

10

Funzioni generalizzate

10.1 La delta di Dirac

Lasciamo per un momento da parte l'analisi complessa e occupiamoci di un argomento che prima o poi spunta fuori in un corso di metodi matematici della fisica: la delta di Dirac. Questo argomento si presta ad essere trattato a svariati livelli di sofisticazione o di rozzezza. Noi ne daremo una trattazione breve e elementare, ma rigorosa. La "funzione delta" $\delta(x)$ fu introdotta da Dirac in maniera paradossale: una "funzione" uguale a zero per $x \neq 0$ e con la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.1)$$

per una funzione continua $F(x)$ opportuna. Ma nessuna funzione nel senso ordinario può avere questa proprietà! Si può tuttavia immaginare una successione di funzioni $\delta_n(x)$ che hanno picchi sempre più alti e diventano sempre più strette in $x = 0$, mantenendo costante e pari a 1 l'area sotto la curva, con il valore della funzione che tende a zero in ogni punto, eccetto nello zero, dove tende all'infinito. Chiamiamo queste funzioni *approssimanti della delta*.

Nel limite, una tale successione avrebbe la proprietà (10.1), nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.2)$$

e la scrittura (10.1) andrebbe intesa come una notazione abbreviata della (10.2). Le δ_n sono dunque da intendersi come "approssimanti" per il processo di limite e non per la $\delta(x)$, che come funzione non esiste. La successione delle gaussiane

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.3)$$

ha questi desiderata: l'area sotto queste curve è unitaria in quanto $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ e, al crescere di n , le gaussiane diventano sempre più strette e più piccate nello zero, come mostrato nella figura 10.1.

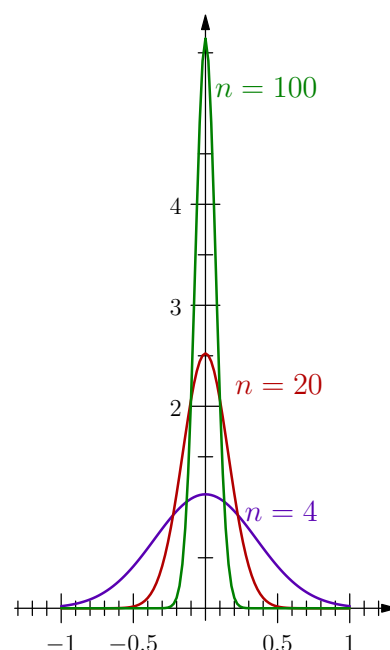


Figura 10.1: Approssimanti gaussiane della delta di larghezza $1/n$, per $n = 4, 20, 100$.

Dimostrare che per questa scelta di approssimanti vale la (10.2) per $F(x)$ continua e limitata non è difficile. Si incominci con l'ovvia maggiorazione:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} F(x) dx - F(0) \right| &= \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} (F(x) - F(0)) dx \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |F(x) - F(0)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left| F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - F(0) \right| dx . \end{aligned}$$

Quindi si spezzi l'integrale a secondo membro come somma su tre diverse regioni di integrazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_{-\infty}^{-1/n} \dots + \int_{-1/n}^{1/n} \dots + \int_{1/n}^{\infty} \dots$$

Il primo e l'ultimo integrale vanno chiaramente a zero per n che va all'infinito poiché avendo assunto F limitata, diciamo da una costante C , per l'ultimo integrale si ha

$$\int_{1/n}^{\infty} \dots \leq C \int_{1/n}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

che va chiaramente a zero per n che va all'infinito. Analogamente si procede con il primo. Si osservi che non era necessario richiedere la limitatezza di F : è sufficiente che $F(x)$ non cresca troppo all'infinito. L'integrale nel mezzo lo stimiamo come

$$\int_{-1/n}^{1/n} \dots \leq \frac{2}{n} \left[\max_{-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}} \left| F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - F(0) \right| \right] .$$

Poichè la funzione è continua (in particolare nello zero), anche questo integrale va a zero e la (10.2) risulta così stabilita.

