

## Analisi di Fourier

### 16.1 Il problema fondamentale dell'analisi di Fourier

Nella memoria del 1807, Fourier affronta e risolve il seguente problema: determinare come evolve nel tempo la temperatura di una sbarretta i cui estremi sono mantenuti a temperatura costante e la cui temperatura al tempo iniziale ha una distribuzione assegnata (e la sbarretta è separata adiabaticamente dall'esterno). Dapprima, Fourier ricava da considerazioni fisiche l'equazione per la temperatura  $f$  che porta il suo nome (e che abbiamo già incontrato in capitoli precedenti), e poi passa a risolverla per il problema considerato. Nel fare questo, Fourier utilizza lo sviluppo in serie

$$f(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (16.1)$$

che porta il suo nome. Nella sezione 2.8 abbiamo visto che una serie di questo tipo emerge quando si considera una serie di potenze complesse sul cerchio di convergenza. In questo capitolo e nei successivi intendiamo discutere i problemi matematici riguardanti questi tipi di serie.

È importante sottolineare che la novità del metodo di Fourier non sta tanto nell'usare lo sviluppo (16.1), ma nell'idea che questo sviluppo valga per un'ampia classe di funzioni  $f(\theta)$ . In effetti, era questa generalità che veniva contestata a Fourier dai matematici del suo tempo e ci volle molto tempo per stabilire quanto generale fosse la classe delle funzioni sviluppabili secondo Fourier. Sorprendentemente, questa ricerca continuò ancora per tutto il Novecento.

Sviluppi in serie del tipo (16.1) erano già stati usati prima di Fourier, nella teoria dei sistemi vibranti. Il problema che era stato affrontato era quello di caratterizzare la classe delle funzioni periodiche di un dato periodo. Precisiamo meglio questo problema.

Chiaramente,  $\cos n\theta$  e  $\sin m\theta$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  sono funzioni periodiche, di periodo  $2\pi/n$  e  $2\pi/m$  rispettivamente, e se passiamo a combinazioni lineari di queste funzioni, la funzione così ottenuta sarà periodica con periodo uguale al minimo comune multiplo di  $2\pi/n$  e  $2\pi/m$ . Generalizzando, possiamo dire che una somma del tipo

$$c_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

dove  $c_0, a_n, b_n$  sono costanti, è certamente periodica di periodo  $2\pi$ .

Passando al limite per  $N$  che va all'infinito, otterremo una serie, detta *trigonometrica*, la quale, se converge, rappresenta una funzione  $f(\theta)$ , periodica di periodo  $2\pi$ . Questo è il problema della "sintesi" di Fourier: sotto quali condizioni per i coefficienti  $c_0, a_n$  e  $b_n$  è possibile "sintetizzare" una funzione periodica?

Già Daniel Bernoulli e Eulero lavoravano con serie del tipo (16.1), ma, fino a Fourier, la convinzione diffusa era che, in generale, il problema inverso non avesse soluzione. Questo è il problema dell'"analisi" di Fourier: *data una funzione  $f(\theta)$  reale, periodica con periodo  $2\pi$ , è possibile determinare le costanti  $c_0, a_n, b_n$  in modo da formare una serie del tipo (16.1)?*

Come avremo modo di apprezzare nel seguito, i problemi di "sintesi" e "analisi" non sono facili e richiedono rigore matematico. Ma prima di volgerci a questo studio, osserviamo che qualora si ammetta che effettivamente la serie converge alla funzione  $f(\theta)$  e che sia lecita l'integrazione termine a termine, il calcolo dei coefficienti  $c_0, a_n, b_n$  è facile e immediato.

Questo calcolo è stato svolto nel problema 2.4. Rivediamone la soluzione: in primo luogo si stabiliscono le identità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \tag{16.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn} \tag{16.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn} \tag{16.4}$$

dove  $\delta_{mn}$  è la delta di Kronecker (= 1 per  $m = n$  e 0 altrimenti). Quindi si integrano ambo i membri della (16.1) tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta = 2\pi c_0$$

Si moltiplicano poi ambo i membri della (16.1) per  $\cos m\theta$  e si integra ancora tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \pi a_m .$$

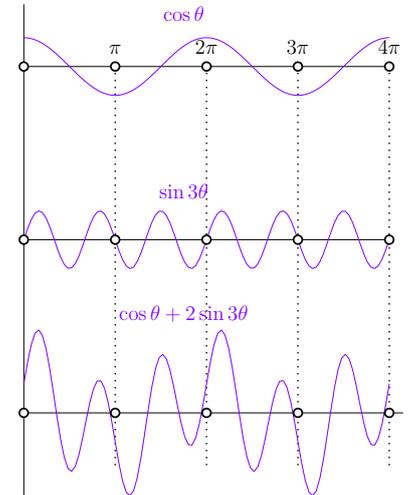


Figura 16.1: Il periodo di una combinazione lineare di funzioni periodiche è il minimo comune multiplo dei loro periodi.



Daniel Bernoulli (1700-1782) fu un matematico e fisico svizzero e uno dei matematici prominenti della famiglia dei Bernoulli. Noto per i suoi contributi alla meccanica e all'idrodinamica, contribuì anche allo sviluppo della teoria della probabilità (scoperta dallo zio Jacob Bernoulli) e in particolare alle prime applicazioni all'economia (teoria del rischio). Nello studio dei sistemi vibranti (corde e membrane) già utilizzava sviluppi in serie del tipo (16.1).

Questo perché l'integrale  $\int_{-\pi}^{\pi} c_0 \cos m\theta d\theta$  è nullo e sono pure nulli gli integrali  $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n\theta \cos m\theta d\theta$  ( $n \neq m$ ) e  $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n\theta \cos m\theta d\theta$ . Si moltiplichino infine ambo i membri della (16.1) per  $\sin m\theta$  e si integri tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Procedendo in modo analogo a prima, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta = \pi b_m.$$

In conclusione, si ottiene

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad (16.5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1 \quad (16.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1. \quad (16.7)$$

Le costanti  $c_0, a_n, b_n$  sono dette *coefficienti* o *coordinate* reali di Fourier della funzione  $f(\theta)$ . Le coordinate di Fourier complesse sono definite come

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad (16.8)$$

e sono legate a quelle reali dalle relazioni

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad a_n = c_n + \bar{c}_n, \quad b_n = i(c_n - \bar{c}_n). \quad (16.9)$$

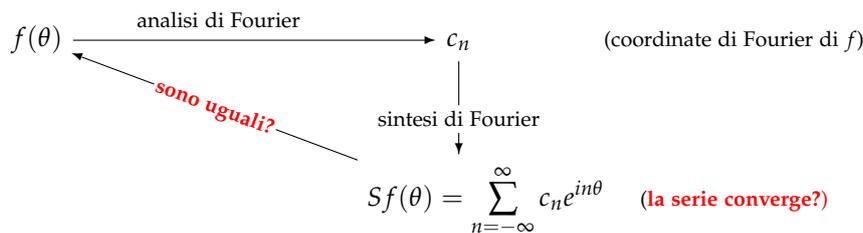
Queste coordinate permettono una forma più compatta dello sviluppo di Fourier. Infatti, se poniamo  $c_{-n} = \bar{c}_n$ , la (16.1) diventa

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad (16.10)$$

come si può facilmente verificare. Nel seguito, salvo avviso contrario, quando parleremo di sviluppo o serie di Fourier ci riferiremo alla serie (16.10), con le coordinate complesse date dalla (16.8), ma, naturalmente, ciò che diremo vale anche per sviluppo in coordinate reali (16.1).

