

9

Altre conseguenze del teorema di Cauchy

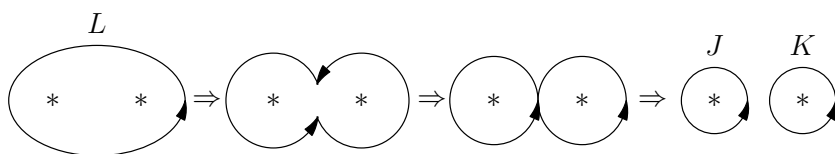
9.1 Miscellanea di teoremi

Incominciamo con una conseguenza del teorema di Cauchy che implicitamente abbiamo già usato. Si tratta del seguente fatto: *il valore dell'integrale di contorno*

$$\oint_C f(z) dz$$

non cambia se la curva chiusa C è deformata a piacere, purché la deformazione avvenga passando sempre per punti analitici della funzione $f(z)$.

Chiamiamo questo fatto *teorema di deformazione* (la dimostrazione è ovvia) e illustriamolo con l'esempio mostrato nella figura sotto.



Se $f(z)$ è ovunque analitica eccetto che nei due poli mostrati in figura, allora la deformazione del cammino mostrata in figura è ammissibile e

$$\oint_L f(z) dz = \oint_J f(z) dz + \oint_K f(z) dz$$

La deformazione mostrata nella figura figura 9.1 permette di comprendere perché teorema e formula di Cauchy sono validi anche per regioni molteplicemente connesse. Nel limite in cui i segmenti AB e EF si toccano, gli integrali lungo i segmenti si elidono a vicenda, essendo diretti in senso opposto. Quindi, se la funzione $f(z)$ è analitica in \mathcal{R} , si avrà

$$\oint_{K-L} f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0$$

Adesso abbiamo argomento. L'inverso del teorema di Cauchy, noto come *Teorema di Morera*, afferma che se $f(z)$ è continua in una

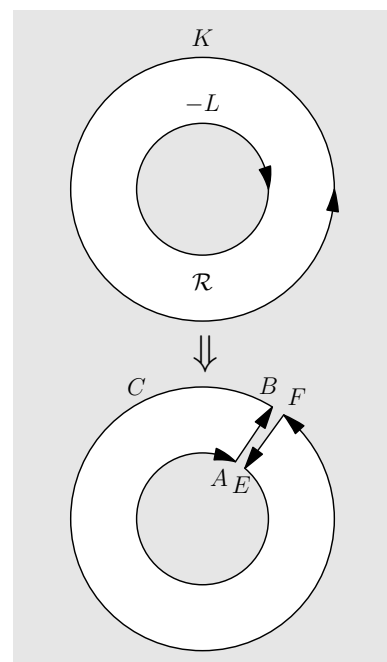


Figura 9.1: In alto la regione molteplicemente connessa \mathcal{R} con bordo $K - L$ che, per deformazione del bordo, è trasformata nella regione in basso delimitata dalla curva semplice C .

regione semplicemente connessa \mathcal{R} e se

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

lungo ogni curva semplice chiusa contenuta in \mathcal{R} , allora $f(z)$ è analitica in \mathcal{R} . Se si ragiona in termini di cariche e teorema di Gauss nel piano, questo fatto sembra così ovvio da non richiedere neanche una dimostrazione. (La dimostrazione in effetti è semplice e la lasciamo come esercizio.)

Meno ovvio è quale sia la risposta alla domanda se ci siano funzioni, diverse da quelle costanti, analitiche ovunque incluso l'infinito. Un polinomio o l'esponenziale, per esempio, sono funzioni ovunque analitiche, ma, come abbiamo visto, non all'infinito. Il *teorema di Liouville* afferma che se $f(z)$ è analitica e limitata in tutto il piano complesso, allora deve essere necessariamente una costante. Non è difficile convincersi di questo fatto. Se a e b sono due punti qualunque del piano e C_R è un cerchio centrato in a di raggio $R \geq 2|a - b|$, dalla formula di Cauchy si ha

$$|f(b) - f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] f(z) dz \right|.$$

Essendo $f(z)$ per ipotesi limitata, esiste una costante M tale che $|f(z)| < M$. Dunque, per la disuguaglianza (7.1), tenuto conto che $|z-a| = R$ e che $|z-b| = |z-a + (a-b)| \geq R - |a-b| \geq R - R/2 = R/2$, si ha

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|a-b|M}{|z-a||z-b|} dz \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|a-b|M}{(1/2)R^2} R d\theta \\ &= 2 \frac{|a-b|M}{R} \end{aligned}$$

Facendo tendere R all'infinito, si ha $|f(b) - f(a)| = 0$, cioè $f(z) =$ costante, che è quanto si voleva dimostrare.

