

6

Teorema di Cauchy

6.1 Integrazione

Sull'integrazione complessa in quanto tale c'è poco da dire. Anche se non sembra, è già nota: dato un cammino regolare C nel piano complesso dal punto z_1 al punto z_2 , e una funzione complessa $f(z) = u + iv$, l'integrale di linea si f lungo C ,

$$\int_C f(z) dz,$$

è

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx. \quad (6.1)$$

La nozione di integrale di una funzione complessa è dunque ricondotta a quella di integrale di linea nel piano, che si assume noto dall'analisi reale. Le nozioni di continuità della curva e di regolarità sono le stesse sia che si guardi il piano come \mathbb{C} sia come \mathbb{R}^2 .

C'è invece molto da dire sulla (6.1). Innanzi tutto, la riscriviamo in modo che il suo significato geometrico sia manifesto. Si introduca il campo vettoriale

$$\bar{\mathbf{f}} = (u, -v). \quad (6.2)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_C u dx - v dy &= \int_C u dx + (-v) dy = \int_C \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{r}, & d\mathbf{r} &\equiv \mathbf{t} ds = (dx, dy) \\ \int_C u dy + v dx &= \int_C u dy - (-v) dx = \int_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds, & \mathbf{n} ds &= (-dy, dx) \end{aligned}$$

In queste formule, $ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ è la lunghezza di un arco di curva infinitesimo; \mathbf{t} e \mathbf{n} sono rispettivamente il versore tangente e il versore normale alla curva.

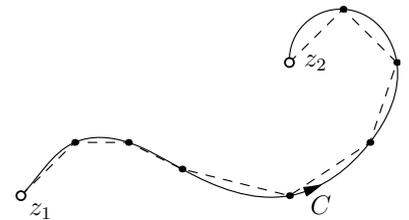


Figura 6.1: Più precisamente, la (6.1) è definita come limite di somme di Riemann:

$$I_N = \sum_i^N f(z_i) \Delta z_i = \text{Re } I_N + i \text{Im } I_N,$$

dove le parti reale e immaginaria di I_N convergono agli integrali di linea reali a secondo membro della (6.1).

In coordinate polari il significato geometrico di $f dz$ è ancora più trasparente. Siano β e α gli angoli di f e dz rispettivamente, allora

$$f dz = f e^{i\beta} e^{i\alpha} ds.$$

Detto θ è l'angolo tra \bar{f} e dz , si vede facilmente dalla figura figura 6.2 che

$$f e^{i\beta} e^{i\alpha} ds = |\bar{f}| e^{i\theta} ds,$$

e quindi che

$$\begin{aligned} f dz &= \left[\bar{f} \cos \theta + i \bar{f} \sin \theta \right] ds \\ &= \left[\bar{f} \bullet \mathbf{t} + \bar{f} \bullet \mathbf{n} \right] ds \\ &= \bar{f} \bullet d\mathbf{r} + \bar{f} \bullet \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

Riassumendo,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \bar{f} \bullet d\mathbf{r} + i \int_C \bar{f} \bullet \mathbf{n} ds. \quad (6.3)$$

6.2 Campo vettoriale associato ad una funzione complessa

La ragione per cui alla f risulta associato NON il campo $\mathbf{f} = (u, v)$, ma il campo *coniugato* $\bar{f} = (u, -v)$ è l'invarianza per rotazioni del prodotto scalare complesso (1.6). Data una funzione $f = u + iv$, la quantità invariante per rotazioni è $f \bullet dz = \bar{f} dz$ e non $f dz$. Ha quindi significato geometrico invariante

$$f \bullet dz = (u - iv)(dx + idy) = u dx + v dy + i(udy - v dx) = \mathbf{f} \bullet d\mathbf{r} + i \mathbf{f} \bullet \mathbf{n} ds,$$

da cui

$$\int_C \bar{f} dz = \int_C f \bullet dz = \int_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{r} + i \int_C \mathbf{f} \bullet \mathbf{n} ds,$$

che è esattamente la (6.3) con f e \bar{f} scambiati di ruolo.

