

# 8

## Calcolo di integrali

### 8.1 Il metodo dei residui

Riconsideriamo il problema 6.5, dal punto di vista del teorema dei residui. Adesso sappiamo che

$$\oint_{L_R + C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, i \right] \quad (8.1)$$

dove  $L_R + C_R^+$  è il cammino mostrato in figura 8.1

Poiché

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

la funzione ha un polo in  $i$  e uno in  $-i$ . Dal secondo membro, si vede che il residuo in  $i$  è  $(-1/2)i$  e quindi che l'integrale è  $\pi$ , confermando il risultato del problema 6.5.

L'osservazione semplice ma cruciale è che possiamo trasformare quanto abbiamo appena visto in un metodo generale per calcolare integrali reali. Nel caso in esame, possiamo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (8.2)$$

con la (8.1). Infatti, per  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \rightarrow 0$$

e il primo membro della (8.1) diventa l'integrale reale (8.2) e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, i \right] = 2\pi i \times [(-1/2)i] = \pi$$

Si osservi che avremmo potuto procedere in modo analogo considerando il cammino in figura 8.2. Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno a primo membro,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{1+z^2}, -i \right] = 2\pi i \times [(1/2)i] = -\pi$$

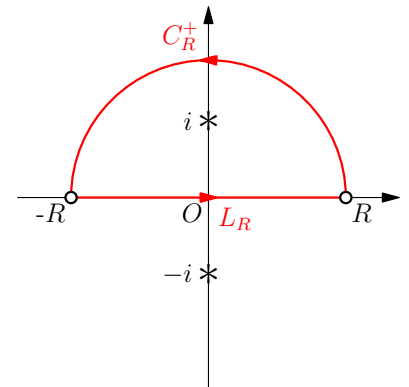


Figura 8.1:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$  nel semipiano superiore.

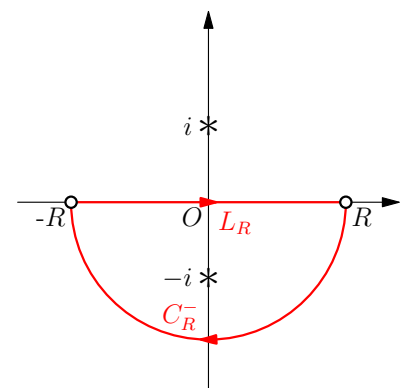
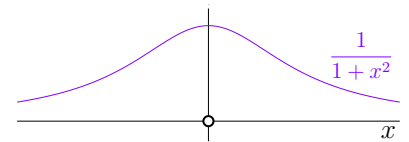


Figura 8.2:  $C_R^-$  è adesso il semiarco di cerchio di raggio  $R$  nel semipiano inferiore.

Non importa, quindi, se decidiamo di chiudere il cammino sull'asse reale nel semi-piano superiore o in quello inferiore. Dobbiamo solo fare attenzione ai segni.

Naturalmente, poiché la primitiva di  $1/(1+x^2)$  è l'arcotangente, l'integrale reale (8.2) si calcola immediatamente con metodi reali. Ci sono tuttavia casi in cui il metodo dei residui permette di calcolare integrali reali altrimenti intrattabili. Storicamente, è stato proprio il successo di Cauchy nel valutare integrali reali intrattabili con i metodi tradizionali uno dei primi segni tangibili della potenza delle sue scoperte. In passato, nell'insegnamento dell'analisi complessa, si dava largo spazio a questo metodo. Oggi, di fronte ad un integrale intrattabile, è più probabile che un matematico, un ingegnere o un fisico usino un programma di calcolo numerico o simbolico per risolverlo, piuttosto che calcolarlo a mano con il metodo dei residui. Ciò nonostante, conoscere questo metodo e saperlo usare è un'ottima palestra di addestramento al calcolo, specialmente per un fisico.

## 8.2 Qualche esempio

ESEMPIO 8.1.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Si consideri

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

che ha due poli, uno in  $+i$  e l'altro in  $-i$ . Si prenda lo stesso cammino della figura 8.1. Allora

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, i] = 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = 2\pi i \frac{-2}{2i^3} = \frac{\pi}{2}$$

Ma

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{C_R^+} f(z)dz$$

L'integrale lungo  $C_R^+$  tende a zero quando  $R$  tende all'infinito, infatti

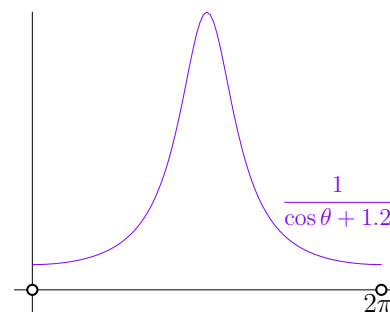
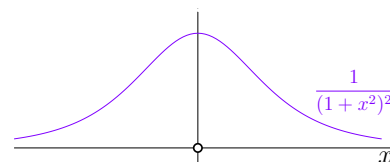
$$I_R = \int_{C_R^+} f(z)dz = \int_{C_R^+} \frac{1}{(R^2 e^{i2\theta} + 1)^2} iR e^{i\theta} d\theta \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty$$