Dunque, una funzione che è analitica ovunque nel piano complesso, e non è una costante, deve necessariamente avere una singolarità all'infinito. Una funzione di questo tipo è detta *intera*. Sono funzioni intere i polinomi, la funzione esponenziale, le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche. Le intere sono un caso particolare delle meromorfe (a cui è consentito avere poli).

Sorprendentemente, il teorema di Liouville ha ripercussioni in un settore della matematica apparentemente molto lontano. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{P(z)},$$

dove $P(z)$ è un polinomio. Se $P(z)$ non avesse radici, allora

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

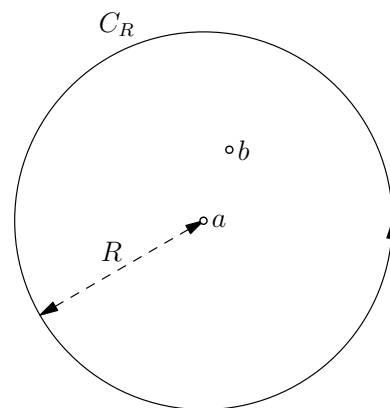


Figura 9.2: a e b sono due punti qualunque del piano e C_R è un cerchio centrato in a di raggio $R \geq 2|a - b|$.

sarebbe analitica in tutto il piano complesso. Chiaramente, $f(z)$ è limitata su tutto il piano complesso (il suo modulo tende a zero per z che tende all'infinito). Dunque, per il teorema di Liouville, si avrebbe che $f(z)$, e di conseguenza $P(z)$, dovrebbero essere costanti. Poiché si è raggiunta una contraddizione, ne segue che $P(z)$ deve avere almeno una radice. Ma questo è il *teorema fondamentale dell'algebra* (1.10)!

Il teorema fondamentale dell'algebra è dunque un'immediata conseguenza del teorema di Liouville che, a sua volta, è un'immediata conseguenza del teorema di Cauchy (se poi riguardiamo quest'ultimo come il teorema di Gauss per l'elettrostatica nel piano, scopriamo un insospettabile ponte tra elettrostatica e algebra!).

Il *Teorema della media di Gauss* afferma che se $f(z)$ è analitica all'interno e lungo un cerchio C di raggio R e con centro in $z = a$, allora $f(a)$ è la media dei valori di $f(z)$ su C . Questo fatto è un'immediata conseguenza della formula di Cauchy. Infatti, se C è un cerchio di raggio R , la sua equazione è $|z - a| = R$, cioè $z = a + Re^{i\theta}$, e

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

diventa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta \tag{9.1}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Il teorema vale separatamente per la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$, che sono funzioni armoniche. Si ritrova così, in due dimensioni il teorema della media per funzioni armoniche che vale in un numero qualunque di dimensioni (si veda i complementi 5.8.1). Ricordiamo che in d dimensioni sono armoniche le funzioni u tali che

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \dots = 0.$$

Maxwell chiamava il laplaciano di u nel punto P la *concentrazione di u* in quel punto, nel senso che misura la differenza tra la media della funzione su una piccola superficie sferica centrata in P e il valore della funzione in quel punto. Il nocciolo di questo fatto è particolarmente evidente quando si considera il laplaciano discretizzato su un reticolo. In una dimensione,

$$\begin{aligned} \Delta u = u''(x) &\approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} \approx \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} [u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)] , \end{aligned}$$

in due,



Joseph Liouville (1809–1882) è stato un matematico francese che diede importanti contributi alla teoria dei numeri, all'analisi complessa, alla topologia e alla geometria differenziale. Anche i suoi contributi alla fisica furono ragguardevoli: introdusse la nozione di variabili azione-angolo come descrizione dei sistemi completamente integrabili e dimostrò il teorema (che prende il suo nome) che l'evoluzione temporale di un sistema Hamiltoniano preserva il volume nello spazio delle fasi. Questo teorema è alla base della meccanica statistica.



Carl Friedrich Gauss (1777–1855) è stato un matematico e scienziato tedesco che ha contribuito in maniera significativa a molti campi quali la teoria dei numeri, la statistica, la geometria differenziale, la geometria, la geodesia, la geofisica, l'elettrostatica, l'astronomia e l'ottica. È stato tra i matematici più influenti di tutti i tempi.

