e^{ikx} dk
 \end{aligned}$$

Dunque

$$Y''(x) + Y'(x) + xY(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad -k^2\hat{Y} + ik\hat{Y} + i\frac{d}{dk}\hat{Y} = 0$$

Occorre quindi risolvere la ODE

$$\frac{d\hat{Y}}{dk} = -(ik^2 + k)\hat{Y}$$

Questa equazione è del prim'ordine e le variabili sono separabili, per cui

$$\int \frac{d\hat{Y}}{\hat{Y}} = - \int (ik^2 + k) dk$$

e

$$\log \hat{Y} = -i\frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \log C$$

e

$$\hat{Y}(k) = Ce^{-i(k^3/3) - (k^2/2)}$$

da cui

$$Y(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-i(k^3/3) - (k^2/2)} dk$$

Possiamo esprimere questa risposta in termini di quantità reali usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso e ponendo per brevità  $A = C\sqrt{2/\pi}$ . Dopo aver osservato che l'integrale con il seno si annulla (perchè?) si arriva a

$$Y(x) = A \int_0^{\infty} \cos\left(kx - \frac{k^3}{3}\right) e^{-k^2/2} dk.$$

Era stata chiesta la soluzione generale dell'equazione. Poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine, la soluzione deve dipendere da due costanti arbitrarie, ma noi ne abbiamo trovata una sola. Evidentemente, il metodo della trasformata di Fourier non permette di vedere una soluzione. In effetti le cose stanno proprio

così: esiste un'altra soluzione, linearmente indipendente da quella trovata, che non ha trasformata di Fourier. Passando alle trasformate di Fourier, abbiamo perso questa soluzione.

Dopo aver studiato la trasformata di Laplace si ritorni a questo problema e lo si risolva usando il metodo della trasformata di Laplace. Si stabilisca se in questo modo si trova la soluzione mancante.

**S.11.15.** □ Passando alla trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a^2+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|k|}$$

Quindi

$$\widehat{f}(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2}$$

Poiché

$$e^{-A|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{A^2+x^2}$$

si avrà che

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2} \implies \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a/2}{(a/2)^2+x^2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\pi}} \frac{2a}{a^2+4x^2} = f(x)$$

**S.11.16.** □

Analogo al precedente.

**S.11.17.** □ Analogamente agli esercizi precedenti, si perviene ad un'equazione algebrica nello spazio delle trasformate di Fourier:

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

dove  $\widehat{g}(k)$  è la trasformata di Fourier di

$$g(x) = \frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)}$$

Risolviamo l'equazione algebrica

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0.$$

Si ha

$$\widehat{f}(k) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}}{2\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right]$$

Calcoliamo

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)} e^{-ikx} dx$$

usando il metodo dei residui.

L'integrale

$$I = \frac{1}{\pi} \oint \frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} e^{-ikz} dz$$

soddisfa le condizioni del lemma di Jordan. Chiudiamo nel semipiano inferiore  $\Pi^-$ , per  $k > 0$ , e nel semipiano superiore  $\Pi^+$ , per  $k < 0$ . La funzione integranda ha 4 poli semplici in  $a = \pm i$  e  $a = \pm 2i$ , infatti

$$\frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)}$$

Il calcolo risulta più veloce se ricordiamo l'esercizio 11 degli esercizi di riepilogo dopo la lezione 7:

$$\text{Res}(a) = \left. \frac{f(z)}{h'(z)} \right|_{z=a} = \left. \frac{(4z^2 + 10)e^{-ikz}}{4z^3 + 10z} \right|_{z=a} = \left. \frac{e^{-ikz}}{z} \right|_{z=a} = \frac{e^{-ika}}{a}$$

Allora, per  $k > 0$  (ricordarsi che la chiusura di sotto cambia il verso antiorario in orario) si ha

$$I = -\frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[ \frac{e^{-ik(-i)}}{-i} + \frac{e^{-ik(-2i)}}{-2i} \right] = 2e^{-k} + e^{-2k}$$

e per  $k < 0$ ,

$$I = \frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[ \frac{e^{-ik(i)}}{i} + \frac{e^{-ik(2i)}}{2i} \right] = 2e^k + e^{2k}$$

