

1

Geometria e aritmetica complessa

1.1 Introduzione storica

Non sono state le equazioni quadratiche $ax^2 + bx + c = 0$, la cui formula risolutiva è nota sin dall'antichità,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a portare ai numeri complessi. Il valore negativo del discriminante $b^2 - 4ac$ non fu mai considerato come il segnale dell'esistenza di un nuovo tipo di numeri, per i quali $\sqrt{-1}$ ha senso. Fu invece sempre interpretato come un'indicazione che la parabola $y = ax^2$ e la retta $y = -bx - c$ non hanno punti di intersezione. Occorre tenere presente che fino all'800, si son sempre cercate le soluzioni reali o positive delle equazioni algebriche.

In effetti, furono le equazioni cubiche a portare ai numeri complessi. In breve, la storia è la seguente. Girolamo Cardano, basandosi sui lavori di Niccolò Tartaglia e Scipione Del Ferro, pubblica nel suo *Ars Magna* (1545) la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (1.1)$$

per l'equazione di terzo grado¹

$$x^3 = 3px + 2q$$

La formula (1.1) non era nota nell'antichità.² Pochi decenni dopo, Raffaele Bombelli si rese conto che c'era qualcosa di strano e paradossale riguardo a questa formula.

Bombelli considerò l'equazione $x^3 = 15x + 4$, per cui la formula di Cardano fornisce

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{2 - 11i},$$

(con la notazione moderna $i \equiv \sqrt{-1}$ introdotta da Leonard Euler circa duecento anni dopo Bombelli). Ma Bombelli sapeva che $x = 4$



Girolamo Cardano (1501–1576?) è stato un matematico italiano. Parte della soluzione dell'equazione cubica, che pubblicò nella sua opera *Ars Magna* gli era stata comunicata da Tartaglia. Cardano sostenne di averne pubblicato il testo solo quando era venuto a sapere che Tartaglia avrebbe appreso la soluzione da Scipione Del Ferro.

¹ Esercizio: Mostrare che ogni equazione cubica può essere sempre ridotta a questa forma.

² A questo proposito, citiamo un passo di Richard Feynman: "... lo sviluppo di più grande importanza per la matematica in Europa fu la scoperta di Tartaglia che si può risolvere un'equazione cubica: sebbene di poco uso in sé stessa, questa scoperta deve essere stata meravigliosa da un punto di vista psicologico. Aiutò molto nel Rinascimento a liberarsi dall'intimidazione da parte degli antichi. [What Do you Care What Other People Think?]"

è soluzione dell'equazione. Come metter d'accordo questo con la formula di Cardano?

La congettura arida di Bombelli fu che $\sqrt[3]{2+11i} = 2+ni$ e $\sqrt[3]{2-11i} = 2-ni$, dove n è un numero da determinarsi. Se fosse così, $x = 4$ sarebbe conseguenza della formula di Cardano. Ma quali devono essere le regole algebriche di manipolazione per "numeri" del tipo $A = a + i\tilde{a}$, in modo che sia davvero così? Queste:

- (1) $A + B = (a + i\tilde{a}) + (b + i\tilde{b}) = (a + b) + i(\tilde{a} + \tilde{b})$.
- (2) $AB = (a + i\tilde{a})(b + i\tilde{b}) = ab + i(\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{a}b) + i^2\tilde{a}\tilde{b} = (ab - \tilde{a}\tilde{b}) + i(\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{a}b)$.
(avendo usato $i^2 = -1$). Se si utilizzano queste regole si può mostrare facilmente che $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ (esercizio).

L'importanza del lavoro di Bombelli fu questa: fece maturare la consapevolezza che problemi, formulati completamente nell'ambito dei numeri reali e di cui si cercavano soluzioni reali, per essere risolti richiedevano comunque un'aritmetica complessa come strumento di calcolo, un'aritmetica basata sulle regole algebriche (1) e (2). Ciò nonostante, questa nuova aritmetica rimase abbastanza misteriosa fino a che, con Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, non si diede una rappresentazione geometrica nei numeri complessi come punti del piano \mathbb{R}^2 per i quali le operazioni di somma e prodotto hanno un chiaro significato geometrico. Si vedano le figure 1.1 e 1.2.

