

## Problema di Dirichlet nel piano

### 15.1 Complementi sulle rappresentazioni conformi

**TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIEMANN.** È un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua estrema generalità. La sua dimostrazione esula dai limiti di questo corso. Ci limitiamo ad enunciarlo:

Sia  $C$  una linea chiusa semplice del piano  $z$  che costituisce la frontiera di una regione  $\mathcal{R}$ . Sia  $\mathbb{T}$  il cerchio di raggio unitario e centro nell'origine che costituisce la frontiera del disco unitario  $\mathbb{D}$  nel piano  $z^*$ . Allora esiste una funzione  $z^* = f(z)$  analitica in  $\mathcal{R}$ , che rappresenta ogni punto di  $\mathcal{R}$  su un punto corrispondente di  $\mathbb{D}$  e ogni punto di  $C$  su un punto corrispondente di  $\mathbb{T}$ , in una corrispondenza biunivoca.

(15.1)

**TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER.** Si supponga di far coincidere il piano  $z^*$  con il piano  $z$  in modo che gli assi delle coordinate coincidano e che formino quindi sostanzialmente un solo piano. Si può allora pensare alla trasformazione  $z^* = f(z)$  come ad una rappresentazione di certi punti del piano in altri punti. I punti per i quali  $z = f(z)$  resteranno fermi: per questa ragione si dice che sono i *punti fissi* o *invarianti* della trasformazione. Se  $f$  è complicata è difficile determinare se  $f$  ha punti fissi e quali sono. Grazie a Brouwer, sappiamo che ce ne sarà sempre almeno uno. Vale infatti il seguente teorema:

Ogni trasformazione continua del disco unitario  $\mathbb{D}$  in sé stesso ha almeno un punto fisso.

(15.2)

Anche questo è un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua generalità.

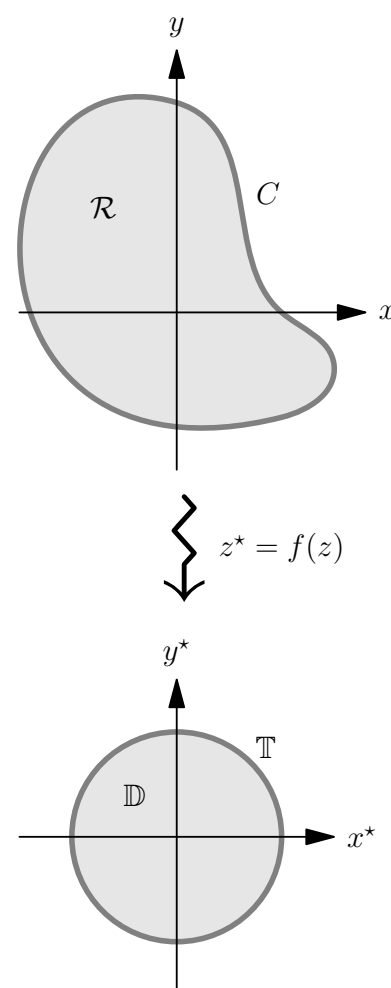
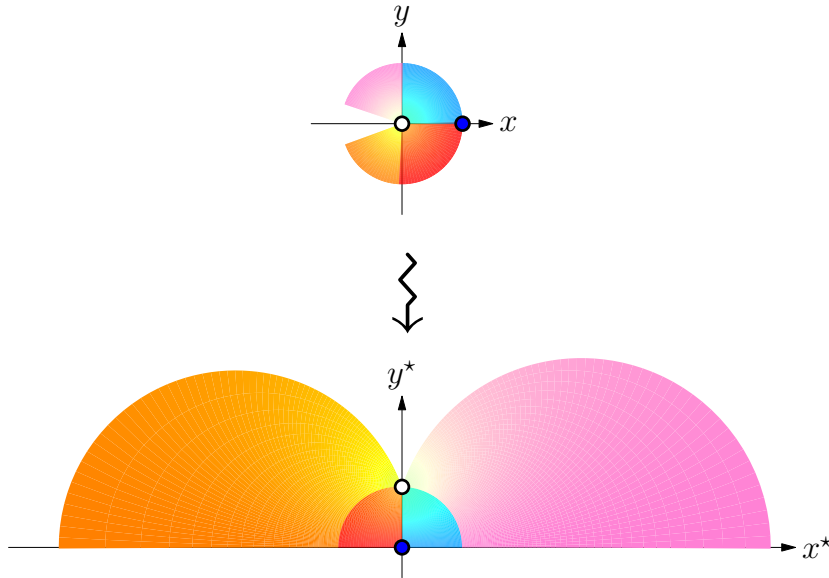


Figura 15.1: Rappresentazione di Riemann nel disco unitario.

