

## 11

# Il paradiso dell'integrale di Fourier

### 11.1 Trasformate di Fourier di funzioni buone

Lo spazio delle funzioni buone è il paradiso dell'integrale di Fourier. Tutte le proprietà dell'integrale di Fourier che si utilizzano nella pratica si dimostrano facilmente e rigorosamente in questo paradiso. In particolare si dimostra facilmente il *teorema di Fourier*: Se  $f(x)$  è una funzione buona, la sua trasformata di Fourier

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \stackrel{\text{def}}{=} (Ff)(y) \quad (11.1)$$

esiste ed è una funzione buona. Inoltre,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{2\pi ixy} dy \quad (11.2)$$

Si osservi il cambiamento di definizione rispetto alla (8.7) (il fattore  $2\pi$  nell'esponentiale nell'integrale (11.1) evita il fattore  $1/(2\pi)$  il fronte alla trasformata inversa (8.8)) e l'uso del cappuccio “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” per denotare la trasformata di Fourier. Si osservi che la (11.2) è equivalente a dire che se  $\widehat{f}$  è la trasformata di Fourier di  $f$ , allora  $f$  è la trasformata di Fourier di  $\mathcal{S}\widehat{f}$ , dove  $\mathcal{S}\widehat{f}(y) = \widehat{f}(-y)$ . Questo fatto è noto come *relazione di reciprocità*.

Per mostrare che se  $f(x)$  è una funzione buona, allora anche  $\widehat{f}(y)$  lo è, deriviamo  $\widehat{f}(y)$   $p$  volte. Poiché  $f$  è buona, possiamo scambiare derivata e integrale

$$\widehat{f}^{(p)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^p}{dy^p} [f(x)e^{-2\pi ixy}] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi ix)^p f(x)e^{-i2\pi yx} dx$$

Integriamo per parti  $N$  volte il secondo membro (tenendo conto che  $f$  si annulla all'infinito) secondo lo schema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2\pi ix)^p f(x)}_{\text{deriviamo}} \underbrace{e^{-i2\pi yx}}_{\text{integriamo}} dx.$$

Otteniamo

$$\widehat{f}^{(p)}(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi ix)^p f(x)] \frac{1}{(2\pi iy)^N} e^{-2\pi iyx} dx$$

Allora

$$\begin{aligned} |\widehat{f}^{(p)}(y)| &= \left| \frac{1}{(2\pi iy)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi ix)^p f(x)] e^{-2\pi iyx} dx \right| \\ &\leq \frac{(2\pi)^{p-N}}{|y|^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^N}{dx^N} [x^p f(x)] \right| dx \end{aligned}$$

Quindi  $\widehat{f}^{(p)}$  è di ordine  $|y|^{-N}$  per ogni  $N$ , cioè decresce più rapidamente di qualunque potenza negativa di  $|y|$ ; in breve, è una funzione buona. Fine della dimostrazione della prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte, introduciamo un "ammorbidente"<sup>1</sup>  $e^{-\epsilon y^2}$  dentro l'integrale a secondo membro della (11.2).

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-\epsilon y^2} e^{2\pi ixy} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi iuy} du \right] e^{2\pi ixy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} e^{-2\pi i(u-x)y} dy \right] f(u) du \quad (\text{il cambio dell'ordine di integrazione è lecito}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2(u-x)^2/\epsilon} f(u) du \quad (\text{trasformata di Fourier della gaussiana calcolata in } u-x) \end{aligned}$$

Riconosciamo nell'integrale sopra una successione regolare di  $\delta(u-x)$ . Quindi, passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si ottiene la (11.2). Fine della dimostrazione della seconda parte del teorema.

<sup>1</sup> "Mollifier" in inglese. Questo è, in effetti, un termine tecnico che in matematica denota un'operazione di "ammorbimento" come quella che stiamo per fare. In spirito, è analogo alla regolarizzazione di Abel.

