

12

L'equazione delle onde in una dimensione

12.1 L'equazione omogenea delle onde

L'equazione delle onde è l'equazione che descrive lo sviluppo di un'onda che si propaga in un mezzo. Descrive, per esempio, lo spostamento verticale di una corda vibrante, la propagazione di un'onda elettromagnetica attraverso lo spazio, di un'onda sonora nell'aria e di onde d'acqua nel mare di vario tipo.

Consideriamo prima il problema omogeneo, il caso più semplice del quale è un'onda che si propaga lungo una corda di densità costante μ sotto l'effetto di una tensione costante T . Lo spostamento verticale $y = f(x, t)$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (12.1)$$

dove $c = \sqrt{T/\mu}$ è la velocità di propagazione, una costante. Poiché (12.1) è del secondo ordine nel tempo, la soluzione è determinata dai dati iniziali

$$f(x, t)|_{t=0} = a(x), \quad \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = b(x). \quad (12.2)$$

Assumeremo che non ci siano vincoli al finito e che gli estremi della corda siano a $-\infty$ e $+\infty$. Assumeremo inoltre che $f(x, t)$ e $\partial f/\partial x$ convergano a zero per $|x| \rightarrow \infty$.

Risolveremo il problema al contorno (12.1), (12.2) nello stesso modo in cui abbiamo risolto l'equazione del calore (sezioni 8.5 e 11.5), cioè mediante trasformata di Fourier. In questo capitolo useremo la convenzione ②:

$$\hat{f}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (12.3)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, t) e^{ikx} dk \quad (12.4)$$

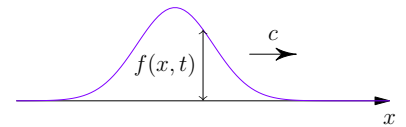


Figura 12.1: $f(x, t)$ è l'ampiezza dell'onda. Per una corda vibrante, è il suo spostamento verticale; c è la velocità di propagazione dell'onda.

Prendendo la trasformata di Fourier della (12.1), si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \widehat{f}(k, t)}{\partial t^2} + k^2 \widehat{f}(k, t) = 0. \quad (12.5)$$

La (12.5) è l'equazione di un oscillatore armonico classico ed è facilmente risolta:

$$\widehat{f}(k, t) = A(k) \cos(|k|ct) + B(k) \sin(|k|ct),$$

dove $A(k)$ e $B(k)$ sono costanti di integrazione che possono dipendere dal parametro k . Imponendo che le condizioni al contorno (12.2) siano soddisfatte, si determinano le costanti $A(k)$ e $B(k)$:

$$\widehat{f}(k, 0) = A(k) = \widehat{a}(k) \quad \frac{\partial \widehat{f}(k, 0)}{\partial t} = |k|cB(k) = \widehat{b}(k), \quad (12.6)$$

dove \widehat{a} e \widehat{b} sono le trasformate di Fourier dei dati iniziali. Quindi

$$\widehat{f}(k, t) = \widehat{a}(k) \cos(|k|ct) + \frac{\widehat{b}(k)}{c|k|} \sin(|k|ct)$$

e poiché $\cos(|k|ct)$ e $\sin(|k|ct)/|k|$ sono pari, possiamo sostituire in esse $|k|$ con k e scrivere

$$\widehat{f}(k, t) = \widehat{a}(k) \cos(kct) + \frac{\widehat{b}(k)}{ck} \sin(kct). \quad (12.7)$$

La soluzione della (12.1) è dunque

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k, t) e^{ikx} dx \equiv \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t), \quad (12.8)$$

dove

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(k) \cos(kct) e^{ikx} dk \quad (12.9)$$

$$\mathcal{B}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{b}(k)}{ck} \sin(kct) e^{ikx} dk. \quad (12.10)$$

Prima di procedere con il calcolo di questi integrali, osserviamo che, usando la formula di Eulero per esprimere seno e coseno negli integrali \mathcal{A} e \mathcal{B} , si vede che entrambi dipendono dalle variabili $x + ct$ e $x - ct$; vale a dire $f(x, t)$ ha la forma

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Si può verificare per sostituzione nella (12.1) che questa formula per $f(x, t)$ è in effetti una soluzione della (12.1). Questa formula fu scoperta da d'Alembert.