Come abbiamo detto, lo sviluppo di  $f(\theta)$  in serie di Fourier è stato ottenuto *assumendo* che la serie converga alla funzione  $f(\theta)$  e che sia lecita l'integrazione termine a termine della serie. Il problema matematico lasciato aperto è quello di stabilire quando queste assunzioni sono effettivamente giustificate. Questo è il problema fondamentale dell'analisi di Fourier.

Possiamo descrivere questo problema mediante il seguente diagramma:



Nel primo stadio di “analisi” vengono determinate le coordinate  $c_n$ ; la (16.8) mostra che il requisito minimo per questo stadio è l’integrabilità della funzione su  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ . Il secondo stadio consiste nella “sintesi” della funzione  $Sf(\theta)$  a partire dalle coordinate di Fourier di  $f$ . A questo stadio la domanda cruciale è se la serie converge. L’ultimo stadio del processo è la risalita: la funzione  $Sf(\theta)$ , così ottenuta, è uguale alla funzione di partenza  $f(\theta)$ ?

Per rispondere alla prima domanda, si possono usare criteri di convergenza delle serie, alcuni dei quali sono stati incontrati nei primi capitoli, come il *Criterio M* di Weierstrass della sezione 3.2 o il *Criterio di Abel* (2.16). La risposta alla seconda è più difficile, specialmente se si vuole rendere conto dell’intuizione originaria di Fourier che il recupero di una funzione dalle sue coordinate di Fourier valga per un’ampia classe di funzioni.

Concludiamo questa sezione con tre annotazioni.

- (1) È invalso l’uso (specialmente nella letteratura matematica) di denotare le coordinate complesse  $c_n$  con il simbolo  $\hat{f}(n)$  e scrivere

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}. \quad (16.11)$$

Questo rende più evidente l’analogia con gli integrali di Fourier. Talvolta (a partire dall’equazione sotto) seguiremo anche noi questa consuetudine.

- (2) La somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier è denotata

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}. \quad (16.12)$$

- (3) Un’espressione del tipo

$$\mathcal{P}_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N d_n e^{in\theta}. \quad (16.13)$$

con  $d_{-n} = \overline{d_n}$  è detta *polinomio trigonometrico* (reale). Mediante un cambiamento di variabili analogo a (16.9),  $\mathcal{P}_N$  può essere riscritto

come

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta]$$

con  $p_n$  e  $q_n$  reali. La somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier di una funzione  $f$  è dunque un polinomio trigonometrico di un certo tipo.

## 16.2 Esempi di serie di Fourier di funzioni periodiche

Nelle applicazioni, le serie di Fourier sono tipicamente usate per analizzare funzioni (segnali) periodici. Mentre nello studio teorico è preferibile lavorare con funzioni sul cerchio unitario  $\mathbb{T}$ , nelle applicazioni l'oggetto di interesse sono funzioni sulla retta reale, periodiche e di periodo  $2\pi$  (con un cambiamento di scala, un periodo  $L$  può essere reso uguale a  $2\pi$ ).

Naturalmente, i due punti di vista sono equivalenti: la funzione su  $\mathbb{T}$  è, per così dire, "srotolata" sulla retta reale  $\mathbb{R}$ , e gli sviluppi in serie (16.1) o (16.10) sono estesi a sinistra di  $-\pi$  e a destra di  $\pi$ . L'accorgimento è di tradurre correttamente le proprietà delle funzioni su  $\mathbb{T}$  in proprietà delle funzioni periodiche associate su  $\mathbb{R}$ .

Nel cerchio unitario  $\mathbb{T}$ ,  $-\pi$  e  $\pi$  rappresentano lo stesso punto, quindi la continuità della funzione in  $\pi$  sul cerchio corrisponde alla condizione  $f(-\pi) = f(\pi)$  per la funzione periodica associata su  $\mathbb{R}$ . Analogo discorso vale per le derivate: la continuità della derivata  $p$ -esima in  $\pi$  sul cerchio corrisponde all'uguaglianza delle derivate  $p$ -esime calcolate in  $-\pi$  e  $\pi$ . Vediamo adesso qualche esempio.

ESEMPIO 16.1 (Onda quadra).

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

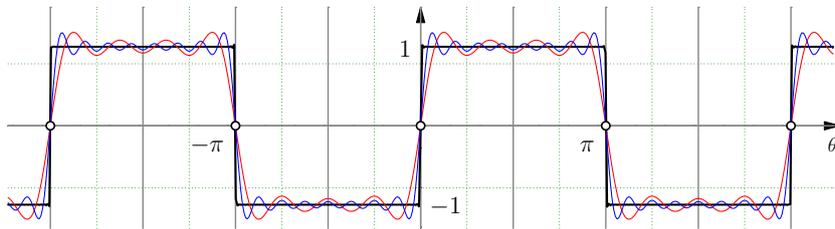
Calcoliamone le coordinate di Fourier:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -k \int_{-\pi}^0 d\theta + k \int_0^{\pi} d\theta \right] = 0, \\ a_n &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = 0 \\ b_n &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos n\theta}{n} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 4/n\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier associata all'onda quadra è

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\theta]}{2n+1}$$

Osserviamo che per  $\theta = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , la serie  $Sf$  è identicamente nulla. In qualunque intervallo chiuso che non contenga questi punti,  $S_N f$  converge uniformemente a  $f$ , ma se li contiene la convergenza non è uniforme. Questo aspetto verrà approfondito nella sezione 16.4.



Nella figura sopra (e nelle figure negli esempi che seguono) sono rappresentate le somme parziali  $S_N f$  per  $N = 4$  (in rosso) e per  $N = 8$  (in blu).

ESEMPIO 16.2 (Onda triangolare).