Ne segue che

$$I = 2e^{-|k|} + e^{-2|k|}$$

da cui

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})$$

Sostituiamo in  $\widehat{f}(k)$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{(1 + e^{-|k|})^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm (1 + e^{-|k|}) \right] \end{aligned}$$

Otteniamo così due soluzioni dell'equazione:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|k|} \\ \widehat{f}_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2 - e^{-|k|})\end{aligned}$$

La soluzione 2 tuttavia non è accettabile perché non tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$  e quindi l'anti-trasformata di  $\widehat{f}_2(k)$  non è definita come una funzione ordinaria (lo sarebbe, eventualmente, nel senso delle funzioni generalizzate).

In conclusione, la sola soluzione accettabile dell'equazione integrale corrisponde a  $\widehat{f}_1(k)$ . Poiché

$$e^{-|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

la soluzione cercata è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

**S.11.18.**  $\square$

L'integrale in

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y} dy = \frac{1}{1+x^2}$$

non appare come una convoluzione perché è solo da 0 a  $+\infty$  invece di essere da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Tuttavia possiamo sostituire il limite inferiore di integrazione con  $-\infty$  se sostituiamo  $e^{-y}$  con una funzione  $g(t)$  che è uguale a  $e^{-y}$  quando  $y$  è positiva e è zero quando  $y$  è negativa. Con questa sostituzione

$$\rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy = \frac{1}{1+x^2}$$

Passando alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy &= \frac{1}{1+x^2} \\ \Downarrow \\ \widehat{\rho}(k) + \sqrt{2\pi}\widehat{\rho}(k)\widehat{g}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}\end{aligned}$$

L'equazione è facilmente risolta se calcoliamo  $\widehat{g}$ :

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y(1+ik)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+ik}\end{aligned}$$

Quindi

$$\left[1 + \frac{1}{1+ik}\right] \hat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

da cui

$$\hat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|}$$

Trasformando indietro

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|} e^{ikx} dk \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cos xk + \cos(xk-k) + k \sin xk}{2 + 2 \cos k + 2k \sin k + k^2} dk \end{aligned}$$

**S.11.19.** □

Trasformiamo l'equazione secondo Fourier:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) + f(x+1) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &\downarrow \\ [ik + 1 + e^{-ik}] \hat{f}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \end{aligned}$$

da cui

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{(ik + 1 + e^{-ik})}$$

e quindi  $f(x) \dots$

## S.14

S.14.1. □

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

1.

$$\frac{2a^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$$

2.

$$\frac{s}{s^2 - 1}, \quad s > 1$$

3.

$$\frac{2}{s(4 + s^2)}$$

4.

$$\frac{1}{s^2 + 4}$$

5.

$$\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}, \quad s > 1$$

6.

$$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

S.14.2. □

1.

$$ae^{-bt}$$

2.

$$2 \cosh 3x - \frac{5}{3} \sinh 3x$$

3.

$$\frac{1}{2} (1 - e^{-2t})$$

4.

$$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

5.

$$\Theta(x - 3) + \Theta(x - 1)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaviside.

6.

$$\frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at})$$

**S.14.3.** □

Il lato sinistro dell'equazione è la convoluzione di  $t^3$  e  $Y(t)$ . Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione, a primo membro si ha il prodotto delle trasformate e l'equazione diventa

$$\tilde{Y}(s) \frac{3!}{s^4} = \tilde{f}(s) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s)$$

La moltiplicazione per  $s^4$  è associata ad una derivata quarta rispetto al tempo. Infatti, sappiamo che se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

da cui

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\tilde{f}(s) - f'(0) = s(s\tilde{f}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

che è la regola per la derivata seconda. Nello stesso modo si ottiene

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\tilde{f}(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} = s^4\tilde{f}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$$

⋮

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Ritornando al nostro problema, abbiamo dunque

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s) = \frac{1}{6} \left[ \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} + s^3f(0) + s^2f'(0) + sf''(0) + f'''(0) \right]$$

Notiamo che dall'equazione

$$\int_0^t (t-u)^3 Y(u) du = f(t)$$

segue che  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Quindi,

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\}$$

ovvero

$$Y(t) = \frac{1}{6} f^{(4)}(t)$$

Il metodo funziona se  $f$  è derivabile fino al quarto ordine, che è dunque la condizione richiesta.

