

## 21

### Complementi sulla trasformata di Fourier\*

\* Non in programma.

#### 21.1 Proprietà di analiticità della trasformata di Fourier

Vogliamo occuparci delle proprietà di analiticità della trasformata di Fourier, approfondendo alcuni temi introdotti nella sezione 13.5. Come nella sezione 13.5, in questo capitolo useremo la convenzione ② per la trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (21.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (21.2)$$

Si osservi anche lo scambio di segni degli esponenziali nella definizione della trasformata e nella formula di inversione, nonché l'uso delle variabili  $\omega$  e  $t$ . Abbiamo in mente applicazioni a segnali dipendenti dal tempo e ad analisi in frequenza degli stessi.

Consideriamo il continuamento analitico di  $\hat{f}(\omega)$  nel piano complesso  $z = \omega + i\sigma$  ad una funzione

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt} dt$$

tale che

$$g(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.$$

Frequentemente,  $\hat{f}(\omega)$  può essere estesa ad una funzione che è analitica in una certa regione del piano. Per esempio, se  $f(t) = e^{-|t|}$  allora

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

che si estende alla funzione meromorfa

$$g(z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Questo non dovrebbe sorprendere più di tanto: per ogni reale  $t$ , la funzione  $e^{itz}$  che compare sotto il segno di integrale è una funzione

intera, e quindi ci sia aspetta che ci siano delle condizioni su  $f$  per cui  $\widehat{f}$  sarà analitica in certe regioni del piano complesso. Considereremo due classi di funzioni analitiche che emergono in questo modo e che giocano un ruolo importante in fisica.

Una funzione causale  $f(t)$  è una qualunque funzione in  $L^2(-\infty, \infty)$  che si annulla in  $(-\infty, 0)$ . Sia

$$\widehat{g}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad \text{per } z \in \Pi^+ \quad (21.3)$$

dove  $\Pi^+$  è il semipiano superiore del piano delle frequenze complesse, cioè l'insieme di tutte le  $z = \omega + i\sigma$  tali che  $\sigma > 0$ . Se  $z \in \Pi^+$  allora

$$|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$$

il che mostra che l'integrale (21.3) è convergente. La continuità di  $\widehat{g}(z)$  è facilmente verificata. E altrettanto facilmente si verifica l'analiticità, fatto che abbiamo già stabilito nella sezione 13.5.

Riscriviamo (21.3) nella forma

$$\widehat{g}(\omega + i\sigma) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt \quad (21.4)$$

e consideriamo  $\sigma$  come fissato. Allora  $\widehat{g}(z)$  è la trasformata di Fourier della funzione  $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ , cioè

$$\widehat{g}(z) = \widehat{f}_\sigma(\omega) \quad \text{per } f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad \text{e } z = \omega + i\sigma \quad (21.5)$$

Applichiamo l'identità di Parseval-Plancherel a  $f_\sigma(t)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

per ogni  $\sigma > 0$ . Questo mostra

**Proposizione 21.1.** *Se*

$$\widehat{g}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt \quad \text{per } z \in \Pi^+$$

*allora  $\widehat{g}(z)$  è analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e le sue restrizioni a linee orizzontali in  $\Pi^+$  formano un insieme limitato in  $L^2(-\infty, \infty)$ .*

La seconda classe di trasformate di Fourier analitiche consiste in tutte le funzioni della forma

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

dove  $0 < T < \infty$  e  $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ . Queste funzioni sono intere (stessa dimostrazione di prima) e soddisfano la condizione di crescita

$$|\widehat{g}(z)| \leq \int_{-T}^T |f(t)| e^{-\sigma} dt \leq e^{T|\sigma|} \int_{-T}^T |f(t)| dt$$

Funzioni intere che soddisfano questa condizione di crescita sono dette di *ordine esponenziale*. Se  $C$  è la costante che denota l'ultimo integrale dell'equazione precedente, la condizione di crescita implica che

$$|\widehat{g}(z)| \leq Ce^{T|z|}. \quad (21.6)$$

**Proposizione 21.2.** *Se  $\widehat{g}(z)$  è una funzione della forma*

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

*allora è una funzione intera che soddisfa (21.6) e le sue restrizioni a linee orizzontali nel piano complesso sono in  $L^2(-\infty, \infty)$  (per il teorema di Plancherel).*

### 21.2 Teoremi di Paley-Wiener

È un fatto notevole che valgono gli inversi delle proposizioni 1 e 2. I teoremi che stabiliscono questo fatto sono noti come teoremi di Paley-Wiener. Ci limitiamo ad enunciare questi teoremi senza darne una dimostrazione.

