

19

Problemi al contorno

19.1 Equazioni alle derivate parziali

Una trattazione completa delle equazioni alle derivate parziali (“PDE”, da adesso in poi¹) esula dagli scopi di questo corso. Qui ci limiteremo a inquadrare quanto già visto in capitoli precedenti in uno schema un po’ più generale. Per lo più, l’esposizione sarà non sistematica, ma si procederà per esempi.

Ecco alcune PDE interessanti:

(A) Equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

(B) Equazione di d’Alembert (o delle onde)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

(C) Equazione di Fourier (o del calore)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u$$

(D) Equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + Vu$$

Come sempre quando si parla di un’equazione, sia essa un’equazione algebrica come $x^2 = 1$ o una PDE, una sua soluzione è quella “cosa” che se inserita nell’equazione dà luogo ad un’identità. Nel caso delle PDE, il problema matematico sta nell’individuare eventuali condizioni supplementari che permettano di stabilire se, in presenza di queste condizioni, la soluzione esiste ed è unica. Queste sono condizioni sui valori della u (e/o le sue derivate) sul bordo di della regione, dentro la quale si cerca la soluzione, e sono dette *condizioni*

¹ PDE, cioè “partial differential equation” è il termine standard nella letteratura in inglese.

al contorno (CC). La condizione spesso implicita, ma non per questo meno importante, è che la soluzione sia una *funzione limitata*. Se una delle variabili è il tempo, i valori della u (e/o delle sue derivate) sulla ipersuperficie (nello spazio-tempo) $t = \text{costante}$ sono dette *condizioni iniziali* (CI)². Il problema così posto è detto *problema al contorno*.

Le equazioni (A)–(D) sono lineari e le abbreviamo così

$$\mathcal{D}u = 0,$$

dove \mathcal{D} è un operatore differenziale lineare (che può contenere anche un termine di ordine zero, cioè la moltiplicazione per una funzione, come nell'equazione di Schrödinger). Un'equazione di questo tipo è detta *omogenea*. Se invece l'equazione è

$$\mathcal{D}u = \rho,$$

dove ρ è una funzione nota (sorgente o forzante, a seconda dell'interpretazione fisica dell'equazione), l'equazione è detta *non omogenea*.

Un problema al contorno (PC) può dunque essere così schematizzato

$$PC = \left\{ \begin{array}{l} PDE \text{ (omogenea o non omogenea)} \\ CC \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{limitatezza della soluzione} \\ CI \quad \text{(tempo)} \\ CC \quad \text{(spazio)} \end{array} \right.$$

L'equazione di Laplace fornisce due esempi importanti di problemi al contorno con condizioni al contorno puramente spaziali:

Problema di Dirichlet Valore di u assegnato sul bordo di una regione \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ u &= f & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{aligned}$$

Problema di Neumann Valore della derivata normale di u assegnato sul bordo

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ \nabla_{\mathbf{n}} u &= f & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{aligned}$$

Dimostrare l'unicità facile, si veda i complementi 5.8.1; l'esistenza è, in generale, difficile. Nel capitolo 10 è stato risolto in maniera completa il problema di Dirichlet nel piano.

² Tipicamente si sceglie la costante uguale a zero, cioè si fa coincidere il tempo iniziale con il momento in cui si fa partire il cronometro.

19.2 Problemi al contorno sulla retta reale

EQUAZIONE DEL CALORE. Nella sezione 8.5 abbiamo risolto l'equazione del calore sulla retta reale. Più precisamente, abbiamo risolto il seguente problema al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.1)$$

Abbiamo risolto questo problema usando il *metodo della trasformata di Fourier*, secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dx \\ \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\ \frac{d\tilde{u}(k,t)}{dt} = -Dk^2 \hat{f}(k,t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \tilde{u}(k,t) = \hat{f}(k) e^{-Dk^2 t} \end{array}$$

La caratteristica principale di questo schema è che una PDE lineare viene trasformata in una ODE (equazione alle derivate ordinarie, "ODE"= ordinary differential equation) lineare e quindi di facile soluzione. Questo schema si applica pari pari ad altre PDE per problemi al contorno analoghi a (19.1) (si vedano i problemi alla fine del capitolo).

Dalla sezione 11.5 ricordiamo che $u(x,t)$, essendo l'anti-trasformata di Fourier del prodotto delle trasformate di Fourier di due funzioni, può essere espresso come il prodotto di convoluzione tra $f(x)$ (l'anti-trasformata di $\hat{f}(k)$) e il nucleo del calore K_t (che è l'antitrasformata di $e^{-Dk^2 t}$):

$$u(x,t) = K_t \star f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y) dy \quad (19.2)$$

Osserviamo che per quanto questa soluzione sia stata trovata con metodo di Fourier, e richiesto l'annullamento della funzione all'infinito, la formula (19.2) continua a essere tale anche per dati iniziali $f(x)$ più generali (ma sempre limitati). Ad esempio, se prendiamo $f(x) = 1$, la (19.2) restituisce $u(x,t) = 1$, il che è molto ragionevole: se i punti della sbarra infinita sono inizialmente tutti alla stessa temperatura, la loro temperatura non varierà nel corso del tempo.

