

Unitarietà della trasformata di Fourier

20.1 La trasformata di Fourier di funzioni buone

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni buone, nel senso tecnico del termine introdotto nel capitolo 10: una funzione $f(x)$, sui reali e a valori reali o complessi, è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se è infinitamente differenziabile e se è tale che $f(x)$ e le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$.

Nel capitolo 11 abbiamo dimostrato il teorema di Fourier per funzioni buone: se $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora anche la sua trasformata

$$Ff(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx \quad (20.1)$$

è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, inoltre,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ff(y)e^{ixy} dy, \quad (20.2)$$

Inoltre, nel capitolo 11, abbiamo visto che la (20.1) definisce un operatore lineare F in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e la (20.2) il suo inverso F^{-1} . Dalla (20.2) segue quel che nella sezione 11.1 abbiamo chiamato *relazione di reciprocità*:

$$F^{-1} = \mathcal{S}F, \quad (20.3)$$

dove \mathcal{S} è l'inversione di parità, $\mathcal{S}f(x) = f(-x)$. Da questa relazione, seguono due identità interessanti

$$F^2 = \mathcal{S}, \quad F^4 = I \quad (20.4)$$

Dove I è l'operatore identità.

Nel capitolo 11 abbiamo inoltre dimostrato l'identità di Parseval-Plancherel. Se in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si introduce il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx, \quad (20.5)$$

In questo capitolo lavoriamo con la convenzione ③ per la trasformata di Fourier.

Un operatore A è detto lineare se

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag.$$

l'identità di Parseval-Plancherel (11.4) può essere riscritta come

$$\langle f | g \rangle = \langle Ff | Fg \rangle . \quad (20.6)$$

Questa equazione stabilisce che F conserva gli "angoli" tra vettori e, poiché per $f = g$ diventa

$$\langle f | f \rangle = \|f\|^2 = \langle Ff | Ff \rangle = \|Ff\|^2 , \quad (20.7)$$

stabilisce anche che la lunghezza dei vettori in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è conservata. In breve, F è un operatore unitario in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

È importante sottolineare che $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con prodotto scalare (20.5) NON è uno spazio di Hilbert, ma soltanto uno spazio pre-hilbertiano: ci sono successioni di Cauchy nella norma indotta da (20.5) che non convergono in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Uno degli scopi di questo capitolo è mostrare che F si estende univocamente ad un operatore unitario in $L^2(\mathbb{R})$.

Questo obiettivo può essere raggiunto direttamente, dimostrando il teorema noto come *teorema di Plancherel*, che stabilisce appunto questo fatto, oppure indirettamente, seguendo una strada più tortuosa, ma, per molti versi più illuminante. Questo è quello che faremo. Seguendo questa strada avremo modo di incontrare alcuni metodi matematici della meccanica quantistica.

In primo luogo, vogliamo chiarire che F è unitario nello stesso senso in cui lo sono gli operatori nel caso finito-dimensionale, vale cioè l'uguaglianza

$$F^* = F^{-1} , \quad (20.8)$$

dove F^* è l'aggiunto di F . Ma che cos'è l'aggiunto di un operatore?

Nel caso finito-dimensionale, l'aggiunto di un operatore A può essere caratterizzato in termini della matrice $[A]$ che rappresenta A (rispetto ad una base ortonormale arbitrariamente scelta) nel seguente modo: gli elementi di matrice di A^* sono ottenuti da quelli di A , trasponendo la matrice e prendendone il complesso coniugato:

$$[A^*]_{ij} = \overline{[A]_{ji}} .$$

Una caratterizzazione equivalente, ma indipendente dalla scelta di una base, è la seguente: A^* è quell'operatore tale che

$$\langle A^* \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} | A \mathbf{u} \rangle$$

per tutti i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} in \mathcal{H} . È questa la caratterizzazione che si estende naturalmente al caso infinito-dimensionale.

