

18

Analisi di Fourier di funzioni L^2 in un intervallo limitato

18.1 Lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile

Consideriamo la forma

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (18.1)$$

definita per coppie di funzioni f e g in $C[a, b]$. Questa forma definisce un prodotto scalare su $C[a, b]$ con norma indotta

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (18.2)$$

Infatti, si verifica facilmente, per calcolo diretto, che vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*, $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$, cioè

$$\int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}. \quad (18.3)$$

da cui segue la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

La proprietà della norma $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$ è banalmente verificata. Pure la prima proprietà della norma è verificata, infatti

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

se e solo se $f = 0$ (si osservi quanto è essenziale che la funzione sia continua). Nel seguito, chiameremo la norma (18.2) "norma L^2 " e la convergenza nella norma L^2 semplicemente "convergenza L^2 ".

La convergenza L^2 è usualmente anche chiamata convergenza in media quadratica. Se $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ è una successione di funzioni, si dice che converge in media quadratica a $f(x)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0,$$

che è proprio la convergenza L^2 .

Da un punto di vista pratico, la convergenza L^2 fornisce una nozione molto utile nelle applicazioni. Come mostrato nella figura 18.1, la media quadratica stima la distanza tra due funzioni in termini dell'area del quadrato della loro differenza (la regione in grigio) e quindi media le differenze tra le due funzioni su tutto l'intervallo; fornisce, per così dire, una stima globale di quanto due funzioni siano vicine. In effetti, abbiamo già discusso questo fatto nell'ultima sezione del capitolo 16: si veda la figura 16.5 (C).

Al contrario, la convergenza uniforme, e quindi la norma uniforme, è molto più sensibile alle differenze locali in quanto stima la distanza tra le funzioni in termini del massimo della loro differenza (in figura 18.1, il segmento in rosso). Dovrebbe essere intuitivamente chiaro che si può avere convergenza in media quadratica senza che ci sia convergenza uniforme (ad esempio, può succedere che il massimo della differenza tra le due funzioni continua a fluttuare senza assestarsi su un valore limite, ma la media quadratica della differenza va a zero). Anche in questo caso, si ritorni alla sezione 16.8 e si veda la figura 16.5 (B). Viceversa, se c'è convergenza uniforme, c'è convergenza L^2 : la convergenza uniforme è più forte di quella in media quadratica. Se infatti si ha una successione di funzioni continue f_n che converge a f nella norma uniforme di $C[a, b]$, questo significa che per ogni $\epsilon > 0$, esiste un M tale che per tutti gli $n > M$,

$$\sup |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

ma allora

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx < \epsilon^2(b - a) \quad (18.4)$$

Quindi:

Se f_n è una successione di funzioni continue che converge a f nella norma uniforme di $C[a, b]$, allora converge a f anche nella norma L^2 .

(18.5)

Un fatto di notevole importanza è che lo spazio vettoriale $C[a, b]$, con il prodotto scalare (18.1) e norma L^2 , non è uno spazio completo: è uno spazio *pre-hilbertiano*, ma NON uno spazio di Hilbert. Questo si verifica facilmente con un controesempio.

ESEMPPIO 18.1. In $C[-1, 1]$, sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

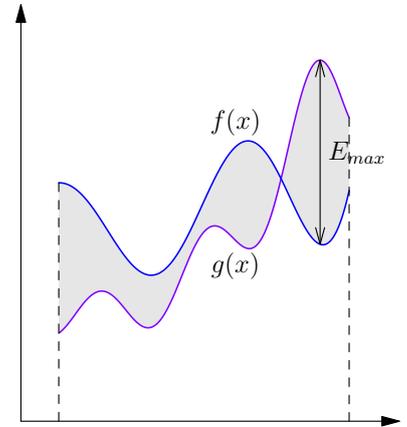


Figura 18.1: Distanze tra due funzioni f e g , $E_{max} = \sup |f(x) - g(x)|$ è la distanza nella norma uniforme. L'area della regione in grigio è la distanza in norma L^1 . La norma L^2 è $\int |f(x) - g(x)|^2 dx$.

e si consideri la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq -1/n \\ nx + 1 & \text{se } -1/n < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1/n}^0 (nx + 1)^2 dx} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt{3n} = 0 \end{aligned}$$

Si ha quindi una successione di funzioni continue che nella norma L^2 converge ad un funzione che non è continua.

