

# 13

## Poli lungo il cammino e funzioni causali

### 13.1 Parte principale di Cauchy

Nonostante la delta di Dirac sia stata la prima funzione generalizzata ad essere introdotta, il metodo di attribuire valori a integrali e serie mediante un processo di regolarizzazione (analogamente a quanto abbiamo visto con le approssimanti buone della delta), ha avuto antenati molto più antichi, tra questi, la *parte principale di Cauchy*, che è, come vedremo tra breve, un modo di regolarizzare integrali divergenti contenenti  $1/x$ .

Integrali contenenti  $1/x$  lungo l'asse reale sono del tipo

$$\int_{-a}^b \frac{f(x)}{x-a} dx \quad (13.1)$$

e sono mal definiti a meno che non sia  $f(a) = 0$ . Sulla base di quanto visto nel precedente capitolo, un modo per definire un tale integrale è come limite

$$\int_{-a}^b \frac{g(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x \pm i\epsilon} dx$$

Come abbiamo già visto per l'integrale (12.22), il risultato dipende dal modo in cui viene evitata la singolarità, cioè dal segno di  $i\epsilon$  nel denominatore (nel seguito assumeremo sempre che  $\epsilon$  sia positivo).

Incominciamo con lo studiare

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx$$

In questo caso il polo è in  $x = +i\epsilon$  ed è sopra l'asse reale. Allora il cammino può essere deformato come mostrato in figura 13.1. L'integrale consiste di due pezzi. C'è l'integrale lungo l'asse reale, eccetto per la singolarità che è evitata simmetricamente attorno all'origine. In altre parole, c'è il contributo

$$\left[ \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{g(x)}{x} + \int_{\epsilon}^b \frac{g(x)}{x} \right].$$

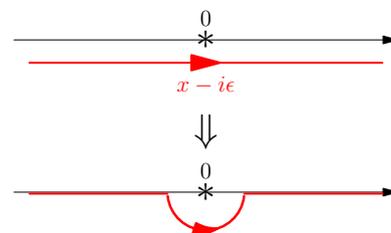


Figura 13.1: Deformazione di un cammino di poco sotto l'asse reale in un cammino che passa sotto il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio  $\epsilon$ , essendo percorso in senso anti-orario è  $\frac{1}{2}\pi ig(0) = i\pi g(0)$ .

Passando al limite  $\epsilon \downarrow 0$ , c'è un'esatta cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale, ciascuna delle quali diventa infinita nel limite, come illustrato in figura 13.2. Questa regolarizzazione è detta *parte principale di Cauchy* dell'integrale ed è denotata con

$$P \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[ \int_{-b}^{-\epsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^b \frac{g(x)}{x} dx \right]$$

E poi c'è il contributo dovuto all'arco attorno al polo. Facendo tendere a zero il raggio del cerchio, possiamo sostituire  $f(x)$  con il suo valore costante e l'integrale lungo il semicerchio è metà di quello lungo un integrale di contorno. Quindi il termine addizionale è

$$i\pi g(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} i\pi\delta(x)f(x)dx$$

L'integrale completo è allora dato dalla somma dei due pezzi,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x - i\epsilon} dx = P \int_{-a}^b \frac{g(x)}{x} dx + \int_{-a}^b i\pi\delta(x)f(x)dx. \quad (13.2)$$

Per esprimere questa identità scriviamo

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x). \quad (13.3)$$

a patto che sia inteso che  $P$  è la parte principale dell'integrale, che l'intero membro destro è dentro un integrale e che  $\epsilon$  sia fatto tendere a zero. In altre parole, la (13.3) va intesa come la definizione di una funzione generalizzata.

Il caso con il modo opposto di evitare il polo è trattato similmente. In questo caso si ottiene

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (13.4)$$

Il segno meno a secondo membro è perché il semicerchio adesso è percorso in senso orario. Si veda la figura 13.3. Combinando le formule (13.3) e (13.4), si ottiene

$$P \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x - i\epsilon} + \frac{1}{x + i\epsilon} \right]. \quad (13.5)$$

Vediamo così che la parte principale è la media dei cammini appena sopra e appena sotto il polo.