**S.14.4.** □ Questo problema può essere risolto in maniera analoga a come è stato risolto il problema di conduzione del calore nella sezione 8.7, esempio 8.5.

Prendiamo la trasformata di Laplace rispetto al tempo di ambo i membri della

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad x > 0, \quad t > 0,$$



posto

$$\tilde{f}(s, x) \equiv \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-st} dt,$$

e assumendo che nel corso del tempo la soluzione si mantenga limitata, si ottiene

$$s^2 \tilde{f}(x, s) - sf(x, 0) - \partial_t f(x, 0) = c^2 \tilde{f}''(x, s)$$

dove  $\tilde{f}''$  è la derivata seconda rispetto a  $x$ . Poiché le condizioni iniziali  $f(x, 0)$  e  $\partial_t f(x, 0)$  sono entrambe nulle, l'equazione per  $\tilde{f}$  diventa

$$\tilde{f}'' - \frac{s^2}{c^2} \tilde{f} = 0$$

Questa è un'equazione alle derivate ordinarie rispetto a  $x$  ( $s$  è da considerarsi un parametro), la cui soluzione generale è

$$c_1 e^{(s/c)x} + c_2 e^{-(s/c)x},$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti arbitrarie tali che, per essere determinate, sono richieste due condizioni. Una condizione è che la soluzione si mantenga limitata nel tempo, il che si traduce in  $c_1 = 0$ . Allora

$$\tilde{f}(x, s) = c_2 e^{-(s/c)x}$$

L'altra condizione è che per  $x = 0$ ,  $f(0, t) = g(t) = \cos^2 t$ . Si denoti con  $\tilde{g}(s)$  la sua trasformata di Laplace. Allora

$$\tilde{f}(0, s) = c_2 = \tilde{g}(s),$$

dunque,

$$\tilde{f}(x, s) = \tilde{g}(s) e^{-(s/c)x}.$$

Per la seconda proprietà della traslazione della sezione 14.3: se  $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$  allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} \tilde{g}(s)\} = \begin{cases} g(t-a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}.$$

Ne segue che

$$f(x, t) = \begin{cases} \cos^2(t - \frac{x}{c}) & \text{se } t > x/c \\ 0 & \text{se } 0 < t < x/c \end{cases}$$

vale a dire,

$$u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \cos^2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaveside.

Fisicamente, questo significa che un punto  $x$  della corda resta in quiete fino all'istante  $t = x/c$  e, a partire da questo istante, compie uno spostamento identico a quello dell'estremità  $x = 0$ , ma in ritardo

di un intervallo di tempo uguale a  $x/c$ . La costante  $c$  è la velocità a cui viaggia l'onda. Questo comportamento è in completo accordo con la propagazione causale delle onde che abbiamo messo in evidenza nel capitolo 12.

## S.16

S.16.1. □

Si ha

$$\widehat{\Theta}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1/(in\pi) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

S.16.2. □ Elementare, dall'esercizio precedente.

S.16.3. □

Si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx \\ &= \frac{e^{(a-in)x}}{2\pi(a-in)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= (-1)^n \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= \frac{(-1)^n (a+in) \sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)} \end{aligned}$$

S.16.4. □

Integrando membro a membro la serie di Fourier di  $x$ , si ottiene

$$\frac{1}{2}x^2 \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \text{costante}$$

La costante è determinata dall'essere (sempre) la media della funzione

$$\text{costante} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

S.16.5. □

La serie di Fourier

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

non converge a  $x$ , piuttosto alla sua estensione periodica  $\tilde{f}(x)$ , che ha una discontinuità a salto nei multipli dispari di  $\pi$ . Per essere derivabile, la funzione deve essere almeno continua. Se poi ha derivata prima continua è di certo derivabile.