Essendo $C[a, b]$ non completo rispetto alla norma L^2 , solo una parte dei risultati ottenuti per gli spazi di Hilbert si estende ad esso. Continuano a valere:

- (1) Il teorema di continuità del prodotto scalare presentato alla fine della sezione 17.2: se due successioni di funzioni continue $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$ convergono in media alle funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \overline{f_n(x)} g_n(x) dx = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

- (2) La nozione di *sistema ortonormale* di funzioni continue $e_n(x)$ per cui vale

(i) Ornonormalità:

$$\int_a^b \overline{e_n(x)} e_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

(ii) Decomposizione ortonormale di una funzione continua f :

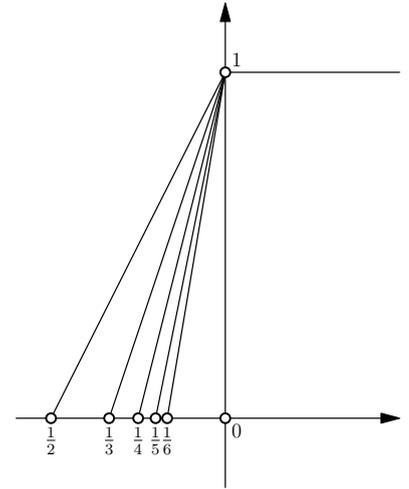
$$\text{Se } f(x) = \sum c_n e_n \quad \text{allora} \quad c_n = \int_a^b \overline{e_n(x)} f(x) dx \quad (18.6)$$

- (3) La nozione di sistema di *sistema ortogonale completo* o *base ortonormale* di funzioni continue $e_n(x)$ per cui si ha:

(iii) Completezza (identità di Parseval):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Si dimostra che sistemi di questo tipo effettivamente esistono (seni e coseni, per esempio, come vedremo in questo capitolo, e le funzioni di Hermite, nel prossimo capitolo).



NON VALE invece il teorema di Riesz-Fisher, perché in questo teorema si presuppone la completezza dello spazio, e lo spazio $C[a, b]$ non è completo rispetto alla norma L^2 . Questo fatto ha ripercussioni importanti. Significa che non esiste un isomorfismo tra gli elementi di $C[a, b]$ e gli elementi di ℓ^2 . Più precisamente, fissata in $C[a, b]$ una base ortonormale $\{e_n(x)\}$, mediante le (18.6), si può associare a ogni funzione continua un elemento di ℓ^2 , ma viceversa, fissato un elemento di ℓ^2 non è detto che esista una funzione continua la cui successione delle coordinate di Fourier (18.6) coincide con l'elemento fissato di ℓ^2 .

Si è detto che per avere spazi isometricamente isomorfi a ℓ^2 occorre considerare spazi di Hilbert, cioè spazi con prodotto scalare completi. Nel nostro caso, ciò si ottiene completando $C[a, b]$ con la norma L^2 . Analogamente a quel che succede quando si passa dai razionali ai reali, si ottiene in questo modo uno spazio più ampio, lo spazio di tutte le successioni di Cauchy di $C[a, b]$ rispetto alla norma L^2 .

Questo spazio è usualmente denotato $L^2[a, b]$ ed è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in $[a, b]$, cioè delle funzioni f su $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (18.7)$$

Per costruzione,

- $L^2(a, b)$ è uno spazio di Hilbert,
- $C[a, b]$ è denso in $L^2[a, b]$.