Quando la delta è definita da una successione di approssimanti (analogamente a come i reali sono definiti da opportuna successione di razionali), ci si aspetta che le regole del calcolo continuo a essere valide, ad esempio che si possa parlare di derivata della delta. Se adesso si assume che $F(x)$ sia derivabile con derivata continua e che valga l'integrazione per parti, dalla (10.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) F(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F'(x) dx = -F'(0) \quad (10.4)$$

Nello spirito che un'identità di questo tipo è da intendersi come forma abbreviata di un processo di limite, la $\delta'(x)$ risulta definita dalle derivate della successione (10.3),

$$\delta'_n(x) = -2nx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.5)$$

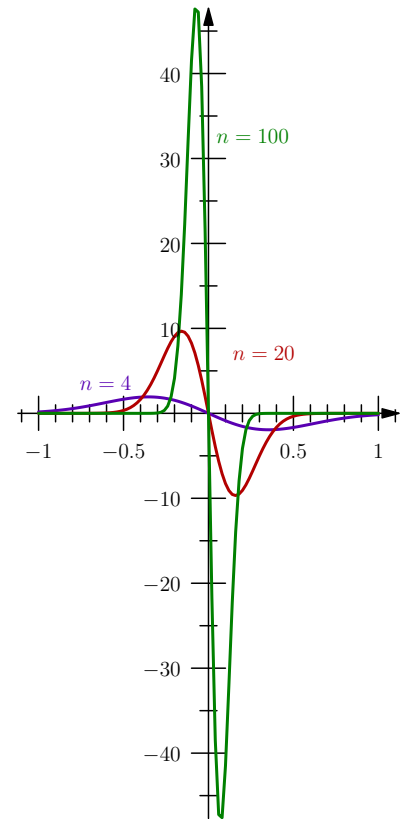


Figura 10.2: Derivate delle approssimanti della delta per $n = 4, 20, 100$.

Allora la (10.4) risulta intuitivamente chiara, come mostrato in figura 10.2. La figura rende evidente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)F(x)dx \approx \frac{F(x-h) - F(x+h)}{2h} \approx -F'(0)$$

con h infinitesimo per n grande.

La (10.4), intesa come limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_n(x)F(x)dx = -F'(0) \tag{10.6}$$

dopo un'integrazione per parti, la si dimostra analogamente a quanto visto per la (10.1) e, più in generale, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)F(x)dx = (-1)^n F^{(n)}(0) \tag{10.7}$$

Naturalmente, occorre adesso richiedere che la F sia continuamente derivabile n volte.

Fisicamente, la delta può essere vista come una distribuzione di carica sull'asse delle x che corrisponde ad una carica puntiforme uniforme nell'origine e la sua derivata come un *dipolo* orientato nel verso negativo dell'asse delle x . Infatti, dalla (10.4), per $F = x$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)x dx = -1$$

La delta e le sue derivate corrispondono dunque a idealizzazioni fisiche familiari.

La delta può anche essere integrata: se consideriamo la successione di integrali delle approssimanti gaussiane della delta, come in figura 10.3,

$$\Theta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-ny^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{nx}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{nx})],$$

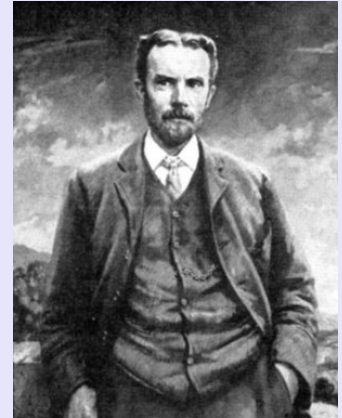
vediamo che esse stesse convergono (per $x \neq 0$) alla funzione di Heaviside (o "funzione scalino")

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{10.8}$$

Si osservi che poiché il limite delle Θ_n è definito sotto il segno di integrale, per la Θ così definita,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)F(x)dx = \int_0^{\infty} F(x)dx,$$

il suo valore nello zero è del tutto convenzionale (la convenzione scelta nella (10.8) è comunque quella standard). Questo perchè se di una funzione integranda si cambia il valore in un punto (o in insieme numerabile di punti) il valore dell'integrale non cambia.



Oliver Heaviside (1850–1925) è stato un ingegnere elettrico, fisico e matematico inglese autodidatta. Spesso in urto con l'establishment scientifico nel suo tempo, ha contribuito a sviluppare molti dei metodi che usiamo ancora oggi: ha introdotto i numeri complessi per studiare i circuiti elettrici, ha inventato il metodo delle trasformate di Laplace per risolvere le equazioni differenziali lineari; indipendentemente da Gibbs, ha introdotto le notazioni moderne di calcolo vettoriale; ha riformulato le equazioni di Maxwell nel modo in cui oggi le conosciamo in termini degli operatori vettoriali rotore e divergenza; i termini ammettenza, conduttanza, impedenza, permeabilità, ed altri, oggi di uso comune, furono conati da lui.