NOTA. Si può tuttavia assegnare un'interpretazione alla serie derivata. Si può dimostrare che  $\tilde{f}'(x)$  non è uguale alla funzione 1, ma una funzione delta concentrata ad ogni discontinuità di salto:

$$\tilde{f}'(x) = 1 - 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[x - (2n+1)\pi]$$

## S.17

S.17.1.  $\square$ 

Risposte:

1. Spazio vettoriale complesso.
2. Spazio vettoriale reale.
3. Non è uno spazio vettoriale.
4. Spazio vettoriale reale.

S.17.2.  $\square$ 

Assumere che i numeri sono differenti e mostrare che questo porta ad una contraddizione. La parola chiave è "linearmente indipendenti".

S.17.3.  $\square$ 

Usare l'uguaglianza  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$ . Si consideri  $\mathbf{u} = (1, 1)$  e  $\mathbf{v} = (i, i)$ .

## S.18

S.18.1. □

Risposte:

1. 0.
2. 2/3.
3. 8/3
4.  $\sqrt{14}$

S.18.2. □

La proiezione ortogonale del vettore  $f$  lungo  $f_i$  è il vettore

$$\frac{|f_i\rangle\langle f_i|}{\langle f_i|f_i\rangle}|f\rangle = |f_i\rangle\frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|^2} = \frac{|f_i\rangle}{\|f_i\|}\frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|}$$

e valore numerico della proiezione è

$$c_i = \frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|}.$$

Si ha  $c_1 = \sqrt{\pi/2}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = \sqrt{\pi/2}$ .

S.18.3. □

No, perché  $|x| = x$  su  $[0, 1]$ .

S.18.4. □

$$\alpha > -1/2$$

S.18.5. □

$$\alpha < -1/2$$

S.18.6. □

Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  in  $(0, 1]$ S.18.7. □ Talla trigonometria elementare:  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ S.18.8. □ Usare il fatto che per ogni polinomio  $P$ ,  $P(x)e^{-x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ .

S.18.9. □ Risposte:

(i) 1

(ii) 1

(iii) 0

S.18.10. □ Risposta:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -2/\pi$ ,  $c_3 = -1/\pi$ .S.18.11. □ Risposta:  $a_0 = \pi/2$ ,  $a_1 = -4/\pi$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ .S.18.12. □  $a_n = 1/n$ . Convergenza  $L^2$ .

## S.19

S.19.1. □ Il PC è

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x & 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

1° METODO. Risolviamo il problema per separazione delle variabili  $u = X(x)T(t)$ . Allora

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 T = 0 \end{array} \right.$$

la cui soluzione è

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t}.$$

La condizione al contorno  $u(0, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

quindi  $a_\lambda = 0$ . La condizione al contorno  $u(\pi, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(\pi, t) = b_\lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

che ha soluzione non banale per

$$\sin(\lambda\pi) = 0$$

$$\lambda = \lambda_n = n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione:

$$u_n(x, t) = b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione generale è una sovrapposizione di queste. Guardiamo il dato iniziale: dalla trigonometria elementare (problema 18.7):  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ . Dunque nel dato iniziale ci sono solo i modi  $n = 1$  con peso  $3/4$  e il modo  $n = 3$  con peso  $-1/4$ . Quindi la soluzione del problema al contorno è

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-t} \sin x - \frac{1}{4} e^{-9t} \sin 3x$$

2° METODO. È un problema di Dirichlet su un intervallo limitato che può essere risolto per estensione dispari a  $[-\pi, 0]$  del dato iniziale. La soluzione è quindi della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx,$$

che, inserita nell'equazione  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  fornisce

$$\frac{db_n}{dt} = -n^2 b_n(t),$$

da cui

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-n^2 t}.$$

Poiché  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ , i coefficienti  $b_n(0)$  sono tutti nulli eccetto  $b_1$  e  $b_3$ . Quindi

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-t} \sin x - \frac{1}{4} e^{-9t} \sin 3x$$

3° METODO. Questo metodo è per chi non ha seguito le lezioni di teoria sui problemi al contorno, ma ha dimestichezza con il metodo della trasformata di Laplace per risolvere equazioni.