Naturalmente, per il discorso appena fatto non è richiesto che il polo sia nell'origine. Se il polo è in  $x = a$ , si avrà

$$\frac{1}{x - a - i\epsilon} = P \frac{1}{x - a} + i\pi\delta(x - a), \quad (13.6)$$

$$\frac{1}{x - a + i\epsilon} = P \frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a), \quad (13.7)$$

$$P \frac{1}{x - a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x - a - i\epsilon} + \frac{1}{x - a + i\epsilon} \right]. \quad (13.8)$$

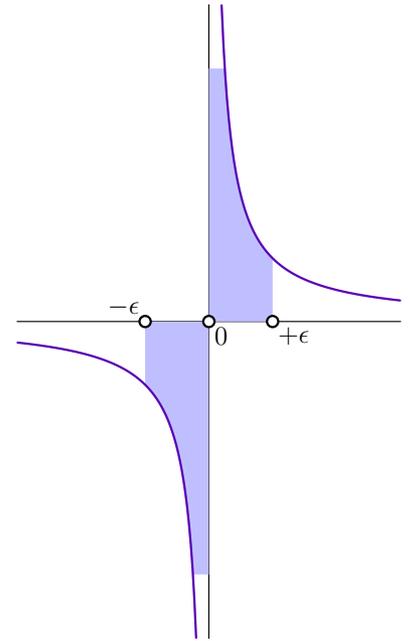


Figura 13.2: Parte principale di Cauchy: cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale.

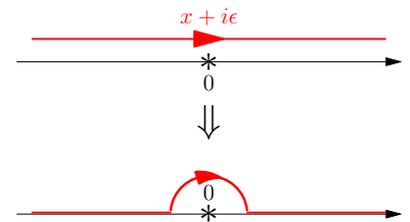


Figura 13.3: Deformazione di un cammino di poco sopra l'asse reale in un cammino che passa sopra il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio  $\epsilon$  è percorso in senso orario e quindi dà un contributo  $-i\pi g(0)$ .

ESEMPIO 13.1. Verifichiamo le formule ottenute in un esempio semplice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx$$

Usando

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\epsilon} dx$$

Il primo termine permette di chiudere il cammino con un semicerchio nel piano superiore, il secondo nel semipiano inferiore (Lemma di Jordan). Poiché il polo  $z = +i\epsilon$  è nel semipiano superiore, solo il semicerchio superiore circonda il polo. Il residuo nel polo vale 1. Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \times 1 = \pi i$$

D'altro canto, la parte principale dell'integrale è zero

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

in quanto  $\cos x$  è pari e la cancellazione è esatta. Dalla definizione della  $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x) (i\pi\delta(x)) dx = i\pi \cos(0) = i\pi$$

Dunque la formula

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

risulta verificata.

### 13.2 Teorema e formula di Cauchy generalizzate

Sia  $f(z)$  sia una funzione complessa con poli semplici nei punti  $a_i$  lungo l'asse reale  $C$ . Supponiamo di voler integrare  $f(z)$  lungo un cammino chiuso che contiene l'asse reale, che sia chiudibile o nel semipiano superiore o in quello inferiore da un semicerchio di contributo nullo nel limite di raggio infinito. Allora una conseguenza immediata della (13.8) è

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}(f) + i\pi \sum \text{Res}(f, a_i). \quad (13.9)$$

Si osservi che non è essenziale che i poli siano sull'asse reale. In generale, si ha

$$P \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum (\text{res. dentro } C) + \pi i \times \sum (\text{res. su } C) \quad (13.10)$$

Questa formula estende il teorema di residui al caso di poli lungo il cammino di integrazione (e ha un qualche significato intuitivo: un po' paradossalmente si potrebbe dire che un polo lungo il cammino è "metà dentro e metà fuori" e quindi che il suo contributo è metà del contributo dei poli dentro il cammino). La formula cessa di valere per poli di ordine pari perché in questo caso  $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  non è finito, non essendoci cancellazione.

Procedendo in modo analogo, si estende la formula di Cauchy, per una funzione analitica dentro e lungo un contorno  $C$ , ad un punto  $z$  che si trova sul contorno di integrazione:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} P \oint \frac{f(Z)dZ}{Z-z}. \tag{13.11}$$

ESEMPIO 13.2. Riconsideriamo il calcolo di

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

dell'esempio 8.3 del capitolo 8. Adesso risulta chiaro che il risultato non dipende dalla particolare regola di aggiramento del polo che allora avevamo scelto. Lo stesso esercizio può ora essere svolto più velocemente applicando la (13.10):

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$$

essendo 1 il residuo di  $e^{iz}/z$  in  $z = 0$ .

### 13.3 Formule integrali di Poisson per il semipiano

Supponiamo che di una funzione  $f = u + iv$  sappiamo che è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  (incluso l'infinito e l'asse reale) e sono noti i valori di  $u$  e  $v$  sull'asse reale. Abbiamo dati sufficienti per ricostruire la funzione nel semipiano superiore?