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

$$\approx \frac{1}{h^2} [u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h) - 4u(x, y)]$$

e in d dimensioni:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2} [\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P - 2d \times u(P)]$$

Quindi l'annullarsi del laplaciano discretizzato in P implica

$$u(P) = \frac{1}{2d} [\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P]$$

$$= [\text{media di } u \text{ nell'intorno di } P]$$

Strettamente collegato al teorema della media è il seguente fatto: se $f(z)$ è analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa C , allora il massimo del modulo di $f(z)$ si trova su C (a meno che f non sia costante e quindi uguale dappertutto). Questo fatto, noto come *teorema (o principio) del massimo modulo* si dimostra facilmente facendo riferimento alla figura 9.4: supponiamo che il massimo M si raggiunga in un punto a dentro la curva C (l'ovale in grigio nella figura), sia cioè $|f(a)| = M$. Sia C_1 un cerchio con centro in a tutto contenuto in C . Allora, se si esclude che f sia costante dentro C_1 , ci sarà un punto b dentro C_1 tale che $|f(b)| < M$. Ma, per continuità, ci sarà un intorno finito di b dentro cui $|f(b)| < M$. Sia tale intorno il cerchio C_2 centrato in b mostrato in figura. Sia adesso C_3 un cerchio di raggio $|a-b|$ centrato in a ; per il teorema della media, la media dei valori del modulo sul cerchio C_3 dovrà essere maggiore o al più uguale al valore M che la funzione assume nel centro ma, nella parte di C_3 fuori da C_2 (in rosso in figura), il modulo può al massimo valere M e nella parte dentro C_2 (in blu) è strettamente minore di M , quindi la media su C_3 sarà strettamente minore di M . Essendo giunti ad una contraddizione, il teorema risulta dimostrato.

Si osservi che il teorema poteva essere dimostrato separatamente per le parti reale e immaginaria di f : il principio del massimo modulo riguarda le funzioni armoniche. Ne segue un'interessante interpretazione fisica. Consideriamo l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = D\Delta u$$

per la temperatura $T = T(x, y, t)$ e supponiamo che la temperatura venga costantemente mantenuta ad una distribuzione costante sul bordo C della la regione \mathcal{R} . Dopo un certo lasso di tempo la temperatura dentro la regione raggiungerà l'equilibrio e, all'equilibrio varrà l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

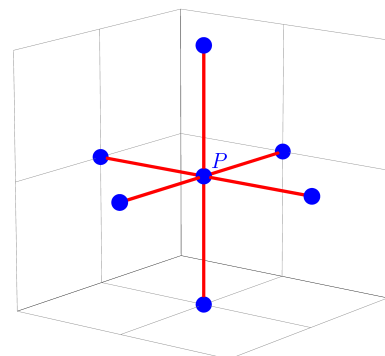


Figura 9.3: Funzioni armoniche su un reticolo tri-dimensionale: se il laplaciano discretizzato di u si annulla in P , allora $u(P)$ è pari ad $1/6$ della somma dei valori di u nei primi vicini di P (che sono 6, e in d dimensioni sono $2d$).

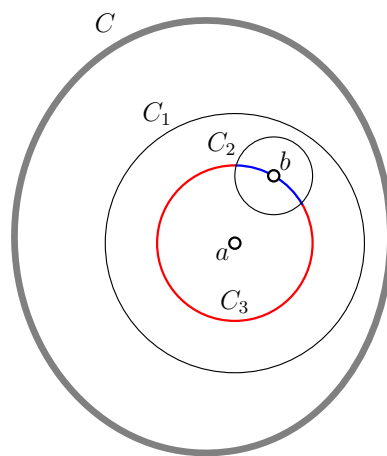


Figura 9.4: Teorema del massimo modulo.

In altre parole, in condizioni di equilibrio, la temperatura dentro alla regione è una funzione armonica. Allora, per il principio del massimo modulo, la temperatura non può assumere il suo valore massimo dentro \mathcal{R} , ma solo sul suo bordo, che ha una distribuzione di temperatura mantenuta costante nell'esperimento. Analoghe considerazioni valgono per il potenziale elettrostatico e, in generale, per qualunque grandezza fisica che soddisfi l'equazione di Laplace.