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} -\theta & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a quanto visto per l'onda quadra, si trova

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} -\theta & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases},$$

dove

$$c_0 = \pi/2 \quad a_n = \begin{cases} -4/n^2\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}, \quad b_n = 0$$

(il calcolo esplicito degli integrali è lasciato come esercizio). Dunque,

$$Sf(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

Osserviamo che i moduli dei termini della serie a secondo membro sono maggiorati dalle costanti  $M_n = 1/(2n+1)^2$ ,

$$\left| \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} \right| < \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e che la serie  $\sum M_n$  è convergente. Allora per il *Criterio M* di Weierstrass della sezione 3.2, la serie è uniformemente convergente e quindi  $Sf(\theta)$  è proprio la funzione  $f(\theta)$ . Osserviamo infine che la serie

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

**Onda quadra**

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 4/n\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

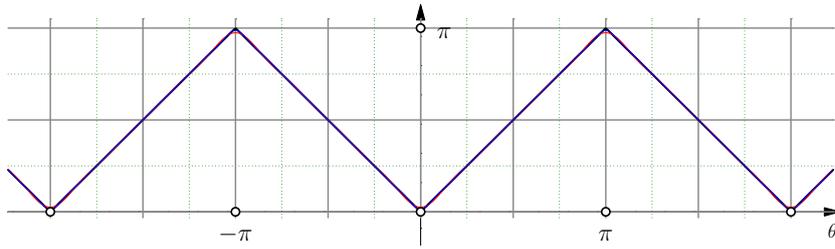
$$c_n = -ib_n/2$$

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$$

$$= f(\theta) \quad \text{per } \theta \neq k\pi$$

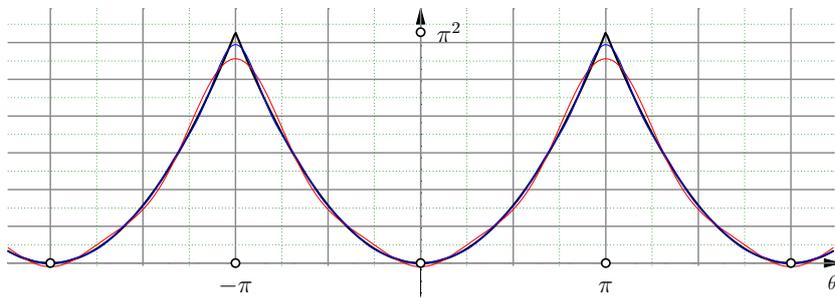
$$= 0 \quad \text{per } \theta = k\pi$$

per l'onda triangolare è ottenuta integrando termine a termine la serie associata all'onda quadra.

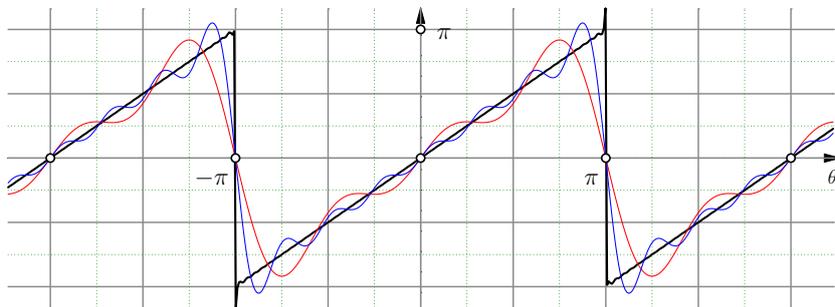


Degli esempi seguenti ci limitiamo a fornire le tabelle riassuntive. Lo studio dettagliato di questi esempi è lasciato come esercizio.

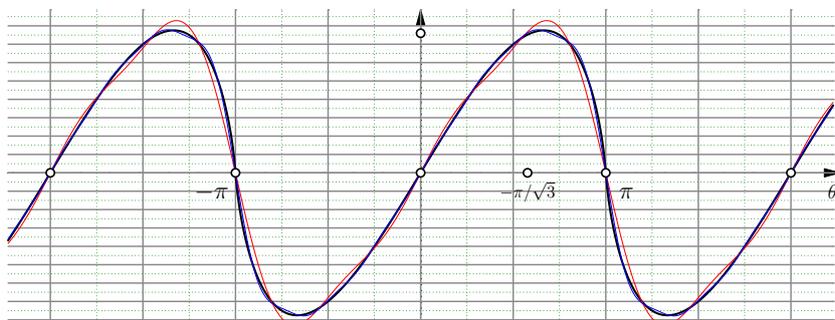
ESEMPIO 16.3.



ESEMPIO 16.4.



ESEMPIO 16.5.



**Onda triangolare**

$$f(\theta) = |\theta| = \begin{cases} -\theta & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$c_0 = \pi/2$$

$$a_n = \begin{cases} -4/n^2\pi & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} = f(\theta)$$

**Onda parabolica**

$$f(\theta) = \theta^2 \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$c_0 = \pi^2/3$$

$$a_n = 4(-1)^n \frac{\cos n\theta}{n}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n^2} = f(\theta)$$

**Onda a dente di sega**

$$f(\theta) = \theta \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = -2(-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}$$

$$Sf(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}$$

$$= f(\theta) \quad \text{per } \theta \neq k\pi$$

$$= 0 \quad \text{per } \theta = k\pi$$

**Onda "abbastanza liscia"**

$$f(\theta) = \theta(\pi - \theta)(\pi + \theta) \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

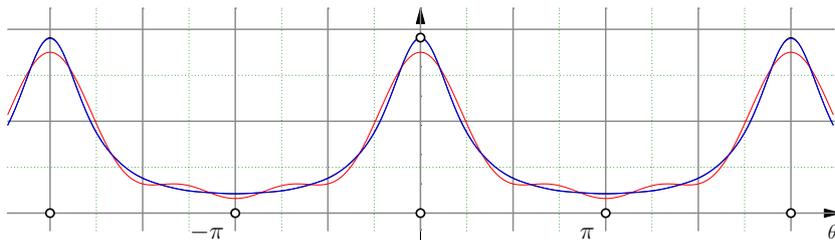
$$c_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = 12(-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n^3}$$

$$Sf(\theta) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n^3} = f(\theta)$$

## ESEMPIO 16.6.



## Onda "molto liscia"

$$f(\theta) = 3/(5 - 4 \cos \theta) \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$c_0 = 1$$

$$a_n = 2^{-n}$$

$$b_n = 0$$

$$Sf(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos n\theta = f(\theta)$$

Si osservi che le somme parziali  $S_N f$  hanno differenti velocità di convergenza: come si può verificare con le simulazioni numeriche, la convergenza per l'onda quadra e l'onda a dente di sega è molto più lenta che negli altri esempi. In particolare, per queste funzioni, ci sono fluttuazioni significative nell'intorno dei punti di discontinuità. In questi punti,  $S_N f$  converge al valore medio dei limiti destro e sinistro e la convergenza in intervalli chiusi che contengono questi punti non è uniforme. Questo fatto, messo in evidenza da Gibbs, verrà discusso nella sezione 16.4.