Se reinterpretiamo il problema in termini elettrostatici, la risposta alla domanda sembrerebbe affermativa. Infatti, analiticità di  $f$  in  $\Pi^+$  significa armonicità di  $u$  e  $v$ . Possiamo cioè interpretare  $u$  come un potenziale elettrostatico che nel semipiano superiore soddisfa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e di cui è assegnato il valore sull'asse reale. Analogo discorso vale per  $v$ .

Per determinare  $f$  applichiamo la formula di Cauchy al circuito  $C$  in figura 13.4 per un punto  $z$  dentro  $C$  e per il punto  $\bar{z}$  (che è fuori):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z-z} dZ \tag{13.12}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z-\bar{z}} dZ \tag{13.13}$$

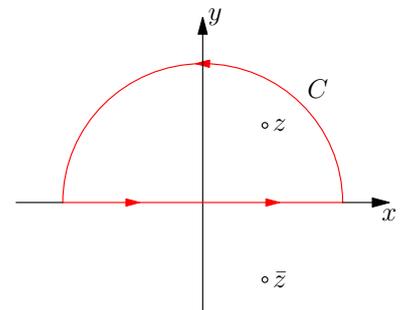


Figura 13.4: Significato elettrostatico delle formule (13.12) e (13.13). Il problema è di trovare il potenziale nel semipiano superiore, quando è noto il potenziale sulla linea  $y = 0$ . Il metodo delle immagini è l'artificio usato in elettrostatica per risolvere problemi di questo tipo. Possiamo pensare che il fattore  $1/(Z-z)$  nell'integrale di Cauchy rappresenti una "carica" nel punto  $z = x + iy$ . Introducendo una carica immagine negativa in  $\bar{z} = x - iy$  forziamo le desiderate condizioni al contorno sull'asse reale.

Sottraendo membro a membro,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) \left[ \frac{(X-x+iy) - (X-x-iy)}{(X-x)^2 + y^2} \right] dX \quad (13.14)$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{(X-x)^2 + y^2} dX, \quad (13.15)$$

Poiché entrambi i lati di (13.15) contengono solo coefficienti reali, questa equazione vale separatamente per  $u$  e  $v$ , le parti reale e immaginaria di  $f$ ,

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \quad (13.16)$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \quad (13.17)$$

Queste formule sono dette *formule integrali di Poisson per il semipiano*. Esse danno i valori di una funzione armonica nel semipiano superiore, ad esempio il potenziale elettrostatico, in termini dei suoi valori sull'asse delle  $x$  (il bordo) del semipiano (naturalmente, a patto che  $f(z)$  sia analitica nel semipiano superiore).

Per ottenere una relazione tra  $u$  e  $v$ , la precedente derivazione suggerisce di sommare membro a membro (13.12) e (13.13):

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X-x}{(X-x)^2 + y^2} f(X) dX. \quad (13.18)$$

Uguagliando parti reali e immaginarie, otteniamo

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)v(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \quad (13.19)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)u(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX \quad (13.20)$$

Queste equazioni possono essere usate per determinare il comportamento di  $u$  e  $v$  sul contorno stesso, cioè per  $y = 0$ . Dalla (13.11) si ottiene

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X, 0)}{X-x} dX \quad (13.21)$$

$$v(x, 0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X, 0)}{X-x} dX \quad (13.22)$$

Queste relazioni compaiono nella teorie delle trasformate di Hilbert e in fisica sono note come *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*.

#### 13.4 Formule integrali di Poisson per il cerchio

Ci si può porre un problema analogo per il cerchio: se  $f(z)$  è analitica dentro e su un cerchio  $C_R$  di raggio  $R$ , i valori di  $f$  sul bordo determinano



Siméon Denis Poisson (1781–1842) è stato un matematico e fisico francese. Come fisico, fu un sostenitore della teoria corpuscolare (newtoniana) della luce. Studente di Lagrange e Laplace, fu il maestro, tra gli altri, di Dirichlet e Liouville.

univocamente  $f$  dentro al cerchio? La risposta è nuovamente affermativa ed è data dalla formula di Poisson per il cerchio

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2} f(\theta) d\theta. \quad (13.23)$$

per  $a = re^{it}$ ,  $r < R$ , dentro al cerchio e  $f(\theta) \equiv f(e^{i\theta})$ , il valore di  $f$  sul cerchio. Questa formula può essere ottenuta mediante metodo delle immagini, ponendo una carica immagine in  $R^2/\bar{a}$ . Si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z - a} dZ \quad (13.24)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(Z)}{Z - R^2/\bar{a}} dZ \quad (13.25)$$

Sottraendo membro a membro, posto  $Z = Re^{i\theta}$ , e tenuto conto che  $dZ = iZd\theta$ , si ottiene la (13.23).