ESEMPI DI TRASFORMAZIONI CONFORMI

Rappresentazione di un cerchio in un semipiano (e viceversa):

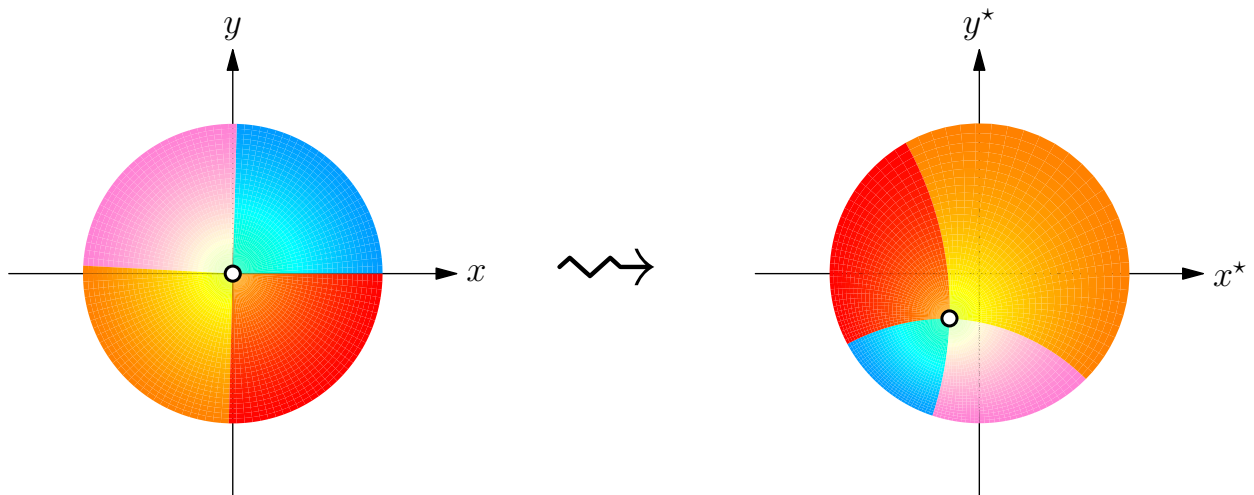
$$z^* = i \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \quad z = \frac{i-z^*}{i+z^*}$$



Si osservi che si tratta di una trasformazione di Möbius. Si vede che il centro del cerchio  $z = 0$  finisce in  $z^* = i$  e che  $z = -1$  corrisponde a  $z^* = \infty$ , mentre  $+1$  finisce nello zero. Il semicerchio inferiore finisce nell'asse reale negativo e quello superiore in quello positivo.

Swap tra un punto qualunque in un cerchio e centro del cerchio:

$$z^* = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad |a| < R \quad (15.3)$$



L. E. J. Brouwer (1881–1966) è stato un matematico e filosofo danese che ha lavorato in topologia, teoria degli insiemi e analisi complessa. È noto per l'approccio costruttivo, noto come intuizionismo, in filosofia della matematica.

Anche questa è una trasformazione di Möbius, denotiamola  $M_a(z)$ .

La matrice associata è

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché il determinante  $-1 - |a|^2 \neq 0$ , la trasformazione è invertibile.

Lo swap si vede immediatamente:

$$M_a(0) = a \quad \text{e} \quad M_a(a) = 0$$

Inoltre, si verifica facilmente che questa trasformazione rappresenta il disco unitario  $\mathbb{D}$  in sè stesso: notiamo che

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro

$$|z - a|^2 - |\bar{a}z - 1|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

Quindi  $|z - a| < |\bar{a}z - 1|$ , da cui

$$|z^*| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

e quindi  $z^*$  sta dentro il disco unitario  $\mathbb{D}$ .