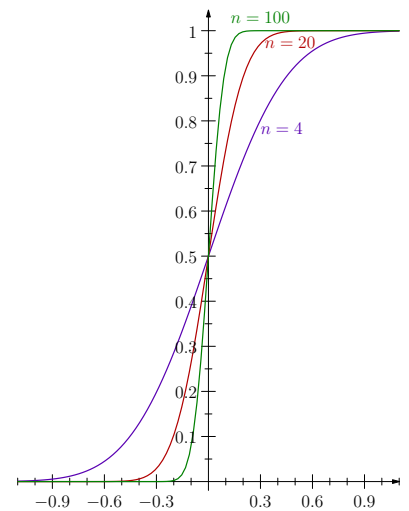


Figura 10.3: Integrali delle approssimanti della delta per $n = 4, 20, 100$.

10.2 Manipolazioni della delta

In virtù della sua caratterizzazione in termini della (10.2), la delta può essere manipolata sotto il segno di integrale come se fosse una funzione ordinaria, *perchè queste manipolazioni sono scaricate sulle approssimanti δ_n , che sono funzioni ordinarie*. Inoltre, la delta può essere estesa a più dimensioni, ad esempio

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

È sulla base di questa estensione che l'equazione della divergenza del campo elettrico, in presenza di cariche q_i poste nei punti \mathbf{r}_i , può essere scritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Illustriamo questi fatti analizzando alcuni esempi.

ESEMPIO 10.1. Verificare che

$$x\delta(x) = 0.$$

Questa identità discende immediatamente da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nx^2}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{y^2}{\pi}} e^{-y^2} = 0$$

ESEMPIO 10.2. Verificare che

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

Per mostrare questo fatto, è utile avere un'idea di come sono fatte le approssimanti di $\eta(x) = \delta(x^2 - a^2)$. Se

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2},$$

sono le approssimanti della delta, allora le approssimanti di η sono

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2}$$

Il grafico in figura 10.4 mostra che le approssimanti sono sostanzialmente la somma di due funzioni che si concentrano una in $-a$ e l'altra in $+a$, il che rende già plausibile la formula che si vuole dimostrare. Occorre capire il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2|a|}$ e darne una dimostrazione analitica. Consideriamo

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2} = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(x+a)^2}$$

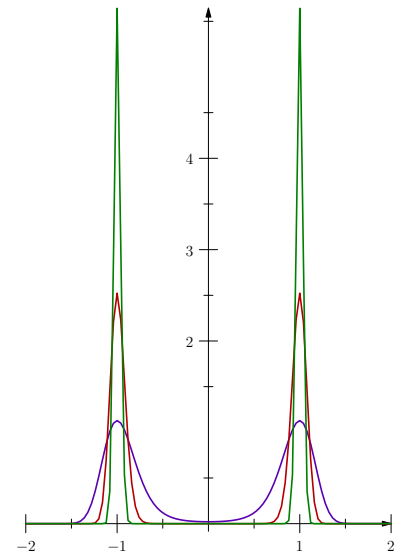


Figura 10.4: Approssimanti di $\delta(x^2 - a^2)$ per $n = 4, 20, 100$ e $a = 1$.

Nell'intorno di $x = a$ si ha

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-2a^2n(x-a)^2}$$

e quindi, nell'intorno di $x = a$, si ha

$$\eta_n(x) \approx \frac{1}{2|a|} \delta_n(x-a).$$

Analogamente, nell'intorno di $x = -a$,

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x+a)^2(-2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-2a^2n(x+a)^2} = \frac{1}{2|a|} \delta_n(x+a)$$

Al crescere di n , $\eta_n(x)$ va rapidamente a zero ad eccezione di piccoli intorni di $x = a$ e $x = -a$. Dunque, per n grande,

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2-a^2)^2} \approx \frac{1}{2|a|} [\delta_n(x+a) + \delta_n(x-a)]$$

Passando al limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene quanto si voleva dimostrare.

In maniera analoga a quanto appena visto, si può arrivare alla formula generale

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (10.9)$$

dove x_i sono gli zeri di $f(x)$ e f è tale che la sua derivata f' non si annulla negli zeri x_i . Posto $\eta(x) = \delta(f(x))$, sia $\eta_n(x)$ la sua approssimate

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(f(x))^2}.$$

Consideriamo $\eta_n(x)$ nell'intorno di uno zero x_i di $f(x)$. Sviluppiamo $f(x)$ nell'intorno di x_i . Poichè n è arbitrariamente grande teniamo solo l'ordine più basso in x . Allora, essendo $f(x_i) = 0$, si ha

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \sqrt{\frac{nf'(x_i)^2}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x-x_i)$$

Al di fuori di piccoli intorni degli zeri, $\eta_n(x)$ sarà praticamente nulla e quindi, sommando i contributi da tutti gli intorni,

$$\eta_n(x) = \delta(f(x)) \approx \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x-x_i).$$

Passando al limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene la (10.9).