## 16.3 Il teorema di Dirichlet

Il risultato matematico rigoroso più antico sulle serie di Fourier è del 1829 ed è dovuto a Dirichlet.

**TEOREMA DI DIRICHLET.** *Si supponga che, eccetto eventualmente un numero finito di punti,  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  sia continua e la sua derivata sia continua e limitata. Allora, per tutti i  $\theta \in \mathbb{T}$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta^+) + f(\theta^-)] \quad (16.14)$$

dove  $f(\theta^+)$  e  $f(\theta^-)$  sono rispettivamente i limiti destro e sinistro di  $f(t)$  quando  $t$  tende a  $\theta$ .

Questo risultato può essere affinato nel seguente modo: Se  $f$  è continua in  $(a, b) \subset \mathbb{T}$ , la successione delle somme parziali  $S_N f(\theta)$ , per  $N \rightarrow \infty$ , converge uniformemente a  $f(\theta)$  in ogni sotto-intervallo chiuso di  $(a, b)$ . Alla luce di questo teorema si rivedano gli esempi della sezione 16.2. Si osservi la convergenza al valor medio dei limiti destro e sinistro negli esempi 1 (onda quadra) e 4 (onda a dente di sega). Nella prossima sezione è dimostrerà, per il caso particolare dell'onda a dente di sega, l'assenza di convergenza uniforme in un intervallo che contiene un punto di discontinuità.

16.4 Il fenomeno di Gibbs

Il fisico americano Albert Michelson inventò molti strumenti di straordinaria precisione, soprattutto nel campo dell'ottica. Nel 1898, costruì un analizzatore armonico che permetteva di determinare le prime 80 coordinate di Fourier di una funzione  $f(\theta)$  data graficamente. La macchina poteva anche essere usata come sintetizzatore armonico. Perciò Michelson procedette ad una verifica di precisione delle operazioni della macchina, perché, avendo ottenuto le prime 80 coordinate, la macchina doveva sintetizzarle e ridare la funzione originale con un elevato grado di precisione.

Michelson trovò che così era per la maggior parte delle funzioni analizzate, ma quando provò con un'onda quadra scoprì uno strano fenomeno. La sintesi riproduceva l'onda quadra (a parte piccole oscillazioni, ma al punto di discontinuità appariva una protuberanza che non era presente nella funzione originaria. Michelson era perplesso e pensava che forse qualche difetto meccanico interno della macchina poteva causare il problema. Scrisse allora a Gibbs, l'eminentissimo fisico matematico, tra i padri della moderna meccanica statistica, chiedendogli la sua opinione. Gibbs investigò il fenomeno e lo spiegò (in una lettera a *Nature* nel 1899), sulla base della convergenza non uniforme delle serie di Fourier nella vicinanza di un punto di discontinuità.

In figura 16.2 è riprodotto quanto probabilmente osservò Michelson con il suo strumento. Lo stesso fenomeno per l'onda a dente di sega è illustrato in figura 16.3. Per analizzare quello che succede consideriamo l'onda a dente di sega (lasciando come esercizio l'analogo studio per l'onda quadra), la cui somma parziale  $N$ -esima della sua serie di Fourier è

$$S_N f(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

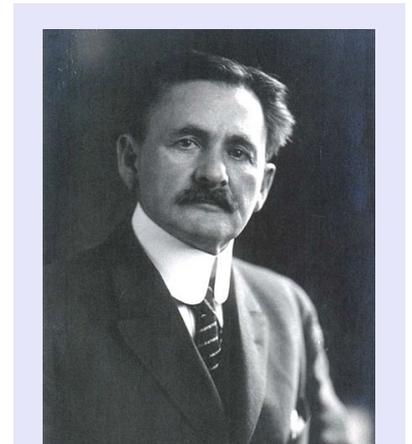
Vogliamo stimare, al variare di  $N$ , l'errore massimo

$$E_{\max} = \sup |S_N f(\theta) - f(\theta)| \tag{16.15}$$

per  $\theta$  in un intorno destro di 0 che non include lo 0 (e lontano da  $\pi$ ).

A tal fine, determiniamo i massimi di  $S_N f(\theta)$  calcolandone la derivata prima e ponendola uguale a 0. Poniamo inoltre  $z = e^{i\theta}$ . Si ha

$$\begin{aligned} S_N(f)'(\theta) &= -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos n\theta = -2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N (-z)^n \right] \\ &= -2 \operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] \end{aligned}$$



Albert Michelson (1852–1931) è stato un fisico americano noto per il suo lavoro sulla misura della velocità della luce e specialmente per l'esperimento di Michelson-Morley.

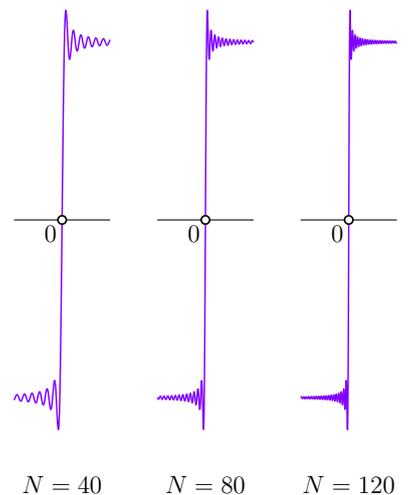


Figura 16.2: Fenomeno di Gibbs per l'onda quadra.

(ricordando la solita formula per la progressione geometrica). Perciò dobbiamo risolvere l'equazione

$$\operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] = 0$$

Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ 1 - (-1)^N e^{iN\theta} \right] \left[ 1 + e^{iN\theta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \left\{ \cos \theta + 1 - (-1)^N \cos(N + 1)\theta - (-1)^N \cos N\theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{1 + \cos \theta} \left\{ \cos(N + 1)\theta + \cos(N + 1)\theta \cos \theta + \sin(N + 1)\theta \sin \theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \cos(N + 1)\theta + (-1)^N \frac{\sin(N + 1)\theta \sin \theta}{1 + \cos \theta} = 0 \end{aligned}$$

L'espressione si annulla quando  $\theta^* = (M/N + 1)\pi$  e  $M$  ha la stessa parità di  $N$ . Evidentemente il massimo assoluto di  $S_N f(\theta)$  in  $[-\pi, \pi)$  si ha per

$$\theta_{\max}^* = \frac{N}{N + 1} \pi$$

Calcoliamo l'andamento di  $S_N f(\theta_{\max}^*)$  per  $N \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta_{\max}^*) &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{n\frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

