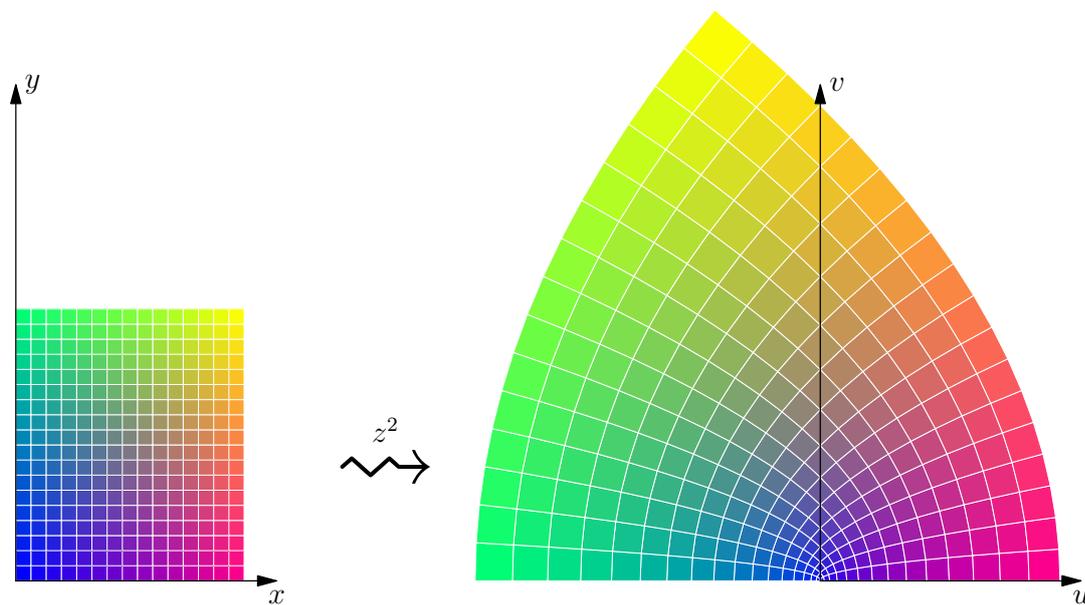


5

Funzioni analitiche

5.1 Descrizione locale di trasformazioni del piano

È interessante osservare che le rappresentazioni grafiche delle trasformazioni indotte da funzioni complesse, come z^2 , z^n , o l'esponenziale complesso e^z , hanno tutte la proprietà che "quadratini" si trasformano in "quadratini". Questo vale, per esempio, per le figure 1.5, 1.9, 1.10, 3.5 e 3.6. Si potrebbe pensare che questa proprietà sia dovuta alla particolare scelta della regione nel piano z , ad esempio, per la funzione $w = z^2$, alla particolare scelta della regione angolare nel piano z nella figura 1.5. Ma non è così: per una diversa scelta, come per esempio nella figura sotto, si osserva lo stesso fenomeno.



Come chiariremo tra breve, ogni coppia di curve ortogonali è in effetti trasformata in una coppia di curve ortogonali.

Spiegare la figura 1.8 (che riportiamo a lato) è banale: sia $w = u + iv$ e $z = x + iy$, allora

$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

Possiamo interpretare questa trasformazione come un *cambiamento di coordinate* nel piano reale

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}$$

In effetti, u e v sono coordinate ortogonali, come si verifica facilmente mostrando che le curve $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ sono ortogonali: mediante differenziazione implicita si vede immediatamente che hanno il prodotto delle pendenze pari a -1 ,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = \text{cost} &\Rightarrow x - yy' = 0 \Rightarrow y' = +y/x \\ 2xy = \text{cost} &\Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x \end{aligned}$$