Nel nostro caso, F^* è dunque definito dal requisito che

$$\langle F^* f | g \rangle = \langle f | Fg \rangle , \quad (20.9)$$

valga per tutte le funzioni f e g in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sviluppriamo il secondo membro della (20.9):

$$\begin{aligned}\langle f | Fg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-ixy} dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx \right]} g(y) dy,\end{aligned}$$

da cui

$$F^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ixy} dy = (Ff)(-x) = \mathcal{S}Ff(x). \quad (20.10)$$

Dunque, $F^* = \mathcal{S}F$. Perciò, ricordando la (20.3), risulta verificato che $F^* = F^{-1}$.

20.2 Operatori su funzioni buone

Consideriamo l'operatore Q che moltiplica una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ per il suo argomento,

$$Qf(x) = xf(x). \quad (20.11)$$

Per esempio, se $f(x) = e^{-x^2}$, allora $Qf = xe^{-x^2}$ o se $g(k) = e^{-k^4}$, allora $Qg(k) = ke^{-k^4}$. Poiché le funzioni buone sono a decrescenza rapida (decregono più rapidamente di qualunque potenza negativa di x), se f è buona, anche Qf lo è. Chiaramente, Q è un operatore lineare.

La (20.12) permette di definire gli operatori "potenza n -esima di Q " nel modo seguente:

$$Q^n f(x) = x^n f(x). \quad (20.12)$$

Si osservi che Q^n è ben definito in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sempre in virtù della decrescenza rapida delle funzioni buone. Con la stessa regola e per la stessa ragione, risulta ben definito $P_N(Q)$, dove $P_N(x)$ è un polinomio di grado N . Anche $h(Q)$, dove h è una funzione *abbastanza buona* è ben definito, infatti se si definisce

$$\phi(Q)f(x) = \phi(x)f(x) \quad (20.13)$$

$\phi(x)f(x)$ è ancora in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ perché, come si è visto nel capitolo 10, il prodotto di una funzione buona con una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona. Ricordiamo che $\phi(x)$ è abbastanza buona se $\phi(x)$ e le sue derivate crescono all'infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di $|x|$. Per esempio $\phi(x) = e^{iax}$ è abbastanza buona, quindi l'operatore e^{iaQ} è ben definito in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Quando un operatore B è nella forma (20.13), si dice che è in *forma diagonale*. Questo è l'analogo infinito-dimensionale dell'operatore

finito-dimensionale B definito da una matrice diagonale $[B]_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, la cui azione su un generico vettore $\mathbf{u} = (u_i)$ è

$$[B\mathbf{u}]_i = \lambda_i v_i \quad (20.14)$$

Un operatore A è detto *hermitiano* se $A^* = A$. Si verifica facilmente che Q è hermitiano:

$$\langle f | Qg \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} x g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} g(x) dx = \langle Qf | g \rangle.$$

UN ALTRO OPERATORE IMPORTANTE è l'operatore di derivazione rispetto all'argomento della funzione:

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x). \quad (20.15)$$

Poichè le funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sono infinitamente differenziabili con derivate a decrescenza rapida, se f è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, anche Df è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Un operatore A è detto *anti-hermitiano* se $A^* = -A$. Si verifica facilmente che D è anti-hermitiano: mediante integrazione per parti e tenendo conto dell'annullamento all'infinito delle funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ottiene

$$\begin{aligned} \langle f | Dg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g'(x) dx = f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f'(x)} g(x) dx \\ &= -\langle Df | g \rangle. \end{aligned}$$

Se A è anti-hermitiano, allora iA e $-iA$ sono hermitiani, infatti: $(iA)^* = -iA^* = iA$. Poiché è comodo lavorare con operatori hermitiani, si introduce l'operatore $P = -iD$, che fornisce una rappresentazione equivalente dell'operazione di derivazione D .

