

14

Trasformate di Laplace

14.1 Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier

Data una funzione $f(t)$, la si trasformi prima nella funzione causale $f^+(t)$, ponendo $f^+(t) = f(t)$ per $t > 0$ e $f^+(t) = 0$ per $t < 0$.

Quindi si consideri la sua trasformata di Fourier $\widehat{f^+}(\omega)$, e infine il continuamento analitico $\widehat{f^+}(z)$ di quest'ultima nel piano $z = \omega + i\sigma$,

$$\widehat{f^+}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)e^{itz} dt \quad (14.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt \quad (14.2)$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{izt} dt \quad (14.3)$$

Per quanto visto nel capitolo precedente, questa funzione è analitica per $\text{Im}(z) = \sigma > 0$.

In alcuni testi, la funzione $\widehat{f^+}(z)$ è chiamata trasformata Laplace di $f(t)$. Per distinguerla dall'usuale nozione quando si possa generare confusione, chiameremo $\widehat{f^+}(z)$ trasformata di Laplace^② e la nozione usuale $\tilde{f}(s)$ trasformata di Laplace^①. Riassumendo,

$$\widehat{f^+}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{izt} dt \quad \text{Im}(z) > 0 \quad (14.4)$$

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (14.5)$$

Si osservi che

$$\tilde{f}(s) = \widehat{f^+}(is), \quad (14.6)$$

cioè le due definizioni coincidono, a meno di una rotazione di $\pi/2$ nel piano complesso.

Dalla (14.2) segue che $\widehat{f^+}(z)$, per $z = \omega + i\sigma$ è la trasformata di Fourier della funzione

$$f_{\sigma}(t) = f(t)e^{-\sigma t},$$

da cui

$$f^+(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} f^+(t) &= e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^+(\omega + i\sigma) e^{-i(\omega + i\sigma)t} d\omega \end{aligned}$$

Essendo $f^+(t)$ causale, $\widehat{f}^+(z)$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ e quindi singolarità di $\widehat{f}^+(z)$ saranno tutte nel semipiano inferiore Π^- . Allora

$$f^+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_K \widehat{f}^+(z) e^{-izt} dz, \quad (14.7)$$

dove K è qualunque linea nel semi-piano superiore Π^+ , parallela all'asse reale, e tale che le singolarità di $\widehat{f}^+(z)$ sono sotto K . Se adesso operiamo il cambiamento di variabili $w = -iz$ nell'integrale a secondo membro, otteniamo

$$f^+(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-iK} \widehat{f}^+(iw) e^{wt} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tilde{f}(z) e^{zt} dz, \quad (14.8)$$

dove L è ottenuta per rotazione di $\pi/2$ da K ed è quindi una retta parallela all'asse immaginario a destra di tutte le singolarità di $\tilde{f}(w)$. Questa è proprio la regola che avevamo dato nella sezione 8.7 per l'antitrasformata di Laplace.

14.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Consideriamo la trasformata di Laplace^②. Assumiamo che le funzioni di cui consideriamo la trasformata sono tutte nulle nel passato e di conseguenza, per comodità, tralasciamo l'apice "+"

ESEMPIO 14.1. Come esempio, consideriamo $f(t) = t, t > 0$. Allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \int_0^{\infty} t e^{itz} dt, \quad \text{Im}(z) > 0 \\ &= t \frac{1}{iz} e^{itz} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{iz} e^{itz} dt \\ &= 0 - \frac{1}{iz} \left[\frac{1}{iz} e^{itz} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Verifichiamo la formula di inversione e calcoliamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz$$

Chiudiamo L su un cammino di raggio R nel semipiano inferiore. Allora, poiché chiudiamo in senso orario,

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -2\pi i \sum \text{Res}$$

Abbiamo un polo doppio per $z = 0$. Quindi

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-1}{z^2} e^{-izt} dz = -i \left. \frac{d}{dz} z^2 \frac{-1}{z^2} e^{-izt} \right|_{z=0} = -i(-1)(-it) = t$$

La trasformata di Laplace, essendo la continuazione analitica di una trasformata di Fourier, condivide molte delle proprietà della trasformata di Fourier, ma ci sono anche delle differenze che è importante mettere in evidenza. Queste differenze nascono dal fatto che la funzione $f(t)$ vista come funzione su \mathbb{R} è nulla per $t < 0$. Una conseguenza immediata di questo fatto riguarda come si trasformano le derivate.

Consideriamo la trasformata di $f'(t)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(z) &= \int_0^\infty f'(t) e^{itz} dt \\ &= f(t) e^{itz} \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t) (iz) e^{itz} dt \\ &= -f(0) - iz \widehat{f}(z) \end{aligned}$$

E in maniera analoga si mostra che

$$\widehat{f}''(z) = -z^2 \widehat{f}(z) + izf(0) - f'(0)$$

Queste caratteristiche rendono la trasformata di Laplace uno strumento molto utile per risolvere problemi al contorno con condizioni iniziali. Vediamone degli esempi.