Vogliamo adesso mostrare gli angoli tra curve arbitrarie passanti per un generico punto z sono lasciati invariati dalla trasformazione. Preliminarmente, ricordiamo che per la funzione vettoriale

$$\mathbf{f} : \mathbf{r} = (x, y) \mapsto \mathbf{w} = (u, v).$$

da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , il significato geometrico della matrice Jacobiana J , è di trasformare vettori infinitesimi in \mathbf{r} in vettori infinitesimi in \mathbf{w} ,

$$d\mathbf{w} = J d\mathbf{r}.$$

In componenti,

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

Per $w = f(z) = z^2$ si ha

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

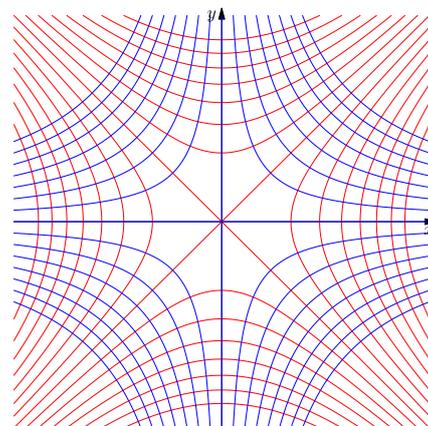
L'effetto locale della trasformazione è dunque di "stirare" i vettori infinitesimi e di ruotarli: è una *stiro-rotazione* (sezione. 1.3). Quindi, necessariamente, preserva gli angoli.¹ Una trasformazione che, come z^2 , preserva localmente gli angoli, è detta *conforme* (cfr. sezione. 5.5).

Se usiamo la notazione complessa per i vettori infinitesimi nei punti z e w ,

$$dz = dx + idy, \quad dw = du + idv$$

vediamo che l'effetto dello Jacobiano su (dx, dy) è semplicemente la moltiplicazione per il numero complesso $2z$, cioè

$$dw = (2z)dz$$



¹ Fatta eccezione per $z = 0$, dove $J = 0$ e dove, in effetti, l'angolo risulta raddoppiato.

Se, invece di z^2 , avessimo considerato la funzione $w = z^n$, avremmo trovato

$$dw = nz^{n-1}dz,$$

che è quello che si ottiene applicando formalmente le regole della derivazione, cioè

$$dw = f'(z)dz.$$

Semberebbe che analisi, algebra e geometria si stiano fondendo in un'unica struttura!

5.2 Geometria delle trasformazioni analitiche

L'effetto locale delle trasformazioni appena considerate, cioè l'effetto sui vettori infinitesimi nel punto z è quello illustrato in figura 5.1: una rotazione combinata con uno stiramento.

In generale, l'amplificazione e la rotazione sono diverse per diversi vettori infinitesimi nel punto z , quando sono le stesse come in figura 5.2, la trasformazione f è detta *analitica* (o olomorfa).

Le trasformazioni analitiche sono precisamente quelle il cui effetto locale è uno stiro-rotazione: tutti i vettori infinitesimi che emanano da un singolo punto sono amplificati e ruotati nello stesso modo.

(5.1)

Se una trasformazione è analitica, cerchi e quadrati infinitesimi si trasformano rispettivamente in cerchi e quadrati infinitesimi, ma, in generale, questo non vale per cerchi e quadrati finiti, che risultano deformati. Una stiro-rotazione locale in z è la moltiplicazione per un numero complesso che dipende da z e che denoteremo $f'(z)$,

$$dw = f'(z)dz.$$

La funzione $f'(z)$ è detta la *derivata* della funzione f nel punto z (dz è espanso di $|f'(z)|$ e ruotato di $\arg[f'(z)]$).

Ecco alcuni esempi.

- $f(z) = z^2$ è analitica e $f'(z) = 2z$ (incluso $z = 0$, dove però l'angolo viene raddoppiato).
- $f(z) = \bar{z}$ non è analitica: lo stiramento è uguale per tutti (e vale 1), ma la rotazione no: la figura 5.3 mostra che ϕ deve essere ruotato di -2ϕ per ottenere un vettore immagine con angolo $-\phi$. Quindi differenti vettori devono essere ruotati di quantità differenti, e quindi $f(z) = \bar{z}$ non è una stiro-rotazione.