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DEL CALORE:

- o Dalla formula (19.2) segue che questa equazione rende lisci dati iniziali singolari: ad esempio se come CI a $t = 0$ si considera una

delta di Dirac $\delta(x - x_0)$, come effetto della convoluzione con K_t , questa è trasformata per $t > 0$ (non importa quanto prossimo a 0) in una gaussiana centrata in x_0 , che è infinitamente differenziabile.

- Propaga il dato iniziale con velocità infinita (per la stesse ragioni del punto precedente).
- Rende lisce le irregolarità del dato iniziale, nel corso del tempo lo “spalma” su tutta la retta reale e le sue soluzioni decano a 0 per $t \rightarrow \infty$.
- Non è reversibile: se $u(x, t)$ è soluzione, $u^*(x, t) = u(x, -t)$ non è soluzione.

EQUAZIONE DELLE ONDE. Il problema analogo a (19.16) per l'equazione omogenea delle onde in una dimensione è

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = a(x) & \partial_t u(x, 0) = b(x) \quad \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.3)$$

Anche in questo caso, abbiamo trovato la soluzione con il metodo della trasformata di Fourier. Nel capitolo 12, usando questo metodo, abbiamo trovato

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy \quad (19.4)$$

Per trovare la soluzione (19.4) dell'equazione delle onde abbiamo usato il metodo della trasformata di Fourier, e abbiamo richiesto che i dati iniziali andassero a zero all'infinito. Adesso osserviamo che, come per la formula risolutiva dell'equazione del calore, la formula (19.4) continua a fornire la soluzione dell'equazione delle onde anche per condizioni iniziali (limitate) più generali. Se ad esempio prendiamo

$$a(x) = A \cos(kx) \quad b(x) = \omega A \sin(kx) \quad \text{dove} \quad \omega = kc,$$

la (19.4) è l'onda progressiva

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

di lunghezza d'onda $2\pi/k$ e frequenza $\nu = \omega/2\pi$, che si muove verso destra a velocità c , che, come è noto, è soluzione dell'equazione delle onde.

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE:

- È *reversibile*: se $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione delle onde, anche $u^*(x, t) = u(x, -t)$ è soluzione.
- La propagazione di u avviene a *velocità finita*; si veda la discussione sui "coni causali e "domini di influenza" del capitolo 12.
- La sua soluzione (19.4) ha la forma generale di d' Alembert (12.3).

19.3 Problemi al contorno sulla semi-retta reale

Passiamo adesso a discutere degli esempi concreti di condizioni al contorno vere e proprie.

ONDE IN UNA CORDA SEMI-INFINITA. Incominciamo con il considerare una corda che si estende dal suo punto di origine in $x = 0$ a $x = \infty$. Adesso occorre specificare come la corda si comporta nell'origine e questa è la *condizione al contorno* $u(0, t) = h(t)$.

La funzione $h(t)$ descrive come l'estremo della corda si muove e se assumiamo che è tenuto fermo, cioè $h = 0$, abbiamo il problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = a(x), \quad \partial_t u(x, 0) = b(x) & \text{CI} \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.5)$$

Troviamo la soluzione di (19.5). Poichè u risolve l'equazione delle onde in una dimensione, deve avere la forma generale di d'Alembert (12.3). Devono cioè esistere funzioni ϕ e ψ tali che $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$. Assumiamo per semplicità che sia $b(x) = 0$, allora dalla (19.4), per $x > ct$ si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) + a(x - ct)]$$

quindi, per $x > ct$, $\phi = \psi = a$.

Deve valere la condizione al contorno di annullamento della u nello zero per tutti i tempi. Dunque, $\phi(ct) + \psi(-ct) = 0$. Ne segue che, posto $ct = -\xi$, deve valere $\psi(\xi) = -\phi(-\xi)$ e dunque che, per $x < ct$, $\psi(\xi) = -a(-\xi)$. Quindi per $x < ct$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + ct) - a(-x + ct)] .$$

Se denotiamo con a^* l'estensione dispari di a a $x < 0$, allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a^*(x + ct) + a^*(x - ct)] .$$