Quando un operatore hermitiano finito-dimensionale A , rappresentato dalla matrice $[A]_{ij}$, non è in forma diagonale, esiste sempre, per il teorema spettrale, un operatore unitario U che lo trasforma in un operatore B nella forma diagonale (20.14),

$$B = UAU^{-1}.$$

L'operatore hermitiano P non è in forma diagonale, ma è facilmente diagonalizzabile. In effetti, abbiamo già ottenuto questo risultato, anche se non abbiamo usato questa terminologia. Nella sezione 11.7 abbiamo visto che la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nella moltiplicazione per l'argomento. Riproduciamo qui il digramma usato in quella sezione con le notazioni e convenzioni di questo capitolo:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{D} & Df \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ Ff & \xrightarrow{iQ} & iQf \end{array}$$

Questo significa $FD = iQF$, cioè $FD F^{-1} = iQ$. In termini dell'operatore $P = -iD$, questa identità diventa

$$FPF^{-1} = Q \quad (20.16)$$

La trasformata di Fourier è dunque l'operatore unitario che diagonalizza l'operatore P .

Dalla (20.16) segue che $P = F^{-1}QF$. Si può allora definire $\phi(P)$, per ϕ buona, nel seguente modo:

$$\phi(P) = F^{-1}\phi(Q)F,$$

avendo già chiarito che cosa è una funzione di Q . Questa definizione è consistente con le potenze intere di P , che sono direttamente definite in termini di P : ad esempio, per $\phi(P) = P^2$ si ha

$$P^2 = F^{-1}Q^2F = F^{-1}QFF^{-1}QF = P^2$$

Si osservi che, dalla relazione di reciprocità (20.3) si ottiene $FQF^{-1} = -P$, il che rende la coppia Q, P una sorta di "coppia canonica" nel senso della meccanica Hamiltoniana, per cui valgono le relazioni

$$Q = FPF^{-1} \quad (20.17)$$

$$P = -FQF^{-1} \quad (20.18)$$

Verifichiamone la consistenza: $Q = FPF^{-1} = -FFQF^{-1}F^{-1} = -F^2Q(F^2)^{-1} = -\mathcal{I}Q\mathcal{I} = Q$, avendo usato la (20.4).¹

GLI OPERATORI P E Q sono i mattoni di base per costruire operatori più complicati come

$$QPQ, \quad PQ, \quad P^2 + Q^2, \quad Q^3 + PQ^2, \dots$$

Alcuni di questi sono hermitiani e altri no. Per esempio, QPQ è hermitiano in quanto $(QPQ)^* = Q^*P^*Q^* = QPQ$, ma PQ non lo è, essendo $(PQ)^* = Q^*P^* = QP \neq PQ$. Nella manipolazione algebrica di questi prodotti, è utile usare la *relazione di commutazione*

$$QP - PQ = iI \quad (20.19)$$

dove I è l'operatore identità in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nell'ambiente quantistico, la (20.19) è nota come *relazione di commutazione* e si dimostra facilmente a partire dalle definizioni di Q e P come operatori in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (esercizio).

UNA SCELTA EQUIVALENTE di mattoni di base per costruire operatori più complicati è data dagli operatori

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q + iP] = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q + D] \quad (20.20)$$

$$a^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q - iP] = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q - D] \quad (20.21)$$

Intendiamo la trasformazione in meccanica hamiltoniana

$$p \rightarrow q \quad q \rightarrow -p,$$

che lascia invariata la forma delle equazioni di Hamilton, ed è quindi canonica.

¹ Esplicitamente: $\mathcal{I}Q\mathcal{I}$ applicato a f significa: 1) trasforma f in $f(-x)$, 2) applica Q a $f(-x)$ e ottieni $xf(-x)$, 3) applica \mathcal{I} e ottieni $-xf(x)$. Il risultato finale è $-Qf$. Poichè davanti c'era un segno meno, si ottiene Q .