Quindi

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.2.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + a}, \quad a > 1$$



Si proceda con la sostituzione

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

allora

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [e^{i\theta} + e^{-i\theta}] = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right] \tag{8.3}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{8.4}$$

L'integrale iniziale risulta così trasformato

$$I = \oint_C \frac{(dz/iz)}{\frac{1}{2} [z + (1/z)] + a} = -2i \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1},$$

dove  $C$  è il cerchio unitario. Le radici di  $z^2 + 2az + 1$  sono  $q = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  e  $p = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ . Poiché soddisfano  $pq = 1$ , solo una,  $q$ , sarà dentro  $C$  e quindi

$$I = 4\pi \text{Res} \left[ \frac{1}{(z-p)(z-q)}, q \right] = \frac{4\pi}{q-p} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ESEMPIO 8.3.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

In integrali di questo tipo (integrali estesi all'infinito di funzioni trigonometriche divise per polinomi), il trucco è di passare dalla funzione trigonometrica all'esponenziale e poi ritornare all'integrale iniziale usando le definizioni delle funzioni trigonometriche in termini di esponenziale. Passiamo quindi a  $f(z) = e^{iz}/z$ . Poiché la  $\sin x/x$  è pari, l'integrale richiesto sarà metà del valore dell'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

La prima idea che viene in mente è di considerare, come nell'esempio 1, il cammino della figura 8.1. Nel limite  $R \rightarrow \infty$ , non c'è contributo dal cammino sul semicerchio  $C_R^+$  dove  $z = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ . Infatti, si ha

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{Re^{i\theta}} e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} iR e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{iR \cos \theta} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

e il modulo di quest'integrale va a zero per  $R \rightarrow \infty$ .

Tuttavia, c'è un problema: la singolarità  $z = 0$  è sul cammino. Il trucco (che si applica ad una miriade di altri problemi simili a questo) è quello di aggirare la singolarità con un giretto di raggio  $\epsilon$  attorno ad essa (e preoccuparci alla fine di  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Passiamo quindi al cammino chiuso mostrato in figura 8.4. Poiché non ci sono singolarità dentro il cammino

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

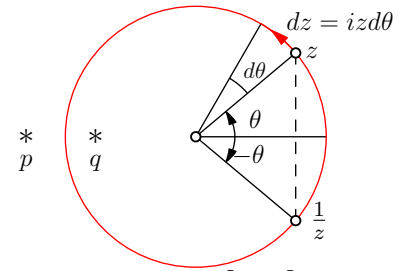


Figura 8.3:  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right]$ .  $p$  e  $q$  radici del denominatore; poiché  $pq = 1$ , una è fuori e l'altra è dentro.

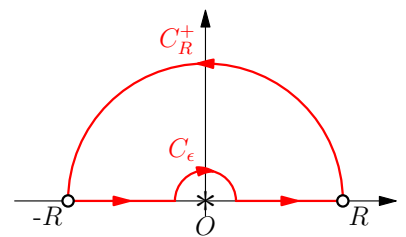
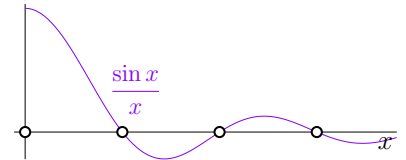


Figura 8.4:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$ .

Poniamo a zero l'ultimo termine, avendo già mostrato che per  $R \rightarrow \infty$  non dà contributo. Facciamo la sostituzione da  $-x$  a  $x$  nel primo integrale a secondo membro e combiniamo con il terzo. Otteniamo così

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{C_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro ponendo  $z = \epsilon e^{i\theta}$

$$- \int_{C_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.4.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx, \quad -\infty < k < +\infty$$

Un integrale di questo tipo, con la funzione integranda =  $g(x) \times e^{ikx}$  (oppure  $\times e^{-ikx}$ ), è detto *integrale di Fourier*. Se impariamo a risolvere questo integrale, impariamo tecniche che sono utili per calcolare altri integrali di questo tipo.

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$$

ha due poli semplici in  $+i$  e  $-i$ . Proviamo lo stesso cammino della figura 8.1. Se l'integrale lungo  $C_R^+$  va a zero per  $R$  che va all'infinito, siamo a posto. Consideriamo questo integrale ponendo  $z = R e^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ ,

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR \cos \theta + kR \sin \theta} iR e^{i\theta} d\theta$$

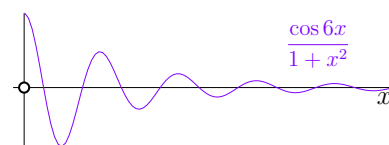
La situazione è analoga a quella incontrata nell'esempio 3, ma c'è un ma: il modulo di questo integrale va a zero per  $R$  che va all'infinito solo se  $k$  è un numero *negativo*, in quanto nell'esponenziale  $e^{kR \sin \theta}$  il seno è positivo, essendo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Il residuo in  $z = i$  vale

$$(z-i) \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} \Big|_{z=i} = \frac{e^k}{i+i} = \frac{e^k}{2i}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^k, \quad \text{per } k > 0$$

