

7

Teorema dei residui

Nella lezione precedente abbiamo visto che la legge di Gauss nel piano è l'impalcatura su cui si basa il teorema di Cauchy e da cui discende immediatamente la formula di Cauchy. In questa lezione mostriamo che vale anche il viceversa. L'analogo della legge di Gauss per le funzioni analitiche è noto come *teorema dei residui*.

7.1 Antiderivata di una funzione analitica

Sia $f(z)$ una funzione analitica in una regione semplicemente connessa \mathcal{R} . Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_C f(z) dz$$

dal punto A al punto B , lungo la curva C , come mostrato in figura 7.1.

Poiché la funzione è analitica, per il teorema di Cauchy si ha

$$\oint_L f(z) dz = 0$$

dove L è il circuito $L = C' - C$ e C' è un altro cammino da A a B . Ne segue che

$$I = \int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz$$

e quindi che l'integrale da A a B non dipende dal cammino. Scriviamo dunque

$$I = \int_A^B f(z) dz$$

omettendo il riferimento alla curva C .

Se l'integrale di linea non dipende dal cammino tra A e B , deve esistere una funzione $V = V(z)$ tale che

$$\int_A^B f(z) dz = V(B) - V(A)$$

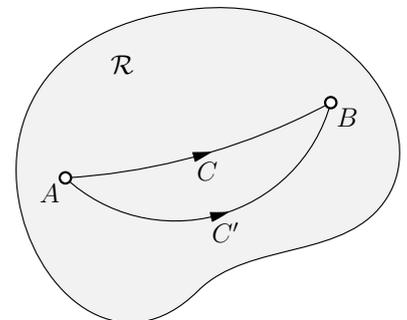


Figura 7.1: L'integrale di linea da A a B di una funzione analitica non dipende dal cammino.

La funzione V è chiamata *anti-derivata* o *primitiva* in matematica e *potenziale* in fisica (a meno di un segno irrilevante in questa sede); in entrambi i casi, è data a meno di una costante additiva.

Come di consueto, il potenziale $V(z)$ è costruito scegliendo arbitrariamente un punto P e il valore $V(P)$ (la "terra"), quindi V è definito in ogni punto Z di \mathcal{R} nel seguente modo:

$$V(Z) = V(P) + \int_C f(z) dz,$$

dove C è un qualunque cammino da P a Z . Si verifica facilmente che V è una funzione analitica, che vale il *teorema fondamentale del calcolo*

$$V'(z) = f(z)$$

(la convenzione usata in fisica è che la derivata del potenziale cambiata di segno sia pari al campo) e che

$$\int_A^B f(z) dz = (V(P) - V(A)) + (V(B) - V(A)) = V(B) - V(A)$$

Per l'antiderivata possiamo usare il simbolo di integrale indefinito, e scrivere

$$V(z) = \int f(z) dz$$

Dovrebbe essere abbastanza chiaro che le regole note dall'analisi reale si estendono pari pari all'integrale delle funzioni analitiche, ad esempio (a meno di una costante additiva),

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1), \quad \int \cos z dz = \sin z, \quad \int e^z dz = e^z, \quad \int \frac{dz}{z} = \ln z, \dots$$

Concludiamo questa parte del discorso sugli integrali con un'utile disuguaglianza che vale sia per integrali di funzioni analitiche sia per integrali di funzioni non analitiche

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq [\text{valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{lunghezza di } C]$$

Questa disuguaglianza è intuitivamente ovvia (discende immediatamente dal significato di integrale complesso come integrale di linea).

7.2 Qualche esempio

ESEMPIO 7.1. Si vuole calcolare

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2}.$$

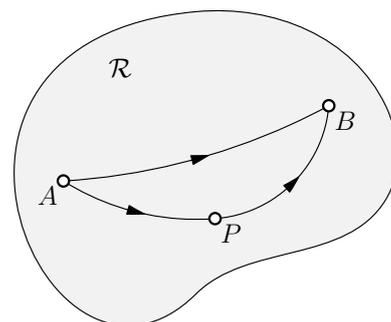


Figura 7.2: L'antiderivata è definita a meno di una costante arbitraria, ad esempio il suo valore in un punto arbitrario P .