Per valutare il limite, facciamo tesoro della seguente osservazione. Ogni qual volta si incontra un limite del tipo

$$I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{an}{N}\right) \frac{a}{N}$$

si ha di fronte l'approssimazione di Riemann di un integrale. Infatti, l'integrale di Riemann è il limite della somma dei  $\Delta\theta_n$  moltiplicati per il valore della funzione in un punto qualunque tra  $\theta_n$  e  $\theta_n + \Delta\theta_n$  e ovviamente il limite non dipende dalla partizione. Per  $I_N$  si ha una partizione dell'intervallo  $[0, a]$  in intervallini  $\Delta\theta_n$  di ampiezza uguale e pari a  $a/N$ ;  $f(na/N)$  è il valore della funzione calcolata

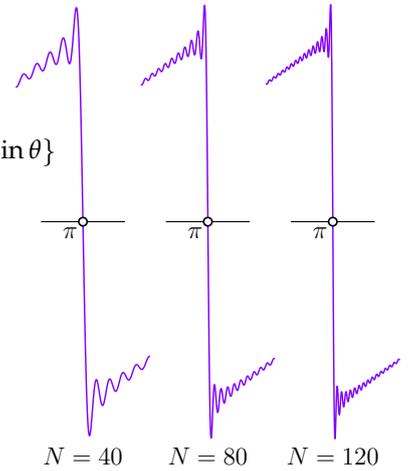
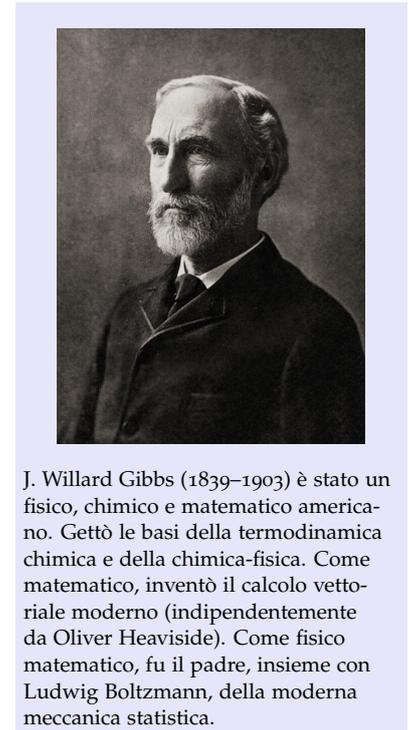


Figura 16.3: Fenomeno di Gibbs per l'onda a dente di sega.



J. Willard Gibbs (1839-1903) è stato un fisico, chimico e matematico americano. Gettò le basi della termodinamica chimica e della chimica-fisica. Come matematico, inventò il calcolo vettoriale moderno (indipendentemente da Oliver Heaviside). Come fisico matematico, fu il padre, insieme con Ludwig Boltzmann, della moderna meccanica statistica.

nell'estremo destro dei  $\Delta\theta_n$ . Dunque,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{an}{N}\right) \frac{a}{N} = \int_0^a f(\theta) d\theta.$$

Quindi

$$2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \frac{\pi}{N}}{n \frac{\pi}{N}} = 2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$$

La conclusione è dunque che *l'errore massimo non va a zero, ma si assesta su un valore costante per  $N$  grande!* Questo era l'effetto che Michelson osservò con la sua macchina armonica.

Possiamo determinarne il valore numerico. Il calcolo numerico dell'integrale  $2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta}$  lo si può fare per sviluppo in serie di Taylor di  $\sin \theta / \theta$  e poi passando all'integrazione termine a termine. Diciamo che ci basta un valore numerico con 3 cifre significative dopo la virgola. Si dovrebbe ottenere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta_{\max}^*) = 3.704$$

Si ha quindi uno sfioramento (rispetto al valore  $y = \pi$  della funzione in  $\theta = \pi$ ) di 0.562 che è circa il 9% di  $2\pi$ , cioè il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità  $\theta = \pi$  (dove la funzione salta da  $\pi$  a  $-\pi$ ). Questo fatto, detto *fenomeno di Gibbs*, è abbastanza universale: se ripetete il calcolo per l'onda quadra, trovate di nuovo uno sfioramento di circa il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità.

Questo assestamento dell'errore su un valore costante non è però incompatibile con la "regola della media": nel punto di discontinuità si ha esatta compensazione tra l'errore a destra e quello a sinistra della discontinuità e la funzione converge alla media tra i limiti destro e sinistro. Come correttamente comprese Gibbs, questo fenomeno è una manifestazione dell'assenza di uniformità del limite in prossimità della discontinuità — l'errore massimo non va a zero.

Il fenomeno di Gibbs è stato anche sfruttato per scopi pratici; ad esempio, nel microscopio a contrasto di fase, permette di evidenziare il contrasto tra il contorno di un oggetto e lo sfondo.

### 16.5 Risultati classici sulle serie di Fourier

DERIVAZIONE. Sia  $f(\theta)$  derivabile con derivata prima continua in  $\mathbb{T}$ . Si osservi che questo implica che la funzione ha lo stesso valore in  $-\pi$  e  $\pi$  e che la stesso vale per la derivata prima. Poiché  $f(\theta)$  è derivabile, si integri per parti

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{in} e^{-in\theta} f(\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{in} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) d\theta = \frac{1}{in} \widehat{f}'(n)\end{aligned}$$

Dunque,

$$\widehat{f}'(n) = in \widehat{f}(n) \quad (16.16)$$

Si osservi che né l'esempio 2 (onda triangolare) né l'esempio 3 (onda parabolica) hanno derivata prima continua: in entrambi i casi la derivata è discontinua in  $\pi$ , in quanto  $f'(\theta) \neq f'(\theta)$ . Ad esempio, per l'onda parabolica,  $f'(\theta) = 2\theta$ , e questa funzione assume valori diversi in  $\pi$  e  $-\pi$ :  $f'(\pi) = 2\pi$  e  $f'(-\pi) = -2\pi$ . Sono invece continue con derivata prima continua l'onda "abbastanza liscia" (esempio 5) e l'onda "molto liscia" (esempio 6). Per la prima, si ha

$$f'(\theta) = \pi^2 - 3\theta^2 \implies f'(-\pi) = f'(\pi)$$

e la verifica della continuità della derivata per la seconda è lasciata come esercizio.

Ricordiamo a questo punto una notazione che è standard in matematica:  $C^p(\mathbb{T})$  è l'insieme delle funzioni continuamente derivabili  $p$  volte. In particolare,  $C^0(\mathbb{T})$  è lo spazio  $C(\mathbb{T})$  delle funzioni continue;  $C^1(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue con derivata prima continua;  $C^2(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue derivabili due volte, con derivate prima e seconda continua, e così via. Naturalmente, si ha  $C^p \subset \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C$ .