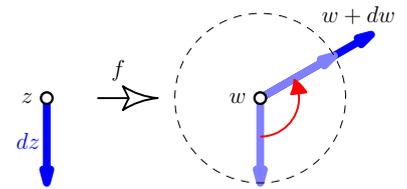


Figura 5.1: Significato geometrico di $dw = f'(z)dz$.

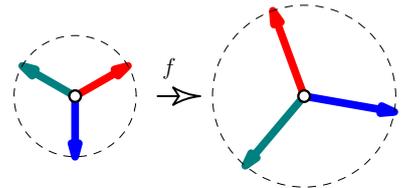


Figura 5.2: Azione locale di una funzione analitica: i tre vettori a sinistra sono tutti e tre ruotati dello stesso angolo e allungati della stessa quantità.

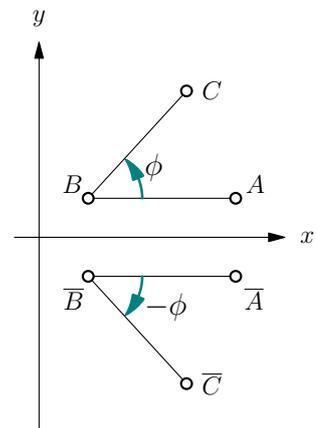


Figura 5.3: La coniugazione complessa è una riflessione rispetto all'asse reale che preserva il valore assoluto dell'angolo, ma non il suo segno; non è analitica.

Si osservi che il presupposto implicito della definizione (5.1) è ovviamente che l'azione locale della funzione sia ben definita. Questo significa che, per $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$, la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

è differenziabile, il che, a sua volta, significa che esistono i differenziali

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

A questo proposito ricordiamo che la continuità delle derivate prime di u e v è condizione SUFFICIENTE ma non necessaria per l'esistenza dei differenziali.

5.3 Le equazioni di Cauchy-Riemann

Alla moltiplicazione per un numero complesso

$$(x + iy) \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

è associata la trasformazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quindi, affinché la trasformazione $z = x + iy \mapsto w = u + iv$ sia analitica, la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

deve essere della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} \partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

Queste sono le famose *equazioni di Cauchy-Riemann*. Forniscono un criterio per riconoscere una funzione analitica.

La derivata è, localmente, la moltiplicazione per il numero complesso $a + ib$ che rappresenta lo stiro-giro, quindi

$$f'(z) = a + ib = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x(u + iv) = \partial_x f$$

Per Cauchy-Riemann abbiamo anche

$$f'(z) = \partial_y v - i\partial_y u = -i\partial_y(u + iv) = -i\partial_y f$$

In altre parole (per δx e δy infinitesimi reali),

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta x) - f(z)}{\delta x} = \frac{f(z + i\delta y) - f(z)}{i\delta y}$$

il che non è sorprendente, visto che LO STIRO-GIRO DEI VETTORI INFINITESIMI IN z È LO STESSO PER TUTTI, se la funzione è analitica.

Quindi, anche per un arbitrario δz in z , si avrà

$$f'(z) = \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

Questo giustifica il fatto che le usuali regole di calcolo delle derivate reali si estendono pari-pari alle derivate delle funzioni analitiche (notazione di Leibniz inclusa):

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \dots$$

5.4 Questioni di analisi

Usualmente, la nozione di funzione analitica è introdotta definendo prima la differenziabilità complessa in un punto:

Sia U un sottoinsieme aperto del piano complesso \mathbb{C} . Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso in un punto z se esiste il limite

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow z} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

(5.2)

Segue la definizione di funzione analitica:

Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è detta analitica (o olomorfa) su U se è differenziabile in senso complesso in ogni punto di U .

(5.3)

Questa definizione è del tutto equivalente alla caratterizzazione geometrica (5.1).