Se A e B sono in una regione semplicemente connessa \mathcal{R} che non include l'origine, la risposta è immediata: in \mathcal{R} la funzione integranda è analitica, la primitiva è $-1/z$ e quindi

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

Ci si rende facilmente conto che la restrizione a \mathcal{R} come in figura 7.3 non è necessaria: possiamo farci passare l'ansia della singolarità $z = 0$ perché, essendo la primitiva $-1/z$ una funzione ad un solo valore, tutti i cammini nel piano complesso da A a B danno lo stesso valore per l'integrale (ovviamente vanno esclusi i cammini che passano attraverso $z = 0$). Dunque

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

è un'identità del tutto generale.

In particolare,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

qualunque sia il circuito C (sia che la singolarità $z = 0$ sia dentro il circuito o fuori). Analogo discorso vale per potenze negative di z , eccetto la potenza -1 , e per singolarità arbitraria $z = a$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0, \quad n \geq 2$$

Per la funzione $1/(z-a)$ il discorso è diverso: la primitiva è il logaritmo, e il logaritmo è una multifunzione, quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0,$$

se C è una curva semplice chiusa che non include il punto a , ma se C lo racchiude, dopo un giro completo si guadagna un fattore $2\pi i$ e quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \text{se } a \text{ è dentro } C$$

Si osservi che avremmo potuto ottenere questo risultato applicando direttamente la formula di Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

alla funzione $f(z) = 1$. Passiamo adesso a due esempi un po' più complicati.

ESEMPIO 7.2. Si vuole calcolare $\oint_C f(z) dz$ per

$$f(z) = \frac{z^5}{(z+1)^2}$$

dove C è la curva mostrata in figura 7.4.

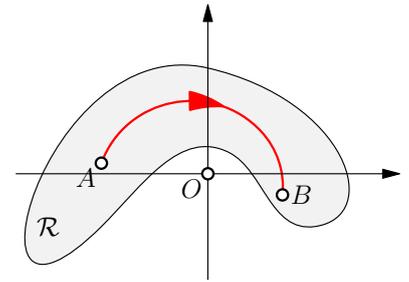


Figura 7.3: Il cammino da A a B è in una regione che non include lo zero.

Scrivendo il numeratore come $[(z+1) - 1]^5$, otteniamo

$$f(z) = (z+1)^3 - 5(z+1)^2 + 10(z+1) - 10 + 5 \left[\frac{1}{z+1} \right] - \frac{1}{(z+1)^2}$$

Sulla base di quanto abbiamo discusso sopra (tutte le potenze positive e negative eccetto la potenza -1 danno contributo nullo all'integrale), e poiché la curva racchiude il punto $a = -1$, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa $5/(z+1) = 5/[z - (-1)]$. Si ottiene

$$\oint_C f(z) dz = 5 \oint_C \frac{dz}{z+1} = 5 \times 2\pi i = 10\pi i$$

ESEMPIO 7.3. Si vuole calcolare $\oint_C f(z) dz$ per $f(z) = \sin z/z^6$ e per la curva mostrata in figura 7.5.

Ricordiamo lo sviluppo in serie del seno:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$$

Allora

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!} \left[\frac{1}{z} \right] - \frac{1}{7!}z + \frac{1}{9!}z^3 - \dots$$

Per le stesse ragioni di prima, essendo il punto $a = 0$ dentro la curva, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa:

$$\oint_C f(z) dz = \frac{1}{5!} \oint_C \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{5!}$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che la curva è percorsa in senso negativo (orario).

7.3 Calcolo di integrali

Dagli esempi precedenti traiamo la seguente morale: se nell'intorno del punto a la funzione $f(z)$ ha la forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots \quad (7.1)$$

allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

per ogni curva semplice chiusa C percorsa in senso positivo, che racchiude il punto a , e al cui interno $f(z)$ è analitica (fatta eccezione, ovviamente, per il punto a). Naturalmente, se C è percorsa in senso negativo, il valore dell'integrale è $-2\pi i c_{-1}$.

Questa è una regola potente per calcolare integrali lungo linee chiuse di funzioni della forma (7.1). Poiché c_{-1} è la sola parte della

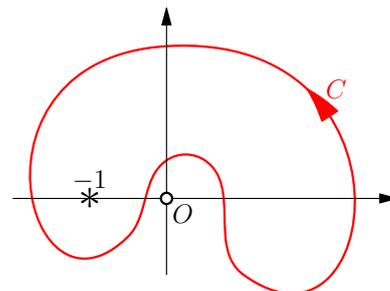


Figura 7.4: In -1 la funzione è singolare (ha un polo, come vedremo tra poco).