Sia come sia, entrambe le associazioni $f \leftrightarrow \mathbf{f}$ e $f \leftrightarrow \bar{f}$ sono legittime e ammissibili, ma la seconda risulta essere quella *naturale*.¹ Come vedremo nel seguito, le linee di forza (o di flusso) del campo \bar{f} permettono la visualizzazione più profonda e utile della funzione f , mettendone in evidenza proprietà altrimenti nascoste (questo risulterà più chiaro nel seguito), soprattutto quando si considera l'integrazione di funzioni complesse lungo curve chiuse. Due esempi di ritratti di fase di campi di funzioni complesse sono dati nelle figure 6.3 e 6.4.

Infine, osserviamo che la rappresentazione di una funzione complessa mediante il ritratto di fase di un campo vettoriale non solo va

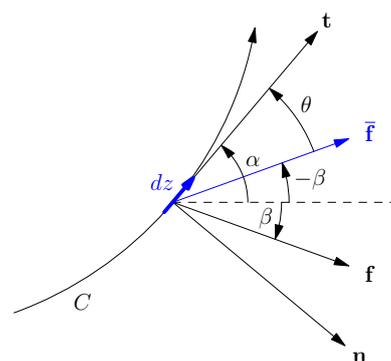


Figura 6.2: Relazioni angolari tra \bar{f}, f, t, n e $d\mathbf{r}$.

¹ Forzando un po' la mano, si potrebbe anche parlare di *campo* \bar{f} associato alla *funzione* f , ma col seguente avvertimento: per "campo \bar{f} " si deve intendere \bar{f} NON come funzione complessa, ma come funzione vettoriale reale che ha u come componente x e $-v$ come componente y .

incontro alla concretezza fisica, ma anche a quella matematica: getta un ponte tra la teoria delle funzioni complesse e quella dei sistemi dinamici con spazio delle fasi il piano (cioè sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine).

6.3 Circuitazione e Flusso

Consideriamo adesso il caso in cui il cammino d'integrazione sia un circuito, descritto da una curva *regolare* (= la tangente esiste) *semplice* (= non ci sono intersezioni) e *chiusa* C , come in figura 6.5. In particolare, questo significa che la regione di piano \mathcal{R} racchiusa da C è *semplicemente* connessa. Allora

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{t} ds + i \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds \quad (6.4)$$

I due integrali a secondo membro della (6.4) sono noti: il primo è la circuitazione di $\bar{\mathbf{f}}$ lungo la curva chiusa C ,

$$\text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{r}. \quad (6.5)$$

Per il il teorema di Green-Stokes,

$$\text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{S}, \quad (6.6)$$

dove $d\mathbf{S}$ è il vettore "elemento infinitesimo di superficie nel piano che è sempre perpendicolare alla direzione verticale (immaginando il piano complesso identificato con il piano xy dello spazio tridimensionale), e quindi sempre nella stessa direzione di $\nabla \times \bar{\mathbf{f}}$. Questi due vettori possono avere, al più una discordanza di verso, e quindi

$$\nabla \times \bar{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{S} = \pm |\nabla \times \bar{\mathbf{f}}| dS.$$

Il secondo integrale della (6.4) è il flusso di $\bar{\mathbf{f}}$ attraverso la curva chiusa C ,

$$\text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \bar{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \bar{\mathbf{f}} dS,$$

dove dS è l'elemento infinitesimo di area (l'analogo in due dimensioni del volume). Per la seconda uguaglianza è stato usato il teorema di Gauss in due dimensioni. (Siamo in due dimensioni e il bordo di una regione è una curva chiusa: si veda la figura 6.9 più avanti, che mostra che si tratta proprio del flusso attraverso la superficie laterale del cilindro con base C , quando si identifica il piano complesso con il piano xy dello spazio tri-dimensionale.) In definitiva,

$$\oint_C f(z)dz = \text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C) \quad (6.7)$$

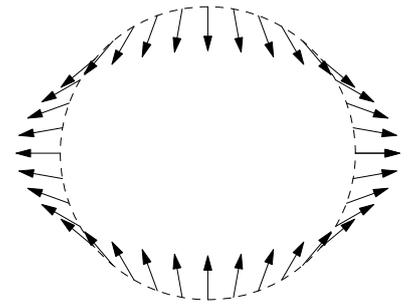


Figura 6.3: Ritratto di fase del campo della funzione $z \mapsto z$, cioè del campo vettoriale $(x, y) \mapsto (x, -y)$, equivalentemente, del campo vettoriale $f(z) = \bar{z}$. Sono stati disegnati solo i vettori del campo per punti sul cerchio unitario.