A questo punto, in L^2 , il problema è risolto. La domanda in rosso nel diagramma sopra riceveva una risposta affermativa: se $f \in L^2$ siamo certi che $f = g$! Naturalmente, l'uguaglianza va intesa nel senso L^2 , cioè a meno dei valori delle funzioni su un insieme numerabile di punti (più correttamente, si dovrebbe dire "insieme di misura di Lebesgue nulla, vedere sezione successiva).

NOTA. Abbiamo usato il simbolo $L^2[a, b]$ per denotare lo spazio delle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$. Ma poiché questo integrale non è modificato dalla sostituzione dell'intervallo chiuso $[a, b]$ con quello aperto (a, b) o con i semiaperti $(a, b]$ e $[a, b)$, $L^2[a, b]$ coincide con $L^2(a, b)$, $L^2(a, b]$ e $L^2[a, b)$. Inoltre, non è richiesto che l'intervallo (a, b) sia limitato da una parte, dall'altra o da entrambe, e così abbiamo $L^2(a, \infty)$, $L^2(-\infty, b)$ e $L^2(-\infty, \infty) = L^2(\mathbb{R})$. In questi casi, così come nel caso in cui la funzione è illimitata, interpretiamo l'integrale di $|f|^2$ come un integrale improprio di Riemann. Talvolta scriveremo semplicemente L^2 quando l'intervallo sottostante non è specificato o quando è irrilevante specificarlo per la discussione.

18.2 Uno sguardo a problemi più avanzati

A proposito di quanto è stato detto nella sezione precedente, si possono sollevare delle domande, le cui risposte richiederebbero approfondimenti d'analisi che vanno al di là dei limiti della presente trattazione.

Un primo problema è questo: passando al completamento di C in L^2 , inevitabilmente si introducono funzioni discontinue. Ad esempio, la $f(x)$ dell'esempio 18.1 è discontinua, ma essendo ottenuta come limite nella norma L^2 di una successione di funzioni continue è in $L^2(-1, 1)$.

Tuttavia, se si permettono funzioni discontinue nello spazio, allora viene meno la proprietà della norma che stabilisce che la norma è zero se e solo se la funzione è zero. Per convincersi di questo, si considerino le seguenti due funzioni: (i) la funzione che vale zero per tutti i punti di $[a, b]$ e (ii) la funzione che vale zero eccetto che per un insieme numerabile di punti in $[a, b]$ dove vale 1. La funzione (ii) ha norma L^2 zero (in quanto l'integrale non vede un insieme numerabile di punti), ma non è (i), la funzione identicamente zero. Esiste una funzione diversa da 0 che ha norma 0.

Un altro problema è il seguente: la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ assicura che il prodotto scalare di f e g è ben definito se le norme $\|f\|_2$ e $\|g\|_2$ esistono, cioè se $|f|^2$ e $|g|^2$ sono integrabili. Tuttavia, l'integrabilità secondo Riemann di $|f|^2$ e $|g|^2$ non garantisce l'integrabilità di $\bar{f}g$.

Questi problemi sollevano temi profondi di analisi di cui non possiamo occuparci approfonditamente in questa sede. Ad esempio, per rispondere alla prima domanda, occorre introdurre la nozione di misura di Lebesgue, il che esula dai limiti di questo corso.

Rozzamente, l'idea è questa: i sottoinsiemi di $[a, b]$ a cui è assegnata una misura sono tutti gli insiemi che si costruiscono facendo unioni e intersezioni numerabili di segmenti (ovviamente, segmenti contenuti in $[a, b]$); la misura di un segmento è la sua lunghezza, e la misura di insiemi più complicati costruiti con segmenti è assegnata tenendo conto della proprietà essenziale della misura: *la misura di una collezione di insiemi disgiunti è la somma delle misure degli insiemi*. Fatto questo, si ha una nozione di *insieme di misura nulla*; per esempio, un insieme numerabile di punti ha misura nulla. In effetti, e più propriamente, $L^2(a, b)$ non va inteso come uno spazio di funzioni, ma come uno spazio di *classi di equivalenza di funzioni*: appartengono alla stessa classe tutte le funzioni che differiscono al più su un insieme di misura nulla. In questo modo, la proprietà di positività della norma viene ristabilita (per le classi di equivalenza di funzioni).