Prendiamo la trasformata di Laplace dell'equazione,

$$s\tilde{u}(s, x) - u_0(x) = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$$

dove  $u_0(x) = u(x, 0)$ , e riscriviamo l'equazione ordinaria così ottenuta nella sua forma standard

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - s\tilde{u}(s, x) = -u_0(x).$$

Consideriamo  $u_0$  più generale del dato iniziale di questo problema, per stabilire le caratteristiche generali del metodo della trasformata di Laplace per problemi di Dirichlet, sia:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

La soluzione generale della precedente equazione, che è lineare e non omogenea, è la somma dell'omogenea associata e di un integrale particolare. La soluzione dell'omogenea è

$$c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

Per trovare una soluzione particolare, poniamo  $\tilde{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$ . Allora, sostituendo nell'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 - s)\beta_n \sin nx = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Quindi  $\beta_n = b_n/(s + n^2)$ . Allora una soluzione particolare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

e la soluzione generale dell'equazione è dunque

$$\tilde{u}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

Prendiamo la trasformata di Laplace delle condizioni al contorno che dipendono da  $t$

$$\tilde{u}(s, 0) = \int_0^{\infty} u(0, t) e^{-st} dt = 0$$

$$\tilde{u}(s, \pi) = \int_0^{\infty} u(\pi, t) e^{-st} dt = 0$$

Queste condizioni forniscono

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{s}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\pi} = 0$$

Quindi deve essere  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ . La soluzione è allora

$$\tilde{u}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

Prendendo l'antistrasformata di Laplace (ricordando che l'antistrasformata di  $1/(s - a)$  è  $e^{at}$ ) si ottiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} b_n \sin nx$$

che coincide con la soluzione precedentemente trovata con gli altri metodi (tenuto conto che i coefficienti  $b_n$  sono tutti nulli eccetto  $b_1$ , che vale  $3/4$ , e  $b_3$ , che vale  $-1/4$ ).

**S.19.2.** □ Il PC è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

Risolviamo il problema per separazione delle variabili  $u = X(x)T(t)$ .

Come nel precedente problema, arriviamo a

$$u_{\lambda}(x, t) = (a_{\lambda} \cos \lambda x + b_{\lambda} \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 D t}.$$



Come prima, la condizione al contorno  $u(0, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica  $a_\lambda = 0$ . La condizione al contorno  $\partial_x u(3, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$\partial_x u_\lambda(x, t)|_{x=3} = \lambda b_\lambda \cos(3\lambda) e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

che ha soluzione non banale per

$$\cos(3\lambda) = 0$$

cioè per

$$3\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ovvero

$$\lambda = \lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione:

$$u_n(x, t) = b_n \sin(n\pi x) e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t / 36}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione generale è una sovrapposizione di queste. Il dato iniziale contiene solo i modi  $n = 1$  e  $n = 2$ . Quindi

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t / 4} \sin \frac{\pi x}{2} - e^{-25\pi^2 t / 36} \sin \frac{5\pi x}{6}$$

S.19.3.  $\square$

$$u(x, y) = \left( \sinh \frac{3\pi}{2} \right)^{-1} \sin \frac{3\pi}{2} x \sinh \frac{3\pi}{2} y$$

S.19.4.  $\square$

La funzione nella condizione iniziale è mostrata in figura a lato.