Capito il gioco che porta alla (16.16), lo si può replicare: se  $f(\theta)$  è derivabile due volte, con derivata prima e seconda continua, allora  $\widehat{f}''(n) = -n^2 \widehat{f}(n)$  e, più in generale, se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora

$$\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \widehat{f}(n). \quad (16.17)$$

"LISCEZZA" DI  $f(\theta) \implies$  ANDAMENTO ALL'INFINITO DI  $\widehat{f}(n)$ . Un tema classico dell'analisi di Fourier è la relazione tra le proprietà di regolarità della funzione  $f(\theta)$  e l'andamento all'infinito delle sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$ . Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$  allora per la (16.17)

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{|n|^p} |\widehat{f^{(p)}}(n)| = \frac{1}{|n|^p} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|^p} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(\theta)| d\theta \right)\end{aligned}$$

Poiché  $f^{(p)}(\theta)$  è per ipotesi continua nell'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ , sarà limitata da una costante finita e positiva  $C$ ,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}. \quad (16.18)$$

Risulta così dimostrato che:

Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono almeno come  $1/|n|^p$  per  $|n| \rightarrow \infty$ .

(16.19)

A questo riguardo, tre commenti.

Uno. L'inversa della (16.19) in generale non vale: la funzione ottenuta sintetizzando coordinate che decadono come  $1/n^p$  non solo non è necessariamente una funzione derivabile  $p$  volte, ma non è detto neanche che sia una funzione continua. Come esempio, si consideri la funzione  $f(\theta)$  che vale 1 se  $\theta \in [0, 1]$  e 0 altrimenti. La funzione è chiaramente discontinua e le sue coordinate sono

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-in\theta} d\theta = \frac{1 - e^{-in}}{2\pi in}$$

Ne segue che  $|\widehat{f}(n)| \leq 1/(\pi n)$ , e dunque le coordinate di  $f$  decadono come  $1/n$ , ma la funzione non né derivabile né continua. Inoltre, l'onda parabolica (esempio 3) ha coordinate che decadono come  $1/n^2$ , ma la funzione, pur essendo continua, non ha derivata prima continua.

Due. Dalla (16.19) segue immediatamente la dimostrazione del seguente teorema: Se  $f \in C^2(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ . Infatti, se  $f(\theta)$  è derivabile due volte, allora  $|\widehat{f}(n)| \leq C/n^2$ , quindi  $\sum \widehat{f}(n)e^{in\theta}$  è assolutamente convergente e dunque anche uniformemente convergente.

Tre. Dalla (16.19) segue che se  $f$  è analitica, cioè infinitamente derivabile, allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono esponenzialmente in  $n$  per  $|n| \rightarrow \infty$ . Infatti, in questo caso, la (16.19) stabilisce che le coordinate  $\widehat{f}(n)$  vanno a zero più rapidamente di qualunque potenza inversa di  $n$ . Questo è il caso dell'onda "molto liscia" (esempio 6): la funzione  $f(\theta) = 3/(5 - 4 \cos \theta)$  è infinitamente derivabile con tutte le derivate continue nel passaggio da  $\pi$  a  $-\pi$  e, in effetti, le sue coordinate di Fourier decadono come  $2^{-n} = e^{-(\ln 2)n}$ , cioè più rapidamente di qualunque potenza di  $1/n$ .

**VELOCITÀ DI CONVERGENZA DELLE SOMME PARZIALI.** Più liscia è  $f$  più veloce è la convergenza delle somme parziali di Fourier. Più precisamente, si ha il seguente teorema: Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , per  $p \geq 2$ , allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $\theta$ , tale che

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{N^{p-1}}$$

**N.B.** Si osservi che non si può dimostrare in modo analogo che se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ , in quanto l'informazione che le coordinate di  $f$  decadono almeno come  $1/n$  non è sufficiente a stabilire la convergenza della serie. Per la dimostrazione di questo fatto, occorre usare metodi differenti, vedere sotto.

e se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $\theta$ , tale che

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

Questi risultati (che non dimostreremo) forniscono automaticamente la convergenza uniforme delle somme parziali di Fourier per funzioni  $C^p$ ,  $p \geq 1$  e quindi, in particolare, la dimostrazione del teorema: Se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ .

ANDAMENTO ALL'INFINITO DI  $\hat{f}(n) \Rightarrow$  "LISCEZZA" DI  $f(\theta)$ . Il seguente teorema stabilisce una condizione sufficiente abbastanza utile allo scopo:

Se le coordinate di Fourier  $\hat{f}(n)$  di una funzione  $f$  soddisfano

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha} \quad \text{per tutti gli } |n| \gg 1$$

per qualche potenza  $\alpha > p + 1$  e qualche costante positiva  $C$  allora la serie di Fourier (16.20)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione di classe  $C^p$ .

È importante che  $\alpha$  sia strettamente maggiore di  $p + 1$  e non maggiore o uguale. Consideriamo infatti l'onda "abbastanza liscia"  $f(\theta)$  dell'esempio 5 i cui coefficienti  $\hat{f}(n)$  decadono come  $n^{-3}$ . Dunque,  $\alpha = 3$  e quindi deve essere  $p < 3 - 1 = 2$ . Se ne conclude che la funzione è almeno di classe  $C^1$ , come in effetti è. Si osservi che essendo  $f''(\theta) = -6\theta$ , l'onda abbastanza liscia non è di classe  $C^2$ .

Osserviamo infine che l'applicazione del teorema (16.20) alle serie di Fourier dell'onda triangolare e dell'onda parabolica, per le quali  $|\hat{f}(n)| < C/n^2$ , permette di concludere che le funzioni sintetizzate da questi coefficienti sono  $C^0$ , cioè continue (come in effetti sono).

LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE. Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , cioè se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty. \quad (16.21)$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Questo fatto è noto come Lemma di Riemann-Lebesgue ed è l'analogo per le serie di quanto già visto per gli integrali di Fourier.

Gli strumenti principali per stabilire il teorema (16.20) sono il Criterio  $M$  di Weierstrass della sezione 3.2 e il seguente teorema di analisi: Se  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$  è una serie uniformemente convergente, allora anche  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$  è uniformemente convergente e, inoltre,  $f'(x) = g(x)$ .