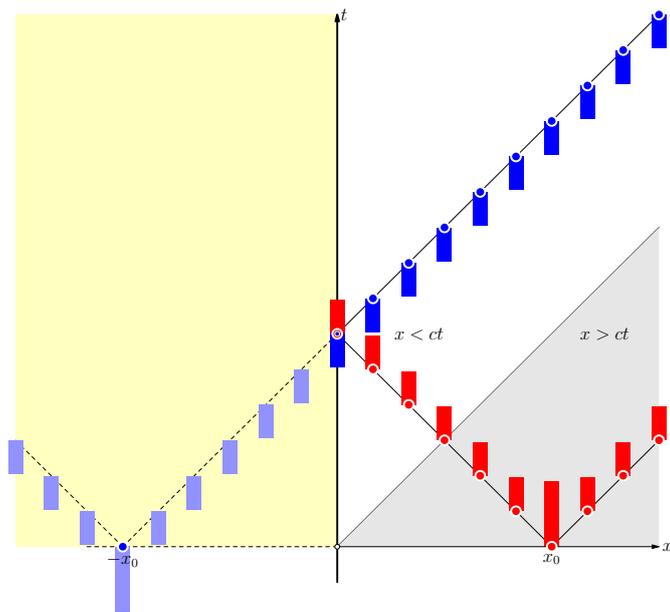


Figura 19.1: Il profilo rettangolare (in rosso) nell'intorno di un punto x_0 è la condizione iniziale $a(x)$ dell'onda ($b(x) = 0$). Nella regione $x > ct$ (in grigio) la propagazione avviene come se non ci fosse alcuna CC in $x = 0$: il rettangolo iniziale si dimezza: metà viaggia verso destra e metà verso sinistra. Nella regione $x < ct$, l'onda è sotto l'influenza della CC in $x = 0$. La soluzione in questa regione è ottenuta introducendo una condizione iniziale nell'intorno di $-x_0$ (rettangolo blu), di ampiezza uguale in modulo, ma opposta in segno a quella iniziale in x_0 (estensione dispari della condizione iniziale). Quando l'onda virtuale esce dalla regione non fisica (in giallo) diventa reale: nella regione $x < ct$ la soluzione è la sovrapposizione dell'onda blu e dell'onda rossa. Questa costruzione fornisce la *riflessione* dell'onda in $x = 0$.

È come se si risolvesse il problema senza CC con l'onda reale iniziale a destra e un'onda virtuale a sinistra che ha configurazione iniziale $-a(-x)$. Si vedano le figure 19.1 e 19.2.

Se si considera anche il contributo di b , la sostanza non cambia e si arriva alla soluzione completa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a^*(x + ct) + a^*(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b^*(y) dy, \quad (19.6)$$

dove b^* è l'estensione dispari di b .

Supponiamo adesso che l'estremo della corda non sia tenuto fermo, ma vari nel tempo secondo la legge $h(t)$. Possiamo sfruttare la *linearità* del problema al contorno e risolvere separatamente il problema con dati iniziali nulli, $a = b = 0$ e condizione iniziale $u(0, t) = h(t)$. La soluzione cercata sarà la somma della soluzione di questo problema e della (19.6). Consideriamo dunque il PC:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in x \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = 0, & \partial_t u(x, 0) = 0 \quad \text{CI} \\ u(0, t) = h(t) & t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.7)$$

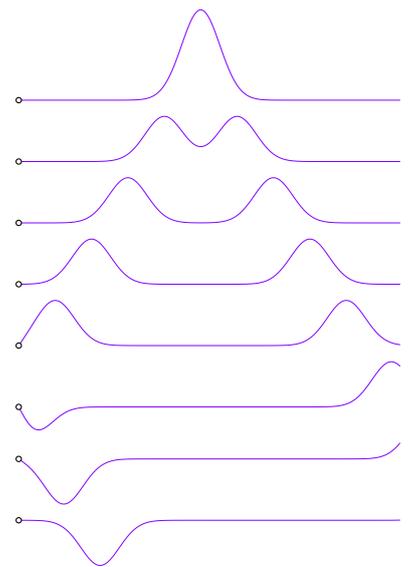


Figura 19.2: Al tempo $t = 0$ una corda semi-infinita tenuta ferma nell'origine è portata nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. L'onda verso destra si allontana all'infinito, quella verso sinistra si riflette nell'origine. I fotogrammi sono stati ottenuti con la regola dell'"onda virtuale" per $x < 0$ discussa nel testo.

Ragionando come prima, u deve avere la forma generale di d'Alembert (12.3) $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$. Essendo il dato iniziale nullo, per $x > ct$, deve essere $u(x, t) = 0$. In $x = 0$ si deve avere $h(t) = \psi(-ct)$. Quindi, per $x < ct$,

$$u(x, t) = \psi(x - ct) = h\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

dunque, per ogni $x > 0$

$$u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

dove Θ è la funzione di Heaveside.