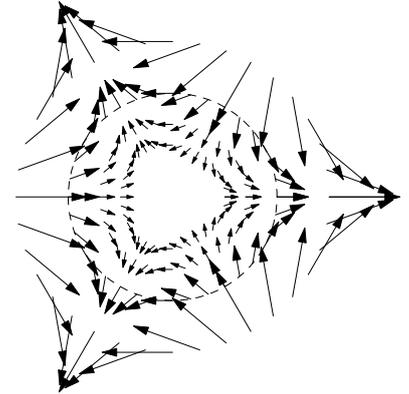


Figura 6.4: Ritratto di fase del campo della funzione $z \mapsto z^2$ cioè del campo $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, -2xy)$ (cfr. sezione 5.1), equivalentemente, del campo vettoriale $f(z) = \bar{z}^2$. Sono stati disegnati i vettori del campo per diverse distanze dall'origine. La proprietà nascosta nelle altre visualizzazioni, ma qui del tutto manifesta, è l'invarianza per rotazioni di $\pi/3$.

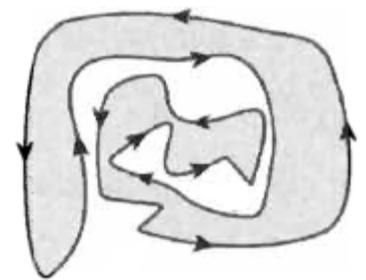


Figura 6.5: Curva regolare semplice che racchiude una regione semplicemente connessa.

Siamo così in grado di calcolare integrali di funzione complesse lungo curve chiuse con metodi noti: basta calcolare circuitazione e flusso del loro campo coniugato.

È inteso che nella (6.7) l'orientamento della curva C è positivo. Ricordiamo la convenzione sull'orientamento positivo: si dice che il bordo C di una regione \mathcal{R} è percorso in *sensu o verso positivo* se camminando lungo quella direzione, la regione risulta sempre a sinistra. Per un cerchio la direzione positiva risulta essere quella anti-oraria. La normale \mathbf{n} è la *normale diretta verso l'esterno*, e quindi a destra di chi cammina lungo C .

La (6.7) vale anche per il contorno $C = \partial\mathcal{R}$ di una regione molteplicemente connessa \mathcal{R} , cioè quando il contorno (o bordo) della regione è l'unione di più curve semplici, $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$ (figura 6.6). In questo caso, l'orientamento positivo di C è ancora fissato dalla regola ricordata sopra: questo richiede che le curve "interne", come C_2 e C_3 in figura 6.6, siano percorse in senso orario (per avere la regione a sinistra).

È utile rendere manifesta la natura algebrica dei cammini ed esprimere una curva chiusa che delimita una regione molteplicemente connessa come *somma algebrica* delle curve che la delimitano piuttosto che come unione: se la curva semplice C è percorsa in senso anti-orario, scriveremo $+C$ o semplicemente C , e se è percorsa in senso orario, scriveremo $-C$. Per esempio, per la curva C (non semplice) che delimita la regione \mathcal{R} in figura 6.6, si ha

$$C = C_1 - C_2 - C_3.$$

Per gli integrali vale allora la seguente regola

$$\oint_{a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots} = a_1 \oint_{C_1} + a_2 \oint_{C_2} + \dots,$$

dove a_1, a_2, \dots possono assumere i valori ± 1 .

ESEMPIO. Vediamo la (6.7) in un caso semplice. Calcoliamo

$$\oint_C \bar{z} dz$$

per C curva chiusa attorno all'origine. Il campo coniugato associato a $f(z) = \bar{z}$ è $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. La circuitazione è chiaramente zero, ma il flusso è positivo (entrano più linee di forza, di quante ne escano). In effetti, si ha

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$\nabla \bullet \mathbf{r} = 2$$

Quindi

$$\oint_C \bar{z} dz = 2 \iint_{\mathcal{R}} dS = 2i \mathcal{A}(C)$$

dove $\mathcal{A}(C)$ è l'area della regione di piano racchiusa da C .