Si osservi che:

$$(ABC\dots)^* = \dots C^*B^*A^*$$

Si verifica facilmente che per questi operatori vale la relazione di commutazione

$$aa^* - a^*a = 1 \quad (20.22)$$

e che la trasformata di Fourier agisce moltiplicativamente su di essi:

$$FaF^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [FQF^{-1} + iFPF^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-P + iQ] = ia \quad (20.23)$$

$$Fa^*F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [FQF^{-1} - iFPF^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-P - iQ] = -ia^* \quad (20.24)$$

20.3 Le funzioni di Hermite

La funzione $e^{-x^2/2}$ è particolarmente interessante perché è una funzione buona che è autovettore di a con autovalore 0. Infatti,

$$a[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[xe^{-x^2/2} + (e^{-x^2/2})' \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [xe^{-x^2/2} - xe^{-x^2/2}] = 0$$

La funzione $e^{-x^2/2}$ non ha norma 1, ma il quadrato della sua norma è

$$\int_{-\infty}^{\infty} [e^{-x^2/2}]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

e quindi la corrispondente funzione normalizzata è

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2} \quad (20.25)$$

e, per quanto visto sopra,

$$a\phi_0 = 0. \quad (20.26)$$

Consideriamo adesso

$$\phi_n(x) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.27)$$

Queste funzioni sono dette *funzioni di Hermite*. Dal corso di meccanica quantistica dovrebbe essere noto che queste funzioni formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare (20.5).

Per calcolo esplicito si mostra che la caratterizzazione (20.27) delle funzioni di Hermite è equivalente alla definizione tradizionale:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (20.28)$$

dove $H_n(x)$ sono i polinomi di Hermite, così definiti

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}$$

Ecco i primi cinque:

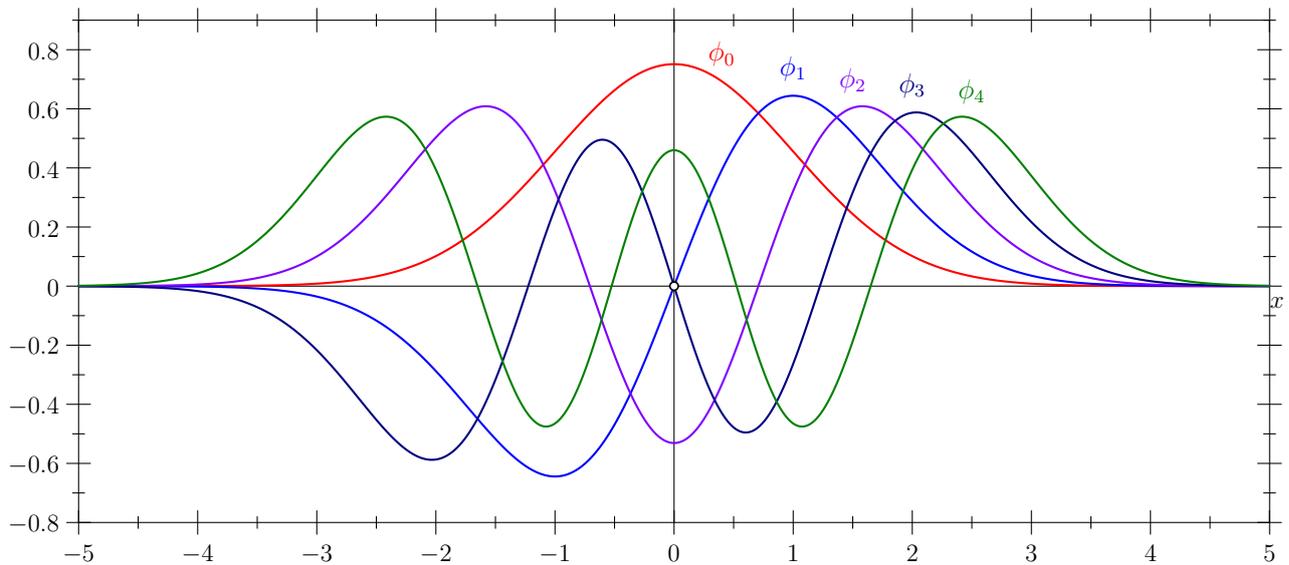
$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 4x^2 - 2$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x$$