ESEMPIO 14.2 (particella in un fluido). Equazione per la velocità ($m = 1$)

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = 0$$

Quindi

$$-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = 0$$

da cui

$$\widehat{v}(z) = \frac{i}{z + i\gamma} v_0$$

Come ci aspettavamo, la singolarità è nel semipiano inferiore. Nel semipiano superiore la funzione è analitica. Invertiamo

$$v(t) = e^{-\gamma t} v_0$$

ESEMPIO 14.3 (equazione del calore). L'equazione è arcinota

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Sia $\hat{f}(k, z)$, la trasformata di Fourier usuale rispetto allo spazio e la trasformata di Laplace rispetto al tempo (= Fourier con opposta convenzione sul segno) della funzione $f(x, t)$, che assumiamo nulla per $t < 0$. Allora

$$-iz\hat{f}(k, z) + f_0(k) = -k^2 D \hat{f}(k, z)$$

da cui

$$\hat{f}(k, z) = \frac{i}{z + iDk^2} f_0(k).$$

Un'altra proprietà che la trasformata di Laplace eredita è il prodotto di convoluzione. Anche in questo caso c'è una differenza che nasce dal fatto che le funzioni di cui si considera la trasformata di Laplace sono nulle per $t < 0$. Questo significa che al prodotto di due trasformate

$$\hat{f}(z)\hat{g}(z)$$

corrisponde il prodotto di convoluzione

$$f \star g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = g \star f(t)$$

ESEMPIO 14.4 (particella in un fluido sotto l'azione di una forza dipendente dal tempo). Equazione per la velocità ($m = 1$)

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = f(t)$$

Quindi

$$-iz\hat{v}(z) - v_0 + \gamma\hat{v}(z) = \hat{f}(z)$$

da cui

$$\hat{v}(z) = \frac{i}{z + i\gamma} v_0 + \frac{i}{z + i\gamma} \hat{f}(z)$$

Dalla (14.7) segue che l'antitrasformata di $\frac{i}{z+i\gamma}$ è $e^{-\gamma t}$. Quindi

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} f(u) du$$

14.3 Nozione usuale di trasformata di Laplace

Come abbiamo detto, di solito la trasformata di Laplace è definita nel piano delle frequenze complesse $z = \omega + i\sigma$ ruotato di $-\pi/2$, cioè ponendo $s = -iz$. Si definisce

$$\tilde{f}(s) = \hat{f}(is) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

(trasformata di Laplace^①). La trasformata $\tilde{f}(s)$ è calcolata per s reale e poi estesa per prolungamento analitico al piano complesso s . Procedere in questo modo avrà anche i suoi vantaggi (forse), ma oscura il legame con la trasformata di Fourier, introducendo un'innaturale rotazione nel piano delle frequenze. Sia come sia, poiché questa è il modo standard di procedere dei libri, continuiamo la nostra discussione della trasformata di Laplace sulla base della definizione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

per s reale e positivo. Ecco le proprietà più importanti di $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Linearità

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$$

Prima proprietà della traslazione Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s - a)$$

Seconda proprietà della traslazione Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ e $g(t) = f(t - a)$ per $t > a$ e $g(t) = 0$ per $t < a$ allora

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} \tilde{f}(s)$$

Proprietà del cambio di scala Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Trasformata di Laplace della derivata Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Trasformata di Laplace degli integrali Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$$

Prodotto per t^n Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s)$$

Divisione per t Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du$$

Funzioni periodiche Se $f(t)$ è una funzione periodica di periodo T allora

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

Comportamento di $f(s)$ per $s \rightarrow \infty$ Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0$$

Teorema del valore iniziale Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{f}(s)$$

Teorema del valore finale Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{f}(s)$$

Generalizzazione del teorema del valore iniziale Se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

si dice che per valori di t prossimi a zero (t piccolo), $f(t)$ è prossima a $g(t)$ e si scrive $f(t) \sim g(t)$ per $t \rightarrow 0$. Analogamente, se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(s)}{\tilde{g}(s)} = 1$$

si dice che per valori elevati di s , $\tilde{f}(s)$ è prossima a $\tilde{g}(s)$ e si scrive $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$ per $s \rightarrow \infty$. Allora vale il teorema:

★ Se $f(t) \sim g(t)$ per $t \rightarrow 0$, allora $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$ per $s \rightarrow \infty$.

Generalizzazione del teorema del valore finale

★ Se $f(t) \sim g(t)$ per $t \rightarrow \infty$, allora $\tilde{f}(s) \sim \tilde{g}(s)$ per $s \rightarrow 0$.

Sia adesso $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ l'anti-trasformata di Laplace. Ecco le sue proprietà più importanti.

Linearità

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

Prima proprietà della traslazione Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s - a)\} = e^{at} f(t)$$

Seconda proprietà della traslazione Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\tilde{f}(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}$$

Proprietà del cambio di scala Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

Antitrasformata di Laplace di derivate Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

Antitrasformata di Laplace di integrali Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \tilde{f}(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

Prodotto per t Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\tilde{f}(s)\} = f'(t)$$

Divisione per t Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$$

Proprietà della convoluzione Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$ allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = g \star f(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)du = f \star g(t)$$

14.4 Formula di inversione

La formula di inversione è data dalla (14.8), che era già stata anticipata nella sezione 8.7. Si vedano la formula (8.21), la corrispondente figura a lato e la figura 8.12 per il caso in cui ci siano punti di diramazione.