Dalla (5.1) o dalla (5.3) si deducono le regole di calcolo della derivata complessa e le proprietà della derivata, che sono del tutto analoghe a quelle della derivata reale, per esempio,

la regola di Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$ e

la regola della funzione composta $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$

Per una funzione complessa $f = u + iv$ in un dominio U , le relazioni tra differenziabilità reale (l'esistenza dei differenziali di u e v), analiticità, equazioni di Cauchy-Riemann e continuità delle derivate prime di u e v sono espresse dai seguenti teoremi:

- (1) Le equazioni di Cauchy-Riemann in U e la continuità delle derivate prime di u e v in U sono condizioni necessarie e sufficienti per l'analiticità di f in U .
- (2) Sia f differenziabile reale. Allora f è analitica se e solo se le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte in tutto U .

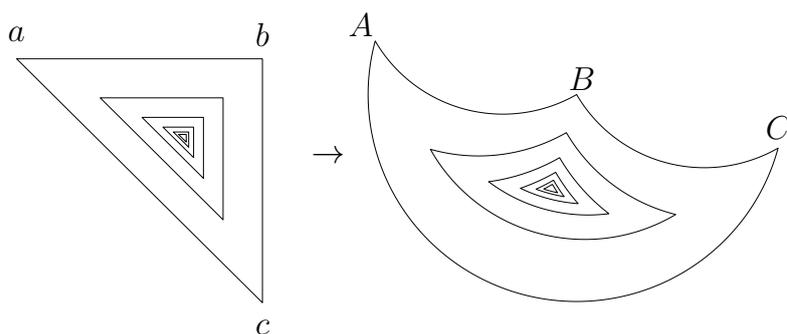
Mentre (1) è facile da dimostrare, (2) non lo è (teorema di Goursat). Un teorema sorprendente che dimostreremo nel seguito è il seguente:

- (3) Se f è analitica, allora ha derivate complesse di ogni ordine (cioè, se f è derivabile una volta lo è infinite volte).

5.5 Conforme = analitico

Se una trasformazione F preserva l'angolo, incluso il suo *segno*, tra qualunque coppia di curve che passano per il punto p , si dice che la trasformazione è *conforme nel punto p* . Se la trasformazione è conforme in tutti i punti della regione in cui è definita, si dice che la trasformazione è *conforme*. Se il valore numerico dell'angolo è preservato, ma il segno è invertito, la trasformazione è detta *anti-conforme*. Ad esempio, $z \mapsto \bar{z}$ è anticonforme. Stiro-rotazioni e traslazioni sono conformi (perché sono proprio le trasformazioni di similitudine del piano euclideo, cfr. sezione. 1.3, che come è noto dalla geometria elementare, lasciano intatti gli angoli).

Dalla (5.1) segue immediatamente che se una trasformazione è analitica, è anche conforme. Cerchiamo di capire in che senso vale il viceversa. Guardiamo la figura sotto.



Il triangolo finito (non infinitesimo) abc è trasformato conformemente nel triangolo ABC : i lati si distorcono, ma gli angoli restano invariati.

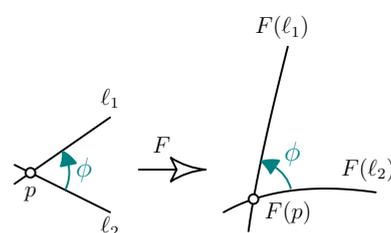


Figura 5.4: Trasformazione conforme.

Si immagini adesso, mediante trasformazione di scala, di comprimere il triangolo abc verso un punto arbitrario dentro la regione. Mentre facciamo questo, i lati delle immagini dei triangoli diventano sempre più linee rette, mentre gli angoli, ovviamente, non cambiano. Perciò un triangolo infinitesimo a sinistra è trasformato in un triangolo infinitesimo *simile* a destra. Quindi è ottenuto mediante stiro-rotazione dall'originale. Quindi la trasformazione è analitica. Perciò, *se una trasformazione è conforme in un intorno comunque piccolo del punto p , allora è analitica in p .* In particolare,

- L'inversione complessa $z \mapsto 1/z$ è analitica (essendo conforme, cfr. problema 5.2).