### 11.2 Lemma di Riemann-Lebesgue

Abbiamo stabilito che se  $f$  è una funzione buona, la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f}$  è ancora buona e quindi, in particolare, tende a zero all'infinito,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx = 0. \tag{11.3}$$

Questo limite ha un chiaro significato intuitivo: quando la fase è molto grande, cioè quando la frequenza di oscillazione è estremamente rapida, i contributi positivi e negativi all'area tra la funzione integranda e l'asse delle  $x$  si compensano e l'area complessiva diventa arbitrariamente piccola (si veda la figura 11.1).

Affinché la (11.3) valga non è richiesto che  $f(x)$  sia una funzione buona, è sufficiente che sia una funzione *assolutamente integrabile*, cioè tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

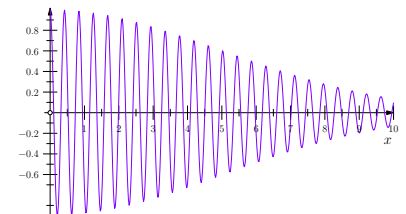


Figura 11.1: Grafico di  $\cos(15x)e^{-.02x^2}$ . Effetto di cancellazione tra i contributi positivi e negativi all'area.

Questo fatto è noto come *Lemma di Riemann-Lebesgue*. Si osservi che la richiesta di assoluta integrabilità è il requisito ovvio per la convergenza dell'integrale di Fourier, in quanto

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-2\pi ixy}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Dimostriamo adesso il lemma di Riemann-Lebesgue per  $f(x)$  assolutamente integrabile. Per ogni  $\epsilon > 0$  si scelga una funzione buona  $h(x)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)| dx < \epsilon.$$

Allora, per ogni  $y$ ,

$$\left| \widehat{f}(y) - \widehat{h}(y) \right| < \epsilon.$$

Poiché  $\widehat{h}(y) \rightarrow 0$  per  $|y| \rightarrow \infty$ , si ha

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \sup \widehat{f}(y) \leq 0.$$

Poiché questo è vero per ogni  $\epsilon$ , la dimostrazione è completa.

### 11.3 Identità di Parseval-Plancherel

Siano  $f_1$  e  $f_2$  funzioni buone e  $\widehat{f}_1$  e  $\widehat{f}_2$  siano le loro trasformate di Fourier. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \widehat{f}_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx \tag{11.4}$$

Si tratta di una relazione molto utile nelle applicazioni e nella teoria dell'integrale di Fourier. Si dimostra facilmente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \widehat{f}_2(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx e^{-2\pi ixy} \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} f_2(x) e^{-2\pi ixy} dx dy \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} e^{2\pi ixy} dy \right] f_2(x) dx \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx \end{aligned}$$

In particolare, se  $f_1 = f_2 = f$  si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy \tag{11.5}$$



Marc-Antoine Parseval (1755-1836) è stato un matematico francese, noto per il teorema di Parseval, originariamente formulato per le serie di Fourier.



Michel Plancherel (1855-1967) è stato un matematico svizzero, noto per il teorema di Plancherel in analisi armonica.

## 11.4 Teorema di convoluzione

La convoluzione di due funzioni reali  $f$  e  $h$  è definita come

$$f \star h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy$$

Naturalmente, mentre la prima uguaglianza è una definizione, la seconda segue dalla prima (per cambiamento di variabili). Il prodotto di convoluzione è dunque commutativo,  $f \star h = h \star f$ .

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni buone anche  $f \star h$  lo è. Questo si può vedere prendendo la derivata del prodotto di convoluzione:

$$\frac{d}{dx} f \star h(x) = f' \star h(x) = f \star h'(x)$$

La prima uguaglianza vale perché possiamo scambiare derivata e integrale per funzioni buone, la seconda segue dalla commutatività del prodotto di convoluzione. Quindi, se  $f$  e  $h$  sono buone, anche  $f \star h$  e le sue derivate hanno decrescenza rapida, cioè  $f \star h$  è una funzione buona.

