

## 3

# Serie di potenze II

### 3.1 Convergenza uniforme

Nella lezione precedente abbiamo visto che quando il termini  $u_k$  di una serie non è costante, ma è funzione di una variabile  $z$  (reale o complessa), si ha una *serie di funzioni*  $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ . Ci siamo poi occupati delle serie di potenze e abbiamo stabilito l'importante risultato di Abel.

Per studiare la natura delle funzioni  $s(z)$  definite mediante serie di altre funzioni  $u_k(x)$  va precisata e approfondita la nozione di *convergenza uniforme*. Scopo del problema 2.3 era proprio quello di rendere familiare questa nozione in un caso molto semplice. Se lo avete svolto, sapete già (quasi) tutto quello che c'è da sapere al riguardo.

Ripartiamo comunque (quasi) da zero. Abbiamo visto che per una serie a termini costanti la condizione di convergenza è espressa dall'annullarsi, nel limite, dell'errore,

$$E_n = |s - s_n| \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

il che equivale a dire che, dopo un certo  $s_n$ , tutti i punti della successivi della successione stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio  $\epsilon$  con centro in  $s$ , cioè

$$|s - s_n| < \epsilon$$

(si veda la figura 2.9). Quando i termini della serie sono funzioni di  $z$ , per ciascun valore di  $z$  deve essere ancora valida la (3.1). In altre parole, fissato un punto  $z = z_0$ , la serie converge al valore  $s_0 = s(z_0)$  quando, fissato  $\epsilon > 0$ , esiste un intero  $N_0$  tale che

$$E_n(z_0) = |s(z_0) - s_n(z_0)| < \epsilon$$

Per un altro valore  $z_1$  di  $z$ , per cui la serie converga al valore  $s_1 = s(z_1)$ , varrà ancora la stessa proposizione, ma, in generale, restando  $\epsilon$  lo stesso di prima, essa sarà valida a partire da un altro valore  $N_1 \neq N_0$ . In questo caso, si parla di *convergenza puntuale* della serie.

Considerando ora tutti i possibili valori di  $z$  per cui la serie converge, ci si può domandare se ve ne è uno tra essi in cui il numero  $N$  ha un valore massimo  $N^*$ ? Se così fosse  $N^*$  potrebbe essere sostituito a tutti gli altri numeri  $N_0, N_1, N_2, \dots$ , trovati per gli altri valori di  $z$ , e affermare che, per qualunque valore di  $z$  per cui la serie converge, dato  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere, la disuguaglianza  $E_n(z) < \epsilon$  è soddisfatta a partire da un valore  $N^*$ , *indipendentemente dal valore di  $z$* .

Quando questa situazione si verifica, si parla di *convergenza uniforme* della serie e la serie è detta *uniformemente convergente*. Intuitivamente, la convergenza uniforme corrisponde ad una velocità di convergenza uniforme in tutti i punti in cui la serie converge (passato un certo  $N^*$ , la velocità ha lo stesso valore costante per tutti i punti). La nozione di convergenza uniforme è più forte della convergenza puntuale, come illustrato dal seguente esempio.

**ESEMPIO 3.1** (Serie convergente puntualmente ma non uniformemente). Consideriamo la serie reale (non di potenze!)

$$f(x) = x + x(x-1) + x^2(x-1) + \dots + x^n(x-1) + \dots$$

nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ . La sua somma parziale  $n$ -esima è

$$s_n = x + x(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1}) = x + x(x-1)\frac{1-x^n}{1-x} = x^n$$

(Si veda l'esempio 2.1.) Pertanto, la serie converge a 0, per  $0 \leq x < 1$ , mentre per  $x = 1$  la serie si riduce al primo termine e vale 1, cioè, nell'intervallo  $[0, 1]$  la serie converge alla funzione (discontinua)