ESEMPIO 10.3. Verificare che in coordinate cilindriche si ha

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

Diamo una dimostrazione generale per il calcolo della delta in un sistema di coordinate curvilinee in \mathbb{R}^n . Sia

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$$

la rappresentazione di \mathbf{r} in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in \mathbb{R}^n e sia

$$\mathbf{r} = (u_1, \dots, u_n) = \mathbf{u}$$

la sua rappresentazione in un sistema di coordinate curvilinee. Sia

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right|$$

il determinante Jacobiano della trasformazione da \mathbf{x} a \mathbf{u} .

La delta in coordinate curvilinee è definita da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) d^n \mathbf{u} = f(\mathbf{u}_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) d^n \mathbf{u} &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \left| \frac{d^n \mathbf{u}}{d^n \mathbf{x}} \right| d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) J^{-1} d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u}) J^{-1} d^n \mathbf{u} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\boxed{\delta_{(\mathbf{u})}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = J^{-1} \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = J^{-1} \prod_i^n \delta(u_i - u_{0i})} \quad (10.10)$$

Per il caso specifico di coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3 , il determinante Jacobiano J è r e quindi

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

10.3 Funzioni generalizzate

Per quanto rigoroso, il modo utilizzato finora per caratterizzare la delta può lasciare insoddisfatti: da un lato si parla di “approssimanti” della delta, ma, dall’altro, la delta in quanto funzione non può

esistere. Si potrebbe però pensare di *identificare la delta con la successione delle sue approssimanti* e chiamare l'oggetto così definito *funzione generalizzata*. Dopo tutto, questo è il modo classico di allargamento di un insieme, aggiungendo ad esso le successioni che non convergono ad elementi dell'insieme: i reali, ad esempio, sono definiti come opportune successioni di razionali.

Nel definire una funzione generalizzata mediante successioni, occorre precisare in quali circostanze due successioni definiscono la stessa funzione generalizzata (come si fa per le successioni di razionali che definiscono i reali). A questo scopo si può procedere come nella (10.2), con una successione $f_n(x)$ di "funzioni di prova": se lo stesso risultato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx \quad (10.11)$$

emerge per ciascuna successione di una certa classe e per qualunque funzione di prova $F(x)$, potremmo dire che le successioni definiscono la stessa funzione generalizzata. Come abbiamo visto, per definire la delta, basta "provare" la successione f_n con funzioni continue $F(x)$ perché il limite esista, ma, per definire le sue derivate, occorrono funzioni di prova molto più regolari (in particolare continuamente differenziabili tante volte quanto è l'ordine della derivata della delta che si vuole definire). Conviene dunque prendere funzioni di prova molto regolari se si vuole definire una classe abbastanza ampia di funzioni generalizzate.

In vista delle applicazioni all'analisi di Fourier, risulta conveniente scegliere funzioni di prova, che siano "buone" nel senso seguente: una funzione $f(x)$, sui reali e a valori reali, è BUONA se è infinitamente differenziabile e se è tale che $f(x)$ e le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$. Ne è un esempio paradigmatico la funzione e^{-x^2} . Conviene inoltre introdurre anche una classe più ampia di una funzioni che includa anche i polinomi: diremo che una funzione $\phi(x)$ è ABBASTANZA BUONA se $\phi(x)$ e le sue derivate crescono all'infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di $|x|$. Si dimostra facilmente che la derivata di una funzione buona è buona la somma di due funzioni buone è ancora una funzione buona. È altrettanto semplice che il prodotto di una funzione buona e di una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona.

Si considereranno nella (10.11) successioni di funzioni buone $f_n(x)$ e tutto il discorso starà in piedi se, per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite (10.11) esiste. Una successione che ha questa proprietà è detta regolare. Ad esempio, la successione e^{-x^2/n^2} è regolare: il limite (10.11) è $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$, qualunque funzione buona $F(x)$ si consideri. L'analogia con la costruzione dei reali a partire dai razionali è



Laurent Schwartz (1915–2002) fu un matematico francese che sviluppò la teoria delle distribuzioni o funzioni generalizzate che permette di dare un senso matematico preciso e generale ad oggetti come la delta di Dirac.