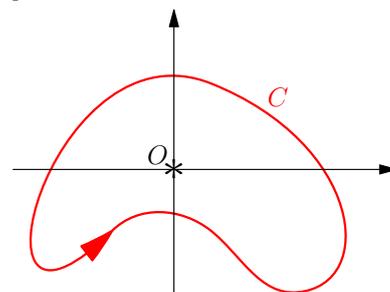


Figura 7.5: Il cammino C racchiude l'origine, dove la funzione integranda è singolare (ha un polo).

funzione che rimane dopo che integriamo, è chiamato il *residuo* della funzione nella singolarità $z = a$ ed è denotato $\text{Res}(f, a)$. Nell'interpretazione fisica della lezione precedente, il residuo è una *carica*: la sua parte reale è la sorgente (o pozzo) del campo \vec{f} e la sua parte immaginaria è la corrente (o vortice).

Il trucco per estrarre $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ da una funzione che *potrebbe* essere della forma (7.1), ma non è data in tale forma, è presto trovato. Si moltiplichi per $(z - a)^m$ ambo i membri dell'equazione, in modo da ottenere una serie di potenze

$$g(z) = (z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots + c_{-2}(z - a)^{m-2} + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0(z - a)^m + c_1(z - a)^{m+1} + c_2(z - a)^{m+2} + \dots$$

In una serie di potenze, il coefficiente di $(z - a)^n$ è ottenuto con la regola di Taylor: si deriva n volte la serie, si divide per $n!$ e si calcola la serie così ottenuta nel punto $z = a$. Allora, essendo $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ è il coefficiente della potenza $(z - a)^{m-1}$ della serie, si avrà

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z - a)^m f(z)] \Big|_{z=a} \quad (7.2)$$

Riassumendo, se $f(z)$ è della forma (7.1), allora il suo residuo in a è dato dalla (7.2), per un m opportuno, e l'integrale di f lungo un circuito in un intorno di a in cui f è analitica è $2\pi i \text{Res}(f, a)$. Resta aperta la domanda riguardo a quali caratteristiche $f(z)$ debba avere per essere della forma (7.1). Ci occuperemo di questo nella prossima sezione.

7.4 Teorema dei residui

Una singolarità a è detta isolata se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità. Se a è una singolarità isolata di $f(z)$ ed è uno zero di $F(z) \equiv 1/f(z)$, allora è chiamata *polo* (si osservi che $1/f(z)$ esiste poiché f è analitica). Le singolarità delle funzioni considerate poc'anzi ($z = -1$ e $z = 0$ per gli esempi UNO e DUE della sezione 7.2 e $z = a$ per una funzione della forma (7.1)) sono dei *poli*.

I poli sono le singolarità di gran lunga più comuni nelle applicazioni dell'analisi complessa. Se la funzione $f(z)$ tende all'infinito quando z tende ad a da qualunque direzione, allora a è un polo di $f(z)$. Un polo si vede bene in un grafico della superficie modulare della funzione: in prossimità del polo, la superficie ha un picco che tende all'infinito man mano che ci si avvicina al polo. Per esempio, come abbiamo già visto, la superficie modulare della funzione $1/(1+z^2)$ mostra nitidamente i due poli $+i$ e $-i$.

Se a è uno zero di $F(z) = 1/f(z)$ allora

$$F(z) = (z - a)^m G(z) \quad (7.3)$$

dove G è analitica e non nulla in a e m è la molteplicità dello zero. Ne segue che il comportamento locale di f vicino ad a è dato da

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

dove $g(z) = 1/G(z)$ è analitica e non nulla in a . Il numero m è la molteplicità algebrica o *ordine* del polo. Diciamo un polo *semplice*, *doppio*, *triplo*, etc., a seconda che sia $m = 1, 2, 3$ etc.. Dalla (7.3) segue che m è l'ordine della prima derivata non nulla di $F = 1/f$ calcolata in $z = a$.