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Consideriamo adesso le prime 5 somme parziali  $s_n$  della serie; si veda la figura 3.1. Le curve rappresentano anche i primi cinque errori, in quanto  $E_n = |s - s_n| = x^n$ . Fissiamo a piacere un numero  $\epsilon$ , diciamo 0.3. Allora, come mostrato in figura, per  $x = 0.5$ , tutti gli errori, dal secondo in poi, sono minori di 0.3, quindi  $N = 2$ . Ma per  $x = 0.75$ , soltanto gli errori successivi al quinto sono minori di 0.3 e quindi  $N = 5$ . Quanto più  $x$  si avvicina a 1, tanto più grande diventa  $N$ . Si vede che non esiste alcun  $N^*$  massimo: infatti, se vi fosse, dovrebbe essere  $E_{N^*} = x^{N^*} < \epsilon$  per qualunque valore di  $x$  compreso tra 0 e 1, cioè  $x < \epsilon^{1/N^*}$ . Ma, per quanto grande si prenda  $N^*$ , esisteranno sempre dei valori di  $x$  compresi tra  $\epsilon^{1/N^*}$  e 1.

Conclusione: la serie *non è uniformemente convergente* in  $[0, 1]$  (pur essendo ivi convergente puntualmente alla funzione  $s(x)$ ).

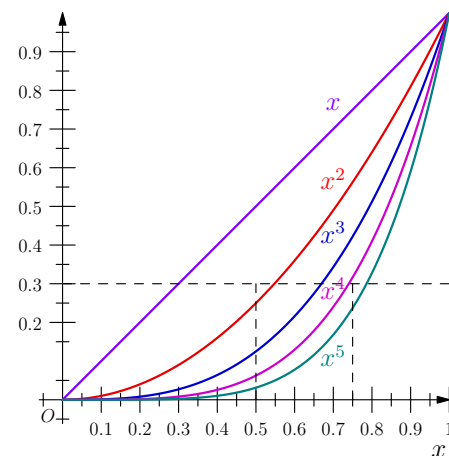


Figura 3.1: Le prime 5 somme parziali della serie che coincidono con i primi cinque errori.

### 3.2 Criterio di convergenza uniforme

Una serie di funzioni è uniformemente convergente in una regione del piano complesso se la serie formata con i moduli dei suoi termini è, in qualunque punto della regione, maggiorata da una serie convergente a termini costanti.

Se infatti la serie maggiorante è  $\sum M_n$  con errore  $E_n^0$  dalla somma  $M = \sum M_n$ , e la serie di funzioni è  $\sum u_k(z)$  con errore  $E_n(z)$  dalla sua somma  $s(z)$ , si ha

$$E_n(z) < E_n^0.$$

Ma, prefissato un  $\epsilon$  piccolo a piacere, esiste un  $N^*$  a partire dal quale  $E_n^0 < \epsilon$ , e quindi a partire da tale  $N^*$  (costante), si ha anche

$$E_n(z) < \epsilon.$$

Dunque, la serie è uniformemente convergente.

La condizione è sufficiente, ma non necessaria, ed è nota come *Criterio M* di Weierstrass.

### 3.3 Approssimare una serie di potenze con un polinomio

Implicito nella nozione di convergenza è un fatto semplice ma importante che val la pena di ripetere: se la serie converge in un punto, allora in quel punto può essere approssimata dalla somma parziale  $m$ -esima e, scegliendo un valore grande di  $m$ , possiamo rendere l'approssimazione tanto accurata quanto vogliamo. Restringiamo adesso la nostra attenzione alle serie di potenze e utilizziamo le notazioni introdotte nella sezione 2.7. Combinando l'osservazione precedente con il teorema (2.11), si perviene alla morale del problema 2.3 per una generica serie di potenze:

In ogni punto  $z$  nel disco di convergenza, la serie di potenze  $P(z)$  può essere approssimata con una precisione arbitrariamente elevata da un polinomio  $P_m(z)$  di grado sufficientemente elevato. (3.2)