Che fare per  $k > 0$ ? Con un momento di riflessione, ci si può convincere che il contributo dal semicerchio va a zero se chiudiamo il



cammino reale con il semicerchio  $C_R^-$  nel semipiano inferiore, come in figura 8.2. Infatti, per questa scelta si ha

$$\int_{C_R^-} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR \cos\theta + kR \sin\theta} i R e^{i\theta} d\theta$$

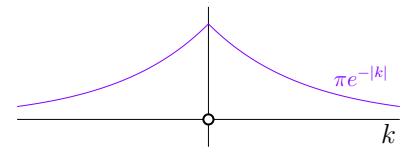
Adesso  $\sin\theta$  è sempre negativo per  $\pi < \theta < 0$  e  $k$  positivo, quindi il modulo dell'integrale va a zero per  $R$  che va all'infinito.

Il cammino  $C_R^-$  racchiude l'altra singolarità della funzione, il polo semplice  $-i$ . Il residuo della funzione in  $z = -i$  vale  $e^{-k}/(-2i)$ . Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno. Quindi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = -2\pi i \left[ \frac{e^{-k}}{-2i} \right] = \pi e^{-k}, \quad \text{per } k < 0$$

In conclusione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}.$$



### 8.3 Qualche morale

L'ESEMPIO 1 è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

per i quali

- (i)  $f(z)$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  eccetto che per un numero finito di poli.
- (ii)  $f(z)$  decade più rapidamente di  $1/z$  per  $|z| \rightarrow \infty, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$ . Equivalentemente,  $f(z) \leq M/R^k$ , per  $z = R e^{i\theta}$ , dove  $k > 1$  e  $M$  sono costanti.

Per questi integrali, utilizzando il cammino della figura 8.5, si ottiene

$$I = 2\pi i \sum \text{Res. nel semipiano superiore } \Pi^+ \tag{8.5}$$

Infatti, il contributo del semicerchio  $C_R^+$ , stimato mediante la (7.1):

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

tende a zero quando  $R$  tende all'infinito.

Si osservi che se  $f(x)$  è una funzione pari, questo metodo può essere usato per calcolare  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

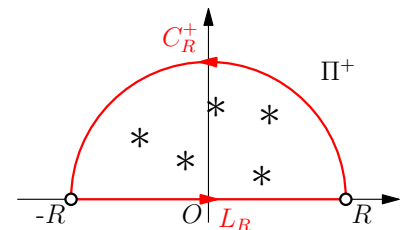


Figura 8.5:  $C_R^+$  è il semiarco di cerchio di raggio  $R$ .

L'ESEMPIO 2 è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

per i quali

- (i)  $f$  è finita per tutti i valori di  $\theta$ ,
- (ii)  $f$  è una funzione razionale di  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ .

Con le stesse regole del gioco dell'esempio due, riassunte nella figura 8.6, si ottiene

$$I = (-i)2\pi i \sum \text{residui nel cerchio unitario} \quad (8.6)$$

Le morali che si possono trarre dall'ultimo esempio meritano una sezione a se stante.

### 8.4 Integrali di Fourier

L'integrale

$$g(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (8.7)$$

è un integrale di Fourier e la trasformazione che fa passare da  $f$  a  $g$  è detta *trasformata di Fourier*. Il fatto più importante che lo riguarda è che se  $g(k)$  è nota,  $f(x)$  può essere ricostruita e la sua ricostruzione è attraverso un altro integrale di Fourier. Più precisamente, si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{ikx} dk \quad (8.8)$$

Spiegare perché e sotto quali condizioni valga quest'ultima equazione, detta *teorema di Fourier*, sarà il tema di una futura lezione. Per il momento, la prenderemo per buona e ci occuperemo del calcolo di integrali di Fourier.

L'esempio 4 suggerisce la seguente morale. Sia  $f(z)$

- (i) analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  eccetto che per un numero finito di poli.
- (ii) e tale che  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  per  $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ . Equivalentemente,  $f(z) \leq M/R^k$ , per  $z = Re^{i\theta}$ , dove  $k > 0$  e  $M$  sono costanti.

Allora, per  $k < 0$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx = 2\pi i \sum \text{Res. nel semipiano superiore } \Pi^+ \quad (8.9)$$

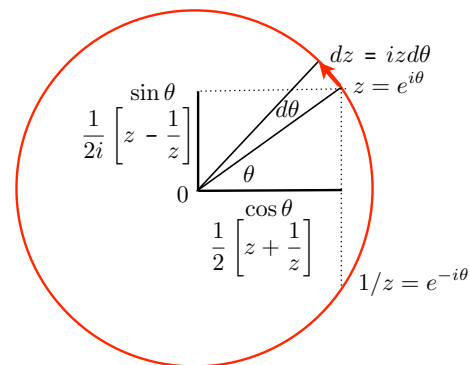


Figura 8.6: Sostituzione  $z = e^{i\theta}$ .