### 15.2 Distribuzione di temperatura in una piastra circolare

Consideriamo un flusso stazionario di calore in una piastra metallica le cui facce sono isolate. Nell'interno della piastra la temperatura  $T(z)$  è una funzione armonica,  $\Delta T = 0$ , e il flusso di calore è il campo vettoriale  $\nabla T$ . Misuriamo la temperatura lungo la circonferenza  $C$  di un cerchio, che per semplicità sceglieremo di raggio  $R = 1^1$ , l'interno del quale è privo di sorgenti e pozzi, e il cui centro possiamo scegliere convenientemente come l'origine. Quando  $Z = e^{i\theta}$  si muove lungo  $C$ , possiamo esprimere la temperatura come funzione dell'angolo, cioè,  $T = T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} T(e^{i\theta})$ . È fisicamente plausibile che questi valori determinino la temperatura in qualunque punto  $z$  dentro al cerchio. Sappiamo già che le cose stanno così per il centro del cerchio  $z = 0$ : il teorema della media di Gauss afferma che

$$T(0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta$$

e anche se non avessimo saputo nulla del teorema della media, da fisici, questa è la formula che avremmo scritto immediatamente per la temperatura nel centro.

<sup>1</sup> È solo una questione di unità di misura, non perdiamo nulla nell'assumere questo

“Stesse equazioni hanno le stesse soluzioni”, diceva Feynman, e nel dire questo non voleva annoiarci con una tautologia, ma sollecitarci ad usare l’intuizione sviluppata nel risolvere un problema di fisica per un altro, fisicamente diverso, ma riguardante un fenomeno governato dalle stesse equazioni. La formula integrale di Poisson per il cerchio data l’equazione (13.23) è stata ottenuta con metodi di elettrostatica, ma poichè l’equazione è la stessa, vale a dire l’equazione di Laplace, la (13.23) fornisce anche la soluzione al problema della distribuzione di temperatura nella piastra:

$$T(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2} \right] T(\theta) d\theta. \tag{15.4}$$

per  $a = re^{it}$  dentro il disco unitario e  $T(\theta) \equiv T(e^{i\theta})$ , la temperatura sul bordo, cioè il cerchio unitario;  $Z = Re^{i\theta}$  è un punto sul cerchio.

La formula dice che  $T(z)$  è una *media pesata* di  $T$  sul bordo, con la temperatura di ciascun elemento di  $\mathbb{T}$  che contribuisce a  $T(z)$  in proporzione al suo peso, che è la funzione in parentesi quadrate (15.4),

$$P = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2}. \tag{15.5}$$

Più lontano è l’elemento sul bordo da  $a$ , inferiore è il suo peso; quando  $a$  è nel centro si ritrova il teorema della media di Gauss.

C’è un modo geometrico di comprendere la formula del peso  $P$  data dalla (15.5). Consideriamo la trasformazione “swap” (15.3) che scambia un punto qualunque nel cerchio con il centro del cerchio e facciamo cioè l’ipotesi che la temperatura sia ancora data dal teorema della media, a patto però di distorcere la distribuzione sul bordo con la trasformazione “swap”, cioè

$$T(a) = T(0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta. \tag{15.6}$$

Calcoliamo il secondo membro della (15.6). Per cambiamento di variabili si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) \frac{d\theta^*}{d\theta} d\theta$$

Ma, per l’esercizio (15.2),

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{i\theta} - a|^2},$$

che è proprio il peso  $P$  nella formula di Poisson (15.4).

Per capire meglio il significato geometrico di questa costruzione, consideriamo la distribuzione di temperatura in cui la metà superiore del cerchio è a  $0^\circ$  e quella inferiore a  $100^\circ$ . L’effetto della trasformazione “swap” (15.3) sui punti che stanno sul cerchio è quello mostrato in figura 15.2: un punto  $Z$  sul cerchio si trasforma nel punto  $Z^*$ ,

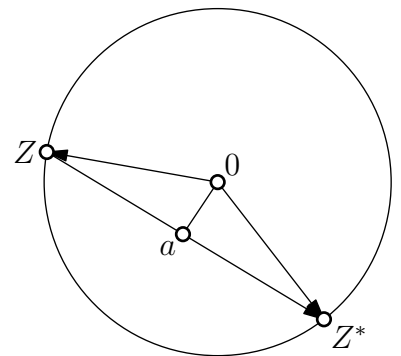


Figura 15.2: Costruzione geometrica di  $Z \rightarrow Z^*$  sul cerchio.