La figura 1.2 mostra che la somma di due numeri complessi A e B è data dall'usuale regola del parallelogramma per la somma dei vettori corrispondenti. Dalla regola algebrica (2), si dimostra facilmente (esercizio) che il prodotto AB è il numero complesso che forma un angolo con l'asse reale pari alla somma degli angoli di A e B e la cui lunghezza è il prodotto delle lunghezze di A e B .

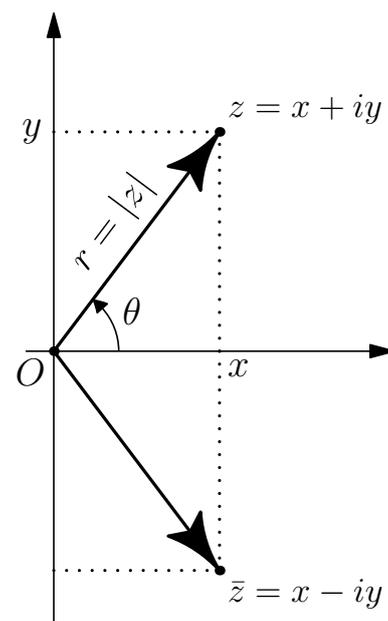
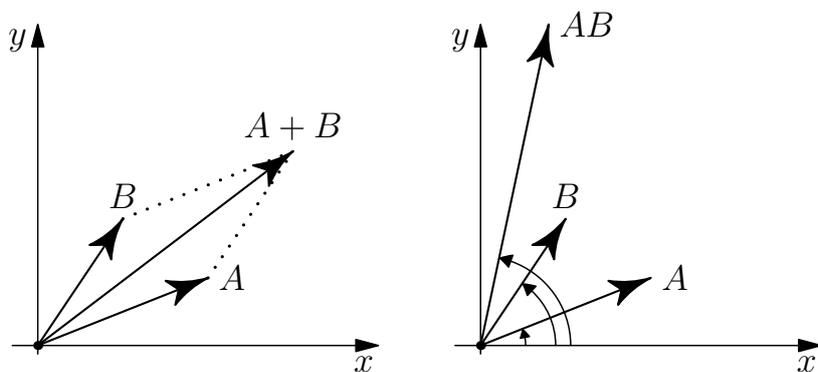


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Figura 1.2: Somma e prodotto di numeri complessi, visti come vettori nel piano \mathbb{R}^2 .

1.2 Terminologia, notazioni e pratica

Con riferimento alla figura 1.1, terminologia e notazioni per i numeri complessi sono riassunte dalla seguente tavola:

Nome	Significato	Notazione
modulo di z	lunghezza r di z	$ z $
argomento (o fase) di z	angolo θ di z	$\arg(z)$
parte reale di z	coordinata x di z	$\operatorname{Re}(z)$
parte immaginaria di z	coordinata y di z	$\operatorname{Im}(z)$
numero immaginario	multiplo reale di i	
asse reale	insieme dei numeri reali	
asse immaginario	insieme dei numeri immaginari	
piano complesso	insieme dei numeri complessi	\mathbb{C}
complesso coniugato di z	riflessione di z rispetto all'asse reale	\bar{z}

Si osservi dalla figura 1.1 che il numero complesso $z = x + iy$ può essere anche rappresentato in termini delle sue coordinate polari r e θ . Per esprimere questo simbolicamente, scriviamo

$$z = r\angle\theta,$$

dove il simbolo \angle serve a ricordare che θ è l'angolo di z (con l'asse reale). Nella rappresentazione polare, la regola del prodotto risulta particolarmente semplice:

$$(r\angle\theta)(R\angle\phi) = rR\angle(\theta + \phi).$$

Prima di continuare, si raccomanda vivamente una certa pratica con le nozioni elementari sui numeri complessi. Ci si convinca, ad esempio, della validità dei seguenti fatti, con ragionamenti sia algebrici sia geometrici:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad r\angle\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Definito $(1/z)$ come quel numero complesso tale che $(1/z)z = 1$, ne segue che

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\angle\theta} = \frac{1}{r}\angle(-\theta).$$