notevole: la regolarità della successione di funzioni buone è analoga al requisito di Cauchy e in entrambi i casi ci si aspetta che l'oggetto definito dalla successione non sia necessariamente identificabile con uno che è nell'ambiente in cui vive la successione. Per esempio, il reale definito dalla successione $.9, .99, .999, 9999, \dots$ si identifica naturalmente con il numero 1 , che è razionale, ma la regola sono successioni come quella che definisce il numero e

$$1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, \dots$$

Un numero reale è definito come una successione di Cauchy di razionali. Si definisca allora una funzione generalizzata $f(x)$ come una successione regolare $f_n(x)$ di funzioni buone e due funzioni generalizzate si dicano uguali se le corrispondenti successioni regolari sono equivalenti, cioè se per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite (10.11) è lo stesso per ciascuna successione. Per esempio, la successione e^{-x^4/n^4} è equivalente alla successione e^{-x^2/n^2} . Entrambe (e tutte le successioni a loro equivalenti) definiscono la funzione generalizzata $I(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$

e che è abbastanza naturale denotare semplicemente con 1 , la funzione che vale 1 . Perciò ciascuna funzione generalizzata è in realtà la classe di tutte le successioni regolari equivalenti ad una data successione regolare. Passiamo ora ad alcune definizioni molto naturali sulla base di quanto è stato appena detto.

Si definisca l'integrale del prodotto di una funzione generalizzata $f(x)$ con una funzione buona $F(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx, \quad (10.12)$$

come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \quad (10.13)$$

La definizione è consistente perché il limite è lo stesso per tutte le successioni equivalenti $f_n(x)$.

È del tutto naturale definire la somma $g(x) = f(x) + h(x)$ di due funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$, definite dalle successioni $f_n(x)$ e $h_n(x)$, come la funzione generalizzata che è definita dalla successione $g_n(x) = f_n(x) + h_n(x)$. Per quanto la definizione sia naturale occorre mostrarne la consistenza. Occorre cioè mostrare che

- (a) $g_n(x)$ è una successione di funzioni buone.
- (b) $g_n(x)$ è regolare.

(c) Scelte differenti di successioni regolari equivalenti che definiscono le funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ portano a successioni equivalenti che definiscono $g(x)$.

(a) è immediata, perché la somma di funzioni buone è buona. (b) Per ogni funzione buona $F(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) F(x) dx$$

e così il limite sulla sinistra esiste, e quindi la successione $g_n = f_n + h_n$ è regolare. Inoltre i limiti a destra sono indipendenti da quali tra le differenti successioni equivalenti di f_n e h_n sono utilizzate per definire f e h . Quindi, tutte le successioni risultanti $f_n + h_n$ sono equivalenti verificando così (c).

Anche definire la derivata $f'(x)$ in termini della successione $f'_n(x)$ risulta essere una definizione consistente. Infatti per integrazione per parti,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x) F(x) dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F'(x) dx$$

e poiché la derivata $F'(x)$ di una funzione buona $F(x)$ è ancora una funzione buona, il limite a destra esiste ed è lo stesso per tutte le successioni regolari equivalenti $f_n(x)$. Quindi tutte le successioni $f'_n(x)$ sono equivalenti e regolari, che è quanto si voleva dimostrare. Procedendo in maniera analoga, si mostra che è consistente definire $f(ax + b)$ mediante la successione $f_n(ax + b)$ e $\phi(x)f(x)$, dove $\phi(x)$ è una funzione abbastanza buona, mediante la successione $\phi(x)f_n(x)$.

Riassumendo: Se due funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ sono definite dalle successioni $f_n(x)$ e $h_n(x)$ allora:

- (i) $f(x) + h(x)$ è definita dalla successione $f_n(x) + h_n(x)$;
- (ii) $f'(x)$ è definita dalla successione $f'_n(x)$;
- (iii) $f(ax + b)$ è definita dalla successione $f_n(ax + b)$.
- (iv) $\phi(x)f(x)$, dove $\phi(x)$ è una funzione abbastanza buona, è definita dalla successione $\phi(x)f_n(x)$.

A questo punto, risulta facile dimostrare che per qualunque funzione buona $F(x)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) F(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F'(x) dx \quad (10.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b) F(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (10.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x)f(x)] F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\phi(x)F(x)] dx \quad (10.16)$$

Questo teorema garantisce che le funzioni generalizzate sotto il segno di integrale, quando sono moltiplicate per una funzione buona, possono essere manipolate come se fossero funzioni ordinarie. In particolare, la trattazione precedente della delta di Dirac, delle sue derivate e del suo integrale, può essere riletta come una loro caratterizzazione in termini di funzioni generalizzate. Più precisamente, adesso si può stabilire il seguente teorema: *Le successioni equivalenti a $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$ definiscono una funzione generalizzata $\delta(x)$, detta delta di Dirac, tale che per qualunque funzione buona $F(x)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0) \quad (10.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)F(x)dx = (-1)^n F^{(n)}(0) \quad (10.18)$$