Il secondo problema è solo uno dei segnali che la nozione di inte-

grale di Riemann può dare dei problemi per le funzioni che si ottengono passando al completamento in norma L^2 di $C[a, b]$. In effetti, la nozione adeguata per esprimere tutti gli integrali che possono intervenire nell'analisi (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier) è quella di integrale di Lebesgue, ma questo, come dicevamo, esula dai nostri scopi.

Fortunatamente, per gli integrali che si incontrano nella maggior parte delle applicazioni alla fisica (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier), l'integrale di Riemann è sufficiente.

18.3 Ortogonalità del sistema trigonometrico

Si consideri il prodotto scalare tra funzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (18.8)$$

Lo spazio di Hilbert così ottenuto, di solito, lo si denota $L^2([\pi, \pi], \frac{d\theta}{2\pi})$ o $L^2(\frac{d\theta}{2\pi})$, essendo sottinteso l'intervallo $[-\pi, \pi]$; un'altra notazione comune presso i matematici è $L^2(\mathbb{T})$ e nel seguito useremo questa.

Incominciamo con l'osservare che le funzioni

$$e_n(\theta) = e^{in\theta} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.9)$$

formano un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{T})$. Infatti,

$$\langle e_n | e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{mn}.$$

Questo sistema è detto "trigonometrico".

Dalla teoria generale della sezione 17.5 (o per semplice calcolo diretto) traiamo le seguenti conclusioni

(1) Se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{cioè} \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

allora

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (18.10)$$

Si ritrova così, da un punto di vista diverso, la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier: la funzione da analizzare è un vettore, e l'analisi di Fourier di questa funzione la si reinterpreta geometricamente come la decomposizione del vettore rispetto al sistema ortonormale formato dalle funzioni $e^{in\theta}$.

(2) Vale la disuguaglianza di Bessel (17.15), che in questo caso assume la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

NOTA. Una scelta equivalente per il sistema trigonometrico è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Allora le (16.2), (16.3) e (16.4) diventano le relazioni fondamentali di ortonormalità per i vettori di questo sistema in $L^2([\pi, \pi])$. Questa scelta comporta il seguente ricalibramento delle coordinate di Fourier:

$$c'_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \quad (18.11)$$

$$a'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (18.12)$$

$$b'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (18.13)$$

18.4 Significato geometrico delle somme parziali

È tempo di collegare il trattamento “astratto” delle sezioni 17.8 e 17.9 riguardante le proiezioni ortogonali e l'approssimazione in media quadratica con il calcolo “concreto” della sezione 16.8 basato sul metodo dei minimi quadrati. Non sarà sfuggito che il contenuto delle sezioni 17.9 e sezione 16.8 è, “moralmente”, identico. In questa sezione vogliamo evidenziare il significato geometrico semplice di questo contenuto.

In primo luogo, osserviamo che i polinomi trigonometrici

$$\mathcal{P}_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^N [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta] = \sum_{n=-N}^N d_n e^{in\theta}$$

formano un sottospazio finito-dimensionale, con dimensione $2N + 1$, di $L^2(\mathbb{T})$, lo spazio \mathcal{M}_N dei polinomi trigonometrici di grado N . Data una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$, la sua somma parziale di Fourier

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

è un elemento di questo spazio.

Ridotto al nocciolo, il contenuto delle sezioni 16.8 e 17.9 è

(1) $S_N f$ è la proiezione ortogonale di f su \mathcal{M}_N .

- (2) Come conseguenza di (1), il vettore $S_N f$ è, tra tutti i polinomi trigonometrici di grado N , cioè tra tutti i vettori in \mathcal{M}_N , quello più “vicino” a f , nel senso di “vicinanza” espresso dalla norma L^2 . Questo fatto è rappresentato in figura 18.2.