Il teorema di convoluzione stabilisce che

$$\widehat{f \star h}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{h}(y) \quad (11.6)$$

Eccone la dimostrazione. Dalla definizione di trasformata di Fourier,

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi iuy}dx, \quad \widehat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi ivy}dv.$$

Allora

$$\widehat{f}(y)\widehat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(u+v)y} f(u)h(v)dudv. \quad (11.7)$$

Sia  $u + v = x$  nell'integrale doppio sopra che vogliamo trasformare dalle variabili  $(u, v)$  alle variabili  $(u, x)$ . Dal calcolo di funzioni a più variabili sappiamo che

$$dudv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)}dudx,$$

dove lo jacobiano della trasformazione è dato da

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Allora la (11.7) diventa

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y)\widehat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iyx} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iyx} f \star h(x)dx \\ &= \widehat{f \star h}(y) \end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Si osservi che poichè la trasformata di Fourier inversa di  $\widehat{f}(y)$ , non è altro che la trasformata di Fourier di  $\widehat{f}(-y)$ , si avrà anche

$$\widehat{f}h(y) = \widehat{f} \star \widehat{h}(y)$$

### 11.5 Il nucleo del calore

Nella sezione 8.5 abbiamo risolto l'equazione del calore

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

con condizione iniziale  $f_0(x) = f(x, 0)$  sotto le condizioni che  $f(x, t)$  e  $\partial f(x, t)/\partial x$  vadano a zero all'infinito per ogni  $t > 0$ . Con le convenzioni usate in questo capitolo, quello che avevamo mostrato allora può essere riscritto come

$$\widehat{f}(k, t) = \widehat{f}(k, 0)e^{-(2\pi)^2 D k^2 t} \quad (11.8)$$

dove

$$\widehat{f}(k, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0) e^{-i2\pi k x} dx.$$

Poiché la trasformata di Fourier della  $f(x, t)$  è il prodotto di due funzioni, sulla base di quanto visto nella sezione precedente,  $f(x, t)$  è il prodotto di convoluzione delle loro antitrasformate. Ma l'antitrasformata della  $\widehat{f}(k, 0)$  è la condizione iniziale  $f_0(x)$  e l'antitrasformata della gaussiana  $e^{-(2\pi)^2 D k^2 t}$  è

$$\begin{aligned} K_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi)^2 D k^2 t} e^{i2\pi k x} dk \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi)^2 D t}} e^{-(2\pi x)^2 / [4(2\pi)^2 D t]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-x^2 / (4D t)} \end{aligned}$$

La funzione  $K_t(x)$  è chiamata *nucleo del calore* ("heat kernel"). Dunque,

$$f(x, t) = K_t \star f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (4D t)} f_0(y) dy \quad (11.9)$$

### 11.6 Osservazioni, notazioni e convenzioni

Le equazioni (11.1) e (11.2) definiscono un operatore  $F$  sul dominio delle funzioni buone e il suo inverso  $F^{-1}$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} (Ff)(y) &= \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx \\ (F^{-1}g)(x) &= g^\vee(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{2\pi i x y} dy \end{aligned}$$

Il contenuto del teorema di Fourier per le funzioni buone è che  $FF^{-1} = F^{-1}F = I$ , dove  $I$  è l'operatore identità.

Ci sono diverse convenzioni per definire la trasformata di Fourier. Passiamo in rassegna le convenzioni più popolari. Le distingueremo cambiando nome alle variabili indipendenti, e introducendo dei pedici:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \widehat{f}_1(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \\ \textcircled{2} \quad \widehat{f}_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ \textcircled{3} \quad \widehat{f}_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

La  $\textcircled{1}$  è quella che abbiamo adottato in questo capitolo. Con la  $\textcircled{2}$ , la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_2(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

Con la  $\textcircled{3}$ , la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_3(k)e^{ikx} dx$$