- Le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

sono analitiche (essendo conformi, cfr. problema 5.3).

- L'inversione $z \mapsto 1/\bar{z}$ non è analitica.

Si osservi che una funzione può non essere conforme in un punto, pur avendo derivata complessa in quel punto ed essendo analitica in qualunque intorno di quel punto; per esempio, $w = f(z) = z^2$ è conforme dappertutto eccetto che nei due punti critici $z = 0$ e $z = \infty$, dove gli angoli sono raddoppiati, ma è derivabile nello 0 ed è analitica in qualunque dominio che contenga lo zero (per $z = \infty$ non è analitica). In generale:

<p><i>Una funzione analitica f può non essere conforme nei punti critici della trasformazione, cioè nei punti c in cui $f'(c) = 0$.</i></p>	(5.4)
--	-------

5.6 Funzioni armoniche

Per essere analitica, la funzione $f = u + iv$ deve soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u\end{aligned}$$

E se queste sono soddisfatte le funzioni u e v devono essere *funzioni armoniche*, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_x u &= \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \\ \partial_x \partial_x v &= -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \Delta v \equiv \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

Le proprietà generali delle funzioni armoniche, sono richiamate nei complementi a questo capitolo (sezione. 5.8.1).

È molto istruttivo dedicare un po' di spazio a raccontare la storia di come il legame tra funzioni armoniche e funzioni analitiche fu compreso. Sorprendentemente, questo legame fu intuito quando l'analisi complessa muoveva i suoi primissimi passi e fu scoperto con ragionamenti di fisica-matematica.

Nei suoi saggi sull'idrodinamica del 1757, d'Alembert studia il moto di un corpo che si muove attraverso un fluido ideale incomprimibile e non viscoso. In linguaggio moderno, le equazioni del campo di velocità \mathbf{V} di tale fluido in condizioni stazionarie sono

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{incomprimibilità})$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (\text{irrotazionalità})$$

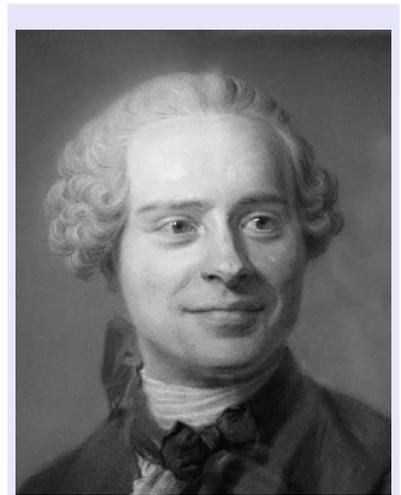
La seconda equazione stabilisce che deve esistere un campo scalare u (potenziale) tale che $\mathbf{V} = \nabla u$, per cui, tenuto conto della prima, essendo

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \equiv \Delta,$$

si conclude che u deve essere una funzione armonica, cioè deve soddisfare l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Studiando il problema in due dimensioni, d'Alembert si rese conto che per determinare una funzione armonica bastava partire da una "funzione complessa" e prenderne la parte reale. Per capire la scoperta di d'Alembert, occorre tenere presente che per "funzione complessa" d'Alembert e i suoi contemporanei intendevano (senza neanche renderlo esplicito tanto era ovvio per loro) ciò che si ottiene da $z = x + iy$ applicando una *regola ben definita*; per esempio, z^2 o $z + 1/z$, cioè funzioni che oggi sappiamo essere analitiche. (In effetti, come vedremo nel seguito, è proprio $z + 1/z$ la funzione analitica che fornisce il moto del fluido attorno ad un corpo (di forma circolare) immerso nel fluido, che era il problema fisico che d'Alembert voleva risolvere.)



Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) è stato un fisico e matematico francese. Editore con Diderot dell'Enciclopedia, diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica analitica, della fisica dei fluidi e dei sistemi vibranti. Noto per aver detto "Allez en avant, et la foi vous viendra" a chi riteneva le regole del calcolo differenziale oscure e non rigorose.