$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$$



Studiamo adesso le proprietà delle funzioni di Hermite rispetto alla trasformata di Fourier. Essendo lisce, ed avendo un decadimento esponenziale all'infinito, le ϕ_n sono funzioni buone; essendo buone, la loro trasformata di Fourier è ben definita.

Incominciamo con l'osservare che ϕ_0 è un autovettore di F con autovalore 1, cioè $F\phi_0 = \phi_0$. Infatti,

$$F[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} e^{-x^2/(4(1/2))} = e^{-x^2/2}$$

Ricordando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-y^2/(4a)}$$

Anche le funzioni ϕ_n per $n \geq 1$ sono autovettori di F . Poiché $F^4 = I$ ci aspettiamo che gli autovalori di F siano radici quarte dell'unità, cioè $1, i = e^{i\pi/2}, -1 = e^{i2\pi/2}, -i = e^{i3\pi/2}$.

Per verificare questo fatto, calcoliamo $F\phi_n$:

$$F \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} F a^* F^{-1} F \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} F a^* F^{-1} \phi_0$$

Nel primo passaggio abbiamo inserito l'identità $I = F^{-1}F$ e nel secondo abbiamo usato il fatto che $F\phi_0 = \phi_0$. Osserviamo adesso che

$$F a^* F^{-1} = F a^* F^{-1} F a^* F^{-1} \dots = (F a^* F^{-1})^n$$

e che, per la (20.24), $Fa^*F^{-1} = (-i)a^*$, Ne concludiamo che

$$Fa^{*n}F^{-1}\phi_0 = (-i)^n a^{*n}\phi_0,$$

da cui

$$F\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(-i)^n a^{*n}\phi_0 = (-i)^n\phi_n \quad (20.29)$$

Abbiamo così dimostrato che le funzioni ϕ_n sono autovettori di F con autovalori $(-i)^n = e^{-in\pi/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

20.4 Completezza del sistema delle funzioni di Hermite

Stabilire che un insieme di vettori forma un sistema ortonormale non vuol dire stabilire che è una base. Perché sia una base occorre che il sistema sia completo. In effetti è così, e vale il teorema: *Le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale completo in $L^2(\mathbb{R})$.*

La dimostrazione di questo teorema è particolarmente istruttiva perché è un punto d'incontro tra analisi complessa, spazi funzionali e trasformata di Fourier.

La proposizione (17.16) del capitolo 17 stabilisce che un sistema ortogonale è completo se e solo se è chiuso. E un sistema ortogonale è chiuso se non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema. In altre parole, un sistema $\{\mathbf{e}_n\}$ è chiuso se dalle relazioni

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

segue che $\mathbf{u} = 0$. Adesso vogliamo mostrare che le funzioni di Hermite sono un sistema ortogonale chiuso in $L^2(\mathbb{R})$. A tal fine, data la (20.28), è sufficiente mostrare che se

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

allora $f(x)$ deve essere la funzione nulla.

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) e^{-izx} dx$$

come funzione della variabile complessa z . L'integrale converge assolutamente e uniformemente in ogni regione finita del piano complesso. Quindi $F(z)$ non ha singolarità e deve essere una funzione intera. In altre parole, possiamo rappresentare $F(z)$ in serie di potenze,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

e il raggio di convergenza della serie deve essere infinito. Allora

$$c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0$$

per ipotesi. Ne segue che

$$F(z) = 0$$

Poiché in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier inversa della funzione nulla è nulla si ha

$$e^{-x^2/2} x^n f(x) = 0 \implies f(x) = 0,$$

che è proprio quel che occorre dimostrare per dimostrare che le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale chiuso.