In una delle prossime lezioni dimostreremo che *se una funzione è analitica in a , allora esiste il suo sviluppo di Taylor in $z = a$* . Quindi $g(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in $z = a$,

$$g(z) = d_0 + d_1(z-a) + \dots + d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad d_0 \neq 0,$$

dunque, nell'intorno di a , $f(z)$ è della forma (7.1), cioè

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{d_0 + d_1(z-a) + \dots + d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots}{(z-a)^m} \\ &= \frac{d_0}{(z-a)^m} + \dots + d_m + d_{m+1}(z-a) + \dots \end{aligned}$$

Se ne conclude che per una funzione $f(z)$ essere della forma (7.1) vuol dire avere in a un polo di ordine m e si perviene quindi alla conclusione seguente:

Sia a un polo di ordine m della funzione $f(z)$ e C una curva semplice chiusa, percorsa nel verso positivo, tale che $f(z)$ è analitica al suo interno. Allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a)$$

dove il residuo $\operatorname{Res}(f, a)$ è dato dalla (7.2).

(7.4)

7.5 Funzioni meromorfe

Una funzione è detta meromorfa in una regione \mathcal{R} , se le sue singolarità sono solo dei poli e se, fatta eccezione per i poli, la funzione è analitica nella regione.

Vediamone alcuni esempi. Tutte le funzioni razionali, come

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 10}{z^5 + 3z - 1}$$

sono meromorfe sull'intero piano complesso \mathbb{C} . Lo stesso vale per le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \quad \text{e} \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}.$$

Anche la funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

(estesa per continuazione analitica¹ a tutto \mathbb{C}) è meromorfa sull'intero piano complesso \mathbb{C} . E così è la funzione zeta di Riemann, ottenuta per continuamento analitico della serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1.$$

La funzione

$$f(z) = e^{1/z}$$

non ha un polo in $z = 0$, ma una singolarità essenziale (vedi sotto). È meromorfa (persino analitica) in $\mathbb{C} - 0$. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

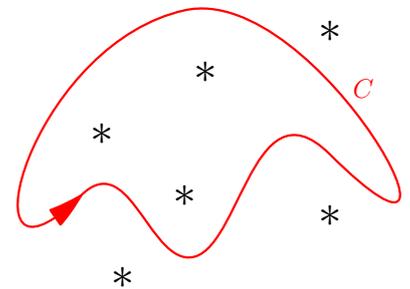
non è meromorfa sull'intero piano complesso \mathbb{C} , poiché $z = 0$ è un punto di accumulazione di poli.

Dalla (7.4) segue immediatamente la regola di calcolo per l'integrale di una funzione meromorfa lungo un cammino chiuso:

Sia $f(z)$ meromorfa e la curva C (semplice chiusa) orientata positivamente. Allora

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) \tag{7.5}$$

dove la somma a secondo membro è estesa solo ai poli a_i dentro C , come mostrato nella figura a lato.



La (7.4) o la (7.5) sono il teorema dei residui. Interpretate fisicamente non sono altro che il teorema di Gauss (e di Ampère) della fisica: flusso e circolazione del campo \vec{f} sono pari $2\pi i \times$ somma delle cariche contenute in C (le parti reali sono le sorgenti, quelle immaginarie correnti o vortici).

7.6 Singolarità essenziali

In aggiunta ai poli, una funzione altrimenti analitica, può avere quelle che sono chiamate *singolarità essenziali*. In prossimità di una singolarità essenziale a il comportamento di f è abbastanza selvaggio e strano: infatti, se f fosse limitata, a non sarebbe una singolarità, e se f andasse all'infinito man mano che ci si avvicina da qualunque direzione, a sarebbe un polo.

¹ In una lezione successiva chiariremo che cosa sia la "continuazione analitica".

Consideriamo l'esempio standard $g(z) = e^{1/z}$, che chiaramente ha una singolarità di qualche tipo nell'origine. Se scriviamo $z = re^{i\theta}$, allora

$$|g(z)| = e^{\frac{\cos\theta}{r}}$$

La figura 7.6 ne mostra la superficie modulare. Se z si avvicina a 0 lungo l'asse immaginario, allora $g(z)$ tende a 1. Ma se l'avvicinamento avviene lungo un cammino a sinistra dell'asse immaginario, dove $\cos\theta < 0$, allora $g(z)$ tende a 0. Infine, se z si avvicina lungo un cammino a destra dell'asse immaginario, $g(z)$ tende all'infinito. In effetti, in quest'ultimo caso, non solo $f(z)$ tende all'infinito, ma la velocità con cui ci va è al di là della comprensione di qualunque polo.