Ecco altre formule su cui fare pratica:

$$\frac{R\angle\phi}{r\angle\theta} = \frac{R}{r}\angle(\phi - \theta) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + i)^4 = -4 \quad (1 + i)^{13} = -2^6(1 + i) \quad (1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

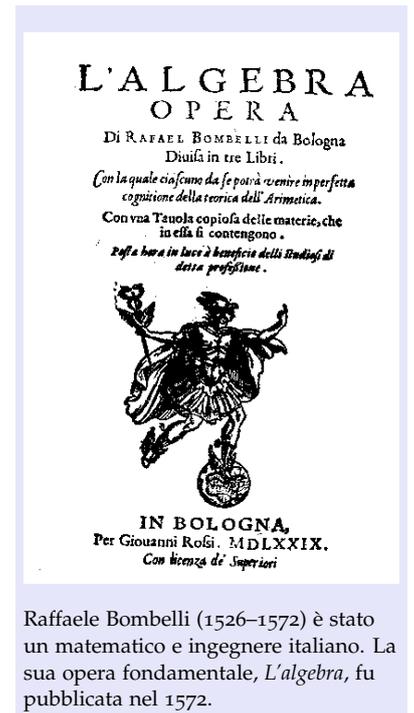
$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^2} = -4i \quad \frac{(1 + i)^5}{(\sqrt{3} + i)^2} = -\sqrt{2}\angle(-\pi/12) \quad \overline{r\angle\theta} = r\angle(-\theta)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

Infine, la disuguaglianza triangolare generalizzata:

$$|z_1 + z^2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

Esercizio: quando si ha uguaglianza?



Raffaele Bombelli (1526–1572) è stato un matematico e ingegnere italiano. La sua opera fondamentale, *L'algebra*, fu pubblicata nel 1572.

1.3 Traslazioni e rotazioni

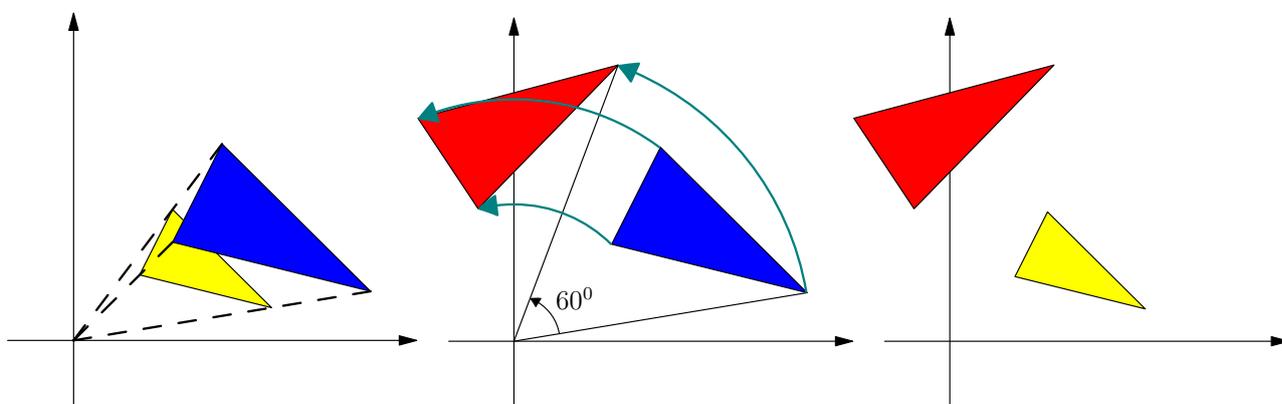
Una traslazione del piano complesso è data dalla trasformazione

$$z \mapsto z + b, \quad (1.2)$$

dove b è un numero complesso. Per ogni complesso a , la trasformazione

$$z \mapsto az \quad (1.3)$$

rappresenta uno "stiramento" del piano complesso di un fattore $|a|$ (compressione o espansione a seconda se $|a| < 1$ o $|a| > 1$), combinata con una rotazione del piano di un angolo pari ad $\arg(a)$ (si osservi che sia la dilazione sia la rotazione sono centrate nell'origine). Questa trasformazione può essere raffigurata nel modo seguente:



