

## 2

# Successioni e serie

### 2.1 Successioni e serie infinite

Il limite di una successione di numeri reali  $s_1, s_2, s_3, \dots$  è, intuitivamente, quell'unico numero  $s$  (se esiste) a cui i numeri della successione si avvicinano arbitrariamente. Più precisamente, si dice che la successione di numeri reali  $\{s_n\}$  converge al numero reale  $s$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , il che significa, come è ben noto dalle prime lezioni di ANALISI, che per ogni numero reale  $\epsilon > 0$ , piccolo a piacere, esiste un numero intero  $N$  tale che, per tutti gli  $m > N$ , si ha  $|s - s_m| < \epsilon$ . Nel seguito, per brevità di scrittura, scriveremo  $s_n \rightarrow s$  per denotare il limite di  $s_n$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Chiarita la nozione di limite di una successione, passiamo alla nozione di somma infinita o serie infinita di numeri reali o, semplicemente, serie. Supponiamo di voler dare un senso alla somma che compare nell'analisi del paradosso di Achille e la tartaruga

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Si costruisca la successione di somme parziali

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3} \\ &\dots\dots \\ s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

La serie infinita o somma infinita  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  risulta definita come limite della successione  $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$  delle somme parziali<sup>1</sup>. Nel caso

<sup>1</sup> Si osservi che è convenzionale far partire la serie da zero o da uno; nel seguito, per comodità, faremo sempre partire le serie da zero.

considerato, la successione è

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$$

e, come si vede facilmente, il limite di questa successione è il numero 1. Infatti, dato un qualunque  $\epsilon > 0$ , si prenda  $N$  tale che  $1/2^N < \epsilon$ ; in questo modo si avrà che per tutti gli  $m > N$

$$|1 - s_m| = \frac{1}{2^m} < \epsilon.$$

In generale, l'espressione formale

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

è detta serie o somma infinita. Quando la successione delle somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , converge, la serie infinita è detta *convergente*, quando non lo è, è detta *divergente*.

Quanto detto poc'anzi, grosso modo, è tutto quello che c'è da dire sulla nozione di serie infinita in quanto tale. (Quasi) tutto il resto della trattazione dell'argomento riguarda lo sviluppo di criteri che ci permettano di stabilire se una data serie è convergente oppure no. Nel far questo, risulterà utile introdurre alcune distinzioni riguardanti la nozione di serie convergente e, al contempo, estendere la nozione di serie ad ambienti più generali dell'insieme dei numeri reali—ambienti che, al pari dei numeri reali, hanno buone proprietà di completezza metrica.

CONCLUDIAMO questa sezione con una sottolineatura (per il momento del tutto marginale). È importante aver chiaro che, per quanto la definizione di somma infinita data sopra appaia molto naturale, è pur sempre una definizione: non è l'unica possibile, né l'unica rilevante in analisi e in matematica applicata. Ad esempio, la nozione di somma infinita di Cesàro, che è il limite, quando esiste, delle *medie aritmetiche* delle somme parziali,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n + 1}$$

svolge un ruolo altrettanto importante, ad esempio nella teoria delle serie di Fourier e nella fisica matematica dei processi diffusivi. Si osservi che quando si cambia la nozione di sommabilità, una serie che prima era divergente può diventare convergente. Ad esempio,  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  è divergente secondo la definizione usuale, ma è sommabile secondo Cesàro.

**ESERCIZIO 2.1.** Qual è la somma di Cesàro della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ?



Ernesto Cesàro (1859–1906) è stato un matematico italiano. Ha dato importanti contributi alla geometria differenziale e alla teoria delle serie infinite.

## 2.2 Condizioni fondamentali per le serie convergenti

Incominciamo con la definizione ovvia di *errore*

$$E_n = |s - s_n|$$

della serie convergente  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  con somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Si vede facilmente che la convergenza a zero dell'errore,

$$E_n \rightarrow 0,$$

è *condizione necessaria per la convergenza della serie*: infatti, se  $s_n \rightarrow s$  allora

$$E_n = |s - s_n| \rightarrow |s - s| = 0.$$

La sufficienza della condizione è immediata: se esiste un reale  $s$  tale che  $|s - s_n| \rightarrow 0$ , questo significa che per  $n$  sufficientemente grande si ha  $|s - s_n| < \epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$ , che è proprio la condizione di esistenza del limite  $s_n \rightarrow s$ .

2.  $u_n \rightarrow 0$  è *condizione necessaria per la convergenza della serie*. Il che si vede subito considerando che  $u_n = s_n - s_{n-1}$ : se la serie converge ad  $s$ , allora  $s_n$  e  $s_{n-1}$  convergono ad  $s$  per  $n \rightarrow \infty$ , da cui segue che  $u_n$  deve convergere a 0 per  $n \rightarrow \infty$ .

La condizione  $u_n \rightarrow 0$  è necessaria, *ma non sufficiente*, come si vede facilmente con il contro-esempio della serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Il termine  $n$ -esimo di questa serie tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ , ma la serie diverge. Infatti, si raggruppino i termini della serie nel seguente modo

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \dots$$

Ogni parentesi è maggiore di  $1/2$  perché contiene  $2^{n-1}$  termini tutti maggiori di  $1/2^n$ . Quindi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

e poiché la serie a destra ovviamente diverge anche quella sinistra deve divergere.

3. *Criterio generale di convergenza di Cauchy*: Condizione necessaria e sufficiente perché una serie sia convergente è che, dato un qualunque  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere, esista un intero  $N$  tale che per ogni  $n > N$  si abbia

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon.$$

IL VANTAGGIO DEL CRITERIO DI CAUCHY è che in esso non non figura il limite della successione, cioè il criterio di convergenza dipende soltanto dai termini della successione delle somme parziali. Non ci si dovrebbe mai stancare di mettere in risalto l'importanza del criterio di Cauchy, non solo per la sua importanza per successioni convergenti di numeri reali, ma anche perché esso fornisce una robusta nozione di convergenza per successioni di punti appartenenti a spazi più generali della retta reale. Ritorniamo su questa nozione di convergenza più avanti, dopo avere esteso quanto detto finora a spazi più generali e, in particolare, al piano complesso.