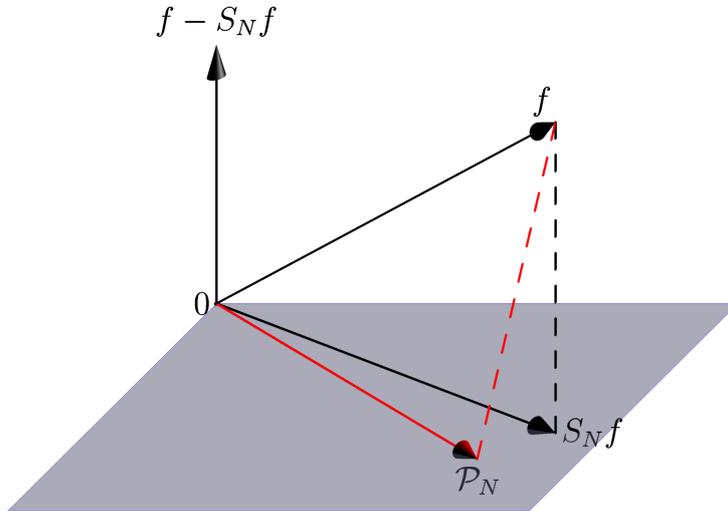


Figura 18.2: Decomposizione ortogonale

$$f = S_N f + (f - S_N f)$$

$S_N f$ è la proiezione ortogonale di f sullo spazio dei polinomi trigonometrici di grado N . È dunque il polinomio trigonometrico più vicino a f , qualunque altro polinomio \mathcal{P}_N si trova ad una distanza maggiore.

18.5 Completezza del sistema trigonometrico

Sulla base della (17.11), che il sistema trigonometrico sia completo significa che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_2 = 0 \tag{18.14}$$

per QUALUNQUE $f \in L^2(\mathbb{T})$, il che significa, con riferimento alla figura 18.2, che la lunghezza del vettore verticale tende a zero per N che tende all'infinito. Questo fatto è facile da dimostrare nel caso in cui f è una funzione continua.

Dalla sezione 16.6, ricordiamo la definizione di somma parziale regolarizzata

$$\mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

e che in quella sezione si era stabilito che la “vicinanza”¹ in norma uniforme di $\mathcal{S}_N^{(r)} f$ a f . Poiché la norma uniforme è più forte della norma L^2 (cfr. il teorema (18.5)), per ogni ϵ , possiamo scegliere N e r tali che

$$\|f - \mathcal{S}_N^{(r)} f\|_2 < \epsilon$$

¹ Più precisamente, si era stabilito che per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $r < 1$ e un intero M tali che per $N \geq M$ si ha

$$\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta) - \mathcal{S}_N^{(r)} f(\theta)| < \epsilon$$

quando f è continua (se fosse discontinua $\mathcal{S}_N^{(r)} f$ sarebbe vicino a $\mathcal{S}f$).

Ma $\mathcal{S}_N^{(r)} f$ è un polinomio trigonometrico diverso da $S_N f$, quindi più lontano da f di quanto lo sia $S_N f$ (si veda la figura 18.2). Allora

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - \mathcal{S}_N^{(r)} f\|_2 < \epsilon$$

Per il metodo del confronto dei limiti, si ottiene la (18.14) per f continua. Ma le funzioni continue sono dense in L^2 (per costruzione), dunque la (18.14) risulta stabilita per QUALUNQUE funzione in L^2 , che è quello che si voleva dimostrare.

18.6 Analisi di Fourier in $L^2(\mathbb{T})$

Una conseguenza immediata della completezza del sistema trigonometrico è che l'identità di Parseval

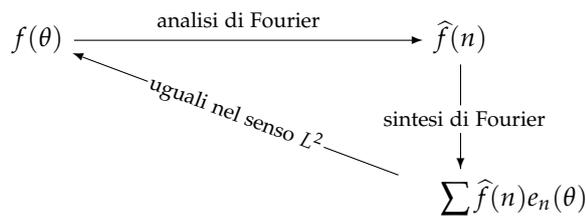
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \tag{18.15}$$

è verificata: la norma L^2 della funzione è uguale alla norma ℓ^2 delle sue coordinate di Fourier.