Alcune soluzioni particolari della (12.1) meritano un'attenzione particolare. Queste sono le onde monocromatiche (di singola frequenza), che sono della forma

$$f(x, t) = e^{i(x/c-t)\omega}$$

dove ω è la frequenza. Questa f rappresenta un'onda di frequenza ω che si muove verso destra. In generale $\phi(x + ct)$ è un'onda che si muove verso sinistra con velocità c e la cui forma è il grafico di ϕ . Analogamente, $\psi(x - ct)$ è un'onda che si muove verso destra.

Adesso discutiamo separatamente i due contributi \mathcal{A} e \mathcal{B} , sia da un punto di vista matematico sia da un punto di vista fisico. Se la "velocità" iniziale è nulla, la soluzione è data solo dal termine \mathcal{A} che è la trasformata di Fourier inversa del prodotto di due funzioni di k . Pur avendo dimostrato il teorema di convoluzione solo per funzioni buone, esso continua a valere se \hat{a} decade rapidamente in k . Applicando questa estensione del teorema di convoluzione, si ottiene

$$\mathcal{A}(x, t) = a \star F^{-1}\{\cos(ckt)\}(x). \tag{12.11}$$

Ora (cfr. (11.18)),

$$F^{-1}\{\cos(ckt)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikct} + e^{-ikct}}{2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} [\delta(x + ct) + \delta(x - ct)]$$

e quindi

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)] \tag{12.12}$$

Questo termine rappresenta la somma (divisa per due) dello spostamento verticale iniziale della corda traslato di ct a destra e di ct a sinistra; si veda la figura 12.2.

Per il termine \mathcal{B} , potremmo procedere in modo analogo, in quanto anche \mathcal{B} è la trasformata di Fourier inversa del prodotto di due funzioni di k , e scrivere

$$\mathcal{B}(x, t) = b \star F^{-1}\left\{\frac{\sin(ckt)}{ck}\right\}(x). \tag{12.13}$$

In questo caso però, l'integrale

$$F^{-1}\left\{\frac{\sin(ckt)}{ck}\right\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ckt)}{ck} e^{ikx} dk$$

è mal definito, avendo una singolarità lungo il cammino d'integrazione. Tuttavia, usando la formula di inversione (11.18), si ottiene

$$F^{-1}\left\{\frac{\sin(ckt)}{ck}\right\}(x) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x), \tag{12.14}$$

da cui,

$$\mathcal{B}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-ct, ct]}(x - y) b(y) dy \tag{12.15}$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy. \tag{12.16}$$

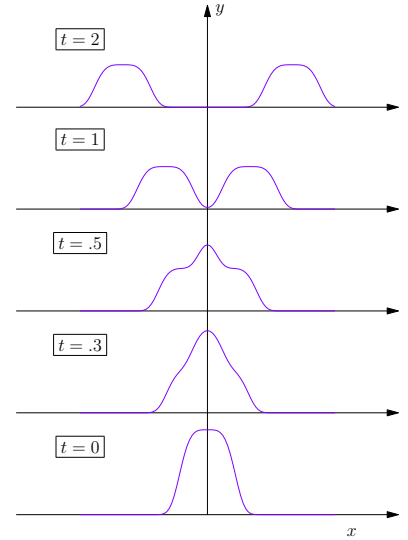


Figura 12.2: Evoluzione temporale del profilo iniziale $y = a(x)$: dopo una fase iniziale di separazione, metà del profilo si propaga inalterato a destra e metà a sinistra, entrambi con velocità c . Per la figura si è scelto $a(x) = e^{-4x^4}$.

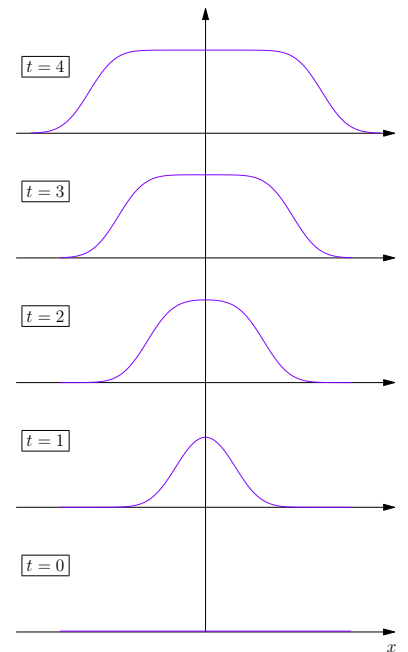


Figura 12.3: Evoluzione temporale del profilo della corda per una distribuzione iniziale di velocità $b(x)$ gaussiana e profilo iniziale $a(x) = 0$.