La (8.9) è nota come *Lemma di Jordan* e si dimostra facilmente. Utilizziamo il cammino chiuso della figura 8.5 e valutiamo l'integrale lungo  $C_R^+$ :

$$I_R = \int_{C_R^+} f(z)e^{-ikz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-ikR\cos\theta - |k|R\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Sia  $R$  così grande che  $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \epsilon$ . Allora

$$|I_R| \leq \epsilon R \int_0^\pi e^{-|k|R\sin\theta} d\theta = 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-|k|R\sin\theta} d\theta.$$

Nell'intervallo  $[0, \pi/2]$ , si ha che  $(2/\pi)\theta \leq \sin\theta$ , come mostrato in figura 8.7, da cui

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-|k|R2\theta/\pi} d\theta.$$

Integrando,

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \frac{1 - e^{-|k|R2/\pi}}{|k|R2/\pi} < \frac{\pi}{|k|} \epsilon$$

Risulta così dimostrato che  $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0$  e quindi la (8.9).

Nel caso in cui

- (i)  $f(z)$  è analitica nel semipiano inferiore  $\Pi^-$  eccetto per un numero finito di poli.
- (ii)  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  per  $-\pi \leq \arg(z) \leq 2\pi$ ,

procedendo in modo analogo a prima, si stabilisce che, per  $k > 0$ ,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx = -2\pi i \sum \text{Res. nel semipiano inferiore } \Pi^-} \quad (8.10)$$

Le condizioni (8.9) e (8.10) sono verificate per la funzione dell'esempio 4, che è una funzione importante, nota in fisica come *lorentziana* e in probabilità come *distribuzione di Cauchy-Lorentz*. Tuttavia, per un'altra funzione, forse ancora più importante in fisica e probabilità, la *gaussiana*,

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad (8.11)$$

le condizioni (8.9) e (8.10) NON sono verificate. Per calcolare

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \quad (8.12)$$

occorre trovare un altro metodo.

Il metodo di solito usato è il seguente. In primo luogo, si osservi che, completando i quadrati,  $e^{-ax^2} e^{-ikx}$  può essere riscritto come

$$e^{-ax^2} e^{-ikx} = e^{-a(x^2 + i\frac{k}{a}x)} = e^{-a(x + i\frac{k}{2a})^2} e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

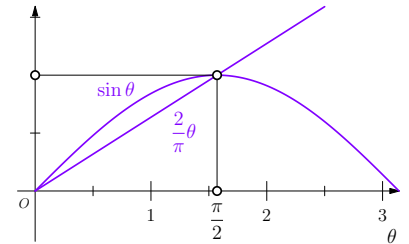


Figura 8.7:  $(2/\pi)\theta \leq \sin\theta$ , in  $[0, \pi/2]$ .

Allora

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{k}{2a})^2} dx. \quad (8.13)$$

Per sostituzione  $x' = x + i\frac{k}{2a}$  si ottiene

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{x=-\infty+i\frac{k}{2a}}^{\infty+i\frac{k}{2a}} e^{-ax^2} dx,$$

ma qual è il significato dell'integrale a secondo membro? Dalla figura 8.8, si vede che è, a meno di un segno, l'integrale di  $e^{-az^2}$  sul lato superiore del rettangolo nel limite  $R \rightarrow \infty$ . Il contributo dei cammini verticali,

$$\int_{y=0}^{k/2a} e^{-a(R+iy)^2} dy + \int_{y=k/2a}^0 e^{-a(-R+iy)^2} dy.$$

tende a zero quando  $R$  tende all'infinito. Quindi, poiché  $e^{-az^2}$  è analitica dentro al rettangolo, l'integrale a secondo membro della (8.13) sarà nel limite uguale all'integrale sull'asse reale<sup>1</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Dunque,

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (8.14)$$

Fine del calcolo.

È istruttivo mostrare che il teorema di Fourier (8.8) risulta verificato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \right] e^{ikx} dk \\ &= \left[ \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{ikx} dk, \quad b \equiv \frac{1}{4a} \\ &= \left[ \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \right] \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \\ &= e^{-ax^2}, \end{aligned}$$

che era proprio quello che si voleva verificare; nel passaggio intermedio si sono usate le uguaglianze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bk^2} e^{-ikx} dk = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{x^2}{4b}},$$

che sono un'immediata conseguenza della (8.14) e della sostituzione  $k' = -k$  nel primo integrale.

**ESERCIZIO 8.1.** Verificare il teorema di Fourier per la lorentziana.

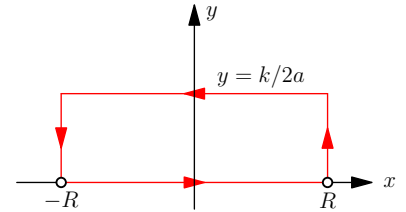


Figura 8.8:  $f(z) = e^{-az^2}$  integrata lungo il rettangolo di base  $[-R, R]$  e altezza  $[0, ik/2a]$ .

<sup>1</sup> L'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$  si calcola facilmente con i metodi dell'analisi reale:

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-a\rho^2} \rho d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\rho^2} (2a\rho) d\rho \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$



### 8.5 Intermezzo: l'equazione del calore

Anticipando contenuti che verranno esposti in capitoli successivi, in questa sezione vogliamo mettere evidenza l'utilità pratica della trasformata di Fourier.