Si può arrivare alla stessa conclusione con il metodo della trasformata di Laplace, come è stato fatto per il problema 14.4. Sia

$$\mathcal{L}u(x, s) = \tilde{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-st} ds \quad \mathcal{L}h(s)\tilde{h}(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st} ds$$

Allora il mmetodo di soluzione esposto in S.14.4 può essere così schematizzato:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{4} \quad u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) h\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \downarrow \mathcal{L} & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\ \textcircled{2} \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \tilde{u} = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} \quad \tilde{u}(k, s) = \tilde{h}(s)e^{-(s/c)x} \end{array}$$

Nel passaggio da $\textcircled{1}$ a $\textcircled{2}$, abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace: $s^2 \tilde{u}(x, s) - su(x, 0) - \partial_t u(x, 0) = c^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$ e le condizioni iniziali $u(x, 0) = a(x) = 0$ e $\partial_t u(x, 0) = b(x) = 0$. Nel passaggio da $\textcircled{2}$ a $\textcircled{3}$, abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplode, imposto la CC (che in trasformata di Laplace diventa la "condizione iniziale per $x = 0$ "). Il passaggio da $\textcircled{3}$ a $\textcircled{4}$, usa quella proprietà della trasformata di Laplace che nella sezione 14.3 è stata chiamata "seconda proprietà della traslazione".

PROBLEMI DI DIRICHLET. Un problema come (19.5), con CC $u(0, t) = 0$, è detto *problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee*; un problema con CC $u(0, t) = h(t) \neq 0$ è detto *problema di Dirichlet con condizioni al contorno non omogenee*.

CONDUZIONE DEL CALORE IN UNA SBARRETTA SEMI-INFINITA. Il problema al contorno per la conduzione del calore, analogo a (19.5), è

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = f(x), & \text{CI} \\ u(0,t) = 0 & \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.8)$$

Si tratta di un problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee. Anche per questo problema, la soluzione è ottenuta mediante prolungamento dispari di f a sinistra di 0: la soluzione di (19.8) è la soluzione del problema sulla retta reale, senza condizioni al contorno in zero, con dato iniziale $f^*(x)$, dove $f^*(x) = f(x)$, per $x > 0$ e $f^*(-x) = -f(-x)$ per $x < 0$. In breve,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^*(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left[e^{-(x-y)^2/(4Dt)} - e^{-(x+y)^2/(4Dt)} \right] dy \end{aligned}$$

La formula precedente per u può essere ottenuta risolvendo (19.8) mediante il metodo della trasformata di Laplace (esercizio).

Un esempio di problema di Dirichlet per la conduzione del calore, con condizioni al contorno non omogenee, è già stato considerato nel capitolo 8, esempio 8.5:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = 0 & \text{CI} \\ u(0,t) = \theta_0 & \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.9)$$

La procedura mediante cui abbiamo trovato la soluzione di questo è riassunta dal seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{4} \quad u(x,t) = \theta_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \\ \downarrow \mathcal{L} & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\ \textcircled{2} \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \frac{s}{D} \tilde{u} = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} \quad \tilde{u}(k,s) = \frac{\theta_0}{s} e^{-\sqrt{s/D}x} \end{array}$$

Nel passaggio da $\textcircled{1}$ a $\textcircled{2}$, abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace: $s\tilde{u} - f(x) = D \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$ e la condizione

iniziale $f(x) = 0$. Nel passaggio da ② a ③, abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplose, imposto la CC, tenuto conto che la trasformata di Laplace della funzione costante θ_0 è θ_0/s . Il passaggio da ③ a ④, ha richiesto l'integrazione nel piano complesso per determinare l'anti-trasformata di Laplace di $\tilde{u}(k, s)$.

PROBLEMI DI NEUMANN. In un problema di Neumann, la CC è data dalla derivata spaziale della funzione. Più precisamente, in un problema di Neumann sulla semiretta reale si assegna $\partial_x u(0, t) = h(t)$. Per esempio, il seguente problema di conduzione del calore

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = f(x), & \text{CI} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.10)$$

è un problema con condizione al contorno di Neumann omogenee. Fisicamente, questo significa che la conduzione del calore avviene in condizioni completamente adiabatiche, incluso l'estremo della sbarretta: $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ significa che non c'è flusso di calore uscente dalla sbarretta nell'origine.