Per semplicità, consideriamo il caso in cui

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_m z^j$$

è centrata nell'origine. L'errore

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)|$$

è la distanza tra la risposta esatta e l'approssimazione. Per un valore fissato di  $m$ , l'errore varierà quando  $z$  si muove nel disco di convergenza. Chiaramente, poiché  $E_m(0) = 0$ , l'errore sarà estremamente

piccolo quando  $z$  è vicino all'origine, ma che cosa accade quando  $z$  si avvicina al cerchio di convergenza? La risposta dipende dalla particolare serie di potenze considerata, ma può accadere che l'errore diventi enorme; si veda il problema 2.3. Questo non contraddice quanto detto poc'anzi. Infatti, per ogni  $z$  fissato nel disco di convergenza, non importa quanto vicino al cerchio di convergenza, l'errore  $E_m(z)$  diventa sempre arbitrariamente piccolo quando  $m$  tende all'infinito.

Supponiamo adesso di restringere  $z$  al disco  $|z| \leq r$ , dove  $r < R$ . In questo disco, risulta che l'errore può essere controllato in modo uniforme per tutti i punti. (Per apprezzare quanto segue, è utile aver svolto e digerito il problema 2.2.) Infatti,

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |c_{m+1}z^{m+1} + c_{m+2}z^{m+2} + \dots| \leq |c_{m+1}z^{m+1}| + |c_{m+2}z^{m+2}| + \dots$$

Da cui

$$E_m(z) \leq |c_{m+1}|r^{m+1} + |c_{m+2}|r^{m+2} + \dots \equiv e(m, r)$$

Ma, per ogni  $\epsilon$ , si può trovare un  $m$ , tale che  $e(m, r) < \epsilon$ . Perciò, a partire da tale  $m$ , si avrà  $E_n(z) < \epsilon$ , per tutti gli  $n \geq m$ . Il che significa che nel disco  $|z| \leq r$  la serie è uniformemente convergente. Risulta quindi stabilito il seguente teorema:

Se la serie di potenze  $P(z)$  (centrata nell'origine) ha disco di convergenza  $|z| < R$ , allora  $P(z)$  è uniformemente convergente nel disco chiuso  $|z| \leq r$ , dove  $r < R$ . (3.3)

### 3.4 Unicità delle serie di potenze

Se una funzione complessa può essere espressa come serie di potenze, allora la serie è unica: non possono esserci due serie distinte che esprimano la stessa funzione. Vale infatti il seguente teorema:

Se due serie di potenze, centrate in zero, concordano (a) in un intorno (comunque piccolo) dello zero, oppure (b) su un segmento di curva che passa per lo zero (non importa quanto piccolo) o, infine, (c) su una successione di punti che converge a zero, allora sono identiche. (3.4)

Per convincerci della (3.4), incominciamo con (c). Se

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots = d_0 + d_1z + d_2z^2 + \dots \quad (3.5)$$

in un piccolo intorno dello zero, allora ponendo  $z = 0$ , otteniamo  $c_0 = d_0$ , che quindi possiamo cancellare da entrambe le parti. Adesso

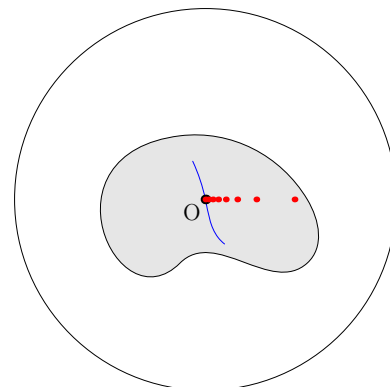


Figura 3.2: Due serie che coincidono in un intorno dello zero (regione grigia), o lungo un piccolo tratto di curva passante per lo zero (in blu) o nei punti di una successione di punti che si accumula nello zero (in rosso), coincidono ovunque.

dividiamo ambo i membri di (3.5) per  $z$  e ripetiamo la procedura, otterremo  $c_1 = c_2$ , e così via. Fine della dimostrazione della (c).