Per il momento, vediamo di capire perché il criterio di Cauchy fornisce una condizione necessaria per la convergenza di una serie. Se la successione  $\{s_n\}$  converge a  $s$ , allora esiste un  $N$  tale che  $|s - s_n| < \epsilon$  per  $n > N$  e quindi, a maggior ragione, varrà la disuguaglianza  $|s - s_{n+p}| < \epsilon$ . Sommando membro a membro queste due disuguaglianze si ha

$$|s - s_n| + |s - s_{n+p}| < 2\epsilon.$$

D'altro canto,

$$|s_n - s_{n+p}| = |(s - s_n) + (s_{n+p} - s)| \leq |s - s_n| + |s_{n+p} - s| < 2\epsilon$$

e così la condizione di Cauchy risulta dimostrata. Si osservi che il fattore due è inessenziale: avremmo potuto incominciare il ragionamento scrivendo  $|s - s_n| < \epsilon/2$  oppure si potrebbe mettere un 2 nel criterio di Cauchy e scrivere fin dall'inizio

$$|s_{n+p} - s_n| < 2\epsilon.$$

Per varie ragioni, preferisco questo secondo modo.

Per capire la sufficienza del criterio di Cauchy, dimentichiamoci per un momento delle serie e concentriamoci sulla nozione di successione di Cauchy in quanto tale: *una successione  $\{x_n\}$  è detta di Cauchy se  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$  per tutti gli  $n$  dopo un certo  $N$ ,  $p > 0$ , qualunque sia  $\epsilon$  arbitrariamente scelto.* Detto in breve, una successione è di Cauchy se i suoi elementi diventano arbitrariamente vicini man mano che la successione progredisce. Si veda la figura 2.1.

Il fatto che una successione di Cauchy converga è al cuore dell'analisi reale, proprio perché i numeri reali possono essere costruiti completando i razionali con successioni di Cauchy di razionali. Se si sceglie questa strada per caratterizzare i reali, la convergenza delle successioni di Cauchy è tautologica e si stabilisce così che i reali formano uno *spazio completo*, il che significa: uno spazio in cui tutte le



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) è stato un matematico e ingegnere francese che ha avviato il progetto della formulazione rigorosa dei teoremi dell'analisi infinitesimale basato sull'utilizzo delle nozioni di limite e di continuità e ha dato importanti contributi alla teoria delle equazioni differenziali. È il padre della teoria delle funzioni di variabile complessa.

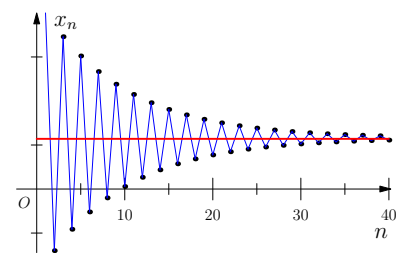


Figura 2.1: Grafico di una successione di Cauchy  $\{x_n\}$ . Se lo spazio che contiene la successione di Cauchy è completo, il punto d'arrivo della successione, cioè il limite della successione, esiste.

successioni di Cauchy convergono. (Questa nozione di completezza, basata sulle successioni di Cauchy, è fondamentale per la caratterizzazione di spazi più generali della retta reale, ad esempio gli spazi di Banach o gli spazi di Hilbert.) Alternativamente, partendo dall'assioma di Dedekind, detto anche assioma di continuità oppure assioma di completezza (che afferma che ogni insieme di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore) e utilizzando il teorema Bolzano-Weierstrass (secondo cui ogni successione di numeri reali limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente) si stabilisce la completezza dei numeri reali — ogni successione di Cauchy di numeri reali converge ad un numero reale.

Ritorniamo adesso alle serie e alla sufficienza del criterio di Cauchy. Se la successione delle somme parziali è di Cauchy allora converge ad un numero  $s$ , che è proprio la somma della serie. Concludiamo questa sezione con un esempio.

**ESEMPIO 2.1** (La serie geometrica). Si dice geometrica la serie il cui termine  $n$ -esimo è  $u_n = x^n$ . Tale serie può essere considerata come la somma di una progressione geometrica illimitata avente come ragione  $x$  e primo termine 1. Essa è convergente per  $|x| < 1$  e divergente altrimenti, come si può constatare facilmente. Infatti, si ha

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

da cui

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} = s_n - 1 + x^{n+1}$$

e quindi

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Il limite di  $s_n$  per  $n \rightarrow \infty$  è evidentemente finito ed uguale ad  $1/(1-x)$  per  $|x| < 1$  in quanto, in tal caso, l'errore

$$E_n = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

tende a zero. Se  $|a| \geq 1$ , i termini della serie non vanno a zero e quindi la serie non converge. Per  $-1 < x < 1$  la somma della serie è (si veda la figura 2.2)

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} . \tag{2.1}$$

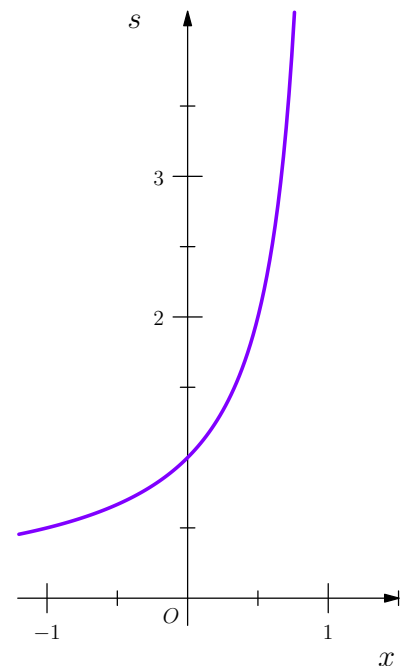


Figura 2.2: Somma della serie geometrica al variare della ragione  $x$  tra  $-1$  e  $1$ .