A questo riguardo, osserviamo che il problema di determinare una funzione armonica in \mathcal{R} , quando sono fissati i suoi valori sul bordo $C = \partial\mathcal{R}$, va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. È facile dimostrare che se la soluzione di un problema di Dirichlet esiste, allora è unica (si veda i complementi 5.8.1). Quel che è difficile è dimostrarne l'esistenza: quali proprietà deve avere la funzione sul bordo? Quanto irregolare può essere il bordo? Dal punto di vista della fisica, il problema è equivalente a stabilire se esista una distribuzione stazionaria di temperatura nella regione \mathcal{R} , fissati i valori della temperatura sul bordo. Ovvio che c'è, verrebbe da dire, basta aspettare che il transiente decada e si raggiunga l'equilibrio! In effetti, questo fu quel che pensavano i fisici e i matematici fino a che, agli inizi del Novecento, il matematico francese Henri Lebesgue non trovò un contro-esempio, mostrando una situazione in cui il problema di Dirichlet non ha soluzione. Vale anche un principio di *minimo modulo*: sotto le stesse condizioni di prima, con la condizione aggiuntiva che $|f(z)| \neq 0$ dentro C , anche il valor minimo di $|f(z)|$ è raggiunto sul bordo C e non dentro a C . Questo teorema si dimostra in modo analogo ragionando sulla funzione $1/f(z)$. Il suo significato fisico è che neanche il minimo della temperatura può essere raggiunto sul bordo.

Concludiamo questa miscellanea con due teoremi che ci limitiamo ad enunciare, mentre altre due importanti conseguenze del teorema di Cauchy verranno discusse separatamente nelle prossime due sezioni.

Teorema dell'argomento: Sia $f(z)$ analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa C , fatta eccezione per un numero finito di poli giacenti dentro C , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

dove N e P sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di $f(z)$ dentro C .

Teorema di Rouché: Siano $f(z)$ e $g(z)$ analitiche dentro e lungo una curva semplice chiusa C e sia $|g(z)| < |f(z)|$ lungo tutta C , allora $f(z) + g(z)$ e $f(z)$ hanno dentro C lo stesso numero di zeri.

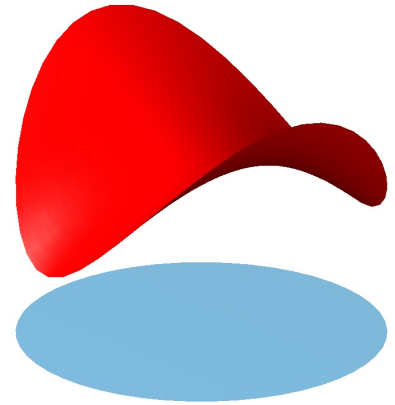
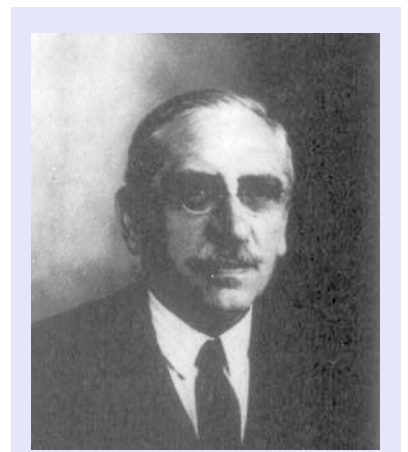


Figura 9.5: Grafico del modulo di $\cos z$ (in rosso) per z nel disco unitario centrato nell'origine (in blu). Come predetto dal teorema del massimo modulo, il massimo del modulo non può essere dentro al disco (cosicché il valore più elevato sulla superficie rossa è da qualche parte lungo il suo bordo). Analogo discorso vale per il suo minimo.



Henri Lebesgue (1875–1941) è stato un matematico francese, noto soprattutto per la sue teorie della misura e dell'integrazione, che sono una generalizzazione delle nozione classiche portate a compimento da Riemann. Queste teorie furono esposte nella sua tesi di dottorato *Intégrale, longueur, aire* all'università di Nancy nel 1902.

9.2 Infinita differenziabilità e serie di Taylor

Vogliamo adesso mostrare che se $f(z)$ è analitica all'interno e lungo un cerchio C_R di raggio R , per semplicità centrato nell'origine, allora $f(z)$ può essere espressa come una serie di potenze

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$$

che converge dentro al disco di raggio R . Per stabilire l'esistenza della serie, ritorniamo alla formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ.$$

Raccogliendo Z a denominatore, possiamo riscriverla come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[\frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ.$$

Poiché z è dentro al cerchio C_R su cui è Z , si ha

$$|z| < |Z| = R \quad \text{e} \quad |z/Z| < 1. \quad (9.2)$$

Perciò $1/[1-(z/Z)]$ può essere vista come la somma di una serie geometrica infinita, per cui

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + (z/Z)^3 + \dots \right] dZ. \quad (9.3)$$

A patto che sia possibile integrare la serie infinita termine per termine, deduciamo che $f(z)$ può essere espresso come una serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ \quad (9.4)$$

Ma non solo. Poiché

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

deduciamo anche

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ,$$

che è, in effetti, un risultato sorprendente, come commenteremo tra breve.