Procedendo in maniera analoga a prima, si può dimostrare che problemi di questo tipo si risolvono mediante *estensione pari* del dato iniziale: $f^\#(x) = f(x)$ per $x > 0$ e $f^\#(x) = f(-x)$, per $x < 0$. In particolare, si dimostra che la soluzione di (19.11) è

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^\#(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left[e^{-(x-y)^2/(4Dt)} + e^{-(x+y)^2/(4Dt)} \right] dy \end{aligned}$$

19.4 Oscillazioni di temperatura nel suolo

In questa sezione vogliamo studiare le soluzioni stazionarie della propagazione del calore nel suolo in presenza di una CC periodica in $x = 0$ ($x = 0$ è il livello del suolo, $x > 0$ misura la profondità). Il

problema al contorno è :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, t \in x \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M \quad \text{limitatezza della soluzione} \\ u(0,t) = Ae^{i\omega t} \quad (\text{parte reale del secondo membro se } u \text{ temperatura}) \quad \text{CC} \end{array} \right. \quad (19.11)$$

Si osservi che non abbiamo imposto CI: cerchiamo una soluzione stazionaria del tipo

$$u = v(x)e^{i\omega t}.$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione del calore si ottiene

$$i\omega v(x) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

che ha soluzione

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x}.$$

per

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo le condizioni che u sia limitata per $x \rightarrow \infty$ e che $u(0,t) = Ae^{i\omega t}$, quindi deve essere $v(0) = A$. Si ha così $c_1 = 0$ e $c_2 = A$ e quindi

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} e^{i\omega \left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)}$$

Passando alla parte reale (poiché u è una temperatura)

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos \omega \left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x \right)$$

Ne risulta che la temperatura u ad una qualsiasi profondità x è una funzione sinusoidale di t con ampiezza $Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$ minore dell'ampiezza A in superficie, e la riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità e quanto maggiore è la frequenza delle oscillazioni. La fase varia da punto a punto e, precisamente, le oscillazioni si risentono verso l'interno con un ritardo $x/(\sqrt{2D\omega})$ proporzionale alla distanza x dalla superficie, cosa che si può esprimere dicendo che *le oscillazioni di temperatura si propagano nell'interno con una velocità $\sqrt{2D\omega}$ (tanto maggiore quindi quanto maggiore è la frequenza ω).* Ne deriva, in particolare che per $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$ le oscillazioni sono in opposizione di fase con quelle in superficie.

Poiché il problema è lineare, se al suolo sono presenti due oscillazioni di frequenza ω_1 e ω_2 , la temperatura sarà la sovrapposizione lineare delle temperature per le due oscillazioni. Questo permette di confrontare le variazioni diurne e stagionali. Si trova così che l'assorbimento e la velocità di propagazione delle oscillazioni diurne sono maggiori di quelle annue. Ad esempio, per un ordinario terreno umido ($D = 0.0049\text{cm}^2/\text{s}$) un'escursione diurna di 20° , si riduce a 0.86° a soli 36 cm di profondità (dove le oscillazioni sono opposte a quelle superficiali) e a 0.004° ad un metro. Un'escursione annua di 20° , invece, si ridurrebbe a 17.5° a 30 cm, a 12.7° ad un metro e a 0.2° a 10 metri (a tale profondità si può dunque ritenere che la temperatura resti costante nel passaggio dall'estate all'inverno). È interessante osservare che la teoria (già sviluppata da Fourier) predice che ad una profondità di 3 metri circa le oscillazioni della temperatura sono in opposizione di fase di circa sei mesi (la temperatura nel terreno sarà più calda in inverno e più fredda in estate). Il che spiega perché conviene avere la cantina di qualche metro sotto il livello del suolo.