### 2.3 Il mistero delle serie di potenze reali

Molte funzioni reali si possono esprimere (per esempio, mediante il teorema di Taylor) come *serie di potenze*:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

dove i  $c_k$  sono costanti reali. Usualmente, queste serie infinite convergono a  $F(x)$  solo in qualche intervallo di convergenza centrato nell'origine  $-R < x < R$ . Ma la domanda profonda è:

In che modo il raggio di convergenza  $R$  è determinato da  $F(x)$ ? (2.2)

Come vedremo nel seguito, questa domanda ha una risposta semplice e bella, *ma solo se ne cerchiamo la risposta nel piano complesso*. Se invece ci limitiamo alla retta reale, la relazione tra  $R$  e  $F(x)$  è completamente misteriosa. Storicamente, è stato proprio questo mistero che ha portato Cauchy a far progredire l'analisi complessa.

Per vedere che c'è un mistero, consideriamo le serie di potenze delle due funzioni

$$G(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{e} \quad H(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La serie geometrica equazione (2.1) fornisce immediatamente la risposta

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad \text{e} \quad H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

dove entrambe le serie hanno lo stesso intervallo di convergenza  $-1 < x < 1$ .

È facile comprendere questo intervallo di convergenza della serie per  $G(x)$  se guardiamo la figura 2.3. La serie diventa divergente nei punti  $x = \pm 1$  perché questi punti sono delle *singolarità* della funzione stessa, cioè sono luoghi in cui  $|G(x)|$  diventa infinito. Ma se guardiamo al grafico di  $H(x)$  in figura 2.4, sembra che non ci sia ragione perché qualcosa vada storto per  $x = \pm 1$ . Però qualcosa in effetti va storto.

Per incominciare a capire perché, espandiamo queste funzioni in serie di potenze centrate in  $x = u$ , cioè in serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ , dove  $X = (x - u)$  misura lo spostamento di  $x$  dal centro  $u$ . Otteniamo questo sviluppo con i seguenti passaggi:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-x} - \frac{1}{-1-x} \right],$$

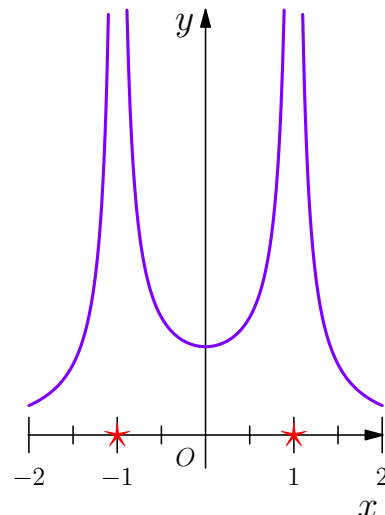


Figura 2.3: Grafico del modulo della funzione  $G(x)$ .

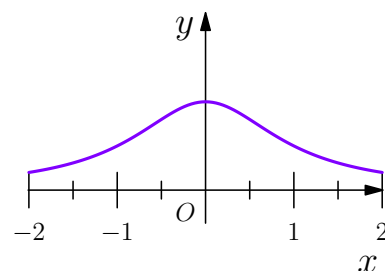


Figura 2.4: Grafico del modulo della funzione  $H(x)$ .

ma

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-(X+u)} = \frac{1}{(a-u)} \frac{1}{\left[1 - \frac{X}{a-u}\right]}$$

da cui

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(a-u)^{k+1}}, \quad \text{se e solo se } |X| < |a-u|.$$

Quindi

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1-u)^{k+1}} - \frac{1}{(-1-u)^{k+1}} \right] X^k,$$

dove  $|X| < |1-u|$  e  $|X| < |1+u|$ . Perciò l'intervallo di convergenza  $|X| < R$  è dato da

$$R = \min\{|1-u|, |1+u|\} = \text{DISTANZA DI } u \text{ DALLA SINGOLARITÀ PIÙ VICINA DI } G$$

Questo risultato è illustrato dalla figura 2.5 (si ignori il disco per il momento). L'analogo compito per  $H(x)$  è lasciato come esercizio:

**ESERCIZIO 2.2.** Dimostrare che il raggio di convergenza  $R$  dell'espansione in serie di potenze della funzione

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

intorno al punto  $u$  è

$$R = \sqrt{1+u^2} \tag{2.3}$$

(L'esercizio è difficile se si usano solo metodi reali, facile se si usano metodi complessi.)

La formula  $R = \sqrt{1+u^2}$  è la chiave di volta per capire in che modo il piano complesso entra in gioco: se immaginiamo la retta reale immersa nel piano, il teorema di Pitagora ci dice che  $R = \sqrt{1+u^2}$  deve essere interpretato come la distanza dal centro  $u$  dell'espansione ad uno dei due punti, fuori dalla retta reale, che stanno a distanza 1 dalla retta stessa in una direzione ad essa ortogonale. Si veda la figura 2.6. Se si pensa al piano come a  $\mathbb{C}$ , allora questi punti sono a  $\pm i$  e

$$R = \text{distanza di } u \text{ da } \pm i$$

Il mistero incomincia a svelarsi quando passiamo alla funzione complessa

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

che è identica a  $H(x)$  quando  $z$  è ristretto all'asse reale del piano complesso. In effetti — in un senso che non possiamo ancora rendere

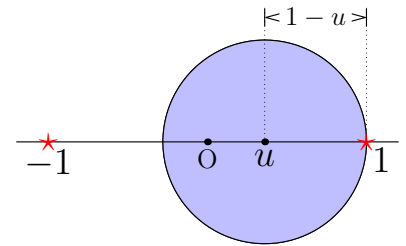


Figura 2.5: Raggio di convergenza della serie di  $G(x)$  centrata nel punto  $u$ .