INTEGRAZIONE. La parola d'ordine è che la derivazione peggiora la convergenza della serie di Fourier (in quando le sue coordinate sono moltiplicate per  $in$ ), ma l'integrazione la migliora. Se la serie è uniformemente convergente, cossiché l'integrale può essere scambiato con il limite delle somme parziali, è chiaro che la serie può essere integrata termine a termine. Come effetto dell'integrazione le coordinate di Fourier  $\hat{f}(n)$  risultano moltiplicate per  $1/(in)$ . Ma anche se la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$  associata a  $f$  non converge uniformemente, la serie di Fourier ottenuta per integrazione termine a termine converge, purché  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

Consideriamo l'esempio della serie di Fourier dell'onda quadra, che è una funzione discontinua,

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}.$$

L'integrazione termine a termine di questa serie fornisce

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} + C$$

che converge ad una funzione continua, in accordo con il teorema (16.20). Se si sceglie la costante arbitraria  $C = \pi/2$ , si ottiene l'onda triangolare dell'esempio 2. Analogamente, per integrazione termine a termine dell'onda a dente di sega (discontinua), si passa all'onda parabolica (continua).

### 16.6 Dal problema di Dirichlet nel piano all'analisi di Fourier

Con Fejér si entra a pieno titolo nella matematica del 900. I suoi contributi all'analisi di Fourier sono dei primi anni del 900 e, secondo alcuni, diedero un'impronta significativa agli sviluppi dell'analisi di Fourier nei cinquant'anni successivi. La domanda che Fejér si pone è la seguente:

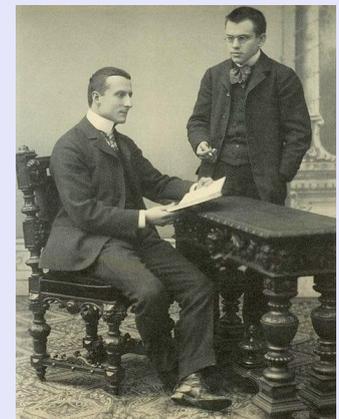
È possibile recuperare i valori di una funzione (integrabile) su  $\mathbb{T}$  dalla conoscenza delle sue coordinate di Fourier?

 (16.22)

Se per recuperare si intende la sintesi di Fourier tradizionale,

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

la risposta è in generale NO. Tuttavia, Fejér scoprì che possiamo sempre recuperare una funzione continua dalle sue coordinate di Fourier, se le sintetizziamo in una maniera diversa da quella tradizionale, cioè se utilizziamo un modo diverso di sommare le serie infinite.



Lipót Fejér (1880-1959) è stato un matematico ungherese noto per i suoi lavori in analisi reale e complessa. Tra i suoi studenti di dottorato ci furono John von Neumann, Paul Erdős, George Pólya e Cornelius Lanczos. Nella foto è a destra in piedi (a sinistra c'è il matematico greco Constantin Carathéodory, noto ai fisici per una formulazione geometrica della termodinamica, si veda il libro "Calore e termodinamica" di Zemansky).

Per comprendere l'idea di Fejér, si ripesci la soluzione del problema di Dirichlet per il disco unitario in termini del nucleo di Poisson (per il quale, "ripescare" sembra proprio il termine appropriato) e si sostituisca lo sviluppo (15.15) del nucleo di Poisson nell'espressione per  $u_r(t)$  nel teorema (15.16). Si ottiene:

$$\begin{aligned} u_r(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta) f(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(\theta) d\theta \right] e^{int} \end{aligned}$$

L'espressione in parentesi quadrate è proprio l' $n$ -esima coordinata di Fourier di  $f(\theta)$ ! Accade così che la soluzione del problema di Dirichlet del piano getti luce su un problema matematico completamente diverso. Questo è un esempio di come anche in matematica (e non solo in fisica) siano in qualche modo all'opera leggi di "grande unificazione".

Dunque, se  $f(\theta)$  è continua su  $\mathbb{T}$ , per il teorema di convergenza uniforme (15.16) si può concludere che

$$\limsup_{r \uparrow 1} \left| f(\theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta} \right| = 0, \quad (16.23)$$

ovvero

$$f(\theta) = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta}, \quad (16.24)$$

che è proprio un recupero della funzione  $f$  a partire dalle sue coordinate di Fourier—una "sintesi" di Fourier opportunamente regolarizzata.

La differenza tra questa "sintesi" delle coordinate di Fourier e quella classica è tutta nel fattore di regolarizzazione  $r^{|n|}$  che compare nella serie (16.24). Questa regolarizzazione è chiamata *somma secondo Abel* della serie di Fourier (si vedano i complementi 2.10.2). Se  $f$  è continua, per il teorema di convergenza uniforme (15.16), si può dunque rispondere affermativamente alla domanda (16.22), a patto che la serie di Fourier sia sommata secondo Abel. Se  $f$  è solo integrabile, la procedura permette un recupero dei suoi valori dove essa è continua. (Per stabilire questi risultati, Fejér usò la somma di Cesaro della serie, ma la sostanza del ragionamento non cambia.)

Si osservi che questo approccio alla teoria delle serie di Fourier fornisce una spiegazione semplice e intuitiva della convergenza della serie di Fourier alla media del limite destro e sinistro nei punti di

discontinuità, come stabilito dal teorema di Dirichlet. Dall'equazione (15.17) segue infatti che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta_0} \xrightarrow{r \uparrow 1} \frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)]$$

se  $\theta_0$  è un punto di discontinuità della funzione.

Consideriamo adesso il limite (16.23) e denotiamo con

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (16.25)$$

le somme parziali della serie di Fourier sommata secondo Abel e con

$$\mathcal{S}f(\theta) = \lim_{r \uparrow 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta), \quad (16.26)$$

il limite (uniforme in  $\theta$ ) della loro successione. Per quanto abbiamo appena detto, si ha  $\mathcal{S}f(\theta) = f(\theta)$ , dove  $f$  è continua, e  $\mathcal{S}f(\theta_0) = \frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)]$ , nei punti  $\theta_0$  di discontinuità di  $f$ . Il significato del limite (16.26) è che per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $r < 1$  e un intero  $M$  tali che per  $N \geq M$  si ha

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |\mathcal{S}f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon, \quad (16.27)$$

e questo vuol dire che la convergenza è uniforme in  $\theta$  sia nei punti dove  $f(\theta)$  è continua sia dove non lo è. Perciò non si manifesta alcun fenomeno di Gibbs per la serie di Fourier sommata secondo Abel.

Questo fatto rende la serie di Fourier sommata secondo Abel un oggetto forse ancora più interessante della serie classica di Fourier, specialmente nelle applicazioni alla teoria dei segnali (ma anche in matematica pura). L'effetto della regolarizzazione è di pulire il segnale in presenza di variazioni rapide o discontinuità e quindi di filtrare via artefatti di riverbero, come il fenomeno di Gibbs, proprio in virtù della convergenza uniforme in  $\theta$  delle somme parziali  $\mathcal{S}_N^{(r)}$ , come illustrato nella figura 16.2.