In conclusione, le funzioni di Hermite formano una *base ortonormale* in $L^2(\mathbb{R})$. Risulta così stabilita l'equivalenza unitaria di $L^2(\mathbb{R})$ e ℓ^2 nello stesso senso in cui nella sezione 18.6 si era stabilita l'equivalenza unitaria tra $L^2(\mathbb{T})$ e ℓ^2 . Come conseguenza di questo, vale un diagramma analogo a quello visto in quella sezione:

$$\begin{array}{ccc} f \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{U_\phi} & \{\langle \phi_n | f \rangle\} \in \ell^2 \\ \sum c_n \phi_n \in L^2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{U_\phi^{-1}} & \{c_n\} \in \ell^2 \end{array}$$

Le funzioni di Hermite sono dunque una base per un'analisi di Fourier generalizzata di una funzione f in $L^2(\mathbb{R})$; i coefficienti $c_n = \langle \phi_n | f \rangle$ sono le sue *coordinate di Hermite*.

20.5 Trasformata di Fourier di funzioni a quadrato integrabile

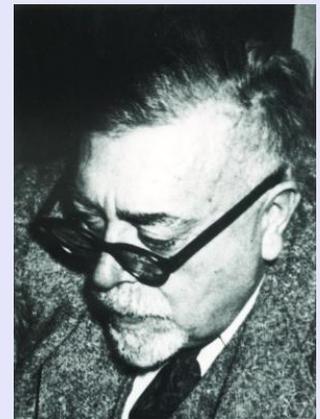
La trasformata di Fourier F si estende da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ad un operatore unitario in $L^2(\mathbb{R})$. Questo è un risultato che Norbert Wiener ottenne negli anni 30 del secolo scorso (finalmente un po' di matematica del 900!). Ecco le tappe della dimostrazione:

- Il sistema delle funzioni di Hermite $\{\phi_n\}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ è una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$ (dimostrato nella sezione precedente).
- Quindi qualunque funzione in $L^2(\mathbb{R})$ può essere decomposta nella base $\{\phi_n\}$:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

- La (20.29) fornisce l'azione di F sui vettori della base $\{\phi_n\}$:

$$F\phi_n = (-i)^n \phi_n = e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n$$



Norbert Wiener (1894–1964) è stato un matematico americano. Bambino prodigo, divenne poi un matematico che contribuì significativamente allo sviluppo della matematica applicata nel XX secolo (dalla teoria dei processi stocastici all'ingegneria elettronica e delle telecomunicazioni). È il padre della cibernetica e della teoria del controllo; è sua la formalizzazione della nozione di feed-back. In fisica teorica è noto per la misura di Wiener, che si applica alla teoria del moto browniano e alla integrazione lungo cammini di Feynman.

(d) Quindi F può essere estesa per linearità a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$:

$$Ff = F \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (F\phi_n) \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle$$

Fine. (La dimostrazione appare molto semplice perché tutti i passi sono già stati fatti nelle sezioni precedenti).

Risulta così stabilita l'identità di Parseval-Plancherel per tutte le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$. E risulta così anche stabilito il seguente sviluppo in serie dell'integrale di Fourier:

$$Ff(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(k) e^{-ni\frac{\pi}{2}} \quad \text{dove } c_n = \langle \phi_n | f \rangle$$

20.6 L'oscillatore armonico quantistico

Consideriamo l'azione dell'operatore $N = a^*a$ sulle funzioni di Hermite $\phi_n = (1/\sqrt{n!})(a^*)^n \phi_0$. Usando la relazione di commutazione, si dimostra che (esercizio)

$$N\phi_n = a^*a\phi_n = n\phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Quindi, ricordando il caso finito dimensionale, N risulta diagonale nella base formata dalle funzioni di Hermite e quindi possiamo scrivere