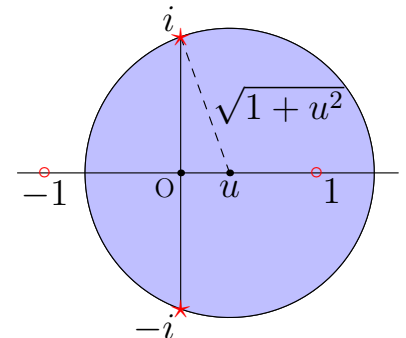


Figura 2.6: Raggio di convergenza della serie di  $H(x)$  centrata nel punto  $u$ .

esplicito —  $h(z)$  è la *sola* funzione complessa che concorda con  $H(x)$  sull'asse reale.:

Mentre la figura 2.4 mostra che  $h(z)$  si comporta bene per valori reali di  $z$ , è chiaro che  $h(z)$  ha due singolarità nel piano complesso, una a  $z = i$  e l'altra a  $z = -i$ . Queste sono illustrate come delle piccole esplosioni in figura 2.7.

Il mistero incomincia a svelarsi: quanto visto finora suggerisce la seguente risposta alla domanda (2.2):

*Il raggio di convergenza è la distanza dalla singolarità più vicina.*

(2.4)

Nelle lezioni seguenti chiariremo il senso matematico preciso di questa risposta. Per il momento ha solo lo statuto di una "buona congettura".

Concludiamo questo argomento con un esercizio:

**ESERCIZIO 2.3.** Dimostrare che  $g(z) = 1/(1 - z^2)$  e  $h(z) = 1/(1 + z^2)$  sono "essenzialmente" la stessa funzione, cioè sono ottenute l'una dall'altra mediante una rotazione del piano complesso.

### 2.4 Successioni e serie in spazi vettoriali metrici\*

Uno spazio vettoriale metrico è uno spazio vettoriale  $\mathcal{X}$ , che assumeremo sul corpo  $\mathbb{C}$  dei complessi, tra i cui elementi è ben definita una nozione metrica di distanza.

La natura vettoriale dello spazio fa sì che risulti ben definita la somma finita di vettori

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{u}_k$$

Per poter parlare di somma infinita o serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k$$

occorre una nozione di convergenza della successione di vettori  $\{\mathbf{s}_n\}$ .

A sua volta, la nozione di convergenza risulta definita se tra due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di  $\mathcal{X}$  è ben definita una nozione di distanza  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Astrattamente, la distanza  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è una funzione reale su  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  (positività)
- (ii)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  sse  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- (iii)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (simmetria)
- (iv)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (disuguaglianza triangolare)

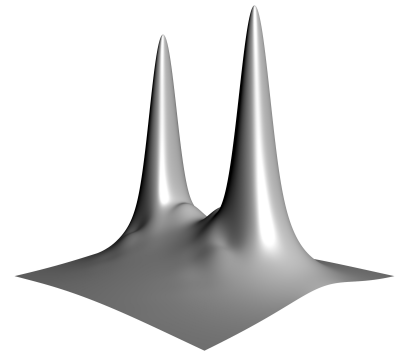


Figura 2.7: Grafico del modulo della funzione complessa  $h(z)$ .

\*Questa sezione può essere omessa senza pregiudicare la comprensione delle sezioni successive.

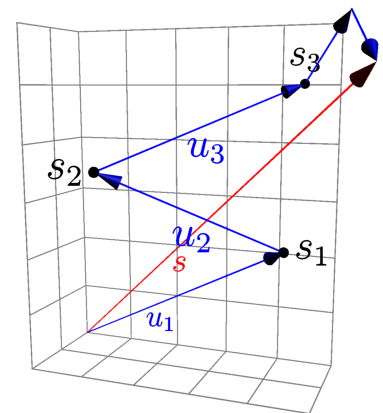


Figura 2.8: Una serie è una somma infinita di vettori. Vale comunque la regola del parallelogramma per la somma, come mostrato in figura. La figura illustra anche che  $\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_{n-1} + \mathbf{u}_n$ . Il vettore  $\mathbf{u}$ , in blu (se la serie converge! Naturalmente, nella figura mancano molti vettori!).



Queste proprietà vanno intese come ottenute per processo di astrazione dall'usuale nozione di distanza tra punti dello spazio euclideo tridimensionale. Sono quanto basta—niente di più, niente di meno—per caratterizzare la nozione di distanza in spazi vettoriali generali.

Con una nozione di distanza ben definita, la nozione di convergenza è quella ovvia: diciamo che la successione  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , e scriviamo  $x_n \rightarrow x$ , se  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .<sup>2</sup> Analogamente per Cauchy:  $\{x_n\}$  è una successione di Cauchy se  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  per tutti gli  $n$  e  $m$  dopo un certo  $N$ , qualunque sia il valore di  $\epsilon$ .

Quando tutte le successioni di Cauchy convergono in  $\mathcal{X}$ , lo spazio  $\mathcal{X}$  è detto *spazio metrico completo*.

Se  $\mathcal{X}$  è  $\mathbb{R}$ , si ritrova la nozione di convergenza vista all'inizio della sezione 2.1, in quanto i numeri reali formano uno spazio vettoriale con metrica data dal modulo della differenza tra numeri. Un altro esempio è dato da  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ , con distanza indotta dal prodotto scalare naturale di  $\mathbb{R}^d$ . Qualche chiarimento sul senso di quest'ultima frase è d'obbligo.