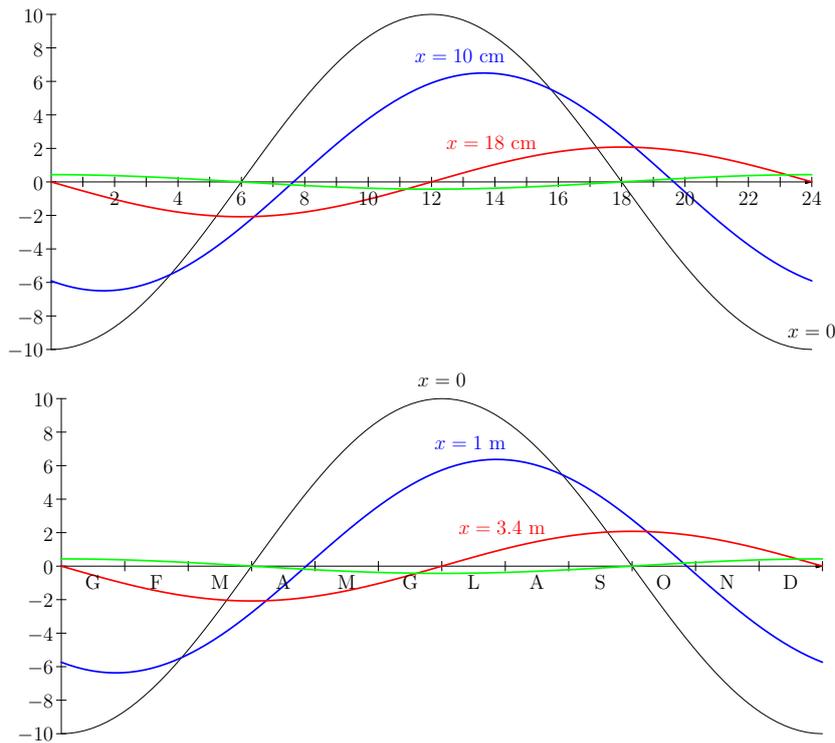


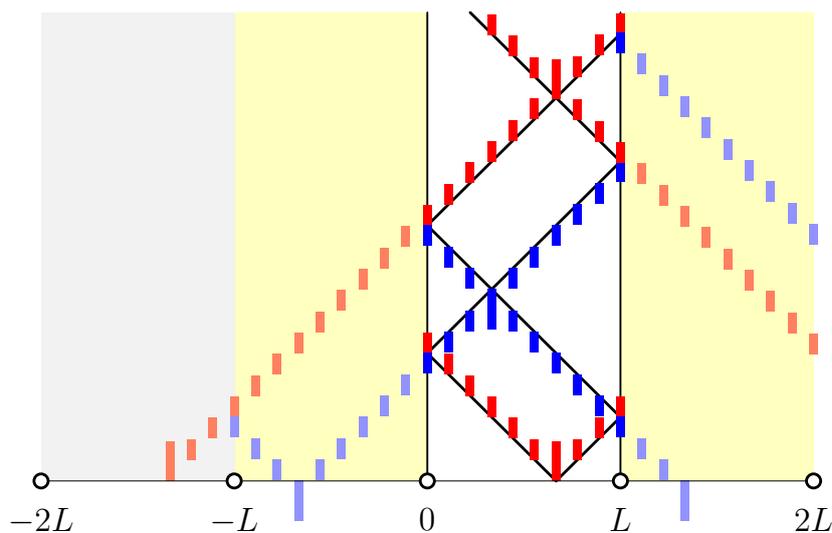
Figura 19.3: Variazioni di temperatura rispetto alla media (posta uguale a zero): giornaliera (in alto) e annua (in basso). La linea in verde corrisponde a $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$ in entrambi i grafici (circa 36 cm per il primo e circa 8 m nel secondo). A questa profondità la variazione esterna di 20° si è ridotta ad una frazione di grado. In entrambi i grafici la linea in rosso corrisponde a $x = \pi\sqrt{2D/\omega}/2$. A questa profondità c'è opposizione di fase di circa 12 ore nel caso giornaliero e di 6 mesi in quello annuo.

19.5 Problemi al contorno in un intervallo limitato

Ecco un esempio di problema al contorno in un intervallo limitato $[0, L]$ con condizioni di Dirichlet omogenee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = a(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = b(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ |u(x,t)| \leq M \end{array} \right. \quad (19.12)$$

Si consideri preliminarmente il caso semplice di $b(x) = 0$, avendo presente quanto visto precedentemente per la stessa equazione sulla semi-retta. Allora, ragionando sulla figura sotto, non dovrebbe essere difficile convincersi che la soluzione è ancora della forma (19.6), dove adesso a^* e b^* sono le estensioni periodiche dispari di $a(x)$ e $b(x)$ alla retta reale, nel senso indicato nella sezione 18.10. Si veda anche la figura 19.4.



Condizioni al contorno di Neumann omogenee

$$\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(L,t)$$

richiedono invece un'estensione periodica pari dei dati iniziali, sempre nel senso precisato nella sezione 18.10.

Osserviamo infine che quando si hanno condizioni di Dirichlet non omogenee

$$u(0,t) = a, \quad u(L,t) = b$$

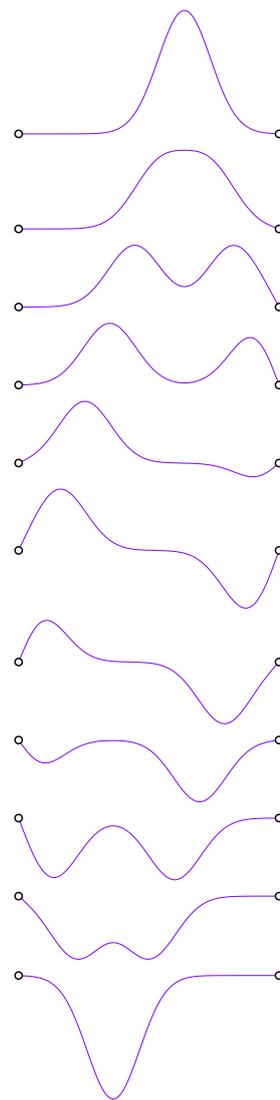


Figura 19.4: Corda di violino. La corda, tenuta ferma ai suoi estremi, è portata inizialmente nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. I fotogrammi sono stati ottenuti con la regola dell'estensione periodica dispari del dato iniziale.

basta porre

$$u = a + \frac{b-a}{L}x + v$$

e risolvere per v .