Abbiamo scelto $a = 1.5\angle(60^\circ)$. Consideriamo l'azione della (1.3) su un triangolo. La prima figura a destra rappresenta la dilatazione (con fattore di scala 1.5), rispetto all'origine, che trasforma il triangolo di partenza giallo nel triangolo blu. La figura nel centro rappresenta la rotazione di 60° di quest'ultimo, sempre rispetto all'origine. Il triangolo rosso è l'effetto finale della trasformazione, come mostrato nell'ultima figura a sinistra. Si osservi che dilatazioni e rotazioni commutano: avremmo potuto prima ruotare e poi dilatare e saremmo comunque arrivati allo stesso risultato. E la ragione è chiara: il prodotto tra numeri complessi ha l'usuale proprietà commutativa del prodotto tra numeri.

1.4 La formula di Eulero

Una delle formule più importanti dell'algebra complessa è la formula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.4)$$

scoperta da Eulero intorno al 1740. Con questa formula la moltiplicazione dei numeri complessi diventa ovvia. Da essa si ha infatti $z = r\angle\theta = re^{i\theta}$, da cui, usando le proprietà dell'esponenziale

$$(re^{i\theta})(Re^{i\phi}) = rRe^{i(\theta+\phi)}$$

Per spiegare la formula di Eulero, occorre in primo luogo domandarsi: *che cosa il simbolo "e^{iθ}" significa?* Per capire questa domanda, occorre aver chiaro che le regole dell'algebra (somma e prodotto di numeri complessi) non ci dicono nulla su che cosa si debba intendere con il simbolo "e^{iθ}". In conseguenza di ciò, l'approccio moderno è di considerare la (1.4) una *definizione* di "e^{iθ}". Da un punto di vista logico, questo modo di procedere è ineccepibile. Ma, da un punto di vista semantico, ne risulta una carenza nella *comprensione* della formula. Comprendere la formula, significa capirne il senso e in che modo può essere *giustificata* (non dimostrata!). Dopo tutto, la (1.4) fu per Eulero una *scoperta* e non semplicemente una definizione!

Una prima giustificazione si basa sul noto sviluppo di Taylor dell'esponenziale reale,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se congetturiamo che questa formula continui a valere per immaginari puri e sostituiamo $x = i\theta$, otteniamo

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

Se adesso usiamo le proprietà algebriche dell'elevazione a potenza dell'unità immaginaria $i^2 = -1$, $i^3 = i \times i^2 = -i$, $i^4 = i \times i^3 = 1$, $i^5 = i \times i^4 = i$, ... e raggruppiamo i termini nello sviluppo di Taylor, otteniamo

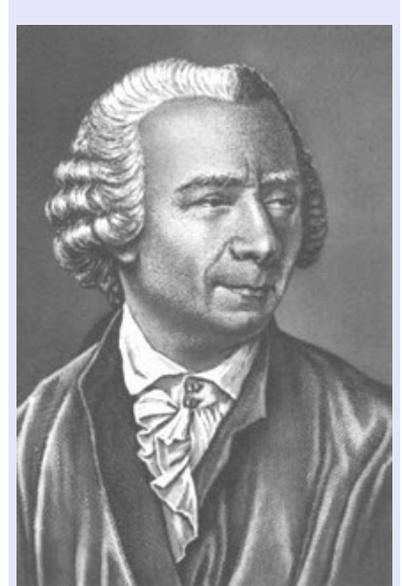
$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right).$$

Riconosciamo la prima parentesi come lo sviluppo in serie del coseno e la seconda come quella del seno. Quindi,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

C'è un'altra giustificazione della formula, che è particolarmente interessante perché basata su un ragionamento cinematico: si assuma che $Z = Z(t) = e^{it}$ descriva l'orbita di un punto nel piano, con condizione iniziale $Z_0 = Z(0) = 1$. Allora la velocità del punto è $V = ie^{it} = iZ$. Questo significa che Z soddisfa l'equazione

$$\frac{dZ}{dt} = iZ. \tag{1.5}$$



Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero (1707-1783), è stato un matematico e fisico svizzero. È noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi ed ha fornito contributi cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

Per quanto visto nella sezione precedente, la moltiplicazione per i equivale ad una rotazione antioraria di 90° , il che vuol dire che la velocità del punto è pari al raggio vettore del punto ruotato di 90° . Tenuto conto della posizione iniziale, la velocità iniziale è allora $V_0 = i$. C'è un solo movimento che ha queste caratteristiche: *il moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria*. Questo fatto è illustrato dalla figura 1.3. La legge oraria dell'orbita è dunque

$$Z(t) = \cos t + i \sin t$$

e la formula di Eulero risulta così giustificata.