L'analisi di Fourier in $L^2(\mathbb{T})$, dunque, non è altro che una realizzazione dell'equivalenza unitaria di $L^2(\mathbb{T})$ e ℓ^2 rispetto alla base ortonormale $\{e_n = e^{in\theta}\}$. Se denotiamo con tale U_e la trasformazione da $L^2(\mathbb{T})$ a ℓ^2 che realizza tale equivalenza unitaria, allora

$$\begin{array}{ccc} f(\theta) & \xrightarrow{U_e} & \hat{f}(n) = \langle e_n | f \rangle \\ \sum c_n e_n(\theta) & \xleftarrow{U_e^{-1}} & c_n \end{array}$$

La prima freccia, da sinistra a destra, associa a una funzione a quadrato integrabile, cioè in $L^2(\mathbb{T})$, le sue coordinate di Fourier $\hat{f}(n)$, che formano una successione a quadrato sommabile, cioè un vettore in ℓ^2 . La seconda freccia, da destra a sinistra, è la trasformazione inversa che ad ogni successione a quadrato sommabile associa una funzione a quadrato integrabile. Se $c_n = \hat{f}(n)$, si "chiude il cerchio" dell'analisi di Fourier



Si osservi che tutti gli esempi della sezione 16 sono inclusi in questo schema (se $|c_n| \sim 1/n$, (c_n) è in ℓ^2 e f in L^2).

18.7 Funzioni assolutamente integrabili

Una funzione è assolutamente integrabile se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty, \tag{18.16}$$

un fatto fatto che si esprime scrivendo $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (18.3), per $f(\theta) = 1$ e $g(\theta) = |f(\theta)|$, segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta}.$$

Quindi, se $f \in L^2(\mathbb{T})$, allora $f \in L^1(\mathbb{T})$, ma non è detto che sia vero l'inverso (per esercizio, si trovi un esempio di funzione L^1 che non è L^2).

Se una funzione è assolutamente integrabile, le sue coordinate di Fourier decadono a zero. Questo è il contenuto di un famoso lemma, che è l'analogo per le serie di Fourier di quanto già visto per gli integrali di Fourier:

LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Se $f \in L^2(\mathbb{T})$, la dimostrazione è immediata, poiché in tal caso \widehat{f} è in ℓ^2 . Per la dimostrazione completa si deve mostrare che $L^2(\mathbb{T})$ è denso in $L^1(\mathbb{T})$ nella norma definita da (18.16). Non intendiamo entrare nei dettagli di questo fatto (né ci aspettiamo che lo faccia lo studente).

18.8 Teorema di convoluzione

Date due funzioni f e g integrabili, periodiche di periodo 2π , la loro convoluzione su \mathbb{T} è la nuova funzione $f \star g$ data da

$$f \star g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) g(\theta - \phi) d\phi,$$

Il punto $\theta - \phi$ non sarà sempre in $[-\pi, \pi)$, ma poiché l'integrandò è periodico di periodo 2π , conosciamo i valori della funzione integranda dappertutto sulla retta reale.

Si osservi che se la funzione periodica g è assolutamente integrabile su \mathbb{T} , allora lo è anche la nuova funzione periodica $h(\phi) = g(\theta - \phi)$. Inoltre il prodotto di due funzioni periodiche e integrabili su \mathbb{T} è ancora periodico e assolutamente integrabile. Inoltre, se f e g sono in $L^2(\mathbb{T})$ anche il loro prodotto di convoluzione lo è.