19.6 Metodo delle separazioni delle variabili

Discutiamo adesso un metodo che permette di giungere alle stesse conclusioni a cui siamo arrivati poc'anzi. Si tratta del metodo di Bernoulli di separazione delle variabili, che esporremo facendo riferimento al seguente problema al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ |u(x, t)| \leq M \end{array} \right. \quad (19.13)$$

L'EQUAZIONE E LE CC SONO LINEARI E OMOGENEE. Si cerca allora una soluzione $u(x, t)$ che possa essere espressa come il prodotto di una funzione solo di x per una funzione solo di t ,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Una soluzione di questo tipo è certamente molto particolare, tuttavia, questa mancanza di generalità del metodo all'inizio è compensata alla fine dal prendere tutte le combinazioni lineari di soluzioni della forma $X(x)T(t)$. Si vedano i commenti alla fine.

SI SOSTITUISCA $u(x, t) = X(x)T(t)$ nell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si trova

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t)$$

Dividendo per $DX(x)T(t)$, si ottiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)}$$

Questa equazione non può essere verificata a meno che ciascun membro dell'equazione sia una costante indipendente da x e t . Chiamiamo $-\lambda^2$ questa costante. La ragione per scegliere la costante $-\lambda^2$ invece di λ verrà chiarita sotto.

L'EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI si separa in due equazioni ordinarie

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 DT = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} X = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \\ T = ce^{-\lambda^2 Dt} \end{cases}$$

dove a, b, c sono costanti di integrazione. Risulta chiarito perché abbiamo scelto $-\lambda^2$: una costante positiva avrebbe implicato una crescita esponenziale nel tempo della soluzione, che non vogliamo (la scelta del quadrato invece è pura comodità: non volevamo scrivere ogni volta una radice quadrata). Poiché le soluzioni dipendono dal parametro λ (per il momento arbitrario), mettiamo in evidenza questo fatto e scriviamo

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 Dt},$$

avendo assorbito, senza perdita di generalità, la costante c in a e b .

IMPONIAMO LE CONDIZIONI AL CONTORNO. La condizione al contorno $u(0, t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 Dt} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

da cui concludiamo che $a_\lambda = 0$. La condizione al contorno $u(L, t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(L, t) = b_\lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 Dt} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

$b_\lambda = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$, che è poco interessante.

Altre soluzioni (più interessanti) sono ottenute richiedendo che

$$\sin(\lambda L) = 0$$

per cui λL deve essere un multiplo intero di π , cioè

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si osservi che abbiamo tenuto solo i valori positivi di n , perché i valori negativi hanno l'effetto di cambiare il segno di $\sin \lambda_n x$ e possono quindi essere accomodati dalle costanti $b_{\lambda_n} = b_n$. Il caso $n = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$.

Eravamo partiti col cercare una soluzione, ne troviamo una successione

$$u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L)^2 Dt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

USO DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE. Le equazioni

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

sono lineari e omogenee, quindi una sovrapposizione lineare delle soluzioni u_n è ancora una soluzione. In altre parole, la somma formale

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L^2)Dt}$$

è una soluzione delle equazioni (*) più generale delle singole soluzioni u_n .

IMPONIAMO CHE SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE INIZIALE.

Richiediamo che valga $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Riconosciamo lo sviluppo di Fourier dell'estensione dispari di $f(x)$ a $[-L, L]$. A seconda di quali siano le proprietà di $f(x)$ possiamo dare un senso preciso all'uguaglianza precedente. Per esempio, se $f(x)$ è continua con derivata prima continua, abbiamo convergenza uniforme. Se la funzione è liscia, eccetto per un numero finito di discontinuità, possiamo applicare il teorema di Dirchelet e concludere che si ha convergenza puntuale (e uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene le discontinuità, sulla base del teorema nella nota 2 sopra) e convergenza alla media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità. Queste proprietà sono conservate nel corso del tempo, in quanto le coordinate di Fourier di $u = u(x, t)$ sono

$$\hat{u}(n) = b_n e^{-(n\pi/L)^2 Dt}$$

MORALE. La soluzione di (19.13) è dunque

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (19.14)$$

È la soluzione più generale? Sì, per la completezza L^2 del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno). In altre parole, per quanto l'assunzione iniziale $u(x, t) = X(x)T(t)$ fosse molto particolare, recuperiamo completa generalità in quanto il sistema ortonormale $\{\sin(\frac{n\pi}{L}x)\}$ è una base ortonormale in $L^2(0, L)$ e quindi genera tutto lo spazio. Che (19.14) fosse la soluzione completa di (19.13) era anche la convinzione di Fourier, anche se non sapeva che

cosa volesse dire completezza L^2 e non disponeva di una dimostrazione conclusiva (la commissione giudicatrice riteneva infatti che le sue conclusioni lasciavano a desiderare sia per la generalità sia per il rigore).