### 13.5 Integrale di Fourier di funzioni causali

L'analiticità nel semipiano superiore non riguarda solo le applicazioni all'elettrostatica, che abbiamo considerato nella sezione 13.3. È anche una proprietà importante delle trasformate di Fourier di funzioni del tempo che sono nulle per tempi negativi. Questa proprietà si è manifestata nello studio dell'equazione delle onde, dove abbiamo visto che  $\mathcal{G}^{\text{ret.}}(x, t)$  ha buone proprietà causali quando la sua trasformata di Fourier è analitica nel semipiano superiore. Vogliamo adesso mostrare che questa è una caratteristica del tutto generale.

Interpretando la variabile  $t$  come tempo, conveniamo di chiamare *causale* una funzione si annulla per  $t < 0$ . Vogliamo sapere quali siano le proprietà di analiticità della trasformata di Fourier di una funzione di questo tipo. In altre parole, per  $f(t)$  assolutamente integrabile, sia

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it\omega} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{it\omega} dt \quad (13.26)$$

ed estendiamo questa funzione al piano delle frequenze complesse  $z = \omega + i\sigma$ . Consideriamo cioè la funzione

$$\hat{f}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad (13.27)$$

e domandiamoci dove questa funzione è sicuramente analitica. Si vede immediatamente che se  $\sigma = \text{Im}(z) > 0$ , allora

$$|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$$

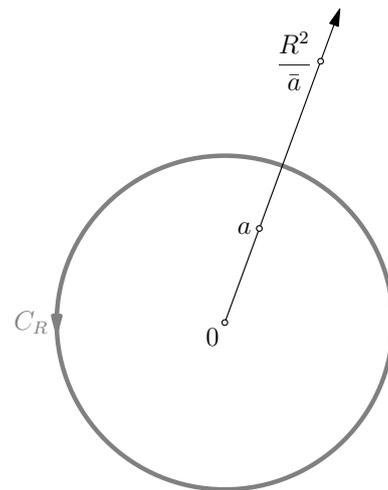


Figura 13.5: Carica immagine nel punto  $R^2/\bar{a}$ . Questo punto è l'inversione geometrica di  $a$  rispetto al cerchio di raggio  $R$  (cfr. Complementi 5.8.2).

In verità, è sufficiente che  $f(t)$  sia a quadrato integrabile.

è quindi l'integrale (13.27) è assolutamente convergente nel semipiano superiore  $\text{Im}(z) > 0$ . Allora per ogni curva semplice chiusa  $C$  tutta contenuta nel semipiano superiore si ha

$$\oint_C \hat{f}(z) dz = \oint_C \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt dz = \int_0^\infty \left[ \oint_C e^{itz} dz \right] f(t) dt = 0.$$

Concludiamo quindi, per il teorema di Morera, che  $\hat{f}(z)$  è analitica nel semipiano superiore. L'analiticità nel semipiano superiore è dunque garantita soltanto dalla condizione di causalità: *se una funzione  $f(t)$  si annulla per  $t < 0$ , la sua trasformata di Fourier è analitica nel semipiano superiore.*

### 13.6 Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig

Vista la grande importanza in fisica delle relazioni di dispersione di Kramers-Kronig, le riproponiamo in maniera indipendente da quanto visto finora, con le notazioni e terminologia della fisica. In particolare, sia  $z = \omega + i\sigma$  la frequenza complessa, con parte reale  $\omega$  e parte immaginaria  $\sigma$ .

Ridotte all'osso, le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig non sono altro che la formula di Cauchy per punti su  $C$ , cioè la (13.11), quando la funzione integranda

$$\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$$

è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e si considera il cammino in figura 13.6 dove  $\omega$  è sull'asse reale. Allora

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (13.28)$$

(si osservi che  $\omega$  e  $\omega'$  sono reali). Separando parte reale e parte immaginaria di  $\chi = \chi' + i\chi''$ ,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (13.29)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (13.30)$$

Per chiarire l'importanza in fisica delle relazioni di dispersione, occorrerebbe rispondere alle domande seguenti: quali grandezze fisiche soddisfano le relazioni di dispersione? Perché tali grandezze soddisfano le relazioni di dispersione? Qual è il significato fisico delle relazioni di dispersione? Si tratta di domande importanti a cui qui possiamo solo dare una risposta sommaria.