UNO. Dati due vettori  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$  di  $\mathbb{R}^d$ , il loro prodotto scalare naturale è

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_d v_d.$$

Se  $d = 3$ , si ha l'usuale prodotto scalare tra vettori della FISICA. Nel seguito useremo anche un'altra notazione per denotare il prodotto scalare a cui è bene abituarsi fin d'ora:

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_d v_d$$

Astrattamente, uno *spazio vettoriale con prodotto scalare* è uno spazio vettoriale equipaggiato con una funzione  $\langle \bullet | \bullet \rangle$  da  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  a valori in  $\mathbb{C}$  e avente le seguenti proprietà:

- (i)  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}$  (simmetria coniugata)
- (ii)  $\langle \mathbf{u} | \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{u} | \mathbf{y} \rangle$  (linearità nel secondo argomento<sup>3</sup>)
- (iii)  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$  (=0 sse  $\mathbf{x} = 0$ ) (positività)

DUE. Per distanza indotta dal prodotto scalare si intende la funzione distanza così definita:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} \tag{2.5}$$

(Si lascia come esercizio mostrare che le quattro proprietà della distanza sopra indicate risultano verificate.) A questo proposito è utile

<sup>2</sup> Più pedantemente:  $x$  è il limite della successione  $\{x_n\}$  per  $n \rightarrow \infty$  se per ogni numero reale  $\epsilon > 0$ , piccolo a piacere, esiste un numero intero  $N$  tale che, per tutti gli  $m > N$ , si ha  $d(x_n, x) < \epsilon$ .

Una funzione su  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  a valori in  $\mathbb{C}$  che soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii) del prodotto scalare è detta **forma sesquilineare** o **forma hermitiana**.

<sup>3</sup> È convenzionale richiedere la linearità rispetto al primo o al secondo argomento. Nella letteratura matematica, la linearità è rispetto al primo argomento. I fisici tendono a seguire la convenzione opposta e qui non faremo eccezione.

osservare che il secondo membro della precedente equazione non è altro che la lunghezza o norma o modulo del vettore  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Per denotare quest'ultima, si usano di solito una o due sbarrette da entrambi i lati del simbolo del vettore. Usiamone due. Allora l'equazione

$$\sqrt{\langle \mathbf{w} | \mathbf{w} \rangle} = \|\mathbf{w}\|$$

stabilisce che il prodotto scalare induce una nozione di norma (o lunghezza o modulo). Si può dimostrare (ma non lo faremo) che gli spazi  $\mathbb{R}^d$  e  $\mathbb{C}^d$  sono spazi metrici completi rispetto alla distanza definita dall'equazione (2.5) (cioè le successioni di Cauchy hanno limiti che stanno in questi spazi). Come esempio di spazio metrico non completo, si consideri l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali con metrica usuale (modulo della differenza tra numeri): successioni di Cauchy di razionali non necessariamente convergono ad un razionale.

SI OSSERVI CHE BASTA UNA NORMA per definire una distanza: se sullo spazio fosse definita una norma, ma non un prodotto scalare, risulterebbe lo stesso definita una distanza (la distanza indotta dalla norma) e quindi risulterebbero ben definite le nozioni di successione convergente e di successione di Cauchy. Uno spazio vettoriale munito di una norma è detto *spazio normato*. Come esempio di norma non indotta da un prodotto scalare, si consideri in  $\mathbb{C}^d$  la norma

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_d)\| = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_d|\}$$

Astrattamente, uno *spazio vettoriale normato* è uno spazio vettoriale su cui è definita una funzione a valori in  $\mathbb{R}$  avente le seguenti proprietà:

- (i)  $\|\mathbf{x}\| > 0$  se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- (ii)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha|$  denota il suo modulo)
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (disuguaglianza triangolare<sup>4</sup>)

A questo punto, per far pratica con le nozioni introdotte, è utile fare il seguente esercizio:

**ESERCIZIO 2.4.** (a) *Dimostrare che la norma indotta dal prodotto scalare soddisfa tutte le proprietà della norma.*

(b) *Dimostrare che la distanza indotta dalla norma soddisfa tutte le proprietà della prodotto scalare.*

(c) *Dimostrare che la funzione su  $\mathbb{C}^d$  a valori reali*

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_d)\| = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_d|\}$$

*soddisfa tutte le proprietà della norma.*

<sup>4</sup> La somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato.

(d) *Inventatevi un'altra norma su  $\mathbb{C}^d$  (diversa dalla precedente e da quella indotta dal prodotto scalare); naturalmente, dovete dimostrare che le proprietà della norma sono soddisfatte.*

### 2.5 Successioni e serie nel piano complesso

Il punto di partenza è completamente analogo a quello della sezione 2.1: la successione di numeri complessi  $s_1, s_2, s_3, \dots$  converge al numero  $s$  se per ogni dato  $\epsilon$  positivo, comunque piccolo, esiste un intero  $N$  tale che  $|s - s_n| < \epsilon$ ; la sola differenza con il caso reale è che adesso il modulo<sup>5</sup> va inteso nel senso del modulo dei numeri complessi. Come nel caso reale, siamo interessati ad una serie di numeri complessi  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  e quindi alla convergenza della successione delle somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Poiché i numeri complessi sono rappresentati da punti del piano, visualizziamo la successione come in figura 2.9. La figura mostra che è tutto molto più semplice di quel che sembra: tutto quel che si intende con la nozione di convergenza di una successione è che una volta che si raggiunge un certo punto  $s_N$  della successione, tutti i punti successivi stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio  $\epsilon$  con centro in  $s$ .