Il prodotto di convoluzione di funzioni su \mathbb{T} ha proprietà analoghe all'analogo prodotto di funzioni su \mathbb{R} che abbiamo studiato nella sezione 11.4. Più precisamente, siano f e g integrabili, periodiche di periodo 2π e sia c una costante. Allora

- (i) $f \star g = g \star f$ (commutativo)

- (ii) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ (distributivo)
- (iii) $(cf) \star g = cf \star g$ (omogeneo)
- (iv) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ (associativo)
- (v) $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ (l'analisi di Fourier trasforma la convoluzione nella moltiplicazione)

Le prime quattro proprietà sono immediate. Per funzioni continue la quinta proprietà è conseguenza di un semplice calcolo che faremo. Una volta che questa proprietà è stabilita per funzioni continue, può essere estesa a funzioni integrabili mediante approssimazione di funzioni integrabili con successioni di funzioni continue, e questo non lo faremo. Ecco il calcolo per funzioni continue:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f \star g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \star g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) g(\theta - \phi) d\phi \right] e^{-in\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in\theta} d\theta \right] d\phi \quad (\text{scambio dell'ord. d'integr.: OK funz. cont.}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in\theta} e^{in\phi} d\theta \right] d\phi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) e^{-in(\theta - \phi)} d\theta \right] d\phi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') e^{-in\theta'} d\theta' \right] d\phi \quad (\text{cambio di variabili } \theta' = \theta - \phi) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \widehat{g}(n) d\phi \\
 &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)
 \end{aligned}$$

Si osservi che al cambiamento di variabili $\theta' = \theta - \phi$ non corrisponde alcun cambiamento del dominio di integrazione perché l'integrando è una funzione periodica di periodo 2π .

Diamo adesso una lista di proprietà che si dimostrano facilmente sulla base di quanto visto finora (ma non lo faremo):.

- (i) Se f e g sono continue anche $f \star g$ lo è.
- (ii) La convoluzione di due funzioni integrabili e limitate è continua.
- (iii) Se una funzione è derivabile n volte e l'altra m volte, la loro convoluzione è derivabile $n + m$ volte.
- (iv) La convoluzione con un polinomio trigonometrico è un polinomio trigonometrico.

18.9 *Analisi di Fourier in un intervallo limitato*

Per funzioni $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ della retta reale, tutto ciò che abbiamo visto finora continua a valere, a patto di fare le seguenti sostituzioni. Adesso $[a, b]$ è l'intervallo fondamentale di funzioni periodiche sulla retta reale, di periodo $2L = b - a$ (anziché 2π).

Invece di (18.8) si prenda allora il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_a^{a+2L} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2L}. \quad (18.17)$$

Come si verifica facilmente, le funzioni $e_n(x) = e^{i\frac{\pi}{L}nx}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare (18.17).

Allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{L}nx}, \quad c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) e^{-i\frac{\pi}{L}nx} dx, \quad (18.18)$$

che è l'analogo della formula (18.10).

In vista delle applicazioni, è utile avere sotto mano gli sviluppi in serie di seni e coseni, che si ottengono dalle equazioni precedenti, ricordando le formule della sezione 16.1 (in particolare, la (16.9)):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \right], \quad (18.19)$$

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) dx, \quad (18.20)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.21)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (18.22)$$

Queste formule sono di solito usate scegliendo le coordinate in modo che l'intervallo $[a, b]$ sia centrato nell'origine, cioè per $a = -L$ (e quindi $b = L$). A costo di essere prolissi, riscriviamo le formule fondamentali per l'analisi di Fourier per questo caso:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{\pi}{L}nx} dx, \quad (18.23)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (18.25)$$

Un'altra formula utile è l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_0^2 + \frac{1}{2} [a_n^2 + b_n^2] \quad (18.26)$$

Osserviamo infine che è utile disporre di un dizionario per tradurre proprietà di funzioni periodiche di periodo $2L$ nel dominio temporale (o spaziale) nelle corrispondenti proprietà nel dominio delle frequenze (o dei numeri d'onda). Sia $\omega = 2\pi/2L$ la frequenza angolare fondamentale (che è chiaramente pari a 1 per $2L = 2\pi$), allora

TEMPO/SPAZIO	FREQUENZA TEMPORALE/ SPAZIALE
derivate $f^{(p)}(x)$	potenze $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in\omega)^p \widehat{f}(n)$
convoluzione circolare $f \star g(x)$	prodotto $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$
traslazione $f_h(x) = f(x-h)$	modulazione $\widehat{f}_h(n) = e^{-in\omega h} \widehat{f}(n)$

La dimostrazione dell'ultima proprietà (che una traslazione diventa una modulazione) è lasciata come (facile) esercizio.