ESERCIZIO 1.1. *Convincerli di quanto riprodotto in figura 1.3, risolvendo numericamente la (1.5) con l'algoritmo di Eulero che, in linguaggio moderno, è espresso dal seguente pseudo-codice:*

```
define V(Z)= I*Z
input t0=0 and Z0=1
input step size, h and the number of steps, n
for j from 1 to n do
V0 = I
Z1 = Z0 + h*V0
t1 = t0 + h
Print t1 and Z1
t0 = t1
Z0 = Z1
end
```

1.5 Operazioni vettoriali

La seguente definizione

$$a \bullet b = \bar{a}b. \quad (1.6)$$

fornisce una buona nozione di prodotto scalare tra numeri complessi che si riduce all'usuale quadrato del modulo quando $a = b$ (e quindi alla norma usuale per i numeri complessi). Si osservi l'invarianza del prodotto scalare (1.6) per rotazioni: $u = e^{i\theta}$ produce una rotazione di un angolo θ attorno all'origine, e quindi

$$(ua) \bullet (ub) = \overline{ua}(ub) = \bar{u}\bar{a}ub = \bar{u}\bar{a}ub = (\bar{u}u)\bar{a}b = \bar{a}b = a \bullet b.$$

È interessante osservare che il prodotto scalare complesso contiene informazione sia sul prodotto scalare reale sia sul prodotto vettore dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} associati ai numeri complessi a e b . Si ha infatti

$$a \bullet b = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.7)$$

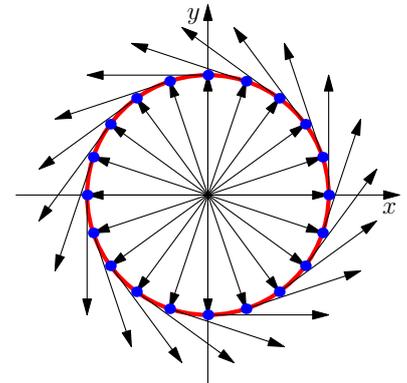


Figura 1.3: Formula di Eulero e moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria.

Notare che a differenza dell'usuale prodotto scalare reale, $a \bullet b \neq b \bullet a$. Si ha infatti, $b \bullet a = \bar{b}a = \overline{a \bullet b}$. Il prodotto scalare complesso è l'esempio più semplice di forma hermitiana o sesquilineare. Si veda la sezione. 2.4.

dove $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ qui denota il numero reale che rappresenta l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori (la sua direzione è ortogonale al piano, si veda la figura 1.4).

ESERCIZIO 1.2. Dimostrare la (1.7).

1.6 Funzioni complesse come trasformazioni

Nella sezione 1.3 abbiamo incontrato le funzioni lineari $z \mapsto az + b$. Come abbiamo visto, possono essere interpretate come trasformazioni del piano complesso (traslazioni, rotazioni e stiramenti). Subito dopo, in ordine di difficoltà, c'è la funzione quadratica $z \mapsto z^2$, illustrata nella figura 1.5 e poi l'elevazione ad una potenza intera e positiva,