Il problema che prendiamo in esame è il seguente: si vuole sapere come evolve nel corso del tempo la temperatura  $f(x, t)$  in una sbarretta infinita, di spessore trascurabile, modellizzata idealmente come la retta reale  $-\infty < x < \infty$ , sapendo che al tempo iniziale  $t = 0$ , la distribuzione di temperatura nella sbarretta è data dalla funzione nota  $f_0(x) = f(x, 0)$ . Nel corso del tempo,  $f$  evolve secondo l'equazione del calore (o equazione di Fourier),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (8.15)$$

Un metodo di soluzione di questa equazione, per la data condizione iniziale, è di trasformarne, secondo Fourier, ambo i membri. Per il primo membro si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial g(k, t)}{\partial t}$$

dove

$$g(k, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Per la trasformata di Fourier del secondo membro, si utilizzi l'integrazione per parti e sia  $f' \equiv \partial f / \partial x$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx &= D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f'(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= D \left[ f'(x, t) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) f'(x, t) e^{-ikx} dx \right] \\ &= D \left[ f'(x, t) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + ik \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, t) e^{-ikx} dx \right] \end{aligned}$$

Si assuma adesso che la soluzione cercata soddisfi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

che corrisponde alla condizione fisica che non ci sia flusso di calore all'infinito (il gradiente della temperatura è proporzionale alla densità di corrente di calore). Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = ikD \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) f'(x) e^{-ikx} dx$$

Si assuma inoltre che  $f(x, t)$  si annulli all'infinito. Questo corrisponde alla condizione fisica di conservazione dell'energia, in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx \propto \text{energia termica totale nella sbarra.}$$

**N.B.** Maggiori dettagli e giustificazioni di questo metodo verranno dati in un capitolo successivo

essendo  $f$  positiva (energia), questo corrisponde al requisito che  $f$  tenda a zero per  $x$  che tende all'infinito (in effetti, più rapidamente di  $1/x$ ). Allora, integrando nuovamente per parti, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = -Dk^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = -Dk^2 g(k, t).$$

In definitiva, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione del calore, si perviene all'equazione

$$\frac{\partial g(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 g(k, t),$$

che si risolve "a vista":

$$g(k, t) = g(k, 0) e^{-\frac{1}{2} Dk^2 t} = g_0(k) e^{-Dk^2 t},$$

dove  $g_0(k)$  è la trasformata di Fourier della condizione iniziale,

$$g_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-ikx} dx.$$

Applicando la trasformata di Fourier inversa (8.8), si risolve il problema di partenza. Si può quindi concludere che *sotto le condizioni che non ci sia flusso di calore verso l'infinito e che la temperatura vada a zero all'infinito per ogni  $t > 0$ , la temperatura nel corso del tempo evolve secondo la legge:*

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk \quad (8.16)$$

Mostriamo la soluzione esplicita, quando la temperatura iniziale è una gaussiana, normalizzata a 1, centrata nell'origine e di larghezza  $\sigma$ ,

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Applicando la (8.14), si ha

$$g_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\pi 2\sigma^2} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}},$$

che, inserita a secondo membro della (8.16), fornisce

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + 2Dt)k^2} e^{ikx} dk.$$

Applicando nuovamente la (8.14), si perviene alla soluzione esplicita

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + 2Dt)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2Dt)}},$$

che mostra un incremento lineare nel tempo del *quadrato* della larghezza della funzione, che è il marchio di fabbrica dei processi diffusivi.

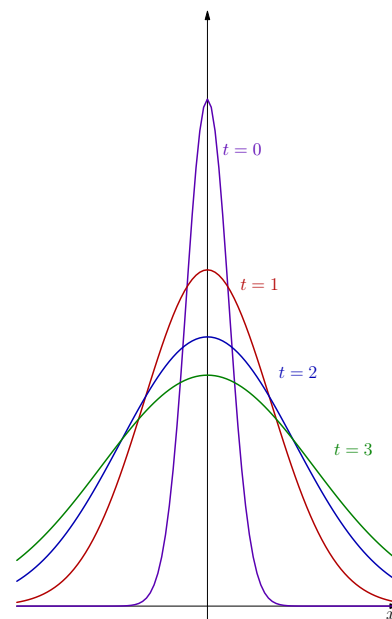


Figura 8.9: Andamento nel corso del tempo della temperatura con distribuzione iniziale a  $t = 0$  gaussiana a media zero e larghezza  $\sigma$ .

## 8.6 Integrale di una funzione con punti di diramazione

Supponiamo di voler calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (8.17)$$

con metodi di analisi complessa. Sembra una scelta folle, visto che l'integrale lo si può calcolare agevolmente con i metodi del calcolo reale mediante la sostituzione  $x = \cos \theta$  e ancora più agevolmente con quelli della geometria della scuola elementare:  $I$  è l'area del semicerchio di raggio 1 e quindi  $I = \pi/2$ . Ma c'è del metodo in questa follia: vogliamo usare (8.17) come palestra per integrali più complicati che contengono punti di diramazione.