Questo integrale rappresenta l'effetto cumulativo del profilo di velocità iniziale. Per vedere quest'ultimo punto più chiaramente, consideriamo il caso in cui $a(x) = 0$ e $b(x) = \delta(x)$, che possiamo pensare come un impulso unitario in $x = 0$ a $t = 0$, per esempio, una corda di chitarra pizzicata. Allora otteniamo

$$f(x, t) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x), \quad (12.17)$$

cioè la funzione che vale $1/2c$ se $-ct < x < ct$ e 0 altrimenti. Perciò l'effetto dell'impulso in $x = 0$ si propaga a sinistra e a destra con velocità c , creando nel piano xt (spaziotempo) un "cono caratteristico" o dominio di influenza delimitato dalle due rette (dette caratteristiche) $x = \pm ct$.

12.2 Conservazione dell'energia

C'è conservazione dell'energia per una soluzione dell'equazione delle onde. L'energia totale è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. Per una corda di spostamento verticale $y = f(x, t)$, di densità lineare μ e tensione T

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{\int \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\int \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx}_{\text{energia potenziale}} \\ &= \frac{\mu}{2} \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\mathcal{Z}}{2c} \int dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

dove si è introdotto l'impedenza $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu T} = \mu c$. Verifichiamo la conservazione dell'energia, calcolando dE/dt . Differenziando sotto il segno di integrale e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\mathcal{Z}}{2c} \int dx \left[2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right] \\ &= \frac{\mathcal{Z}}{c} \int dx \frac{\partial y}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dunque, l'energia ad un qualunque tempo t ha lo stesso valore dell'energia al tempo iniziale,

$$E(t) = E(0).$$

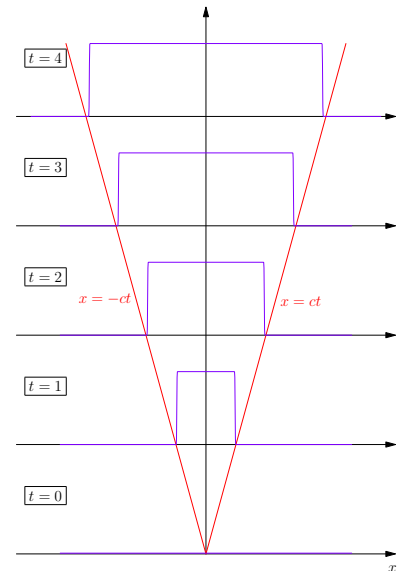


Figura 12.4: Evoluzione temporale del profilo della corda per una distribuzione iniziale di velocità $b(x) = \delta(x)$ e profilo iniziale $a(x) = 0$. Questo è il limite della gaussiana (normalizzata) della figura 12.3 quando la sua larghezza tende a zero. Il cono di influenza è la regione nel piano x, t delimitata dalle rette caratteristiche $x = ct$ e $x = -ct$.

12.3 L'equazione non omogenea delle onde

Consideriamo adesso il caso in cui una forza esterna $F(x, t)$ è applicata alla corda. In questo caso l'equazione del moto per lo spostamento verticale $y = f(x, t)$ soddisfa l'equazione non omogenea delle onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (12.18)$$

Naturalmente, nel caso di onde acustiche o onde elettromagnetiche (in una dimensione), il termine forzante $F(x, t)$ sarà interpretato come sorgente del campo $f(x, t)$.

Come nel caso delle equazioni lineari ordinarie, data una soluzione particolare della (12.18), è possibile ottenere un'altra soluzione aggiungendo una soluzione dell'equazione omogenea (12.1). Quindi la soluzione più generale dell'equazione non omogenea può essere scritta come una somma di una soluzione omogenea $o = o(x, t)$ e una soluzione particolare $p = p(x, t)$.