Se a è una singolarità essenziale, non esiste alcun m tale la moltiplicazione per $(z - a)^m$ possa annullare l'esplosione della funzione in a . In particolare, per mostrare che questo è vero per $g(z)$, basta ricordare dall'analisi reale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^m} = \infty$$

qualunque sia il valore di m .

Se a è una singolarità essenziale NON significa che

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a)$$

cessa di valere, ma che non abbiamo più una formula semplice per calcolare il residuo in a . Se a è una singolarità essenziale, a volte il residuo può essere calcolato usando sviluppi in serie già noti. Ad esempio, possiamo ottenere lo sviluppo in serie di $g(z) = e^{1/z}$ a partire da quello di e^u per $u = 1/z$, vale a dire, sviluppiamo in serie $g(z)$ nel punto all'infinito (poiché lo sviluppo in serie di e^u ha raggio infinito, lo stesso varrà per lo sviluppo di $g(z)$),

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Essendo il residuo il coefficiente dell'inversione complessa, si ha immediatamente

$$\text{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$$

7.7 Ci sono modi "veloci" per calcolare i residui?

In un certo senso calcolare i residui è un'arte, ma ci sono delle tecniche che possono velocizzare il calcolo. Eccone alcune.

UNO. Mai sottovalutare la *regola di l'Hospital* per funzioni analitiche, che è la stessa dell'analisi reale: se $f(z)$ e $g(z)$ sono analitiche in una

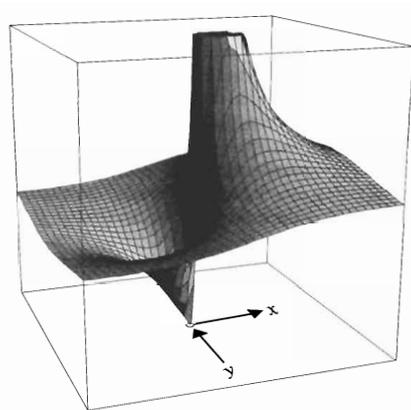


Figura 7.6: Superficie modulare di $g(z) = e^{1/z}$

regione che contiene a e $f(a) = g(a) = 0$, ma $g'(a) \neq 0$, allora

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

DUE. Se a è un polo di ordine m , allora

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = b_m \quad \text{dove } b_m \neq 0,$$

ma la difficoltà del gioco è trovare m per una data f e un dato punto a . Possiamo allora procedere per tentativi ed errori: Scegliamo noi k , per esempio $k = 1$, e consideriamo il limite $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$. Se a è un polo, ci sono tre possibilità

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \begin{cases} c \neq 0 & \Rightarrow m = k \Rightarrow b_m = c \\ 0 & \Rightarrow m < k \\ \infty & \Rightarrow m > k \end{cases}$$

A meno che non sia chiaro che $m > 1$, conviene applicare la regola partendo da $k = 1$.

TRE. Se $f(z)$ è della forma $f(z) = Q(z)/P(z)$ in $z = a$ con $Q(a) \neq 0$ e $P'(a) \neq 0$, allora $z = a$ è un polo semplice e

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} Q(z) \frac{z - a}{P(z)} = \frac{Q(a)}{P'(a)}$$

Avendo applicato la regola dell'Hospital. Situazioni analoghe, ma più complicate, si trattano applicando la regola dell'Hospital più volte.

QUATTRO. Il residuo di una funzione in un punto a (singolarità isolata) è il coefficiente c_{-1} del suo sviluppo²

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - a)} \quad (7.6) \\ + c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + c_3(z - a)^3 + \dots$$

Talvolta è facile determinare questa serie sia a partire da serie già note (Es. $e^{1/z}$) sia facendo delle sostituzioni.