Consideriamo la multifunzione che abbiamo già incontrato varie volte

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

Ha punti di diramazione semplici per  $z = +1$  e  $z = -1$ . Scegliamo come taglio il segmento che unisce  $z = +1$  e  $z = -1$  e consideriamo il ramo principale della multifunzione corrispondente al ramo  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z = e^{i\theta}$ . Adesso consideriamo il contorno a "cappio" (o a "osso per cani") mostrato in figura 8.6.

Per  $z$  sull'asse reale appena sopra il taglio (diciamo per  $z = x + i\epsilon$ ,  $\epsilon \downarrow 0$ ), abbiamo

$$(z^2 - 1)^{1/2} = i\sqrt{1-x^2}$$

mentre appena sotto

$$(z^2 - 1)^{1/2} = -i\sqrt{1-x^2}$$

Sia  $L$  il contorno chiuso mostrato in figura 8.10, dove intorno a  $+1$  e  $-1$  ci sono due percorsi circolari di raggio  $\delta$  che aggirano i punti di diramazione. Nel limite  $\delta \downarrow 0$  gli integrali lungo questi percorsi circolari danno contributo nullo, quindi

$$\oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz = \int_1^{-1} i\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 (-i\sqrt{1-x^2}) dx = -2iI,$$

da cui

$$I = \frac{i}{2} \oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

Poiché non ci sono singolarità tra  $L$  e  $C_R$ , possiamo deformare il contorno d'integrazione da  $L$  a  $C_R$ , un cerchio di raggio  $R > 1$  (per maggiori dettagli sulla deformazione di cammini si veda la sezione 9.1), come nella figura 8.11, e ottenere

$$I = \frac{i}{2} \oint_{C_R} (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

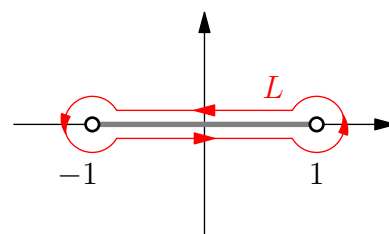


Figura 8.10: Contorno a "cappio".

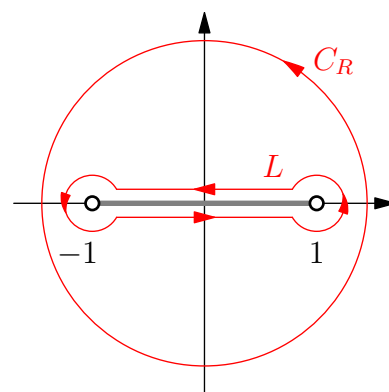


Figura 8.11: Deformazione del contorno.

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla (7.11) otteniamo

$$I = (2\pi i) \frac{i}{2} \operatorname{Res} \left[ 0, \frac{1}{w^2} \sqrt{\frac{1}{w^2} - 1} \right]$$

Ora,

$$\frac{1}{w^2} \left( \frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} = \frac{1}{w^3} (1 - w^2)^{1/2} = \frac{1}{w^3} \left( 1 - \frac{1}{2} w^2 + \dots \right)$$

Quindi  $\operatorname{Res} = -\frac{1}{2}$  e infine

$$I = (2\pi i) \frac{i}{2} \left[ -\frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Probabilmente, questo è il modo più complicato che ci sia per calcolare l'area del semicerchio di raggio 1! Ma, come abbiamo detto, il metodo nella follia era di illustrare come calcolare integrali in cui compaiono punti di diramazione e mettere in evidenza che per questi integrali torna utile la nozione di residuo all'infinito.

### 8.7 Trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace  $\mathcal{L}$  di una funzione  $F(t)$  è

$$f(s) = \mathcal{L}\{F\}(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt$$

Questa trasformazione è un ottimo strumento per studiare i sistemi lineari in quanto permette di trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione algebrica. Consideriamo, per esempio, l'equazione per la differenza di potenziale ai capi del condensatore di un circuito RC

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = 0.$$

e prendiamone la trasformata di Laplace. Osserviamo che, mediante integrazione per parti, se si esclude una crescita esponenziale di  $V(t)$  per  $t$  che tende all'infinito, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dV}{dt} dt &= V(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-st} V(t) dt \\ &= -V(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} V(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi, detta  $v(s)$  la trasformata di Laplace di  $V(t)$ , l'equazione del circuito RC diventa un'equazione algebrica facilmente risolvibile:

$$sv(s) - V(0) + \frac{v(s)}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(s) = \frac{V(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$



Pierre Simon, marchese di Laplace (1749–1827) è stato un fisico e matematico francese che diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica celeste e della probabilità. Fu il primo a ipotizzare l'esistenza di corpi così massivi da cui neanche la luce può fuggire. Introdusse la trasformata di Laplace come strumento nello studio delle distribuzioni di probabilità. Famoso per aver scritto (1812): "Un'Intelligenza che conoscesse, ad un istante dato, tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono, ... nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe di fronte ai suoi occhi". Meno noto il fatto che quest'idea venne espressa nel suo trattato *Théorie analytique des probabilités* per sottolineare che noi NON siamo come quell'intelligenza e le nostre previsioni e i nostri ragionamenti non possono che essere probabilistici.