Più precisamente, la procedura per trovare una soluzione della (12.18) è la seguente. Si fissino i dati iniziali

$$f(x, 0) = a(x) \quad \text{e} \quad \partial_t f(x, 0) = b(x)$$

(e, naturalmente, sia fissato il termine forzante $F(x, t)$). Quindi si trovi una *qualunque* soluzione $p(x, t)$ della (12.18). Si osservi che non c'è bisogno che $p(x, t)$ soddisfi i dati iniziali. A questo punto, si risolva l'equazione omogenea associata con dati iniziali

$$o(x, 0) = a(x) - p(x, 0) \quad \text{e} \quad \partial_t o(x, 0) = b(x) - \partial_t p(x, 0).$$

Conclusione: l'unica soluzione della (12.18) che soddisfa i dati iniziali è

$$f(x, t) = o(x, t) + p(x, t).$$

Si osservi che è sbagliato parlare di "la" soluzione particolare: ce ne sono quante vogliamo! Il metodo sopra descritto dà unicità per la soluzione f , ma non per o e p presi individualmente.

12.4 Risoluzione mediante analisi di Fourier

Un metodo comune in fisica per trovare una soluzione particolare della (12.18) è mediante analisi di Fourier. Si trasformi secondo Fourier la (12.18) rispetto allo spazio e al tempo, con le convenzioni (11.12) e (11.13). Procedendo in questo modo e chiamando $p(x, t)$ la soluzione particolare, si ottiene

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \widehat{p}(k, \omega) = k^2 \widehat{p}(k, \omega) + \widehat{F}(k, \omega),$$

da cui

$$\widehat{p}(k, \omega) = \frac{c^2 \widehat{F}(k, \omega)}{-\omega^2 + c^2 k^2}. \quad (12.19)$$

Per il teorema di convoluzione (11.14),

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x-y, t-s) F(y, s) dy ds, \quad (12.20)$$

dove

$$\mathcal{G}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2} \frac{d\omega}{2\pi} \right] e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}. \quad (12.21)$$

Tuttavia, l'integrale

$$\widehat{\mathcal{G}}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (12.22)$$

è mal definito, in quanto lungo il cammino d'integrazione ci sono i poli $\omega_- = -c|k|$ e $\omega_+ = c|k|$ della funzione integranda. Supponiamo di regolarizzare l'integrale spostando i poli di un pelino sotto l'asse reale nel piano di variabile complessa $z = \omega + i\sigma$ e chiamiamo la funzione definita dall'integrale così regolarizzato $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$ (si veda la figura 12.5).

Allora, per $t > 0$, l'integrale di contorno che definisce $\widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t)$ va chiuso nel semipiano inferiore, come mostrato in figura 12.5, mentre per $t < 0$ va chiuso in quello superiore. Poiché nel semipiano superiore non ci sono singolarità, concludiamo che $\widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t) = 0$ per $t < 0$. Per $t > 0$, tenuto conto dell'orientazione oraria del circuito in figura 12.5, si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}^{\text{ret.}}(k, t) &= (-2\pi i) \frac{1}{2\pi} \left[\text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2}, -c|k| \right) + \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + c^2 k^2}, c|k| \right) \right] \\ &= -i \left[\frac{e^{-i(c|k|t)}}{-2c|k|} + \frac{e^{i(c|k|t)}}{2c|k|} \right] = \frac{e^{i(c|k|t)} - e^{-i(c|k|t)}}{2ic|k|} \\ &= \frac{\sin(ckt)}{ck} \end{aligned}$$

Conosciamo già l'antitrasformata di questa funzione, che è data dall'equazione (12.14). Dunque,

$$\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t) = \frac{1}{2c} \Theta(t) \chi_{[-ct, ct]}(x) \quad (12.23)$$

dove $\Theta(t)$ è la funzione di Heaviside (a parole: $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$ è la funzione che vale 0 per $t \leq 0$ e vale $1/(2c)$ per $t > 0$ e x compreso tra $-ct$ e ct). Sostituendo nella (12.20), troviamo la soluzione particolare

$$p(x, t) = \mathcal{G}^{\text{ret.}} \star c^2 F(x) \quad (12.24)$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-c(t-s), c(t-s)]}(x-y) F(y, s) dy ds \quad (12.25)$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy ds. \quad (12.26)$$