$$z \mapsto w = z^n. \tag{1.8}$$

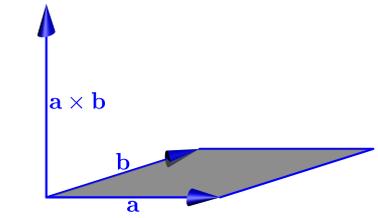
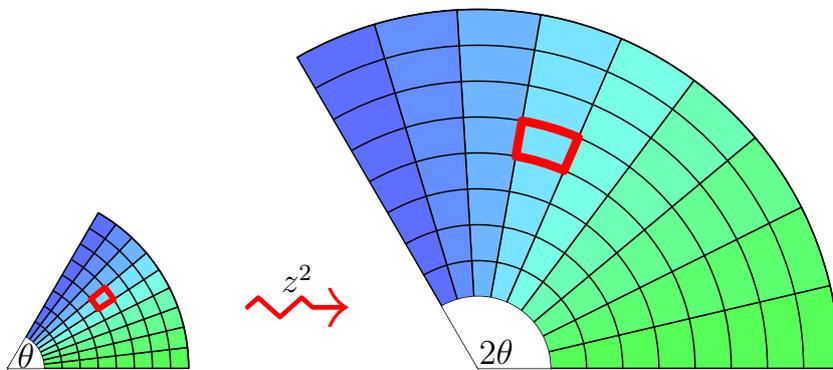


Figura 1.4: Il prodotto vettore è l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori ed è nella direzione ortogonale al piano.

Figura 1.5: Illustrazione del tipo di trasformazione operato dalla funzione $z \mapsto w = z^n$, nel caso particolare di $n = 2$. Il fatto che un quadratino piccolo mantenga la forma di un quadratino, come mostrato in figura, appare, al momento solo una curiosità. In verità, è un fatto molto importante che, come vedremo nel seguito, è la caratteristica saliente delle *funzioni analitiche*.

Scrivendo $z = re^{i\theta}$, la (1.8) diventa $w = r^n e^{in\theta}$, per cui l'effetto della trasformazione è di elevare all' n -esima potenza la distanza e di moltiplicare per n l'angolo. La figura 1.5 intende rendere vivido questo fatto, mostrando l'effetto della trasformazione su alcuni raggi e archi centrati nell'origine (per $n = 2$).

Passiamo adesso ad un fatto elementare di algebra complessa che può essere compreso in maniera semplice dal punto di vista delle funzioni complesse come trasformazioni del piano in sé stesso. Il fatto è il seguente:

Le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$ sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1.

(1.9)

Preliminarmente, osserviamo che se $w = f(z) = z^n$, allora le soluzioni di $z^n = 1$ sono i punti del piano- z che sono trasformati

da f nel punto $w = 1$ del piano- w . Se consideriamo una particella che si muove lungo il cerchio unitario nel piano- z , poiché $1^n = 1$ anche la particella immagine nel piano- w si muoverà lungo il cerchio unitario $|w| = 1$, ma con una velocità angolare che è n volte quella della particella nel piano- z (in quanto, sul cerchio unitario, $w = e^{in\theta}$). La (1.9) segue da questa semplice osservazione, come illustrato in figura 1.6 per $n = 3$.

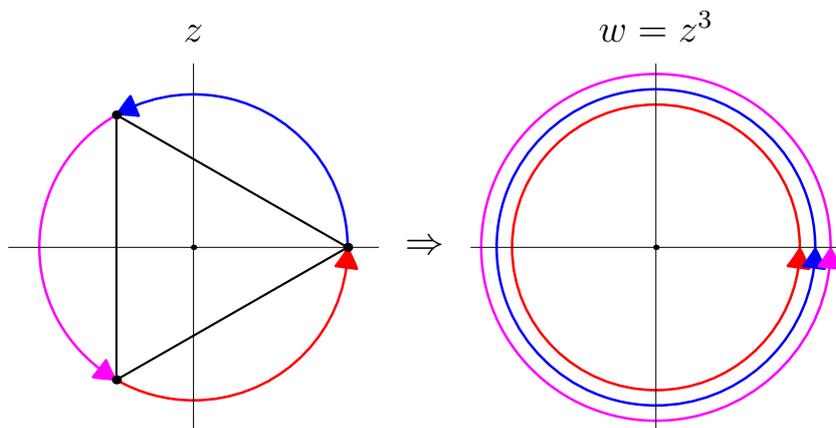


Figura 1.6: Poiché la particella nel piano- w ha una velocità 3 volte maggiore, quando essa compie un angolo giro, la particella z ha solo percorso $1/3$ della circonferenza (arco blu); quando la particella nel piano- z percorre il successivo $1/3$ di circonferenza (arco magenta), la particella nel piano- w ha fatto un altro giro completo, e lo stesso accade nell'ultimo tratto (arco rosso). I tre punti terminali dei tre archi formano un triangolo equilatero. Il ragionamento si estende ad un n qualunque. Risulta così dimostrato che le soluzioni di $z^n = 1$ sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1.