Il criterio di Cauchy si estende al piano complesso e anch'esso ha un semplice giustificazione geometrica. Si veda la figura 2.10: se  $n > m > N$ , allora entrambi  $s_n$  e  $s_m$  stanno dentro al disco e conseguentemente la distanza tra loro deve essere inferiore al diametro del disco:

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n| = |s_n - s_m| < 2\epsilon \tag{2.6}$$

Viceversa, si può dimostrare (esercizio) che se vale l'equazione equazione (2.6), allora  $\{s_n\}$  converge. Abbiamo così ritrovato il criterio di Cauchy che può essere così riformulato: *la serie complessa  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge se e solo se esiste un  $N$  tale che vale la disuguaglianza (2.6) (per  $\epsilon$  arbitrariamente piccolo) ogni qual volta  $m$  e  $n$  sono maggiori di  $N$ .*

### 2.6 La nozione di serie assolutamente convergente

La serie complessa

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

è detta *assolutamente convergente* se la serie reale

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

<sup>5</sup> Nel linguaggio della sezione 2.4, il modulo coincide con la norma di  $\mathbb{R}^2$ :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$  e questa induce nel piano l'usuale distanza tra punti.

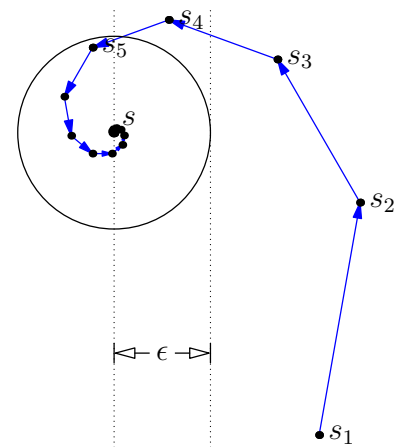


Figura 2.9: Significato geometrico della convergenza di una successione di numeri complessi.

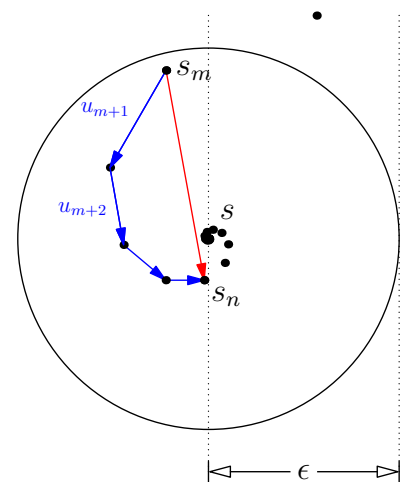


Figura 2.10: Significato geometrico del criterio di Cauchy.

è convergente. La convergenza assoluta è certamente differente dalla convergenza ordinaria. Per esempio, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

è convergente, ma non è assolutamente convergente (perché?). In effetti il requisito di assoluta convergenza è più forte della semplice convergenza. Si ha infatti:

Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente.	(2.7)
--	-------

Per stabilire la proposizione (2.7), supponiamo che

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sia assolutamente convergente, il che significa che

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

è convergente. Denotiamo con  $\tilde{s}_n$  le somme parziali di  $\tilde{s}$ . Se  $\tilde{s}$  è convergente, allora, per il criterio di Cauchy, vuol dire che per valori sufficientemente grandi di  $m$  e  $n$ , possiamo rendere  $|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$  piccolo quanto vogliamo. Ma, riferendoci alla figura 2.10, vediamo che

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_n|$$

è la lunghezza totale del viaggio da  $s_m$  a  $s_n$  che passa per i punti  $s_{m+1}$ ,  $s_{m+2}$  e così via. Poiché  $|s_n - s_m|$  è la lunghezza del viaggio più breve da  $s_m$  a  $s_n$ ,

$$|s_n - s_m| \leq |\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$$

Quindi  $|s_n - s_m|$  deve diventare arbitrariamente piccolo per  $m$  e  $n$  sufficientemente grandi. Fine della dimostrazione.

## 2.7 Serie di potenze nel piano complesso

Dalle nozioni di successione e serie si passa a quelle di *successione di funzioni* e di *serie di funzioni* semplicemente permettendo che i termini delle successioni e delle serie dipendano da una variabile che varia in un certo dominio. Per esempio, se facciamo dipendere i termini  $u_k$  da una variabile reale, cioè se abbiamo  $u_k = u_k(x)$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$  potrà convergere per alcuni valori di  $x$  e non per altri. Il problema interessante è dunque quello di determinare per quali valori di  $x$  la serie converge.

Abbiamo già incontrato questo problema nell'ESEMPIO 2.1 e nella sezione. 2.3. In generale, si avrà che sull'insieme dei valori  $x$  in cui la serie converge risulta associata una funzione  $f(x)$  che è la somma della serie.

Adesso ci vogliamo occupare del caso in cui i termini  $u_k$  dipendono da una variabile complessa  $z$  e siano pure a valori complessi. In particolare, ci vogliamo occupare del caso più semplice di dipendenza:  $u_k(z) = c_k z^k$ , dove  $c_k$  sono costanti complesse. In questo modo, si arriva alla nozione di serie complessa di potenze  $P(z)$  (centrata nell'origine):

$$s \equiv P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

dove  $c_k$  sono costanti complesse e  $z$  è una variabile complessa. Le somme parziali di questa serie sono polinomi ordinari,

$$s_n \equiv P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n,$$

Fissato il punto  $z$ , ad esempio  $z = a$ , per la convergenza della serie in  $a$  (convergenza puntuale) vale ovviamente quanto visto in precedenza per successioni e serie nel piano complesso.

Vogliamo stabilire l'importante risultato:

Se  $P(z)$  converge in  $z = a$ , allora converge dappertutto dentro al disco  $|z| < |a|$ .

(2.8)

Per stabilire questo, dimostreremo che  $P(z)$  è assolutamente convergente dentro al disco  $|z| < |a|$ , cioè che la serie reale

$$\tilde{P}(z) \equiv \sum_{k=0}^n |c_k z^k| = |c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + |c_3 z^3| + \dots$$

è convergente. Se mostreremo questo, la proposizione (2.8) risulterà dimostrata in virtù della (2.7).