estremo delle corda che passa per  $Z$  e per  $a$  (per una dimostrazione di questo, si veda l'esercizio 15.1 nei complementi 15.6.1). Con questa costruzione, il contributo della parte lontana risulta correttamente ricalibrato: per trovare la temperatura in  $z = a$  si trasporti ciascuna temperatura sul cerchio unitario nel punto direttamente opposto come visto da  $z = a$ , come mostrato in figura 15.3. Quindi si prenda la media della nuova distribuzione di temperatura così ottenuta, vedere la figura 15.4

### 15.3 Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

È importante aver chiaro quel che si compra e quel che NON si compra con la formula di Poisson. Questa formula stabilisce che per una funzione analitica dentro al cerchio e SUL cerchio, il valore della funzione dentro al cerchio è la media pesata (15.4) dei valori della funzione sul cerchio. Questo è collegato al ben più difficile problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } (x,y) \in \mathcal{R} \quad (15.7)$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{per } (x,y) \in \partial\mathcal{R}. \quad (15.8)$$

Nel problema di Dirichlet è ASSEGNATA una funzione  $f$  sul bordo  $\partial\mathcal{R}$  e il problema consiste nel determinare una funzione armonica dentro  $\mathcal{R}$  che assume il valore assegnato sul bordo quando ci si avvicina al bordo.

Per affrontare questo problema, consideriamo la funzione a *valori reali*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \right] f(\theta) d\theta. \quad (15.9)$$

Questa può apparire come una riscrittura della (15.4): la variabile  $a$  è stata chiamata  $z$ , e la  $u$  potrebbe essere interpretata come la parte reale della funzione analitica  $T$ . C'è, tuttavia, una differenza sostanziale: abbiamo chiamato  $f$  la condizione al contorno che vogliamo assegnare più o meno arbitrariamente. Si osservi che non si sta assumendo che  $u$  e  $f$  coincidano sul cerchio unitario  $\mathbb{T}$ , ma, assegnata  $f$  su  $\mathbb{T}$ , si vuole stabilire se esista una funzione armonica  $u$  nel disco unitario  $\mathbb{T}$  che coincide con  $f$  su  $\mathbb{T}$ . Per il momento, il secondo membro della (15.9) va inteso come una definizione della funzione  $u$ , del quale vogliamo comprendere bene la struttura.

In primo luogo, osserviamo che la funzione in parentesi quadre nella (15.9) è la parte reale di una funzione analitica. Più precisamen-

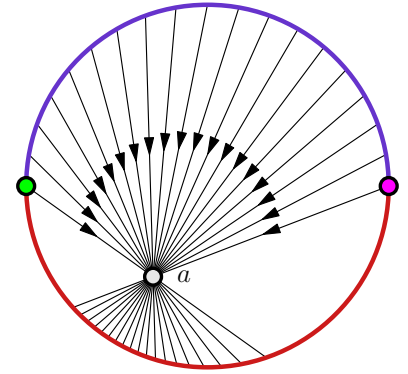


Figura 15.3: La metà superiore del bordo del cerchio è a  $0^\circ$  e quella inferiore a  $100^\circ$ . Le temperature della metà superiore del cerchio sono trasportate in quella inferiore secondo la regola descritta nella figura 15.2 e viceversa.

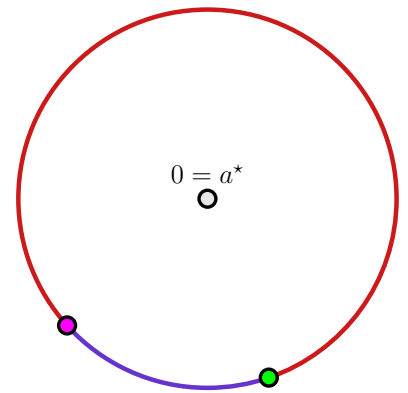


Figura 15.4: La temperatura in  $a$  per la data distribuzione (metà superiore del cerchio a  $0^\circ$ , metà inferiore a  $100^\circ$  è la temperatura media (cioè la temperatura nel centro del disco) della distribuzione sul cerchio ottenuta con la costruzione della figura 15.3.

te, per  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  ( $r < 1$ ) e  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  si ha