Per quel che riguarda la (b) e la (a), il ragionamento è essenzialmente lo stesso, soltanto che invece di porre a zero entrambi i membri della (3.5), adesso occorre *prendere il limite  $z \rightarrow 0$  lungo la curva o la successione di punti*.

Siamo adesso in grado di rendere esplicito il senso dell'affermazione fatta a pagina 2-7 che  $h(z) = 1/(1+z^2)$  è la sola funzione complessa che concorda con  $H(x) = 1/(1+x^2)$  quando  $z$  è ristretto all'asse reale del piano complesso. Il senso è il seguente:  $h(z)$  è la sola funzione complessa che (i) concorda con  $H(x)$  sull'asse reale e (ii) può essere espressa come serie di potenze in  $z$ . Senza questa qualificazione, la nostra affermazione di pagina 2-7 sarebbe falsa (esercizio: trovare un contro-esempio).

### 3.5 Manipolazione delle serie di potenze

Il fatto che le serie di potenze possono essere approssimate con precisione arbitraria da polinomi implica che:

<p><i>Due serie di potenze con lo stesso centro possono essere sommate, moltiplicate e divise, come se fossero polinomi.</i></p>	(3.6)
--	-------

A scopo di illustrazione ecco alcuni esempi.

ESEMPIO 3.2.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

Sommando le serie dei due termini a destra, possiamo verificare la formula che

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 \dots ,$$

ESEMPIO 3.3.

$$\frac{1}{1-z^2} = \left[ \frac{1}{1-z} \right] \left[ \frac{1}{1+z} \right]$$

$$\begin{aligned} & [1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots][1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5] = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots \\ & = 1 + [1 - 1]z + [1 - 1 + 1]z^2 + [1 - 1 + 1 - 1]z^3 + [1 - 1 + 1 - 1 + 1]z^4 + \dots \\ & = 1 + z^2 + z^4 + z^6 \dots \end{aligned}$$

### 3.6 Come trovare il raggio di convergenza

Ci sono diversi modi per trovare il raggio di convergenza  $R$  di una data serie di potenze  $P(z) = \sum c_k z^k$ . Sono formalmente identici a quelli usati per le serie reali e anche le loro dimostrazioni sono molto simili, quindi non le faremo. Ecco i criteri standard:

(a) Criterio del rapporto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (\text{se il limite esiste})$$

(b) Criterio della radice

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (\text{se il limite esiste})$$

(c) Criterio di Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Se (a) fallisce, si usi (b). Se anche (b) fa cilecca, non ci resta che (c), che è per palati (matematici) fini. Tuttavia, (c) non verrà mai usato in questo corso.

CONCETTUALMENTE BEN PIÙ SODDISFACENTE è il seguente fatto:

*Se  $f(z)$  può essere espressa come una serie di potenze centrata in  $u$ , allora il raggio di convergenza  $R$  è la distanza tra  $u$  e la singolarità di  $f(z)$  più vicina a  $u$ .* (3.7)

Un caso particolare di funzioni che possono essere espresse come serie di potenze sono le *funzione razionali*, cioè funzioni del tipo

$$f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}, \quad (3.8)$$

dove  $Q_m$  e  $P_n$  sono polinomi di grado  $m$  e  $n$  rispettivamente. Per queste funzioni, si può dimostrare la (3.7), sulla base delle risorse che entrano in gioco nella soluzione del problema 2.1.