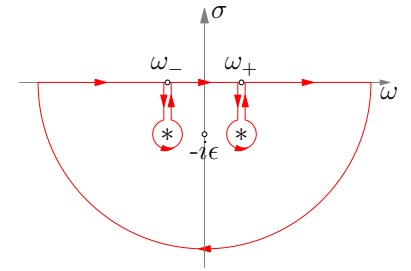
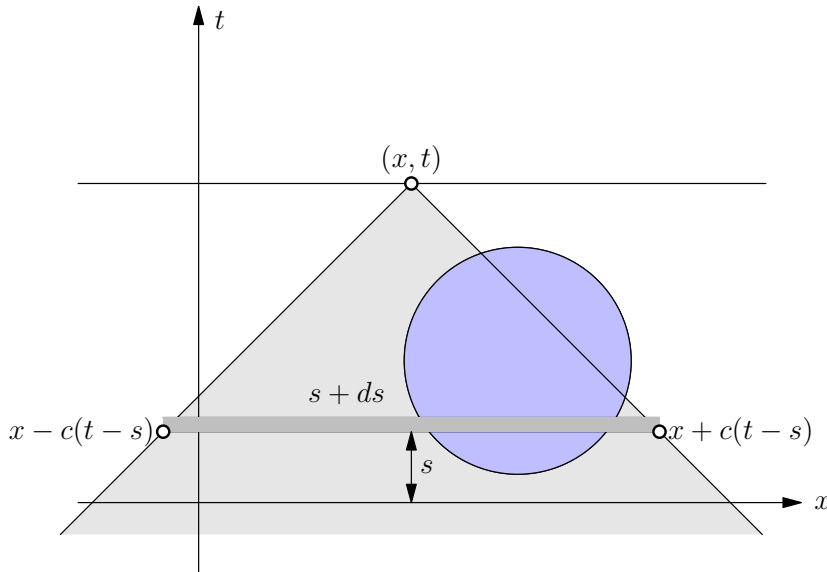


Figura 12.5: I poli sono spostati di un tratto ϵ nel semipiano inferiore.

Si lascia come esercizio il mostrare che quando questa espressione è sostituita nella (12.18), l'equazione risulta soddisfatta. Prima di procedere è bene aver chiaro il significato geometrico della soluzione trovata illustrato in figura 12.6.



Determiniamo adesso la soluzione completa della (12.18). Supponiamo che la sorgente $F(x, t)$ venga accesa ad un qualche istante, in modo tale che per t minore di un qualche tempo t_0 sia nulla. Chiaramente, da un punto di vista fisico, questa non è una restrizione significativa. Per comodità scegliamo questo tempo t_0 come origine per l'asse dei tempi, esattamente come in figura 12.6.

Allora, essendo $F(x, t) = 0$ per $t \leq 0$, si avrà anche che per $t \leq 0$ $p(x, t)$ è nulla ed è nulla sua derivata (per $t \leq 0$ la funzione è identicamente nulla, si veda la figura 12.7). Possiamo allora prendere, come soluzione dell'omogenea associata, la soluzione $o(x, t) = \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t)$ trovata precedentemente, scaricando in questo modo i dati iniziali $a(x)$ e $b(x)$ sulla soluzione dell'omogenea. La soluzione completa della (12.18) è dunque

$$f(x, t) = \mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy, \quad (12.27)$$

dove $\mathcal{A}(x, t)$ e $\mathcal{B}(x, t)$ sono dati, rispettivamente, dalle equazioni (12.12) e (12.16) (Il limite inferiore d'integrazione è stato posto a zero perché abbiamo assunto che la funzione F sia nulla per $t < 0$).