Per la dimostrazione della proposizione (2.8), faremo riferimento alla figura 2.11 e denoteremo con  $\tilde{P}_n(z)$  l' $n$ -esima somma parziale di  $\tilde{P}(z)$ .

Per dimostrare la convergenza di  $\tilde{P}(z)$  per  $|z| < |a|$ , in primo luogo si osservi che se  $P(a)$  converge, allora la lunghezza  $|c_n a^n|$  della serie di ciascun termine deve andare a zero quando  $n$  va all'infinito (perchè? si riveda quanto visto per il caso reale). In particolare, deve esistere un numero  $M$  tale che  $|c_n a^n| < M$  per tutti gli  $n$ . Se  $|z| < |a|$ , allora  $\rho \equiv |z|/|a| < 1$  e di conseguenza  $|c_n z^n| < M \rho^n$ . Perciò, per  $n > m > N$ ,<sup>6</sup>

$$\tilde{P}_n(z) - \tilde{P}_m(z) \leq \frac{M}{1 - \rho} [\rho^{m+1} - \rho^{n+1}], \tag{2.9}$$

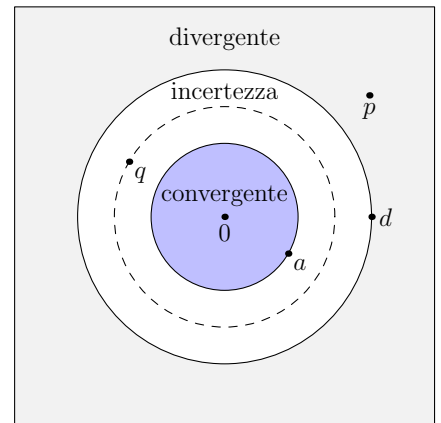


Figura 2.11: Convergenza e divergenza di una serie di potenze.

<sup>6</sup> Infatti,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(z) - \tilde{P}_m(z) &\leq M(\rho^{m+1} + \rho^{m+2} + \dots + \rho^n) \\ &= M\rho^{m+1} (1 + \rho + \dots + \rho^{n-(m+1)}) \\ &= M\rho^{m+1} \left( \frac{1}{1 - \rho} - \frac{\rho^{n-m}}{1 - \rho} \right) \\ &= \frac{M}{1 - \rho} [\rho^{m+1} - \rho^{n+1}]. \end{aligned}$$

dove l'ultimo membro può essere reso piccolo quanto si vuole per  $n$  e  $m$  sufficientemente grandi. Fine della dimostrazione della (2.8).

Se  $P(z)$  non converge ovunque nel piano, ci deve essere almeno un punto  $d$  dove diverge. Si supponga che  $P(z)$  converga in un punto  $p$  più lontano dall'origine di  $d$ . Si veda la figura 2.11. Allora, per l'equazione (2.8),  $P(z)$  convergerebbe dappertutto dentro al disco  $|z| < |p|$  e, in particolare, convergerebbe in  $d$ , contraddicendo l'ipotesi. Risulta così stabilita la proposizione:

$$\boxed{\text{Se } P(z) \text{ diverge in } z = d, \text{ allora diverge dappertutto fuori dal cerchio } |z| = |d|.} \quad (2.10)$$

A questo punto abbiamo risposto alla domanda sulla convergenza, eccetto nell'anello bianco tra i due cerchi centrati nell'origine, il cerchio passante per  $a$  e quello passante per  $d$ . Si veda la figura 2.11. Supponiamo adesso di prendere un punto  $q$  a metà strada in questo anello, cioè il cerchio  $|z| = (|a| + |d|)/2$ , e di verificare se in questo punto la serie converge. Qualunque sia la risposta, le (2.8) e (2.10) ci permettono di ridurre l'anello di "incertezza". Per esempio, se  $P(q)$  è convergente, allora  $P(z)$  è convergente per  $|z| < |q|$  e il nuovo anello di incertezza diventa  $|q| \leq |z| \leq |d|$ . Ripetendo questa procedura nel nuovo anello, dimezzeremo nuovamente lo spessore dell'anello di incertezza. Continuando in questo modo, l'anello di incertezza si restringerà ad un cerchio definito di raggio  $R$  (chiamato il *cerchio di convergenza*) tale che  $P(z)$  converge dappertutto dentro a questo cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio. Si veda la figura 2.12. Il raggio  $R$  è chiamato *raggio di convergenza* e l'interno del cerchio è chiamato *disco di convergenza*.

Si osservi che questo argomento non ci dice nulla riguardo alla convergenza di  $P(z)$  sul cerchio di convergenza. In linea di principio, tutto può accadere: divergenza, convergenza oppure convergenza in alcuni punti del cerchio di convergenza e divergenza negli altri. Al riguardo, si veda il problema 2.2.

TUTTI I RISULTATI PRECEDENTI si generalizzano banalmente a serie di potenze centrate in un arbitrario punto  $u$  del piano complesso, vale a dire a serie della forma  $P(z) = \sum c_k (z - u)^k$ . Dunque:

$$\boxed{\text{Data una serie complessa di potenze } P(z) \text{ centrata in } u, \text{ esiste un cerchio } |z - u| = R, \text{ con centro in } u, \text{ tale che } P(z) \text{ converge (assolutamente) dappertutto dentro al cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio.}} \quad (2.11)$$

Questo teorema è dovuto a Niels Abel.