18.10 Serie di Fourier ad intervallo dimezzato

Le funzioni dispari, $f(-x) = -f(x)$, formano un sottospazio \mathcal{D} dello spazio di Hilbert \mathcal{H} delle funzioni in $[-L, L]$ con prodotto scalare (18.17) il cui complemento ortogonale, nel senso della sezione 17.8, è lo spazio \mathcal{P} delle funzioni pari, $f(-x) = f(x)$. Vale quindi l'ultima equazione della sezione 17.8, $\mathcal{H} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$, che, in termini terra-terra, significa che ogni funzione può essere unicamente decomposta nella somma di un funzione pari e di una dispari.

I seni formano una base completa per le funzioni dispari e i coseni, insieme alla funzione 1, per le pari: se f è dispari, allora

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right),$$

se è pari

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right),$$

Per "serie di Fourier a intervallo dimezzato" si intende la serie di una funzione definita nell'intervallo $[0, L]$ ed estesa a $[-L, L]$ nei due modi possibili: come funzione pari o come funzione dispari. Per un'estensione dispari, la serie è solo di seni, mentre per l'estensione pari, nello sviluppo sono presenti solo coseni e la funzione 1. Ovviamente, nell'intervallo $[0, L]$ le due serie convergono agli stessi valori, ma sulla retta reale definiscono differenti funzioni periodiche di periodo $2L$.

Per l'estensione dispari (serie di seni ad intervallo dimezzato), si ha:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

$$c_0 = 0 \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx.$$

Si osservi il fattore 2 nei coefficienti b_n : la funzione è estesa a $[-L, 0]$ secondo la regola $f(-x) = -f(x)$, il che raddoppia il peso dei coefficienti calcolati in $[0, L]$.

Analogo discorso vale per l'estensione pari (serie di coseni ad intervallo dimezzato):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

$$b_n = 0.$$

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx$$

ESEMPIO 18.2. Sviluppare $f(x) = \sin(x)$, $0 < x < \pi$, in serie di Fourier di coseni.

Occorre trovare la serie di Fourier dell'estensione pari del seno in $[0, \pi]$. Questa estensione è mostrata nella figura 18.3.

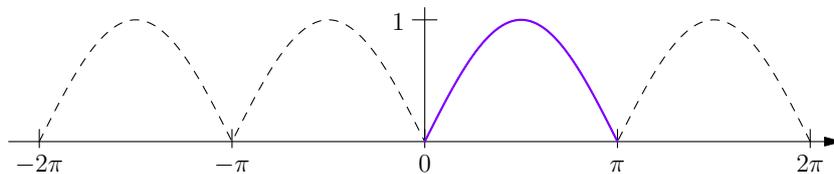


Figura 18.3: Estensione pari del seno in $[0, \pi]$.

Dalle formule sopra si ricava (si lascia come esercizio lo svolgimento dei calcoli):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

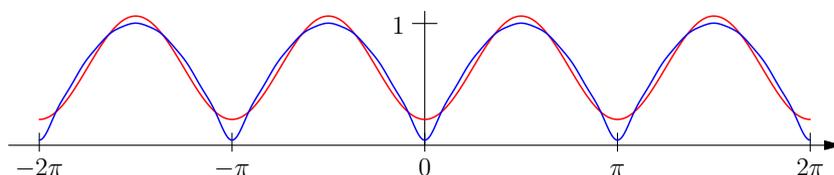


Figura 18.4: Somme parziali

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx$$

per $N = 8$ (linea rossa) e $N = 16$ (linea blu).