Ma prima di passare ai commenti, completiamo la dimostrazione. È possibile integrare la serie infinita nel secondo membro della (9.3) termine a termine: basta mostrare che la somma $f_N(z)$ dei primi N termini della serie (9.4) converge a $f(z)$ quando N tende all'infinito. Il resto della serie geometrica è

$$\frac{1}{1-(z/Z)} - \left[1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + \dots + (z/Z)^{N-1} \right] = \frac{(z/Z)^N}{1-(z/Z)}$$

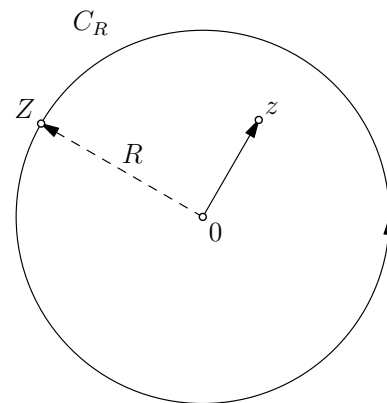


Figura 9.6: Z è un generico punto sul cerchio di raggio R , z è dentro al cerchio, $|z| < |Z| = R$.

(noto da esercizi in capitoli precedenti). Dunque

$$f(z) - f_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z} \left[\frac{(z/Z)^N}{1 - (z/Z)} \right] dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} dZ,$$

da cui

$$|f(z) - f_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} \right| dZ$$

Detto M il massimo di $|f(Z)/(Z - z)|$ (che per la (9.2) esiste ed è finito) e ricordando la (7.1), si ha

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} \right| \leq RM |z/R|^N$$

Perciò $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = f(z)$, che è quanto si voleva dimostrare.

Qual è il raggio di convergenza della serie che abbiamo ottenuto? Sappiamo che se f è analitica dentro C , allora la serie (9.4) converge a $f(z)$ in quel disco. Perciò, riferendoci alla figura 9.7, vediamo che C_R può essere espanso fino al cerchio tratteggiato, dove incontra la prima singolarità di f . Più in generale, $f(z)$ potrebbe essere un ramo a un sol valore di una multifunzione e, come abbiamo imparato, i punti di diramazione agiscono come un ostacolo tanto quanto i poli. Perciò risulta dimostrato in maniera definitiva il principio (4.3): il raggio di convergenza è la distanza dal centro di espansione alla singolarità più vicina, sia essa un polo, un punto di diramazione o una singolarità essenziale.

Se avessimo scelto un punto a come centro del cerchio, ben poco sarebbe cambiato: avremmo ottenuto un'espansione in a anziché nello zero. Risulta così stabilito il *teorema di Taylor* per funzioni analitiche:

Sia $f(z)$ analitica all'interno e lungo un cerchio C con centro in $z = a$. Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

dove

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz. \tag{9.5}$$

Il raggio massimo di convergenza della serie o, semplicemente, il raggio di convergenza R della serie, è la distanza tra il punto a e la singolarità più vicina.

Abbiamo detto che l'espressione per $f^{(n)}(0)$ è un risultato sorprendente. Chiariamo perché. Innanzitutto osserviamo che dalla (9.5) si ha

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - a)^{n+1}}. \tag{9.6}$$

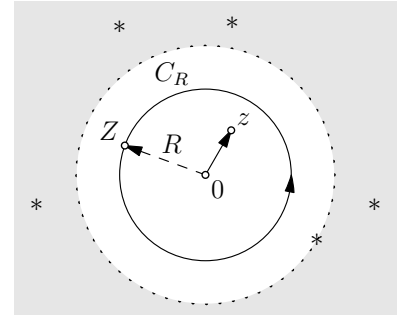


Figura 9.7: La serie diverge nella regione in grigio e converge nel disco bianco.

Dove C , per deformazione, può essere una qualunque curva chiusa che contiene a , purché $f(z)$ sia analitica all'interno di e su C .

Questa formula è interessante per due ragioni. In primo luogo, mostra che se f è analitica, cioè derivabile una volta, lo è anche infinite volte, un risultato che non ha alcun analogo nell'analisi reale. In secondo luogo, fornisce il calcolo della derivata in termini di un integrale! Da un punto di vista pratico, è utile che permetta di fare anche il viceversa (visto che in genere calcolare derivate è più semplice che calcolare integrali).

Quest'ultima proprietà è però meno inaspettata di quanto possa sembrare. Prendiamo, ad esempio, $n = 1$. Allora

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2}, \quad (9.7)$$

ma questa equivale alla formula

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\},$$

che è un'estensione agli integrali di contorno della regola di Leibniz per la derivazione sotto il segno di integrale. La stessa estensione vale per la (9.6), che è in effetti la derivata n -esima di

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

rispetto a a .