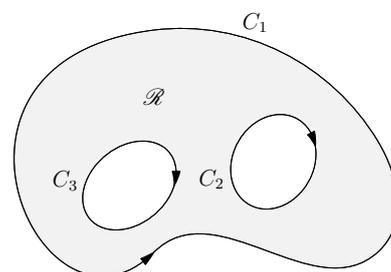


Figura 6.6: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. L'orientamento di C è positivo se C_1 è percorso in senso orario, e C_2, C_3 in senso antiorario.

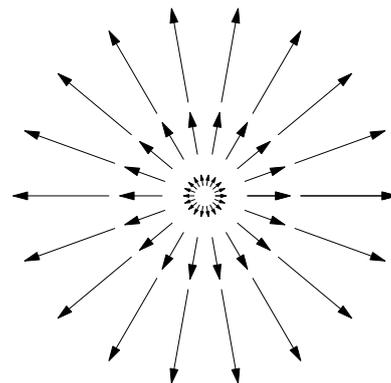


Figura 6.7: Linee di forza del campo vettoriale $z \leftrightarrow \mathbf{r}$ associato alla funzione complessa $z \mapsto \bar{z}$. dal disegno è ovvio che la sua circuitazione è nulla. Il suo flusso attraverso un cerchio di raggio R è pari alla sua divergenza costante, uguale a 2, \times l'area della regione racchiusa dal cerchio. Quindi $\text{FLUSSO} = 2\pi R^2$.

6.4 Significato fisico delle funzioni analitiche

Sorprendentemente, come aveva già intravvisto d'Alembert, si ha:

FUNZIONI ANALITICHE = CAMPI SOLENOIDALI E IRROTAZIONALI NEL PIANO, vale a dire:

Il campo vettoriale coniugato della funzione complessa H è solenoidale (divergenza nulla) e irrotazionale (rotore nullo) sse H è analitica.

(6.8)

Questa proposizione è molto importante e la sua verifica è un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{f}} &= \partial_x(-v) - \partial_y u = -(\partial_x v + \partial_y u) \\ \nabla \bullet \bar{\mathbf{f}} &= \partial_x u + \partial_y(-v) = \partial_x u - \partial_y v \end{aligned}$$

Quindi, divergenza e rotore si annullano se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann.

Questo significa che possiamo attribuire alle funzioni analitiche un significato fisico diretto e trasferire ad esse le conoscenze fisiche al riguardo.

ELETTROSTATICA. Consideriamo il campo elettrico \mathbf{E} nel piano in condizioni stazionarie, e quindi governato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{ovunque} \\ \nabla \bullet \mathbf{E} &= 0 \quad \text{dove non ci sono cariche} \end{aligned}$$

Al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ è quindi associata la funzione analitica $f(z) = E_x - iE_y$. Per la legge di Gauss si ha

$$\text{FLUSSO}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} \, ds = 2\pi \sum_i q_i$$

La scelta di 2π a secondo membro è per avere

$$\frac{q}{r} \mathbf{e}_r = \frac{q}{r} (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \tag{6.9}$$

come campo prodotto da una carica puntiforme q posta nell'origine.

La funzione complessa associata al campo elettrico prodotto da una carica q posta nell'origine è dunque

$$\frac{q}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{q}{z}$$

MAGNETOSTATICA. Equazioni per il campo magnetico in condizioni stazionarie:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \quad \text{dove non ci sono correnti} \\ \nabla \bullet \mathbf{B} &= 0 \quad \text{ovunque (non ci sono cariche magnetiche)} \end{aligned}$$

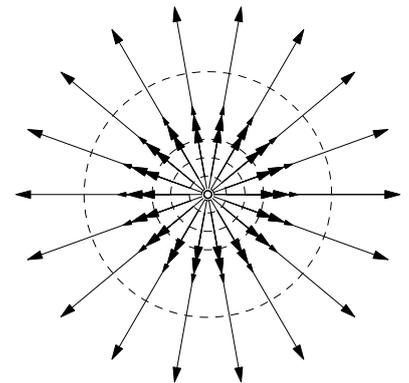


Figura 6.8: Linee di forza del campo elettrico generato da una carica nel piano. L'origine è una SORGENTE.