Applichiamo alla PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

il metodo di soluzione basato su trasformata di Fourier  $F$  rispetto alla variabile  $x$  (usiamo la convenzione  $\textcircled{3}$  per  $F$ ). Otteniamo, a primo membro,

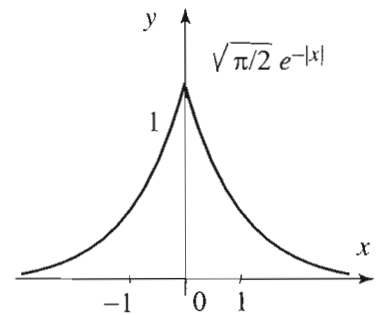
$$F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) = F \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = ik \frac{d}{dt} \hat{u}(k, t)$$

A secondo membro

$$F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

Dunque,

$$ik \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad \Rightarrow \quad \text{ODE: } \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = ik \hat{u}(k, t)$$



La soluzione della ODE con dato iniziale  $\hat{u}(k, 0)$  è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0)e^{ikt}$$

dove

$$\hat{u}(k, 0) = F\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1-ik)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ik)} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{-1}{1-ik} e^{-x} e^{ikx} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \frac{-1}{1+ik} e^{-x} e^{-ikx} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+ik+1-ik}{1+k^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+k^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{1+k^2} e^{ikt}$$

Allora

$$u(x, t) = F^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2} e^{ikt}\right).$$

Detta  $f(x)$  la  $F^{-1}$  di  $\frac{1}{1+k^2}$ , per la proprietà che una modulazione diventa una traslazione (attenzione al segno!), la soluzione sarà

$$f(x+t)$$

Ma  $f(x)$  è chiaramente  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ , visto che abbiamo appena mostrato che la trasformata di Fourier di questa funzione è  $1/(1+k^2)$ . Dunque, la soluzione è

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x+t|}$$

**S.19.5.**  $\square$

**METODO 1.** Ci si ricorda la soluzione generale dell'equazione delle onde in una dimensione, per cui senza fare un calcolo si scrive

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [a(x+t) + a(x-t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right] \end{aligned}$$

METODO 2. Si usa il metodo della trasformata di Fourier:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} = -k^2 \hat{u}$$

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(kt) + B(k) \sin kt$$

dato iniziale implica  $B = 0$  e

$$\hat{u} = \hat{u}(k, 0) \cos(kt)$$

dove

$$\hat{u}(k, 0) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

per l'esercizio precedente (e la relazione di reciprocità).

Quindi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(kt) e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x+t)} dk + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x-t)} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right] \end{aligned}$$

S.19.6. □

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} &= -\frac{1}{4} k^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-k^2 t/4} \\ \hat{u}(k, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \\ \hat{u}(k, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} e^{-k^2 t/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2(1+t)/4} \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2(1+t)/4} e^{ikx} dk \quad (a = (1+t)/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{(1+t)/4}} e^{-x^2/[4(1+t)/4]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+t}} e^{-\frac{x^2}{1+t}} \end{aligned}$$

S.19.7. □ Stesso procedimento del penultimo problema. Risultato:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \cos(ckt) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin(x+ct)}{x+ct} + \frac{\sin(x-ct)}{x-ct} \right] \end{aligned}$$

**S.19.8.** □

Stesso procedimento degli esercizi precedenti. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x+Kt)} \widehat{f}(k) dk$$

**S.19.9.** □

Idem. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iak^3 t} e^{ikx} \widehat{f}(k) dk$$

**S.19.10.** □

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -atk^2 \widehat{u} \quad \widehat{u}(k, 0) = \widehat{f}(k)$$

Risolvendo la ODE, si trova

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-at^2 k^2 / 2}$$

$$F^{-1} \left[ e^{-at^2 k^2 / 2} \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 k^2 / 2} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{at^2}} e^{-x^2 / (2at^2)}$$

Quindi

$$u(x, t) = f \star \frac{1}{\sqrt{at^2}} e^{-x^2 / (2at^2)} = \frac{1}{t\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (2at^2)} f(y) dy$$

(si faccia attenzione al fattore  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  della convoluzione quando si usa la convenzione ③ per  $F$ ).**S.19.11.** □

Stesso procedimento dell'esercizio precedente. Risultato:

$$u(x, t) = f \star g_t(x)$$

dove

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}} e^{-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}}$$

**S.19.12.** □ Discende dalla soluzione come convoluzione del nucleo del calore con la condizione iniziale.**S.19.13.** □

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(k) e^{-Dk^2 t} \sin(kx) dk$$

dove

$$\widehat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad k > 0$$