9.3 Serie di Laurent

Anche se non l'abbiamo chiamata così, abbiamo già incontrato una serie di Laurent nella sezione 7.4, dove abbiamo visto che nell'intorno del polo di ordine m si ha

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

per $g(z)$ analitica e non nulla in a . Per il teorema di Taylor (9.5), se una funzione è analitica, necessariamente ha uno sviluppo in serie, quindi

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{g^n(a)}{n!}$$

da cui deduciamo che $f(z)$ ha una serie, detta di Laurent, della forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots \quad (9.8)$$



Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) è stato un matematico francese, noto per la serie che porta il suo nome. Aveva esposto la sua scoperta in una memoria sottoposta per un premio dell'Accademia delle Scienze, ma memoria non arrivò entro i termini prescritti e non fu mai considerata per il premio. Fu pubblicata solo dopo la sua morte.

dove

$$c_{-m} = b_0, c_{-m+1} = b_1, \dots, c_0 = b_m, c_1 = b_{m+1}, \dots,$$

La parte in potenze negative di questa serie è detta *parte principale*.

Il teorema di Laurent, stabilisce che un'espansione di questa forma esiste sempre:

Sia $f(z)$ analitica dappertutto dentro un anello centrato in a . Allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ dove } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ \quad (9.9)$$

e K è una qualunque curva semplice chiusa nell'anello.

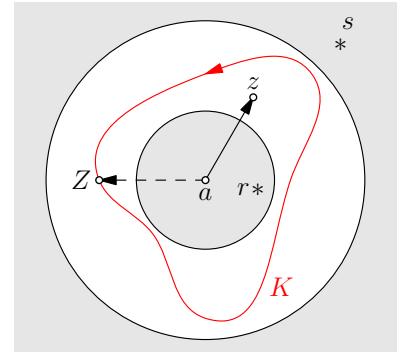


Figura 9.8: La serie converge nell'anello bianco.

Prima di dimostrare questo teorema facciamo alcuni commenti.

Ciò che è davvero notevole, è l'ESISTENZA della serie di Laurent, non il fatto che converga in un anello. Poiché sappiamo che una serie di potenze in $(z - a)$ converge dentro a un disco centrato in a , sappiamo anche che una serie di potenze in $1/(z - a)$ convergerà fuori dal disco centrato in a . Essendo, per definizione, una serie di Laurent la somma di una serie di potenze in $(z - a)$ e una serie di potenze in $1/(z - a)$, ne segue che la convergenza è in un anello.

Sopra abbiamo dedotto l'esistenza di una serie in prossimità di un polo. Il Teorema di Laurent è molto più potente: non fa alcuna assunzione riguardo a quello che succede alla funzione nel disco interno D (vedi figura). In pratica, il disco esterno può essere espanso fino a incontrare la singolarità s di $f(z)$, e quello interno contratto fino a che non si raggiunge la singolarità più esterna r che sta in D .

Se non ci sono singolarità in D , il bordo interno può collassare completamente trasformando così l'anello in un disco. In questo caso, la serie non contiene potenze negative. Infatti, se n è negativo, allora $f(Z)/(Z - a)^{n+1}$ è analitica dappertutto dentro K e quindi $c_n = 0$. In questo modo si ritrova il teorema di Taylor come caso particolare del teorema di Laurent.

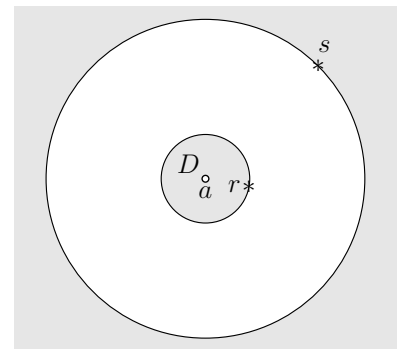


Figura 9.9: L'anello può essere steso verso l'esterno e l'interno fino ad incontrare le singolarità di f più vicine.

Supponiamo che a sia una singolarità e che per ϵ sufficientemente piccolo non ci siano altre singolarità in una distanza ϵ da a . In altre parole, a è una singolarità isolata. Applicando il teorema di Laurent all'anello $0 < |z - a| < \epsilon$, realizziamo che ci sono due differenti possibilità: o la parte principale ha un numero finito di termini o ne ha infiniti. Se il numero è finito a è un polo, se è infinito, è una singolarità essenziale del tipo di quella che abbiamo incontrato per $e^{1/z}$. Morale: una singolarità isolata o è un polo o è una singolarità essenziale.