La soluzione di questo problema parte dall'osservazione che quanto visto nella sezione 2.3 si estende a  $1/(a-z)$ , per  $z$  complesso, cioè

$$\frac{1}{a-z} = \sum_k \frac{Z^k}{(a-u)^{k+1}} \quad \text{sse } |Z| < |a-u| \quad \text{e } Z \equiv z-u \quad (3.9)$$

Poichè

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right]$$

applicando (3.9) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] Z^k \quad (3.10)$$

Ciascuna delle due serie a secondo membro deve convergere, cioè devono essere soddisfatte entrambe le condizioni

$$|z-u| < |z_1-u| \quad (3.11)$$

$$|z-u| < |z_2-u| \quad (3.12)$$

dove  $z_1 = -i$  e  $z_2 = i$  (ci teniamo generali perché vogliamo capire qual è la lezione per un polinomio quadratico qualunque).

Si osservi che  $|z-u| = r$  (reale positivo) è l'equazione di un cerchio di raggio  $r$  centrato nel punto  $u$  (nel senso della geometria analitica: il luogo dei punti  $z$  la cui distanza  $|z-u|$  da  $u$  è pari a  $r$ ).

Quindi (3.11) e (3.12) sono le equazioni dei dischi concentrici, centrati nel punto  $u$ , di raggi  $r_1 = |z_1-u|$  e  $r_2 = |z_2-u|$  rispettivamente. Ne segue che (3.11) e (3.12) sono entrambe soddisfatte nel disco più piccolo, cioè il disco il cui raggio  $R$  è la distanza tra  $u$  e la singolarità più vicina a  $u$ . Si veda la figura 3.3. (Nel caso in cui  $u$  è sull'asse reale,  $z_1 = -i$  e  $z_2 = i$ ,  $R = \sqrt{1+u^2}$ .)

Per un polinomio quadratico  $P_2(z) = z^2 + bz + c$ , con radici  $z_1$  e  $z_2$ , si ha

$$\frac{1}{P_2(z)} = \frac{A}{z_1-z} + \frac{B}{z_2-z}.$$

Le serie geometriche dei due fratti semplici a secondo membro, devono entrambe convergere. Si perviene pertanto alle stesse conclusioni di prima, illustrate dalla figura 3.3.

Analogamente, per il teorema fondamentale dell'algebra,  $1/P_n(z)$  si riconduce alla somma di  $n$  serie geometriche, per cui converge laddove tutte le condizioni di convergenza di queste serie sono soddisfatte. Dunque, come prima, converge nei punti  $z$  che sono comuni agli  $n$  cerchi concentrici centrati in  $u$  e il suo raggio di convergenza è, come prima, la distanza tra  $u$  e la singolarità più vicina a  $u$ .

Chiaramente, la moltiplicazione di  $1/P_n(z)$  per un polinomio  $Q_m(z)$  non modifica questo fatto. Eventualmente, può cambiare  $R$ . Questo accade se  $Q_m$  è divisibile per uno o più dei fattori  $(z_i - z)$  di  $P_n$ . Fine della dimostrazione di (3.7) per funzioni del tipo (3.8).

### 3.7 La funzione esponenziale

Facciamo il punto della situazione. È banale dire che una funzione complessa associa ad un numero complesso un numero complesso. Ma un conto è parlare di funzioni in generale, altro conto è considerare casi particolari, avere cioè regole per associare ad un numero

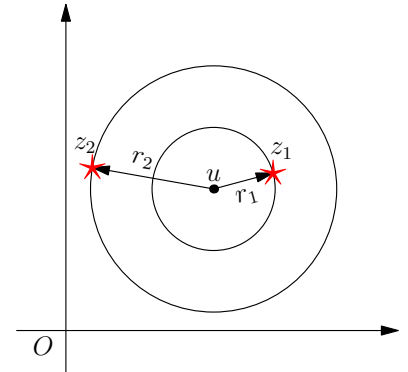


Figura 3.3:  $z_1$  e  $z_2$  sono le radici del polinomio  $P_2(z) = z^2 + bz + c$ , e quindi le singolarità (esplosioni!) della funzione  $f(z) = 1/P_2(z)$ . Il punto  $u$  è il centro di espansione.

complesso un numero complesso. Sia chiaro, stiamo parlando di regole esplicite, ad esempio istruzioni che possono essere scritte in un linguaggio di programmazione e fornite ad un calcolatore.