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

È importante aver chiaro che N NON è definito su tutto $L^2(\mathbb{R})$: la sua azione su una funzione f con coordinate di Hermite $c_n = \langle \phi_n | f \rangle$ è

$$Nf = \sum_{n=0}^{\infty} n \phi_n \langle \phi_n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \phi_n,$$

da cui si vede che se i c_n formano una successione in ℓ^2 , non è detto la successione $\{n c_n\}$ delle coordinate di Hermite di Nf sia in ℓ^2 , perché non è detto che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

converga. La sua convergenza dipende dall'andamento all'infinito delle coordinate c_n . Analogamente a quanto visto per le serie di Fourier, si può mostrare che se f è buona, cioè è a decrescenza rapida, le sue coordinate di Hermite decadono esponenzialmente. Quindi N è sicuramente ben definito per funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (naturalmente, basta molto meno: è sufficiente un decadimento che bilanci n^2 , ad esempio $|c_n| \sim 1/n^2$ va bene).

Così come non sono definiti su $L^2(\mathbb{R})$ né Q né P . Gli operatori N , P e Q sono esempi di operatori non continui o illimitati, che possono essere definiti solo su un dominio strettamente contenuto in L^2 . La teoria degli operatori di questo tipo, in particolare lo studio della loro hermiticità (o auto-aggiuntezza) è particolarmente difficile e richiede molta cura e competenza matematica.

Abbiamo già ricordato che nel caso finito-dimensionale, quando una matrice hermitiana è in forma diagonale $A = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$, la funzione $h(A)$ della matrice è definita da $h(A) = \sum_n h(\lambda_n) |e_n\rangle\langle e_n|$. La stessa definizione si applica al caso infinito-dimensionale. Possiamo quindi considerare $h(N)$, ad esempio per $h(x) = e^{-itx}$, dove t è un numero reale. Allora risulta definito

$$U_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-itN} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|. \quad (20.30)$$

Questo operatore è estendibile a tutto $L^2(\mathbb{R})$. Infatti,

$$U_t f = e^{-itN} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} \phi_n \langle\phi_n|f\rangle \quad (20.31)$$

e la successione $\{e^{-int} \phi_n \langle\phi_n|f\rangle\}$ è in ℓ_2 se la successione delle coordinate di Hermite $c_n = \langle\phi_n|f\rangle$ è in ℓ_2 perchè $|e^{-int} c_n| = |c_n|$.

In conclusione, osserviamo che la (20.31) fornisce la soluzione $f(x, t)$ dell'equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico quantistico per condizione iniziale $f(x, 0) = f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$. Infatti, sviluppando $N = a^*a$ si ottiene

$$N = \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \left(x + \frac{d}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right]$$

che è proprio l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico quantistico, con tutte le costanti fisiche poste uguali a 1 e a cui è stata sottratta l'energia $1/2$ dello stato fondamentale (che può quindi essere facilmente aggiunta). Inoltre, per $t = \pi/2$, la (20.31) fornisce la trasformata di Fourier di f .

ESERCIZIO. Dimostrare che $U_t = e^{-itN}$ è un operatore unitario in $L^2(\mathbb{R})$.

20.7 La trasformata di Fourier frazionaria

Alla fine della sezione precedente siamo giunti ad una conclusione inaspettata: la trasformata di Fourier F non è altro che l'evoluzione temporale dell'oscillatore armonico quantistico calcolata dopo un quarto di periodo:

$$U_{\frac{\pi}{2}} f = e^{-i\frac{\pi}{2}N} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n \langle\phi_n|f\rangle = Ff$$