Passiamo alla dimostrazione del teorema (9.9). Semplifichiamoci la vita e prendiamo $a = 0$. Inoltre usiamo le notazioni illustrate in

figura 9.10: \mathcal{C} e \mathcal{D} sono cerchi percorsi in senso antiorario, tali che z è compreso tra di loro; \mathcal{L} è un circuito semplice antiorario attorno a z , che sta dentro l'anello. Punti generici sulle curve \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{L} sono denotati Z , W e V rispettivamente.

Suddividiamo la dimostrazione in tappe.

1. Dalla formula di Cauchy otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(V)}{V-z} dV = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{W-z} dW$$

La seconda identità segue dal fatto che \mathcal{L} può essere deformato in $(\mathcal{C}) + (-\mathcal{D})$.

2. Riscriviamo l'equazione precedente come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[\frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[\frac{1}{1-(W/z)} \right] dW.$$

Il significato di questo è che $|(z/Z)| < 1$ e $|(W/z)| < 1$, cosicchè entrambi gli integrandi a secondo membro possono essere espansi in serie geometriche.

3. Procedendo come per la serie di Taylor, per l'integrale lungo \mathcal{C} otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[\frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ \right] z^n$$

4. Un ragionamento sostanzialmente identico a quello fatto per la serie di Taylor giustifica l'integrazione termine a termine dell'integrale attorno a \mathcal{D} :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[\frac{1}{1-(W/z)} \right] dW = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{n-1} f(W) dW \right] \left(\frac{1}{z} \right)^n.$$

5. L'esistenza della serie di Laurent è stabilita:

$$f(z) = \dots + \frac{d_3}{z^3} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_1}{z^1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

dove

$$d_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{m-1} f(W) dW \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ$$

6. Due osservazioni conclusive permettono di rifinire il risultato ed arrivare alla tesi del teorema:

- Gli integrali che definiscono d_m e c_n non cambiano se permettiamo a \mathcal{C} di contrarsi e a \mathcal{D} di espandersi fino a che non si fondono nello stesso loop semplice K di figura 9.8.
- Se scriviamo $m = -n$ l'integrale che definisce il coefficiente d_{-n} di z^n ha integrando $W^{-n-1} f(W) = f(W)/W^{n+1}$, che è lo stesso integrando dei c_n .

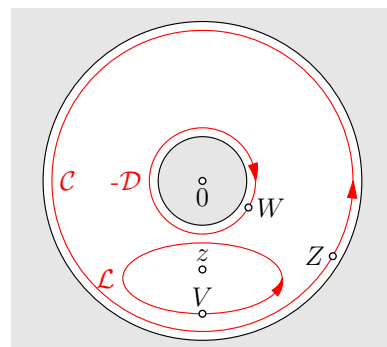


Figura 9.10: La serie converge nell'anello bianco.

Arriviamo così alla forma compatta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$$

che è proprio quanto si voleva dimostrare.

9.4 Espansione in multipoli

La serie di Laurent è, dal punto di vista fisico, un'espansione in multipoli. Chiariamo questo con un esempio. Supponiamo che una funzione $f(z)$, altrimenti analitica, abbia un polo triplo nell'origine.

Allora

$$f(z) = \frac{p}{z^3} + \frac{d}{z^2} + \frac{q}{z} + a + bz + cz^2 + \dots$$

Nell'intorno della singolarità, il comportamento della funzione è governata dalla sua parte principale, il cui campo coniugato è

$$\bar{\mathbf{P}} \leftrightarrow \frac{\bar{p}}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{d}}{\bar{z}^2} + \frac{\bar{q}}{\bar{z}}$$

Riconosciamo la sovrapposizione di un quadrupolo, di un dipolo e di una combinazione sorgente/vortice del tipo già incontrato ($\bar{q} = A - iB$). La parte principale della serie corrisponde quindi ad una *espansione in multipoli*. La serie di Laurent e il teorema dei residui possono dunque essere interpretati fisicamente come segue. Il solo termine capace di generare flusso e circolazione è \bar{q}/\bar{z} , che può essere a sua volta decomposto in un vortice di intensità $\mathcal{C} = -2\pi \text{Im}(q)$ e una sorgente di intensità $\mathcal{F} = 2\pi \text{Re}(q)$. Tutti gli altri termini corrispondono a multipoli che non generano né circolazione né flusso; un insieme finito di questi è nel polo, mentre il resto è all'infinito.

9.5 Prolungamento analitico

Si supponga di considerare la funzione analitica definita dallo sviluppo in serie di Taylor

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \tag{9.10}$$

all'interno del cerchio di convergenza C_1 (si veda figura a lato). Quanta libertà abbiamo di costruire una funzione analitica $f(z)$ che all'interno del cerchio C_1 sia data dalla serie sopra e in altre regioni del piano complesso sia definita in modo indipendente? Nessuna!