In questo caso c'è simmetria tra la trasformata e la sua inversa

Ecco le regole per passare dall'una all'altra (che si ricavano facilmente dalle definizioni):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(y) &= \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{2\pi} f_3(2\pi y) \\ \widehat{f}_2(\omega) &= \widehat{f}_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \sqrt{2\pi} f_3(\omega) \\ \widehat{f}_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1\left(\frac{k}{2\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_2(k) \end{aligned}$$

Nel seguito, quando non metteremo nessun pedice, sottoinderemo che stiamo usando la convenzione  $\textcircled{1}$ . Difficile dire quale convenzione sia migliore. Ognuna ha i suoi pro e i suoi contro. Per quanto sia fastidioso, conviene avere presente tutte e tre le convenzioni.

**ESEMPIO 11.1.** Consideriamo la gaussiana

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

Nella sezione 8.4, abbiamo usato la convenzione  $\textcircled{2}$  e trovato (allora avevamo chiamato  $k$  la variabile indipendente)

$$\widehat{f}_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Con la convenzione  $\textcircled{1}$ , che è quella che stiamo seguendo adesso, si ha

$$\widehat{f}_1(y) = \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 y^2}{a}}$$

**N. B.** Con la convenzione  $\textcircled{3}$ , il prodotto di convoluzione è di solito definito come

$$f \star h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du$$

Con la convenzione ③

$$\widehat{f}_3(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_2(k) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

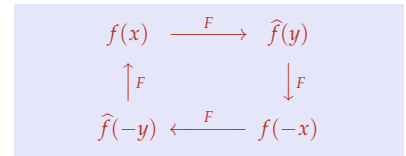
### 11.7 Proprietà delle trasformate di Fourier

Nelle applicazioni il dominio della funzione considerata è un tempo o uno spazio e quindi il dominio della sua trasformata di Fourier è, rispettivamente, una frequenza o un numero d'onda. Nel seguito discuteremo le proprietà più importanti delle trasformate di Fourier tenendo presente questa interpretazione fisica.

**Linearità.** La trasformata di Fourier è lineare. Per qualunque coppia di numeri complessi  $\alpha$  e  $\beta$  si ha:

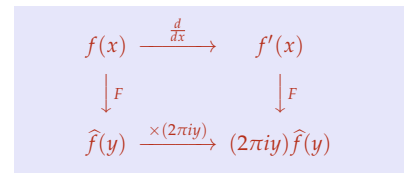
$$\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{F} \alpha \widehat{f}(y) + \beta \widehat{g}(y)$$

**Relazione di reciprocità.** Discende immediatamente dalla (11.2). Si veda il diagramma a lato.



**Derivazione.** Calcoliamo la trasformata di Fourier della derivata:

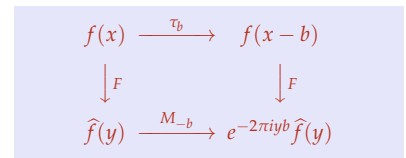
$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i y x} dx \quad \text{integriamo per parti} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi i y) e^{-2\pi i y x} dx \\ &= (2\pi i y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx \\ &= (2\pi i y) \widehat{f}(y) \end{aligned}$$



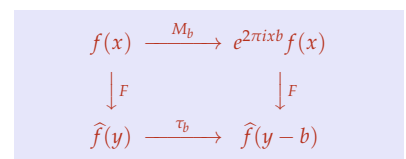
**Traslazione.** Sia  $\tau_b f(x) = f(x - b)$  l'operazione di traslazione della funzione<sup>2</sup> del numero reale  $b$ . Allora

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_b f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-2\pi i y x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-2\pi i y (x'+b)} dx' \\ &= e^{-2\pi i y b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx \\ &= e^{-2\pi i y b} \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Per esempio, la gaussiana  $e^{-x^2}$  centrata nell'origine diventa la gaussiana  $e^{-(x-b)^2}$  spostata di un tratto  $b$  a destra (se  $b$  è assunto positivo).