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right). \quad (15.10)$$

Infatti,

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{(e^{i\theta} + z)(e^{-i\theta} - \bar{z})}{|e^{i\theta} - z|^2} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

La funzione

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \quad (15.11)$$

è detta *nucleo di Poisson* e, dalla prima uguaglianza della (15.10) vediamo che  $u$  è il prodotto di convoluzione

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta \equiv P_r * f(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}. \quad (15.12)$$

Nell'analisi di questo problema, l'osservazione cruciale fu fatta da Hermann Schwarz: la funzione

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) f(\theta) d\theta \quad (15.13)$$

è analitica in  $\mathbb{D}$  per *qualunque* funzione integrabile reale  $f$  su  $\mathbb{T}$  (questo segue dalle relazioni di Cauchy-Riemann). L'equazione (15.13) è detta *formula di Schwartz* e permette di ricostruire la funzione analitica completa  $g(z)$  nel disco  $\mathbb{D}$  a partire dalla sua parte reale su  $\mathbb{T}$ . Ma  $u$  è la parte reale di  $g$ , in quanto dalla (15.10) si ha

$$P_r(t - \theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}. \quad (15.14)$$

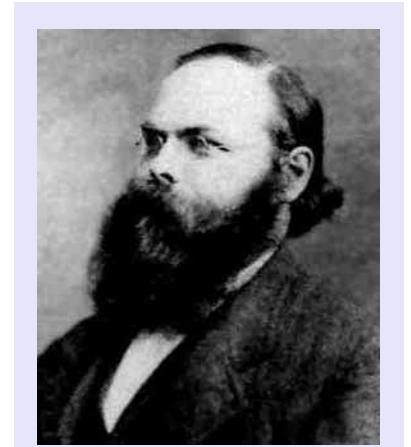
Dunque, la funzione  $u(z)$ , data dalla (15.12), è armonica per qualunque funzione integrabile reale  $f$  su  $\mathbb{T}$ .

Prima di tirare le fila del discorso, alla luce di quest'ultima affermazione, è utile fare una conoscenza più ravvicinata con il nucleo di Poisson. Ci dedicheremo a questo nella prossima sezione.

### 15.4 Il nucleo di Poisson

In figura 15.5 sono riportati i grafici del nucleo di Poisson per diversi valori di  $r$ . Sembra una successione di approssimazioni della delta di Dirac  $e$ , in effetti, lo è. Ma è la delta su  $\mathbb{T}$  e non su  $\mathbb{R}$ . Data una successione  $r_n$  tendente a 1, la corrispondente successione di nuclei integrali di Poisson

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}.$$



Hermann Schwarz (1843–1921) è stato un matematico tedesco noto per il suo lavoro in analisi complessa.

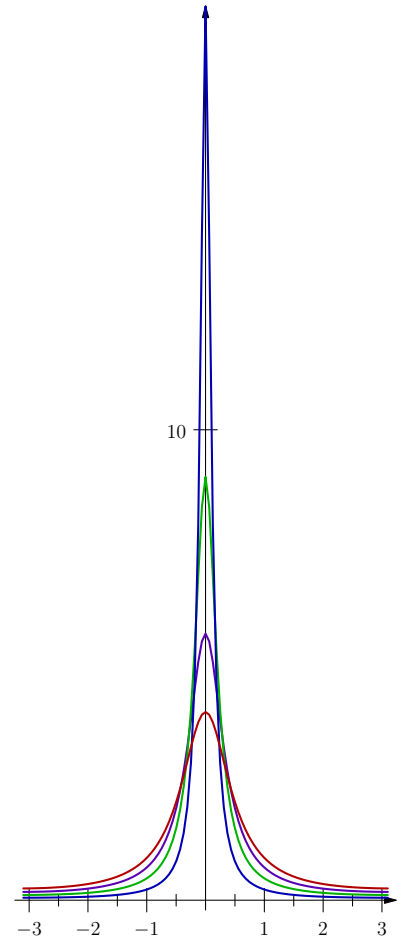
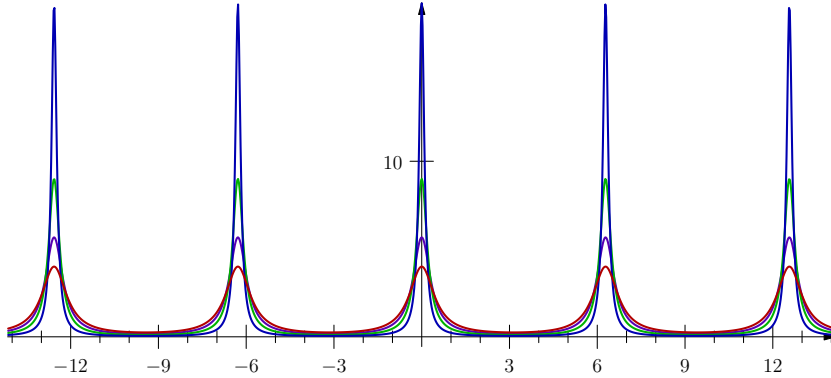