Di solito (ma non in questo caso) il difficile è tornare indietro, cioè ricostruire  $F(t)$  a partire da  $f(s)$ .

Si può dimostrare (e lo faremo in una lezione successiva) che la trasformata inversa di Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  è data da

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} f(z) dz, \quad t > 0$$

dove  $L$  è una qualunque retta parallela all'asse immaginario a destra di tutte le singolarità di  $f(z)$ . Per il momento, prendiamo questo risultato per buono e vediamo le conseguenze.

Sia  $L$  la retta di equazione  $z = \gamma$  (reale positivo) e si consideri il contorno della figura a lato. Chiaramente si ha

$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{A_R+L_R} e^{zt} f(z) dz - \int_{A_R} e^{zt} f(z) dz \right] \quad (8.18)$$

Si supponga che  $f(z)$  presenti come singolarità solo poli tutti situati a sinistra della retta  $z = \gamma$ , per  $\gamma$  fissato. Si supponga inoltre che

$$\int_{A_R} e^{zt} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty. \quad (8.19)$$

Allora, poiché  $\int_{A_R+L_R}$  è pari a  $2\pi i$  volte la somma dei residui di  $e^{zt} f(z)$  nella regione delimitata da  $A_R + L_R$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$  si avrà

$$F(t) = \sum \text{Res. di } e^{zt} f(z) \text{ nei poli di } f(z)$$

(8.20)

Si osservi che la (8.19) è sempre garantita se  $f(z) = P(z)/Q(z)$  con  $P(z)$  e  $Q(z)$  polinomi tali che il grado di  $P$  sia minore del grado di  $Q$ , una situazione che si incontra spesso nello studio dei sistemi lineari.

Applicando la (8.20) al circuito RC, avendo  $v(z)$  un polo in  $-1/(RC)$ , si trova immediatamente la nota soluzione

$$V(t) = V(0)e^{-t/RC}$$

Se  $f(z)$  presenta punti di diramazione, la (8.20) continua a valere, a patto di deformare il contorno come spiegato nella sezione 8.6. Ad esempio, se  $z = 0$  è il solo punto di diramazione, si può usare il contorno della figura a lato.

**ESEMPIO 8.5.** Mediante il metodo della trasformata di Laplace, risolvere l'equazione del calore (8.15) nella condizione in cui inizialmente, al tempo  $t = 0$ , la temperatura è nulla ovunque per  $x > 0$  e l'estremo  $x = 0$  è costantemente tenuto alla temperatura  $\theta_0$  per tutti i tempi  $t \geq 0$ .

Per comodità, cambiamo nome alla funzione temperatura: chiamiamola  $F(x, t)$  e riscriviamo l'equazione del calore come

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (8.21)$$

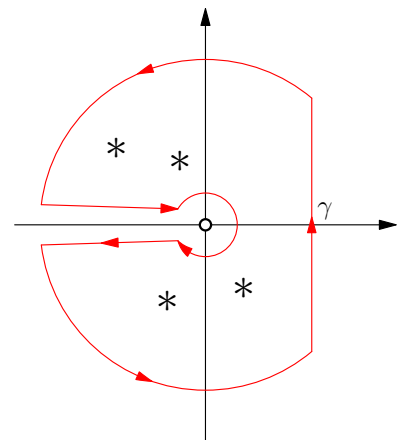
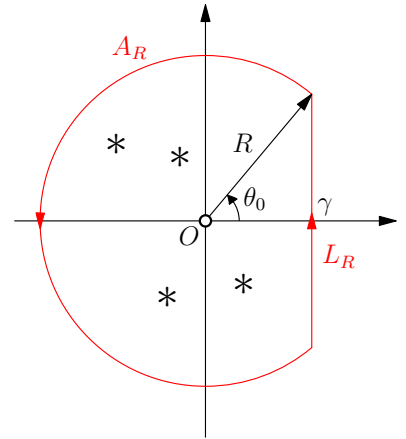


Figura 8.12: Cammino per invertire la trasformata di Laplace quando l'origine è un punto di diramazione.

Prendiamo la trasformata di Laplace rispetto al tempo di ambo i membri della (8.21). Procedendo come nel caso del circuito RC, posto

$$f(s, x) \equiv \int_0^{\infty} F(x, t) e^{-st} dt,$$

e assumendo che nel corso del tempo la soluzione si mantenga limitata, si ottiene

$$sf(x, s) - f(x, 0) = Df''(x, s)$$

dove  $f''$  è la derivata seconda rispetto a  $x$ . Poiché la condizione iniziale  $f(x, 0)$  è nulla, l'equazione per  $f$  diventa

$$f'' - \frac{s}{D}f = 0$$

Questa è un'equazione alle derivate ordinarie rispetto a  $x$  ( $s$  è da considerarsi un parametro). La sua soluzione generale è

$$c_1 e^{\sqrt{s/D}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/D}x},$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti arbitrarie tali che, per essere determinate, sono richieste due condizioni. Una condizione è che per  $x = 0$ ,  $f(0, t)$  è la funzione costante pari a  $\theta_0$ , per  $t > 0$ , e nulla per  $t < 0$ .<sup>2</sup> La trasformata di Laplace di questa funzione è

$$f(0, s) = \theta_0 \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{\theta_0}{s}.$$