La cassetta degli attrezzi per costruire funzioni è quella fornita dalle regole algebriche di somma e prodotto. I materiali da costruzione con cui incominciare sono i polinomi, che sono somme di potenze intere, cioè somme di prodotti tra numeri. E questo è quello che abbiamo fatto. A partire dai polinomi, ci siamo mossi in due direzioni: (a) abbiamo considerato i rapporti tra polinomi, cioè le funzioni razionali (e per questo basta l'algebra); (b) abbiamo esteso i polinomi a serie di potenze, che sono limiti di polinomi (approssimabili con precisione arbitraria da polinomi dentro il loro disco di convergenza)<sup>1</sup> (e per questo occorre l'analisi, la cui essenza è distillata nel criterio di convergenza di Cauchy). Nella sezione precedente abbiamo poi visto il legame tra serie di potenze e funzioni razionali.

<sup>1</sup> Quindi, in un senso che non intendo qui approfondire, anche le serie di potenze si possono insegnare ad un calcolatore

Adesso vogliamo sapere se nel mondo dei complessi esiste qualcosa analogo alla funzione esponenziale del campo reale. Nel capitolo 1 abbiamo fornito due giustificazioni per la formula di Eulero, cioè per l'esponenziale di un immaginario puro. Possiamo procedere in modo analogo per un generico complesso  $z$ ? Chiaramente, la giustificazione cinematica non può funzionare, ma, come vedremo tra breve, funziona molto bene la caratterizzazione di  $e^z$  mediante serie di potenze.<sup>2</sup>

SI DEFINISCA  $e^z$  come serie:

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad (3.13)$$

allora, per la (3.4),  $e^z$  è la *sola* funzione nel piano complesso che generalizza la funzione reale  $e^x$  ai numeri complessi (è la sola funzione che coincide con l'esponenziale reale sull'asse reale). Questa è una proprietà molto importante!

Due esercizi:

**ESERCIZIO 3.1.** Dimostrare che il raggio di convergenza di  $e^z$  è infinito.

**ESERCIZIO 3.2.** Usando la 3.6, dimostrare che

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad (3.14)$$

per numeri complessi  $a$  e  $b$ .

Si osservi che dalla (3.14) segue che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

<sup>2</sup> Consideriamo il seguente ragionamento: usando le regole dell'esponenziale, so che  $e^z = e^x e^{iy}$ , ma  $e^x$  è noto dall'analisi reale e per  $e^{iy}$  uso la formula di Eulero. Quindi so che cosa è  $e^z$  e lo posso insegnare ad un calcolatore. Qual è il difetto del ragionamento? È questo:  $e^z = e^x e^{iy}$  è al più una DEFINIZIONE del primo membro in termini del secondo. Non posso dire che l'uguaglianza è conseguenza delle usuali regole dell'esponenziale, perché ancora non so che cosa si debba intendere con il simbolo  $e^z$ . Si pensi alla prima volta che ci è stato spiegato che  $\sqrt{a} = a^{1/2}$ .



LE PROPRIETÀ dell'esponenziale complesso sono rese vivide dalla figura 3.4. Si consiglia caldamente di capire la figura e le relazioni che esprime (il modo migliore per ottenere questo è di ricostruirsela da soli).