Spieghiamo perché. Scelto un punto b dentro C_1 , il valore di $f(z)$ e delle sue derivate in b è determinato dalla (9.10) e risulta quindi unicamente definito lo sviluppo in serie di Taylor in b

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \dots \tag{9.11}$$

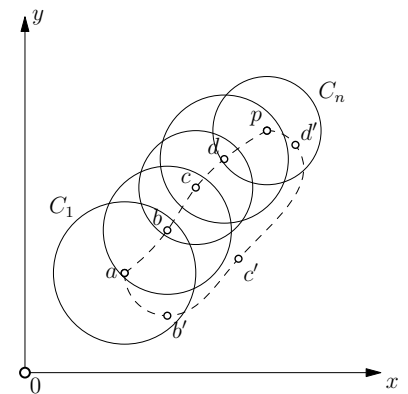


Figura 9.11: Prolungamento analitico.

che ha cerchio di convergenza C_2 . Se C_2 si espande oltre C_1 , il valore della funzione e delle sue derivate risulta determinato in questa zona più ampia. Si dice in tal caso che la funzione è stata *prolungata analiticamente* oltre C_1 e il procedimento seguito si dice di *continuazione analitica* o *prolungamento analitico*. Naturalmente, il procedimento può essere continuamente ripetuto: scelto un punto c dentro C_2 si arriva ad una nuova serie che ha cerchio di convergenza C_3 che può estendersi oltre C_1, C_2 , ecc.

L'insieme di tutte tale rappresentazioni in termini di serie di potenze, cioè di tutti i possibili prolungamenti analitici DEFINISCE la funzione analitica $f(z)$. Ogni serie di potenze del tipo (9.10) è detta *elemento* della funzione e il succo di quanto abbiamo appena spiegato è che fissatone un elemento, tutti gli altri elementi della funzione, e quindi la funzione stessa, risultano determinati: dunque, nessuna libertà di definire a nostro piacimento la funzione in diverse regioni del piano complesso.

Nel realizzare il prolungamento analitico occorre evitare le singolarità. Ad esempio, in figura 9.11, non vi può essere alcuna singolarità che si trovi dentro C_2 e su C_1 , perchè altrimenti la serie divergerebbe in quel punto. In alcuni casi, le singolarità sul cerchio di convergenza sono talmente tante che il prolungamento analitico diventa impossibile. In tali casi si dice che il cerchio di convergenza è una *barriera naturale*.

Passando dal cerchio C_1 al cerchio C_n in figura 9.11, si è scelto il percorso che passa attraverso in centri $a, b, c, \dots p$. Sono possibili altri percorsi, ad esempio il percorso $a, b', c', \dots p$ mostrato in figura, e se i cerchi lungo i percorsi non contengono singolarità (come deve essere perchè si abbia prolungamento analitico), la funzione analitica così individuata non dipende dal percorso.

ESEMPIO 9.1. Le serie

$$(a) \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad (b) \sum_0^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

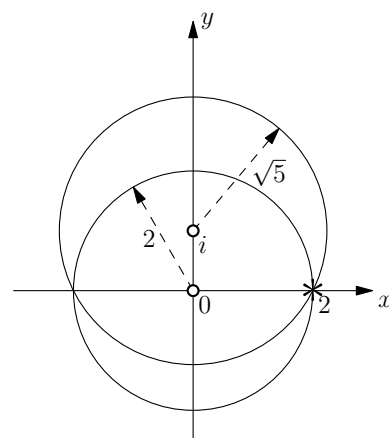
sono prolungamento analitico l'una dell'altra.

Per il criterio del rapporto, la serie (a) converge nel disco $|z| < 2$. In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine $1/2$ e ragione $z/2$) può essere sommata e rappresenta la funzione

$$f(z) = \frac{1/2}{1-z/2} = \frac{1}{2-z}.$$

Per il criterio del rapporto, la serie (b) converge per

$$\frac{|z-i|}{|2-i|} < 1,$$



cioè per $|z - i| < \sqrt{5}$. In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine $1/(2 - i)$ e ragione $(z - i)/(2 - i)$) può essere sommata e rappresenta la funzione

$$\frac{1/(2 - i)}{1 - (z - i)/(2 - i)} = \frac{1}{2 - z}.$$

Dato che le serie rappresentano la stessa funzione nella regione interna ad entrambi i cerchi $|z| = 2$ e $|z - i| = \sqrt{5}$, ne segue che sono prolungamento analitico l'una dell'altra.