**Modulazione.** Sia  $M_b f(x) = e^{2\pi i x b} f(x)$  una modulazione nel dominio spaziale. Allora:



$$\begin{aligned} \widehat{M}_b f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x b} f(x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i (y-b)x} dx \\ &= \widehat{f}(y-b) \end{aligned}$$

*Cambiamento di scala.* Sia  $D_\alpha f(x) = f(\alpha x)$  un cambiamento di scala<sup>3</sup>  $D_\alpha f(x) = f(\alpha x)$ . Allora

$$\begin{aligned} \widehat{D_\alpha f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-2\pi i x y' / \alpha} d \frac{x'}{\alpha} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Quindi, ad una “compressione” della funzione nel dominio spaziale corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze e viceversa (si pensi al passaggio della luce attraverso una fenditura sottile e allo sparpagliamento delle frequenze spaziali, cioè dei numeri d’onda, che ne consegue).

*Inversione temporale.* Il cambiamento di scala  $\alpha = -1$  porta alla proprietà di inversione temporale (interpretando  $x$  come un tempo) o di parità (interpretando  $x$  come uno spazio): se  $h(x) = f(-x)$  allora  $\widehat{h}(y) = \widehat{f}(-y)$ .

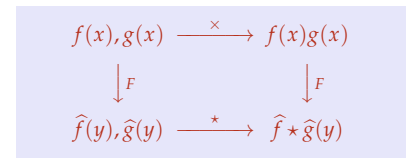
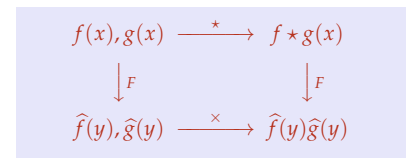
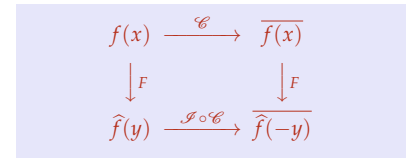
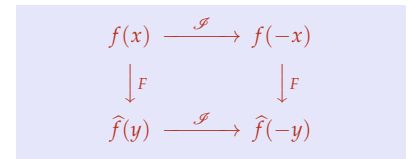
*Coniugazione complessa.* Se  $h(x) = \overline{f(x)}$ , allora

$$\begin{aligned} \widehat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x y} dx} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x (-y)} dx} \\ &= \overline{\widehat{f}(-y)}. \end{aligned}$$

*Condizioni di realtà.* In particolare, se  $f(x)$  è reale si ha  $\widehat{f}(-y) = \overline{\widehat{f}(y)}$ , mentre se  $f(x)$  è puramente immaginaria si ha  $\widehat{f}(-y) = -\overline{\widehat{f}(y)}$ .

*Convoluzione.* Come visto nella sezione 11.4, all’operazione di prodotto di convoluzione nel dominio spaziale corrisponde l’operazione di prodotto usuale nel dominio delle frequenze e, viceversa, all’operazione di prodotto usuale nel dominio spaziale corrisponde l’operazione di prodotto di convoluzione nel dominio delle frequenze. Queste proprietà sono riassunte nei diagrammi a lato.

<sup>3</sup> Che induce, per  $\alpha > 1$ , una “compressione” della funzione. Per non fare confusione si tenga a mente l’esempio della gaussiana  $e^{-ax^2}$ : aumentare  $a$  significa diminuirne lo scarto quadratico medio, cioè restringere la gaussiana.





NOTA. Le convenzioni ① e ③ hanno dei vantaggi rispetto alla convenzione ②. Malgrado questo c'è chi, come il sottoscritto, preferisce lavorare con la convenzione classica ②. Per evitare di fare errori con la ②, perdendo per strada dei fattori  $\pi$ , conviene sempre pensare il fattore come assorbito nella misura di integrazione e scrivere

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}\end{aligned}$$

L'ultima seccatura da tenere presente è la seguente. Quando si analizza secondo Fourier una funzione nel tempo, si usa per il tempo una convenzione opposta per il segno nell'esponentiale: se  $f = f(t)$ , allora l'analisi di Fourier di  $f$  è (usando una tilde anziché un cappuccio, per distinguere)

$$\widetilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (11.10)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (11.11)$$