Per quel che riguarda la prima domanda, possiamo dire che, tipicamente, la grandezza fisica  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  è la continuazione

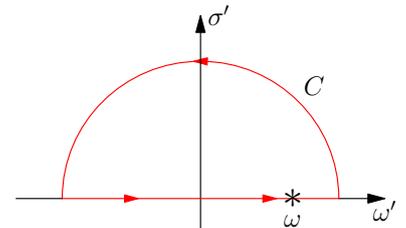


Figura 13.6: Polo lungo il cammino d'integrazione nell'integrale (13.28).

analitica della trasformata di Fourier di una funzione che rappresenta come una certa proprietà  $P$  di un sistema fisico risponde, nel corso del tempo, ad una “forza” (intesa in senso generalizzato) applicata  $F$  (ad esempio,  $P$  potrebbe essere l’angolo di un pendolo e  $F$  la forza del motore che guida il pendolo). Se l’intensità della forza è piccola, la risposta è lineare

$$P(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-u)F(u)du \quad \longleftrightarrow \quad P(z) = \chi(z)F(z).$$

$\chi$  è nota come *suscettività* o *ammettenza*.

Veniamo alla seconda domanda: per ragioni fisiche,  $\chi(t-u)$  deve essere zero per  $t < u$ . Infatti, a risposta del sistema al tempo  $t$  deve essere successiva alla forza applicata al tempo  $u$  (per  $t < u$  la risposta del sistema è zero, perché la forza non è stata ancora applicata). Nella sezione precedente abbiamo visto che la trasformata di Fourier di una funzione  $f(t)$  nulla per  $t < 0$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$ . La sola ipotesi su cui si basano le relazioni di dispersione — che la funzione sia analitica nel semipiano superiore — è dunque soddisfatta. Quindi per  $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$  valgono le relazioni di dispersione quando  $z$  tende all’asse reale, cioè  $z = \omega$  (e  $\sigma = 0$ ).

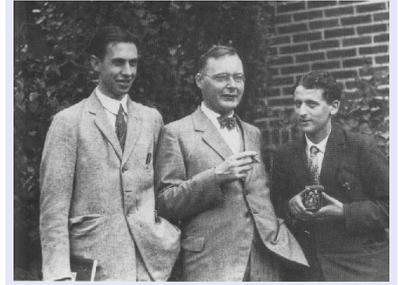
Infine, per quel che riguarda il significato fisico delle relazioni di dispersione, ci limitiamo a ricordare questo: la parte immaginaria delle funzione di risposta  $\chi(\omega)$  descrive come il sistema dissipa energia, essendo sfasato con la forzante. Le relazioni di di Kramers-Kronig implicano che la risposta dissipativa (resistenza, per i circuiti elettrici) è sufficiente a determinare la sua risposta in fase reattiva (reattanza, per i circuiti elettrici) e viceversa.

Chiariti questi punti, occorre mettere in evidenza che le formule (13.29) e (13.30) non sono utili per ricostruire la risposta fisica perché gli integrali vanno da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il che implica una conoscenza della risposta per frequenze negative. Tuttavia questo problema è facilmente aggirato:  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$  è la trasformata di Fourier di una funzione reale, quindi  $\chi(-\omega) = \overline{\chi(\omega)}$ . Questo significa che  $\chi'(\omega)$  è una funzione pari e  $\chi''(\omega)$  è una funzione dispari. Usando questo fatto, il dominio di integrazione può essere portato da  $(-\infty, +\infty)$  a  $[0, +\infty)$  nel modo seguente: si moltiplichino numeratore e denominatore della funzione integranda a secondo membro della (13.29) per  $(\omega + \omega')$  e si separino i contributi,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{\omega}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Poiché  $\chi''(\omega)$  è dispari, il secondo integrale si annulla e rimaniamo con

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi}P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (13.31)$$



Hans Kramers (1894–1952) è stato un fisico danese. Studente di Niels Bohr è noto per l’approssimazione semiclassica della meccanica quantistica detta approssimazione WKB (“W” sta per Wentzel, “K” per Kramers e “B” per Brillouin) e per il suo lavoro con Kronig sulle relazioni di dispersione. Nella foto (del 1928 circa) è al centro con George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit, famosi per la scoperta dello spin dell’elettrone.



Ralph Kronig (1904–1995) è stato un fisico tedesco. Noto principalmente per il modello cristallino di Kronig-Penney e per le relazioni di dispersione, insieme con Rabi diede la prima soluzione dell’equazione di Schrödinger per un rotatore rigido (1927) e anticipò l’idea di Pauli dello spin.

Lo stesso argomento per la parte immaginaria fornisce

$$\chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (13.32)$$

Le equazioni (13.31) e (13.32) sono in effetti le relazioni derivate originariamente da Kramers e Kronig.