1.7 Polinomi

Concludiamo con qualche osservazione sui polinomi. Sia

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n,$$

dove $c_k, k = 0, 1, \dots, n$ sono costanti complesse. Il teorema fondamentale dell'algebra stabilisce che:

Ogni equazione algebrica $P_n(z) \equiv c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n = 0$, $c_n \neq 0$, possiede almeno una radice.

(1.10)

Si osservi che dalla (1.10) segue che $P_n(z)$ ha n radici (magari alcune coincidenti). Infatti, se z_1 è la radice di $P_n(z)$ la cui esistenza è garantita dal teorema, allora $P_n(z)$ fattorizza nel prodotto di $(z - z_1)$ per un polinomio $P_{n-1}(z)$ di grado $n - 1$. Applicando il teorema a $P_{n-1}(z)$ e iterando la procedura, si conclude che esistono numeri complessi z_1, \dots, z_n , eventualmente coincidenti,³ che (posto $c_n = 1$, senza perdita di generalità) forniscono la fattorizzazione completa del polinomio,

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \tag{1.11}$$



Évariste Galois (1811–1832) è stato un matematico francese. Giovanissimo, determinò un metodo generale per scoprire se un'equazione è risolvibile o meno con operazioni quali somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione di potenza ed estrazione di radice.

³ Ma non esiste un algoritmo generale per determinarli, quando $n > 4$, come dimostrò Galois.

1.8 Visualizzazione delle funzioni complesse

È difficile visualizzare una funzione da un piano ad un piano. Un modo è quello che abbiamo già usato: data la funzione $w = f(z)$, fare un disegno di come certe figure nel piano- z si trasformano nel piano- w , come, ad esempio, i triangoli che nella sezione 1.3 abbiamo usato per visualizzare $z \mapsto az$, o i raggi e archi centrati nell'origine che abbiamo usato in figura 1.5 per mostrare l'effetto della trasformazione $z \mapsto z^2$.

Un secondo modo, è quello di fare un grafico del modulo della funzione $f(z)$, come nella figura sotto per $f(z) = z^2$. La superficie così ottenuta è detta *superficie modulare* di $f(z)$. Naturalmente, rappresentando una funzione con la sua superficie modulare si perde informazione sulla sua fase.

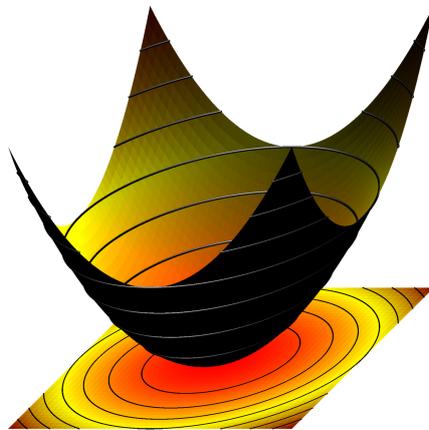


Figura 1.7: Superficie modulare di $w = z^2$. In figura sono mostrate le curve di livello e la loro proiezione sul piano complesso. Colori uguali nel piano, caratterizzano numeri z che hanno la stessa distanza dal centro.

Un terzo modo, consiste nel disegnare le curve di livello della parte reale $u = \text{Re}(w)$ e della parte immaginaria $v = \text{Im}(w)$ di $w = f(z) = u + iv$. Posto $z = x + iy$, u e v sono funzioni reali delle variabili x e y ,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Ad esempio, per $w = z^2$ si ha

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

e quindi

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Le curve di livello di queste due funzioni sono mostrate in figura 1.8. Questo modo di visualizzare una funzione complessa è molto utile perché ci mostra quali regioni del piano- z si trasformano nei rettangoli della "griglia cartesiana" del piano- w , come mostrato in figura 1.9.