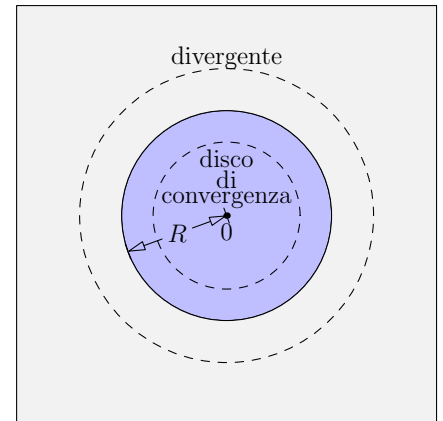
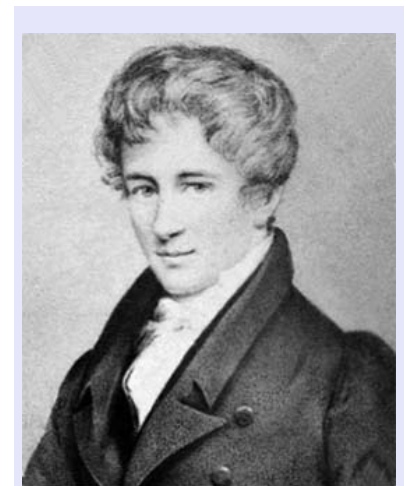


Figura 2.12: Disco e raggio di convergenza di una serie di potenze.



Niels Abel (1802–1829) è stato un matematico norvegese. Indipendentemente da Galois, sviluppò la teoria di gruppi e dimostrò l'impossibilità di risolvere una generica equazione di quinto grado con un algoritmo algebrico. (In un capitolo successivo ci occuperemo del metodo di Abel per regolarizzare somme e integrali divergenti.)

2.8 Che cosa succede sul cerchio di convergenza\*

Mediante cambiamento di scala globale  $z \mapsto z/R$ , senza perdita di generalità, possiamo assumere che il disco di convergenza sia il disco unitario  $\mathbb{D}$  e il cerchio di convergenza sia il cerchio unitario  $\mathbb{T}$ . Posto  $z = e^{i\theta}$ , quest'ultimo è identificato in modo naturale con l'intervallo  $(-\pi, \pi]$ . Per  $z = e^{i\theta}$ , una serie di potenze

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

diventa una serie a valori complessi nella variabile reale  $\theta \in (-\pi, \pi]$ ,

$$p(\theta) \equiv P(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Si osservi che (qui e in generale) la convergenza della serie complessa è equivalente alla convergenza delle sue parti reali e immaginarie,  $\text{Re } p(\theta)$  e  $\text{Im } p(\theta)$ .

Ora,

$$\begin{aligned} \text{Re } p(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n e^{in\theta} + \overline{c_n} e^{-in\theta}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \overline{c_n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{c_n + \overline{c_n}}{2} \right) \cos n\theta + \left( \frac{\overline{c_n} - c_n}{2i} \right) \sin n\theta \right] \end{aligned}$$

quindi

$$\text{Re } p(\theta) \equiv \text{Re } P(e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \quad (2.12)$$

dove

$$a_n = \frac{c_n + \overline{c_n}}{2}, \dots, \quad e \quad b_n = -\frac{c_n - \overline{c_n}}{2i}, \dots \quad (2.13)$$

Analogamente, si trova

$$\text{Im } p(\theta) \equiv \text{Im } P(e^{i\theta}) = -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta]. \quad (2.14)$$

La serie a secondo membro della (4.5) è detta *serie di Fourier*.<sup>7</sup> Lo studio delle serie di potenze su  $\mathbb{T}$  diventa dunque lo studio delle serie di Fourier nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$ , di cui ci occuperemo largamente nel seguito.

\*Questa sezione può essere omessa senza pregiudicare la comprensione dei capitoli successivi.



Joseph Fourier (1768–1830) è stato un matematico e fisico francese noto per aver introdotto nel 1807 le serie e gli integrali che prendono il suo nome ed averli applicati a problemi di conduzione del calore e ai sistemi vibranti. Da grandi matematici del tempo, il suo lavoro fu inizialmente giudicato poco rigoroso e carente di giustificazioni.

<sup>7</sup> Naturalmente, anche la (2.14) è una serie di Fourier.

LA CONVERGENZA delle serie di potenze sul cerchio di convergenza è un problema di grande interesse, specialmente in vista dello studio delle serie di Fourier. Alla fine della sezione 2.7 abbiamo detto che sul cerchio di convergenza la serie può convergere o divergere dappertutto o in alcuni punti convergere e in altri divergere. Una domanda legittima (!) è chiedersi se esistano dei criteri che permettano di valutare la convergenza di  $P(z)$  per  $|z| = 1$ .<sup>8</sup> In A.2.2 è stato dimostrato che la serie

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots \quad (2.15)$$

converge ovunque sul cerchio  $|z| = 1$ , fatta eccezione per il punto  $z = 1$ . Dalla dimostrazione in A.2.2, ci si può rendere conto facilmente che la forma esplicita dei coefficienti  $c_n = 1/n$  non gioca alcun ruolo in quella dimostrazione, conta soltanto il fatto che  $c_n \rightarrow 0$  (per potere applicare il criterio di Cauchy). Risulta così dimostrato il teorema generale:<sup>9</sup>

<p><i>Sia <math>\sum c_n z^n</math> una serie di potenze che converge nel disco unitario <math>\mathbb{D}</math>. Se <math>c_n \rightarrow 0</math> per <math>n \rightarrow \infty</math>, allora la serie converge per <math> z  = 1, z \neq 1</math>.</i></p>	(2.16)
---	--------

Anche questo teorema, come il teorema 2.11, è dovuto a Abel.

<sup>8</sup> Si raccomanda caldamente di svolgere il problema 2.2 [domanda (ii)], e leggere la soluzione completa in A.2.2.

<sup>9</sup> Si osservi che il teorema NON afferma che la serie diverge in  $z = 1$ . Per  $z = 1$  il criterio semplicemente non si applica (questo è chiaro dalla dimostrazione in A.2.2). La convergenza per  $z = 1$  va dunque stabilita con altri metodi.