Figura 15.5: Nucleo di Poisson per  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  in  $-\pi \leq t < \pi$ .

è una successione regolare di buone funzioni, nel modo in cui possono essere buone le funzioni su  $\mathbb{T}$ : ovviamente non può esserci decrescenza all'infinito, visto che  $\mathbb{T}$  è compatto. Se prolungassimo  $t$  a destra e a sinistra i grafici si ripeterebbero periodicamente:



Le proprietà che rendono la successione  $\frac{1}{2\pi}P_r, r \rightarrow 1$ , una successione di approssimanti della delta su  $\mathbb{T}$  sono le seguenti:

1.  $P_r(t) > 0$  per tutti gli  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  (cioè per  $r < 1$  e  $-\pi \leq t < \pi$ ).
2.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$
3. Il massimo di  $P_r(t)$  fuori da qualunque intorno  $(-\delta, \delta)$  di  $t = 0$ , non importa quanto sia piccolo, tende a 0 per  $r$  che tende a 1.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: (1) è ovvio; (2) è lasciato come esercizio (facile); (3) segue dall'osservazione che  $1 + r^2 > 2r$  (perché  $(1 - r)^2 > 0$ ), da cui

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(t))}.$$

che tende a 0 per  $r \uparrow 1$  in tutti i punti per cui  $\cos t \neq 1$ .

Concludiamo con una formula per lo sviluppo in serie del nucleo di Poisson. Usando la formula (15.14) per  $P_r(t - \theta)$  (e l'onnipresente serie geometrica), si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) &= \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{(ze^{-i\theta})}{1 - (ze^{-i\theta})} \right] = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-i\theta})^n \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{it} e^{-i\theta})^n = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(t-\theta)} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(t-\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}. \end{aligned}$$

Esplicitamente,

$$P_r(t - \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}, \quad (15.15)$$

che è una formula molto carina.

### 15.5 Teorema di convergenza uniforme

Vale l'importante teorema che, se si permette il gioco di parole, chiude il cerchio del problema di Dirichlet per il cerchio:

Se  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{T}$ , la funzione

$$u(z) = u_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}, \quad (15.16)$$

armonica nel disco  $\mathbb{D}$ , converge uniformemente a  $f$  quando  $r$  tende a 1.

In questo modo risulta stabilita l'esistenza (e unicità) della soluzione del problema di Dirichlet nel disco con condizioni continue al bordo (l'unicità è facile: si vedano i Complementi 5.8.1). A questo punto, per il teorema delle rappresentazioni di Riemann, risolto il disco, risulta anche risolto il problema di Dirichlet (esistenza e unicità della soluzione) per qualunque regione la cui frontiera è una curva semplice chiusa.

La dimostrazione del teorema (15.16), è data nei complementi 15.6.1. Qui ci limitiamo a commentarlo. In primo luogo, osserviamo che convergenza uniforme significa non solo che, puntualmente,

$$\lim_{r \uparrow 1} u_r(t) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta = f(t)$$

ma anche che, l'errore massimo

$$E_{\max} = \sup_{-\pi < t \leq \pi} |f(t) - u_r(t)|$$

tende a zero per  $r$  che tende a 1.

Supponiamo adesso che  $f$  sia soltanto continua a tratti e sia  $t_0$  un punto di discontinuità, per esempio  $t_0 = \pi$ , come nell'esempio della piastra circolare con la metà superiore del cerchio ad una temperatura e quella inferiore ad una temperatura differente. Consideriamo un punto  $z$  dentro al disco in prossimità del punto di discontinuità, come mostrato in figura 15.6.