19.7 Da Fourier a Schrödinger

Consideriamo adesso il nucleo del calore

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

come funzione della variabile complessa t . Per rotazione $t \rightarrow it$ nel piano complesso si ottiene

$$K_{it}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dit}} e^{ix^2/4Dt} \stackrel{\text{def}}{=} G_t(x)$$

che, posto $D = \hbar/2m$, diventa

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t} \quad (19.15)$$

Sia $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Allora si verifica facilmente per sostituzione che

$$u(x, t) = G_t \star f(x)$$

è soluzione dell'equazione libera di Schrödinger (cioè con energia potenziale $V = 0$) in una dimensione spaziale. Si può dimostrare (ma non lo faremo) che (in norma L^2)

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-y) f(y) dy = f(x).$$

Assodato questo, siamo nella stessa situazione dell'equazione del calore: $u(x, t) = G_t \star f(x)$ è soluzione dell'equazione libera di Schrödinger per la CI $f(x)$. In altre parole, è soluzione del PC:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x, t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{CI} \end{array} \right. \quad (19.16)$$

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

- Analogamente all'equazione del calore, l'equazione di Schrödinger propaga il dato iniziale con velocità infinita (per ragioni analoghe a quelle per l'equazione del calore).

- Analogamente all'equazione delle onde, è reversibile: se $u(x, t)$ è soluzione, $u^*(x, t) = \overline{u(x, -t)}$ è soluzione.
- Conserva la norma L^2 del dato iniziale.

CONDIZIONI DI DIRICHLET OMOGENEE PER L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER. Prendiamo adesso la funzione (19.14) e consideriamola come funzione della variabile complessa t . Facciamo una rotazione nel piano complesso $t \rightarrow it$ e poniamo

$$\psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, it) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iDn^2\pi^2 t/L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (19.17)$$

Si verifica per sostituzione che questa funzione è soluzione del seguente problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ \psi(x, 0) = f(x) & \text{per } 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (19.18)$$

Posto $D = \hbar/2m$, si riconosce l'equazione di Schrödinger per la buca unidimensionale infinita. È (19.17) la soluzione più generale? Sì, sempre per la completezza L^2 del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno). Naturalmente adesso possiamo permettere che le coordinate di Fourier b_n della funzione d'onda iniziale siano numeri complessi, in quanto la funzione d'onda iniziale (a differenza della temperatura) non è vincolata ad essere reale.

Nel linguaggio quantistico, i modi di Fourier

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

sono le autofunzioni dell'hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo e $E_n = \hbar\omega_n$, $\omega_n = \hbar n^2/m$, sono i suoi autovalori. Sia \mathcal{H} lo spazio delle funzioni che si annullano in 0 e L e che sono a quadrato integrabile e sia $\langle | \rangle$ l'usuale prodotto scalare L^2 . Allora (19.17) può essere riscritta come

$$\psi_t(x) = \sum_n e^{-i\omega_n t} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle \quad (19.19)$$

Si osservi quanto sia cruciale la completezza del sistema ortonormale $\{\phi_n\}$. Deve infatti valere

$$f = \sum_n \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

per qualunque funzione iniziale $f \in L^2$. Si osservi inoltre che, data la forma esplicita (19.19) di ψ_t , si ha

$$\|\psi_t\|^2 = \langle \psi_t | \psi_t \rangle = \langle f | f \rangle = \|f\|^2. \quad (19.20)$$

La normalizzazione dello stato è dunque preservata dall'evoluzione di Schrödinger (sarebbe un disastro, altrimenti!). Detto in altri termini, l'operatore U_t che trasforma il dato iniziale f nella funzione d'onda al tempo t ,

$$U_t f = \sum_n e^{-i\omega_n t} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

è un operatore lineare e *unitario* in L^2 (si veda il prossimo capitolo).

Si può dimostrare che una formula come la (19.20) vale in generale per hamiltoniane con spettro discreto. Il problema dinamico di trovare la soluzione dell'equazione di Schrödinger è dunque risolto automaticamente una volta che sono stati trovati gli autovalori E_n e gli autovettori associati ϕ_n dell'hamiltoniana, vale a dire, sono state risolte le equazioni

$$H\phi_n = E_n\phi_n,$$

e si è dimostrato che il sistema ortonormale ϕ_n è completo. Allora la soluzione dell'equazione di Schrödinger è automaticamente data da (19.19).