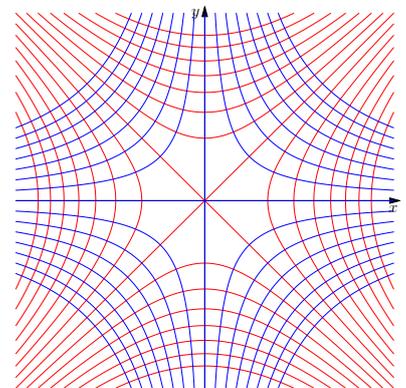


Figura 1.8: Curve di livello $u(x, y) = \text{cost.}$ (in rosso) e $v(x, y) = \text{cost.}$ (in blu) di $w = u + iv = (x + iy)^2$.

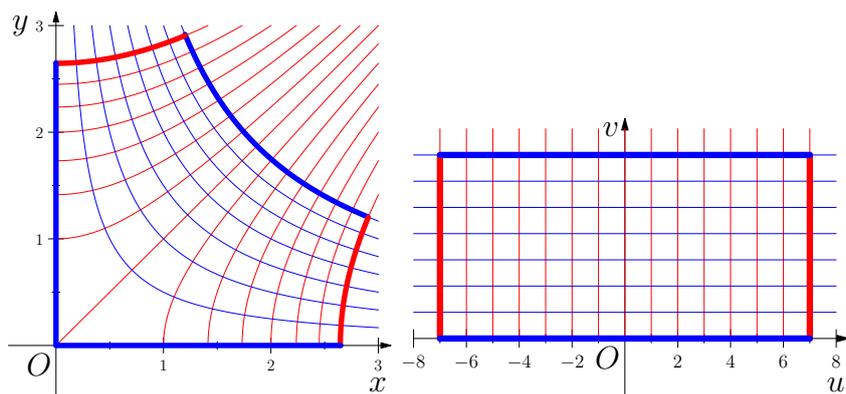


Figura 1.9: La regione del piano (xy) , racchiusa dalle linee rosse e blu in grassetto (a sinistra) è trasformata da $w = z^2$ nel rettangolo col bordo rosso e blu in grassetto (a destra).

Le figure che si ottengono sono esteticamente piacevoli, come, ad esempio, in figura 1.10. Ma ciò che è rilevante da un punto di vista matematico è che sia in figura 1.8 sia in figura 1.10 le curve di livello delle u e delle v sono ortogonali. Questo ha fatto implicazioni molto importanti, che approfondiremo nel seguito.

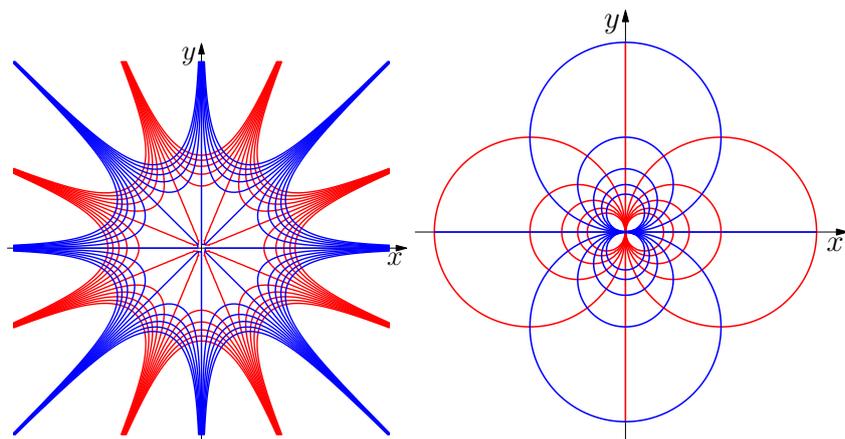


Figura 1.10: A sinistra: curve di livello per $w = z^4$ A destra: curve di livello per $1/z$. (In entrambe le figure, $u = \text{cost.}$, in rosso e $v = \text{cost.}$, in blu).

Infine, c'è un quarto modo per visualizzare le funzione complesse, in termini di opportuni campi vettoriali ad esse associati. Questo è il modo più efficace e più interessante. E anche di questo ci occuperemo, e molto in dettaglio, nel seguito.