### 16.7 Teorema di approssimazione di Weierstrass

Se la funzione  $f$  è continua, la (16.27) diventa

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon, \quad (16.28)$$

il che vuol dire che  $f$ , per scelta opportuna di  $r$  e  $N$ , può essere approssimata con precisione arbitraria da

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

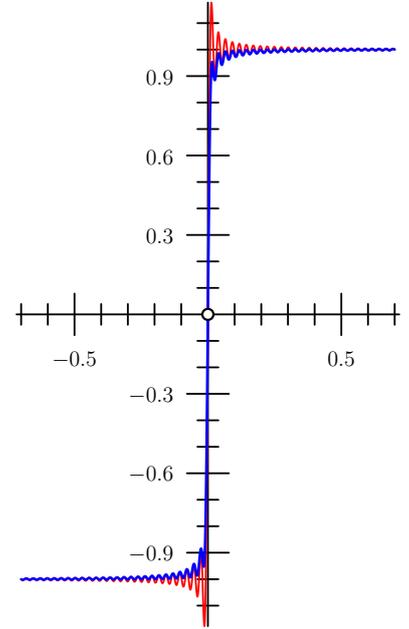


Figura 16.4: Onda quadra in un intorno dello zero. Confronto, per  $N = 120$ , tra la somma parziale classica  $S_N f$  (in rosso) e la somma parziale  $\mathcal{S}_N^{(r)} f$  regolarizzata secondo Abel, per  $r = 0.994$  (in blu). Si noti l'assenza del fenomeno di Gibbs per la somma così regolarizzata.



Karl Weierstrass (1815–1897) fu un matematico tedesco, noto per l'instillazione del rigore in analisi e padre dell'analisi moderna. Fu docente per diverso tempo in scuole secondarie, dove, oltre alla matematica, insegnò fisica, botanica e ginnastica.

che è un particolare tipo di polinomio trigonometrico. Risulta così dimostrato un teorema classico di analisi dovuto a Weierstrass:

**TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.** *Le funzioni continue in un intervallo chiuso sono approximate uniformemente dai polinomi trigonometrici. Equivalentemente, i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio delle funzioni continue rispetto alla norma uniforme.*

### 16.8 Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Consideriamo un polinomio trigonometrico

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta]$$

che fornisce una “buona” approssimazione di una funzione  $f(\theta)$  in  $[-\pi, \pi]$ . Se riportiamo in un grafico gli “errori”, cioè la curva rappresentata da  $f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)$ , tali errori appariranno ora positivi ora negativi. Occorre un criterio per valutare la bontà dell’approssimazione.

Un tale criterio è, ad esempio, l’errore massimo, l’efficacia del quale, come abbiamo visto sopra, è garantita dal teorema di approssimazione di Weierstrass. Un’altro criterio è suggerito dalla regressione lineare dove, per evitare ogni compensazione fra errori positivi e negativi si considera il quadrato del modulo, cioè

$$|f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)|^2.$$

Questo è l’errore quadratico per il singolo “dato”  $\theta$ . L’errore quadratico totale si ottiene sommando tutti gli errori quadratici nell’intervallo  $[-\pi, \pi]$ , vale a dire, si ha un’idea dell’errore compiuto mediante l’approssimazione *sull’intero intervallo* dal valore dell’integrale

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)]^2 d\theta \quad (16.29)$$

Notiamo che mentre l’approssimazione basata sull’errore massimo si basa su un concetto *locale* di errore, l’errore quadratico totale si basa su un concetto *globale*.

Diremo che la funzione  $f(\theta)$  è stata ben approssimata mediante il polinomio trigonometrico  $\mathcal{P}_N$  quando l’errore quadratico totale  $D$  è minimo. Ora tale errore dipende dai valori assegnati ai vari coefficienti  $d_0$ ,  $p_n$  e  $q_n$ , quindi il minimo di  $D$  si troverà uguagliando

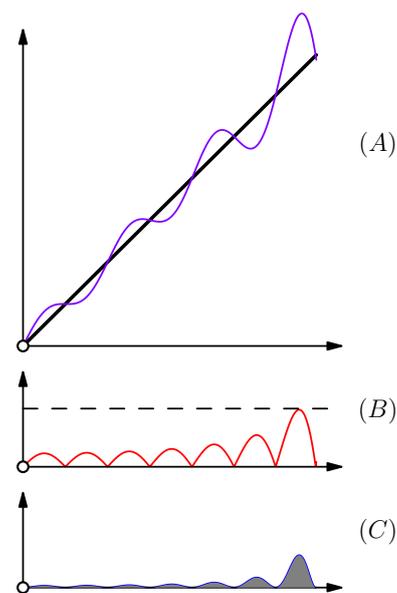


Figura 16.5: (A) Onda a dente di sega  $f(\theta)$  tra 0 e  $\pi$  (in nero) e somma parziale di Fourier  $S_N(\theta)$  per  $N = 8$  (in viola). (B) Grafico dell’errore puntuale  $|f(\theta) - S_N(\theta)|$ ; la linea tratteggiata indica l’errore massimo. (C) Grafico dell’errore quadratico puntuale  $|f(\theta) - S_N(\theta)|^2$ ; l’errore quadratico totale è l’area della regione tra la curva e l’ascissa (in grigio). Anticipando un risultato che verrà dato in seguito, dalle figure risulta chiaro che anche se l’errore massimo si stabilizza ad un valore costante (fenomeno di Gibbs), l’errore quadratico totale può diminuire costantemente all’aumentare di  $N$ .

a zero le derivate parziali di  $D$  rispetto ai coefficienti stessi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial d_0} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] d\theta = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial p_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] \cos m\theta d\theta = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial q_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - \mathcal{P}_N(\theta)] \sin m\theta d\theta = 0\end{aligned}$$

Ricordando le formule (16.2), (16.3) e (16.4), queste equazioni diventano:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta - 2\pi d_0 &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta - \pi p_n &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta - \pi q_n &= 0,\end{aligned}$$

vale a dire, i coefficienti  $d_0$ ,  $p_n$  e  $q_n$  risultano essere proprio le coordinate di Fourier di  $f(\theta)$ .

In conclusione, le somme parziali  $S_N f$  della serie di Fourier di una funzione  $f$  forniscono la migliore approssimazione della funzione nel senso dei minimi quadrati: *sono i polinomi trigonometrici che approssimano la funzione con il minimo errore quadratico totale*. Siamo arrivati così ad un modo completamente diverso di comprendere la *ratio* delle serie di Fourier, un modo completamente indipendente dalla teoria delle funzioni periodiche, dallo studio dei sistemi vibranti e dal problema di Dirichlet nel piano.