DUE OSSERVAZIONI CONCLUSIVE. La prima è di carattere fisico: se avessimo spostato i poli $\omega_- = -c|k|$ e $\omega_+ = c|k|$ di un pelino nel

Figura 12.6: Il campo

$$p(x, t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

in un dato punto (x, t) dello spazio-tempo dipende soltanto dai valori del termine forzante (o sorgente) nei punti che si trovano nel "cono d'ombra" passato del punto. Questo cono o *regione di influenza* è delimitato dalle rette caratteristiche di pendenza $1/c$ e $-1/c$ che passano per il punto (x, t) : nella figura è la regione colorata in grigio. Questo cono è il dominio di integrazione. La regione colorata in blu è dove la sorgente $F(x, t)$ è non nulla, cioè il supporto spaziotemporale della sorgente. Contribuisce al valore del campo nel punto (x, t) soltanto quella parte del supporto della sorgente che è nella regione di influenza. Il contributo

$$ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

all'integrale è quello di una striscia di spessore ds (colorata in grigio scuro in figura). Sommando i contributi di tutte le strisce, per s che varia tra $-\infty$ e t , si ottiene il valore del campo p nel punto (x, t) . Naturalmente, il contributo delle strisce sotto il supporto della sorgente è nullo.

In alcuni casi (per es. in elettromagnetismo), conviene prendere $t_0 < 0$ (cioè nel passato). In questo caso, $\mathcal{A}(x, t) + \mathcal{B}(x, t)$ va intesa come soluzione dell'omogenea associata con condizioni iniziali in t_0 .

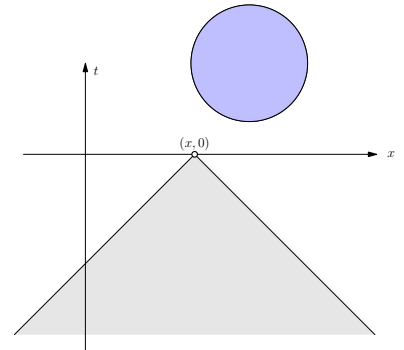


Figura 12.7: Se la sorgente è nel futuro ($t > 0$), la funzione $p(x, 0)$ è identicamente nulla (per cui, in particolare, è nulla anche la sua derivata rispetto al tempo).

semipiano superiore, per $t > 0$ avremmo dovuto chiudere il cammino nel semipiano superiore. Si lascia come esercizio di mostrare che in questo caso, invece della (12.28), avremmo trovato

$$\mathcal{G}^{\text{adv.}}(x, t) = \frac{1}{2c} \Theta(-t) \chi_{[-ct, ct]}(x) \quad (12.28)$$

e la soluzione particolare $p = \mathcal{G}^{\text{adv.}} \star c^2 F$ avrebbe avuto la proprietà di dipendere dai valori assunti dalla forza nel futuro e non nel passato. Questa situazione è descritta ribaltando la figura 12.6 rispetto al tempo ($t \rightarrow -t$), con i coni d'ombra nel passato che diventano coni d'ombra nel futuro. Chiaramente questa non è una situazione fisicamente accettabile, per lo meno se il campo in questione descrive lo spostamento trasversale di una corda: *l'effetto generato dal termine forzante sulla corda deve essere successivo alla causa, cioè il termine forzante stesso*. Questa proprietà *causale* della propagazione dell'azione è quella dovuta proprio alla presenza di $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$ nella convoluzione (12.26). Se avessimo usato $\mathcal{G}^{\text{adv.}}(x, t)$ avremmo avuto un comportamento anti-causale in cui gli effetti precedono le cause.

La seconda osservazione è matematica. Come si verifica facilmente, la funzione

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^t ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy$$

si annulla per $t = 0$ e così fa la sua derivata $\partial_t u(x, 0)$, anche quando $F(x, t) \neq 0$ per $t \leq 0$. Ma allora (12.27) è in effetti la soluzione completa della (12.18) per un termine forzante $F(x, t)$ generico.

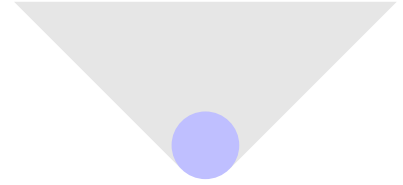


Figura 12.8: Se la sorgente (o forzante) è localizzata spaziotemporalmente nella regione colorata in blu, la sua regione di influenza è il cono (colorato in grigio) nel futuro. Questo è l'effetto causale determinato da $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$.

Nel caso dell'elettromagnetismo, la situazione è delicata, essendo la teoria invariante per inversione temporale. Un approfondimento di queste questioni, sebbene molto interessante, esula dai nostri scopi (e non è un caso che abbiamo usato gli apici "ret." e "adv." in analogia con l'uso in elettromagnetismo dei potenziali ritardati e anticipati).