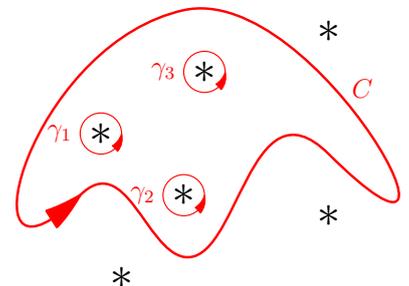
CINQUE. Se a è una singolarità isolata e γ è un piccolo cerchio attorno a a che non contiene alcun punto singolare della funzione, allora

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Si ponga $z = a + \epsilon e^{i\theta}$ e si faccia tendere ϵ a zero. A volte questo è un metodo efficiente per calcolare il residuo. Si tenga sempre presente che il gioco è sempre quello del teorema di Cauchy, per cui

$$\oint_C = \sum \oint_{\gamma_i} = 2\pi i \sum \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} \right) = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) = \sum 2\pi i c_{-1}^{(i)}$$

² Detto di Laurent, che in una lezione successiva dimostreremo essere unico.



7.8 Residuo all'infinito

Sia $f(z)$ una funzione che è analitica, fatta eventualmente eccezione per $z = \infty$, al di fuori del cerchio C_R di raggio R (orientato positivamente). Il residuo all'infinito è così definito

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_R} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz \quad (7.7)$$

Si osservi che questa definizione è coerente con l'usuale nozione di residuo in un punto che è rispetto ad un circuito attorno al punto percorso in senso antiorario: $-C_R$ è *antiorario* attorno all'infinito poiché C_R è *antiorario* attorno all'origine.

Per una funzione $f(z)$, la natura della singolarità all'infinito è la stessa della natura della singolarità di $f(1/w)$ in $w = 0$. In particolare, ∞ è una singolarità isolata di $f(z)$ se 0 è una singolarità isolata di $f(1/w)$. Mediante il cambiamento di variabile $w = 1/z$ l'integrale a secondo membro della (7.7) è trasformato nell'integrale di contorno nel piano w ,

$$\oint_{C_R} f(z) dz = \oint_{-C_{1/R}} \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

Si osservi che la prima uguaglianza segue dal fatto che l'immagine del cerchio $|z| = R$ rispetto all'inversione $w = 1/z$, è il cerchio dato da $|w| = 1/R$ percorso nel senso *orario* (e ovviamente da $dz = [-1/w^2] dw$).

Allora,

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} g(w) dw \quad (7.8)$$

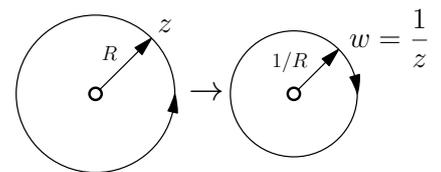
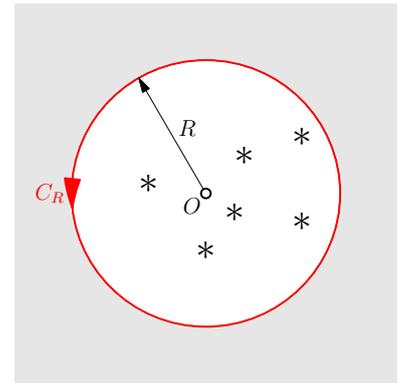
dove

$$g(w) = \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right). \quad (7.9)$$

In conclusione, tenuto conto del segno negativo nella (7.7), la formula per la circuitazione complessa lungo C_R (orientato positivamente) risulta

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res} \left[0, \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right] \quad (7.10)$$

Si osservi che mentre una funzione analitica in un punto nel piano complesso finito ha un residuo zero in quel punto, una funzione che non è singolare all'infinito, può avere in esso un residuo non nullo. Per esempio, $1/z$ è analitica all'infinito ma ha un residuo pari a -1 . Questo fatto, che può apparire paradossale, è chiarito nei complementi 7.11.1.



7.9 Tabella riassuntiva delle singolarità di una funzione

Un punto a in cui una funzione, altrimenti analitica, non è analitica è detto punto singolare o singolarità.

SINGOLARITÀ ISOLATA: se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità.

POLO: se nell'intorno di a si ha $1/f(z) = (z - a)^m \Omega(z)$, dove Ω è analitica e non nulla in a . Il numero m è detto ordine del polo.

PUNTO DI DIRAMAZIONE: se un giro completo attorno ad a fa cambiare il valore di $f(z)$. Se ci vogliono non meno di N giri per tornare al valore di partenza, a è un PDD algebrico di ordine $N - 1$; se non si torna mai al valore di partenza, a è un PDD logaritmico.

SINGOLARITÀ ELIMINABILE: se $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ esiste.

SINGOLARITÀ ESSENZIALE: se $f(z)$ diverge in a , ma non è un polo.