Se potessimo superare tutti i problemi legati alla difficoltà di codificare, manipolare e recuperare l'informazione contenuta nello stato di un sistema quantistico (oggetto di studio della computazione quantistica), avremmo un sistema fisico concreto per fare trasformate

di Fourier: basterebbe preparare un oscillatore armonico nello stato iniziale f e leggere lo stato del sistema dopo un tempo pari ad un quarto di periodo e avere così la trasformata di Fourier di f . Tutto ciò è molto irrealistico. Inoltre, abbiamo già molti sistemi fisici (ottici soprattutto) che come effetto della loro evoluzione temporale producono la trasformata di Fourier del dato iniziale. Sia come sia, questo legame tra oscillatore armonico quantistico e trasformata di Fourier è interessante. Nasce spontanea la domanda: *che cosa ha di speciale un quarto di periodo? Perché non un ottavo o tre quinti?*

Motivati da questa domanda (a cui, peraltro, non saprei come rispondere), alcuni ricercatori, nelle ultime decine d'anni (finalmente matematica del 2000!), si sono posti il problema di studiare trasformate di Fourier frazionarie

$$F^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\alpha} \phi_n \langle \phi_n | f \rangle.$$

dove α è un numero reale, e di applicare tali trasformate allo studio dei segnali per migliorare le tecniche tradizionali di analisi. Non conosco abbastanza la materia per dire se questo sia uno sviluppo interessante e utile dell'analisi armonica classica. La letteratura al riguardo (articoli e libri) è in crescita (ma questo al giorno d'oggi non vuol dire, di per sé, un granché). Sia come sia, l'analisi frazionaria dà una descrizione del segnale in domini intermedi tra il puro dominio temporale e quello in frequenza. La figura 20.1 (presa da Wikipedia) riproduce l'analisi frazionaria di Fourier della funzione di "scatola" per diversi valori di α .

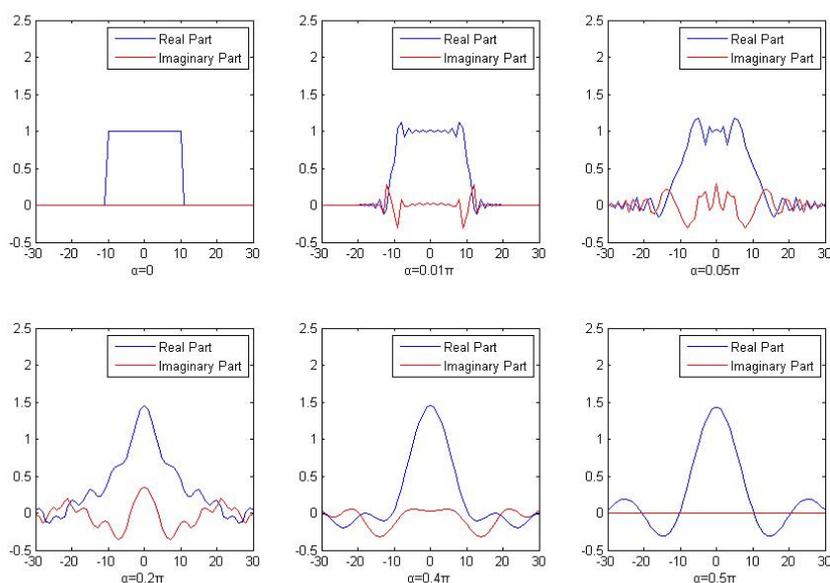


Figura 20.1: Trasformata di Fourier frazionaria per diversi valori di α . La prima figura è la scatola, ($\alpha = 0$), l'ultima è la sinc ($\alpha = \pi/2$), che è la trasformata di Fourier tradizionale della scatola; per valori di α tra 0 e $\pi/2$, ci sono rappresentazioni intermedie del segnale tra la scatola e la sinc. Si osservi che la figura può anche essere vista come una successione di fotogrammi dell'evoluzione temporale della funzione d'onda dell'oscillatore armonico quantistico, con funzione d'onda iniziale "scatola", tra il tempo $t = 0$ e il tempo uguale a $\pi/2$ (un quarto di periodo).