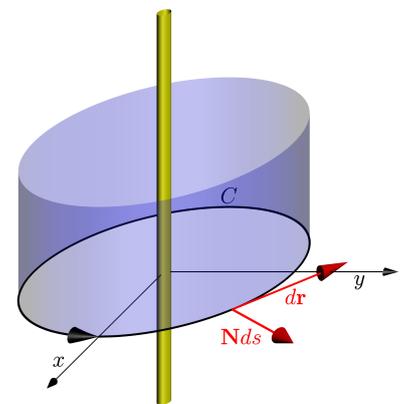


Figura 6.9: Le cariche elettriche nel piano vanno pensate come le sezioni di fili indefiniti, perpendicolari al piano, con densità lineare di carica costante, come mostrato in figura. Il campo elettrico generato da una carica nel piano va dunque come $1/r$ e non come $1/r^2$.

Possiamo procedere come prima, ma adesso i ruoli di circuitazione e flusso si scambiano: abbiamo cariche di "circuitazione", cioè correnti I , e linee di flusso prive di pozzi e sorgenti.

Il campo generato da una corrente I lungo un filo infinitamente sottile passante per l'origine e perpendicolare al piano (cfr. figura 6.10) è

$$\frac{I}{r} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y)$$

per cui la sua funzione complessa (coniugata) associata è

$$i \frac{I}{z} = I \frac{e^{-i\theta + i\pi/2}}{r}$$

FLUIDO PERFETTO STAZIONARIO. Equazioni per il campo di velocità del fluido:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= 0 & \text{dove non ci sono vortici} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 & \text{dove non ci sono pozzi o sorgenti} \end{aligned}$$

Per "cariche" (pozzi o sorgenti e vortici) puntiformi, oltre alle linee di flusso già viste per campi elettrici e magnetici, adesso sono anche possibili configurazioni tipo quella in figura 6.11, per cui l'origine è sia una sorgente sia un vortice.

6.5 Teorema di Cauchy

Questo teorema stabilisce quanto segue:

Sia $f(z)$ analitica in una regione \mathcal{R} e sul suo bordo C . Allora

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

(6.10)

È il teorema più importante dell'analisi complessa, ma, sorprendentemente, risulta automaticamente dimostrato sulla base di quanto è stato esposto finora. Grazie alla (6.8), e ai teoremi di Gauss e Ampère (e di Green e Stokes) noti dalla fisica e dall'analisi reale, non è richiesto alcun sforzo ulteriore per dimostrarlo.

6.6 Formula di Cauchy

Ritorniamo alla (6.9). Se nel piano ci sono altre cariche, per il campo elettrico totale si ha

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{E}_{ext}$$

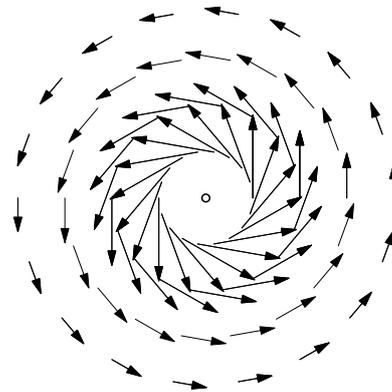


Figura 6.10: Linee di forza del campo magnetico generato da una corrente elettrica che scorre lungo un filo indefinito perpendicolare al piano. L'origine è un VORTICE.

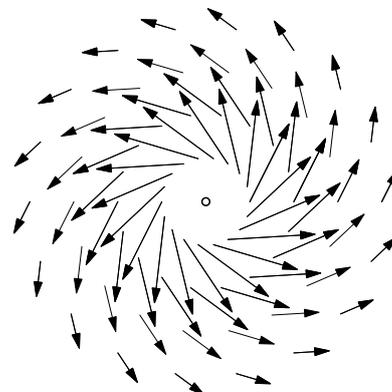


Figura 6.11: Linee di forza di un fluido in moto vorticoso attorno all'origine. L'origine è sia sorgente sia vortice.