Altre due figure sono particolarmente utili per comprendere che tipo di funzione è l'esponenziale complesso, la 3.5 e la 3.6: la prima rappresenta un rettangolo nel piano  $z$ , la seconda mostra come questo rettangolo è trasformato nel piano  $w = e^z$ . I colori aiutano a capire dove finisce chi: il rosso va nel rosso, il verde nel verde e così via. Anche capire come si trasforma un movimento aiuta:

- (1) Con riferimento alle due figure a lato, immaginiamo che  $z$  parta da 1 e viaggi a velocità costante  $v$  verso l'alto con legge oraria  $z(t) = 1 + ivt$ . Allora la legge oraria di  $w$  è  $w(t) \sim e^{ivt}$ , il che vuol dire che  $w$  ruota con velocità costante  $v$  attorno all'origine. Dopo che  $z$  ha percorso una distanza di  $2\pi$ ,  $w$  ritorna alla sua posizione iniziale.
- (2) Adesso immaginiamo che  $z$  viaggi verso sinistra con velocità costante  $v$ : se parte da  $1 + ai$  ( $a$  reale), ha legge oraria  $z = 1 - vt + ia$ . Allora si avrà  $w(t) \sim e^{-vt}e^{ia}$ , vale a dire,  $w$  viaggia verso l'origine con velocità che diminuisce costantemente. Viceversa, se  $z$  viaggia verso destra con velocità costante  $s$ ,  $w$  si allontana dall'origine con una velocità in costante aumento.

Combinando (1) e (2), si vede che l'intero piano- $w$  (con l'eccezione di  $w = 0$ ) è riempito dall'immagine di una striscia orizzontale, nel piano- $z$ , di altezza  $2\pi$ . È lasciato come esercizio dimostrare che linee rette nel piano  $z$  si trasformano in spirali nel piano  $w$ .

### 3.8 Funzioni trigonometriche e iperboliche

Ci limitiamo alle definizioni (per maggiori dettagli, si vedano i problemi dedicati a queste funzioni).

SENI E COSENI:

$$\cos z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

equivalentemente

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{e} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

SENI E COSENI IPERBOLICI

$$\cos z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

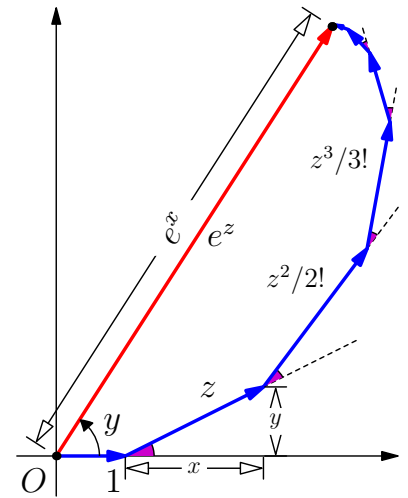


Figura 3.4: La funzione esponenziale.

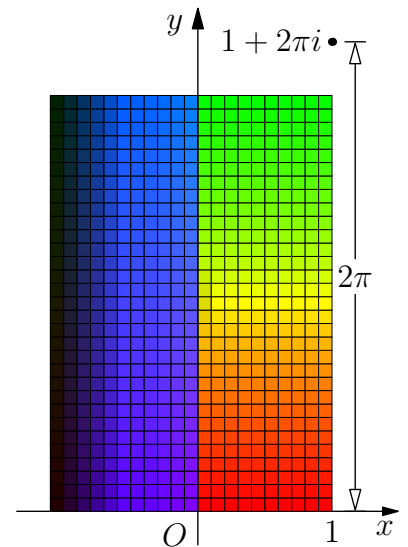


Figura 3.5: Piano  $z$ .

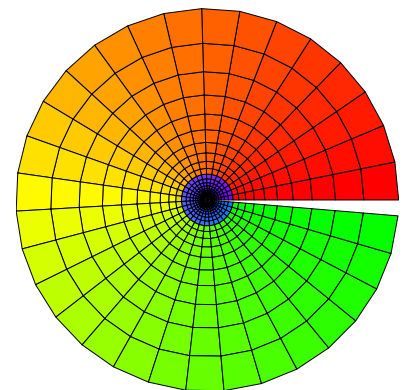


Figura 3.6: Piano  $w = e^z$ .