Se si analizza secondo Fourier una funzione nello spazio e nel tempo, allora

$$\widetilde{\widetilde{f}}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(k, \omega)e^{-i(kx - \omega t)} dx dt \quad (11.12)$$

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\widetilde{f}}(k, \omega)e^{i(kx - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \quad (11.13)$$

Così si spiega il cambiamento di segno nella (11.11): la convenzione (11.11) permette l'interpretazione della (11.13) come una somma continua di treni d'onda.

Osserviamo infine che il teorema di convoluzione si estende ad analisi di Fourier di funzioni a più variabili. In particolare, al prodotto delle trasformate

$$\widetilde{\widetilde{f}}(k, \omega) \widehat{\widehat{g}}(k, \omega)$$

corrisponde, per antitrasformata di Fourier nello spazio e nel tempo, il prodotto di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y, t - s)g(y, s) dy ds \quad (11.14)$$

### 11.8 Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate

La trasformata di Fourier  $\widehat{f}(y)$  della funzione generalizzata  $f(x)$  è definita dalla successione  $\widehat{f}_n(y)$ , dove  $\widehat{f}_n(y)$  è la trasformata di Fourier di  $f_n(y)$ , e  $f_n(x)$  è una successione regolare che definisce  $f(x)$ .

Si consideri per esempio, la delta, che è definita dalla successione regolare (10.3). La trasformata di Fourier della (10.3) è  $e^{-\pi^2 y^2/n}$ , che è una delle successioni regolari che definisce la funzione 1. Quindi la trasformata di Fourier di  $\delta(x)$  è la funzione  $\widehat{\delta}(y) = 1$ . Naturalmente, bisogna mostrare che la definizione precedente è consistente, ma questo è presto fatto: dall'identità di Parseval-Plancherel si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_n(y)} \widehat{F}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(x)} F(y)(x) dx$$

per ogni funzione  $F$  buona con trasformata di Fourier  $\widehat{F}$  (che sarà anch'essa buona). Quindi se  $f_n$  è regolare anche  $\widehat{f}_n$  lo è. Inoltre, a successioni equivalenti che definiscono  $f$ , corrisponderanno successioni equivalenti che definiscono la stessa  $\widehat{f}$ .

Le proprietà della trasformata di Fourier di funzioni buone si estendono alle funzioni generalizzate. Vediamone alcuni esempi di rappresentazioni di Fourier di funzioni generalizzate che sono utili nelle applicazioni.

ESEMPIO 11.2. Per quanto visto sopra

$$\widehat{\delta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi xy} dx = 1,$$

dunque

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi xy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (11.15)$$

ESEMPIO 11.3. Dalla (11.15), per  $x \rightarrow ax$ :

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikax} dk = \frac{1}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (11.16)$$

ESEMPIO 11.4. Dalla (11.15), per  $x \rightarrow x - b$ :

$$\delta(x - b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-b)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ibk} dk \quad (11.17)$$

ESEMPIO 11.5.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ak) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} [\delta(x + a) + \delta(x - a)] \quad (11.18)$$

ESEMPIO 11.6. Consideriamo la funzione  $\chi_{[-a,a]}(x)$  che vale 1 se  $-a < x < a$  e vale 0 altrimenti. Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(x)(x) e^{-ikx} dk = \int_{-a}^a e^{-ikx} dk = 2 \frac{\sin(ka)}{k} \quad (11.19)$$

Assumendo che anche per una funzione discontinua continui a valere il teorema di Fourier, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \chi_{[-a,a]}(x)(x). \quad (11.20)$$

$\chi_A(x)$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ , cioè la funzione che vale 1 se  $x \in A$  e zero altrimenti. Si osservi che  $\chi_{[-a,a]}(x) = H(x + a) - H(x - a)$  dove  $H$  è la funzione di Heaviside.