dove \mathbf{E}_{ext} è il campo generato dalle cariche esterne. Detta $g(z)$ la funzione associata a \mathbf{E}_{ext} , la funzione complessa associata a \mathbf{E} è

$$\frac{q}{z} + g(z) = \frac{q + zg(z)}{z}$$

Se prendiamo una curva C che racchiude solo l'origine, per la legge di Gauss abbiamo

$$\text{FLUSSO}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi q$$

In generale

$$\oint_C f(z) dz = \text{CIRCUITAZIONE}(\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{FLUSSO}(\bar{\mathbf{f}}, C)$$

ma nel nostro caso la circuitazione CIRCUITAZIONE è zero, quindi

$$\oint_C \frac{q + zg(z)}{z} dz = 2\pi i q \quad (6.11)$$

Osserviamo che $g(z)$ è analitica (perché è il campo elettrico generato da cariche fuori da C), ma per il resto è arbitraria. Quindi quello che abbiamo a numeratore della funzione integranda è una funzione analitica $f(z)$ nella regione racchiusa da C tale che $f(0) = q$, che è la quantità che compare a secondo membro moltiplicata per $2\pi i$. Quindi, facendo astrazione dal significato fisico, quello che abbiamo è

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z} = 2\pi i f(0)$$

Aver posto la carica nell'origine era del tutto arbitrario, l'avessimo posta in un generico punto p avremmo ottenuto

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p) \quad (6.12)$$

Questa formula è nota come *formula di Cauchy* e vale sotto l'ipotesi che $f(z)$ sia analitica all'interno e lungo una curva semplice chiusa C ; p è un punto qualsiasi all'interno di C . Anche questa è una pietra miliare dell'analisi complessa e nel seguito vedremo come molte proprietà delle funzioni analitiche sono conseguenza di questa formula.

Il fatto che nel caso considerato q sia reale non è essenziale: la formula vale anche per q complesso. Vista la sua importanza, diamo della (6.12) anche una dimostrazione diretta. Sia

$$f(z) = \frac{f(z)}{z-p}$$

dove $f(z)$ è analitica. Poiché $f(z)$ è analitica eccetto che in p , rotore e divergenza del campo $\bar{\mathbf{f}}$ saranno nulli ovunque eccetto che in p . Perciò se C è un un circuito attorno a p , tutto il flusso e circolazione emanano da un piccolo intorno di p . Se $f(p) = A + iB$, in questo piccolo intorno (piccolo a piacere) avremo

$$\bar{H} = \frac{A - iB}{\bar{z} - \bar{p}} = A \frac{1}{\bar{z} - \bar{p}} - B \frac{i}{\bar{z} - \bar{p}},$$

da cui

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz &= \text{CIRCUITAZIONE } (\bar{\mathbf{f}}, C) + i \text{ FLUSSO } (\bar{\mathbf{f}}, C) \\ &= -2\pi B + i2\pi A = 2\pi i f(p). \end{aligned}$$

Se questa dimostrazione sembra troppo veloce, si veda la figura 6.12 e si proceda come segue.

Sia C_ϵ un piccolo cerchio di raggio ϵ che circonda il punto p . Nella regione del piano tra la curva C e la curva Γ la funzione

$$\frac{f(z)}{z-p}$$

è analitica. Il bordo di questa regione è $C - C_\epsilon$. Allora, per teorema di Cauchy, si ha

$$\oint_{C-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz + \oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = 0$$

Quindi

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = - \oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz = \oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz.$$

Ma il cerchio C_ϵ può essere preso con raggio arbitrariamente piccolo. Allora

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} dz \approx f(p) \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p},$$

con “ \approx ” che diventa “=”, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. Calcoliamo l’integrale a secondo membro, tenuto conto che $z-p = \epsilon e^{i\theta}$:

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p} = \int_0^{2\pi} \frac{d(p + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Conclusione (nel limite $\epsilon \rightarrow 0$):

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = 2\pi i f(p)$$

che era proprio quello che si voleva dimostrare.

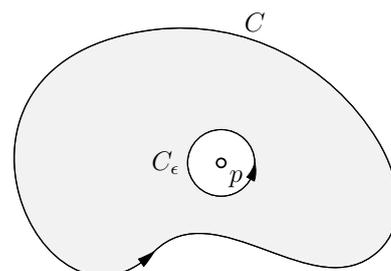


Figura 6.12: C_ϵ è un piccolo cerchio di raggio ϵ che circonda un qualunque punto p nella regione delimitata da C .