La seconda condizione è il requisito che la soluzione si mantenga limitata nel tempo, il che si traduce in  $c_1 = 0$ . Sotto queste condizioni, la soluzione cercata è

$$f(x, s) = \frac{\theta_0}{s} e^{-\sqrt{s/D}x}.$$

Per risalire a  $F(x, t)$  occorre la trasformata inversa di questa funzione. Possiamo usare la (8.20), ma poiché l'origine è un punto di diramazione occorre utilizzare un cammino come in figura 8.12. Dal problema 8.5 (III) si ottiene

$$F(x, t) = \theta_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{Dt}} u^2 du \right] = \theta_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right).$$

L'andamento di questa funzione è mostrato nella figura a lato.

### 8.8 Il metodo che piaceva a Feynman

Il metodo della *derivazione sotto il segno di integrale* è un metodo per calcolare integrali ingegnoso e semplice: si introduce un parametro nella funzione integranda in modo tale che per derivazione rispetto a tale parametro ci si possa ricondurre a integrali noti o a equazioni differenziali risolvibili. Illustriamo questo metodo con alcuni esempi.

<sup>2</sup> In altre parole,  $f(0, t) = \theta_0 H(t)$ , dove

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

è la funzione funzione di Heaviside (o "funzione scalino"), di cui ci occuperemo in un prossimo capitolo. La sua trasformata di Laplace è  $1/s$ .

La funzione degli errori è

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

e la funzione degli errori complementare è

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &\equiv 1 - \operatorname{erf}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

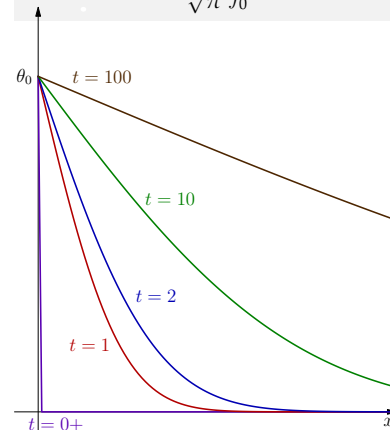


Figura 8.13: Andamento nel corso del tempo di  $\theta_0 \operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{Dt}))$ .

ESEMPIO 8.6.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{d}{da} \frac{\pi}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2adx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{\pi}{a^2} \end{aligned}$$

e per  $a = 1$  si ottiene il risultato desiderato,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.7.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Consideriamo

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

L'integrale che si vuole calcolare è  $I(0)$ . Sappiamo calcolare agevolmente

$$\begin{aligned} I'(a) &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{ix} e^{-ax} dx \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{(i-a)x} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{i-a} = \frac{-1}{1+a^2} \end{aligned}$$

che, integrata, fornisce

$$I(a) = -\arctan(a) + c$$

Poichè  $I(\infty) = 0 = -\pi/2 + c$ , si ha  $c = \pi/2$  e quindi

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a)$$

per  $a = 0$ ,

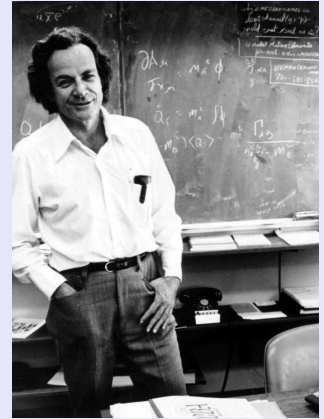
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 8.8.

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo la derivata di  $g$  rispetto a  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{dg(k)}{dk} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2ax)}_{\text{derivative of } e^{-ax^2}} \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{derivative of } e^{-ikx}} dx \\ &= \frac{i}{2a} \left[ e^{-ax^2} e^{-ikx} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (-ik) e^{-ikx} dx \\ &= 0 - \frac{k}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = -\frac{k}{2a} g(k) \end{aligned}$$



Richard Feynman (1918–1988) è stato un fisico americano, noto per il suo lavoro in elettrodinamica quantistica, la rappresentazione delle soluzioni delle equazioni della meccanica quantistica in termini di integrali su cammini, la fisica della superfluidità e il modello a partoni nella fisica delle particelle elementari.

\*\*\*

In *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*, a proposito del calcolo di integrali, Feynman scrisse: "One thing I never did learn was contour integration. I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. . . . That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign—it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals. The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me."

Si ha così l'equazione differenziale

$$\frac{dg(k)}{dk} = -\frac{k}{2a}g(k), \quad g(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

che si risolve a vista

$$\frac{dg}{g} = -\frac{k}{2a}dk \Rightarrow \ln g = -\frac{k^2}{4a} + c \Rightarrow g(k) = g(0)e^{-\frac{k^2}{4a}},$$

da cui,

$$g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$