Poiché  $u$  è analitica, il suo valore in  $z = re^{i\theta}$  è pari al valor medio di  $u$  lungo un piccolo cerchio centrato in  $z$ . Man mano che facciamo tendere  $z$  a  $e^{it_0}$ , facendo tendere  $r$  a 1 e  $\theta$  a  $t_0$ , e al contempo rendiamo il raggio del cerchio centrato in  $z$  sempre più piccolo, il contributo

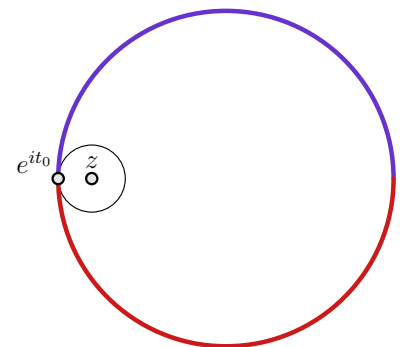


Figura 15.6: La funzione  $f(\theta)$  sul cerchio è discontinua per  $\theta = t_0$ .



alla media sarà dominato dai due valori di  $f$  immediatamente a destra e a sinistra di  $t_0$ . Dunque, nel limite si avrà

$$u_1(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)] . \tag{15.17}$$

Come esempio di questo, consideriamo la funzione  $u_r(t)$  determinata dal valore al contorno

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{per } -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{per } 0 < \theta < \pi \end{cases} \tag{15.18}$$

Si vedano le figure 15.7 e 15.8.

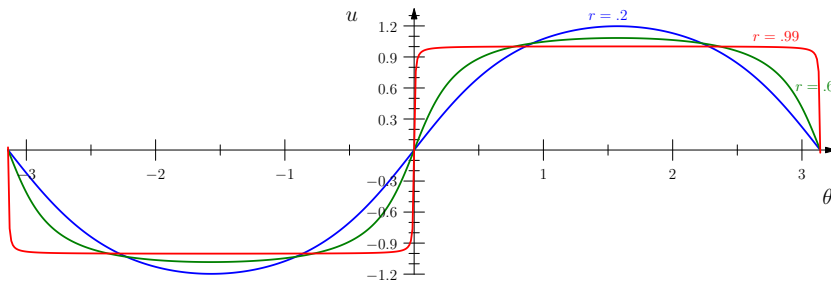


Figura 15.7: Grafico di  $u_r(t)$  per  $r = .2, .6$  e  $.99$ . In  $t = 0$  e  $t = \pi$  (e  $t = -\pi$ ), dove la funzione sul bordo è discontinua, si vede l'effetto di media

$$u_1(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)] .$$

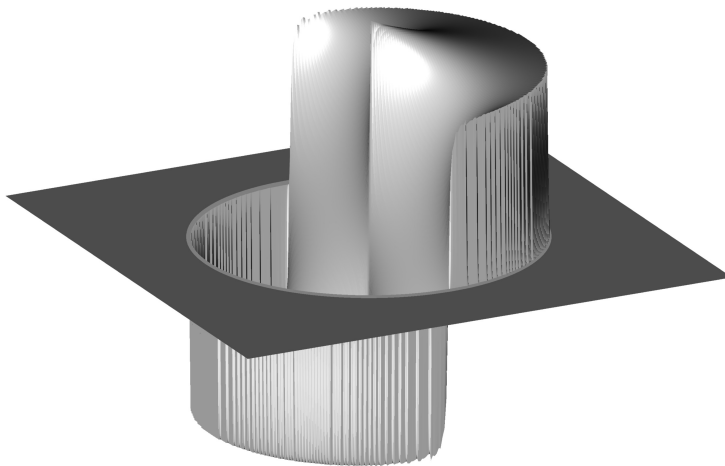


Figura 15.8: Grafico della superficie  $u_r(t)$  per funzione al contorno (15.18). In termini di temperatura, la superficie rappresenta la temperatura stazionaria nei punti di una piastra circolare il cui bordo è mantenuto, la metà superiore, diciamo, a  $10^0$  C e la metà inferiore a  $10^0$  C. Come ci si poteva aspettare da semplici considerazioni di simmetria, i punti del disco, bordo incluso, lungo il diametro tra  $0$  e  $\pi$  sono alla temperatura media tra le due temperature sul bordo