**Teorema 1.** *Si supponga che  $\widehat{g}(z)$  sia una funzione analitica nel semipiano superiore  $\Pi^+$  e che*

$$\sup_{0 < \sigma < \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = C < \infty$$

*Allora esiste una funzione  $f(t)$  in  $L^2(0, \infty)$  tale che*

$$f(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt$$

e

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = C$$

**Teorema 2.** *Si supponga che  $T$  e  $C$  siano costanti positive e che  $\widehat{g}(z)$  sia una funzione intera tale che*

$$|\widehat{g}(z)| \leq Ce^{T|z|}$$

*per tutti  $z = \omega + i\sigma \in \mathbb{C}$  e che*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

*Allora esiste una funzione  $f(t)$  in  $L^2(0, \infty)$  tale che*

$$\widehat{g}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

## 21.3 Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon

Un segnale è detto a *banda limitata* se  $\widehat{f}(\omega)$  è assolutamente integrabile e se esiste una frequenza  $\Omega > 0$  tale che  $\widehat{f}(\omega) = 0$  per tutti gli  $|\omega| > \Omega$ . La frequenza  $\Omega$  è chiamata *larghezza di banda*. Un segnale di questo tipo è allora dato da

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

Naturalmente, poiché non importano i nomi delle variabili, si applicano le stesse considerazioni che abbiamo fatto prima. La funzione  $f(t)$  può essere estesa ad una funzione  $f(\zeta)$  nel piano complesso (adesso del tempo) che è analitica e intera (per le stesse ragioni di prima). Anche  $f(\zeta)$  è di ordine esponenziale, nel senso che la sua condizione di crescita è

$$|f(\zeta)| \leq e^{\Omega |\operatorname{Im}\zeta|} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\widehat{f}(\omega)| d\omega$$

per tutti  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

L'analiticità dei segnali a banda limitata ha conseguenze singolari. Una è il risultato contro-intuitivo che la conoscenza del segnale  $f(t)$  in un breve intervallo di tempo  $[a, b]$ , *arbitrariamente piccolo*, sull'asse reale, determina i suoi valori a tutti i tempi. Questa è una conseguenza dell'unicità del prolungamento analitico delle funzioni analitiche.

Ecco un paradosso. È una pratica sperimentale standard che non si possono generare onde di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola. Quindi tutti i segnali generati in laboratorio sono a banda limitata. È altresì una pratica sperimentale standard che non ci sono segnali che si estendono infinitamente lontano nel passato. Quindi c'è un  $T > 0$  tale che  $f(t) = 0$  quando  $t$  è reale e  $t < -T$ . Queste due pratiche sperimentali standard implicano che i segnali sono funzioni analitiche intere che si annullano nell'intervallo  $(-\infty, -T) \subset \mathbb{R}$ . L'unicità del continuamento analitico implica che tutti i segnali di questo tipo debbano essere identicamente nulli. Perciò il solo segnale che soddisfa la pratica sperimentale standard è  $f(t) = 0$ ! La risoluzione di questo paradosso è che mentre è vero che in laboratorio si può controllare lo spettro in una banda limitata  $-\Omega < \omega < \Omega$ , si creano in ogni caso, indipendentemente dal nostro controllo, frequenze fuori da questa banda.

Uno dei teoremi più interessanti e antichi per i segnali a banda limitata stabilisce che il segnale può essere recuperato progressivamente mediante un campionamento ad intervalli di tempo regolari. Questo fatto fu scoperto da Whittaker nel 1915 e riscoperto da Shannon nel 1949. Enunciamo (una versione di) questo teorema senza

darne la dimostrazione. Prima ricordiamo la definizione della sinc.

Sia

$$\operatorname{sinc}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

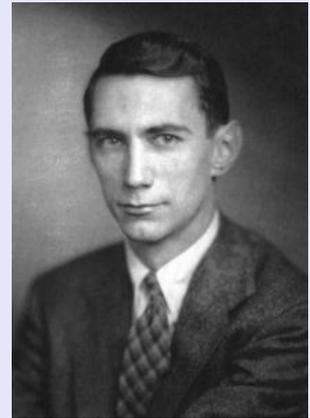
la funzione *sinc*. Per  $t = 0$  il valore della *sinc* è definito pari a 1. Ed ecco il teorema:

**Teorema 3** (Whittaker, Shannon). *Sia  $f(t)$  un segnale a banda limitata con larghezza di banda  $\Omega$  e sia*

$$L < \frac{\pi}{\Omega}.$$

*Allora  $f$  può essere ricostruita da un campionamento dei suoi valori ai tempi  $\{nL, n \in \mathbb{Z}\}$  come la serie convergente*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nL}{L}\right) f(nL)$$



Claude Shannon (1916–2001) è stato un matematico americano. È riconosciuto come il padre della teoria dell'informazione, dove, importandola dalla fisica, introdusse la nozione di entropia come misura della quantità di informazione. Nella sua tesi del 1937, a 21 anni, gettò le basi per la costruzione di un computer digitale, dimostrando che con l'implementazione elettrica dell'algebra booleana si poteva risolvere qualunque relazione logica e numerica. Durante la seconda guerra mondiale, contribuì anche notevolmente allo sviluppo della crittografia. In questo, il suo lavoro fu parallelo a quello svolto nello stesso periodo dal matematico inglese Alan Turing sull'altra sponda dell'oceano Atlantico.